Πραγματική Ανάλυση

Ανώτερα και Κατώτερα Όρια Ακολουθίας:
Υπολογισμός

Σταύρος Αναστασίου

Η σχέση του ανώτερου και του κατώτερου ορίου μιας φραγμένης ακολουθίας δίνεται από την επόμενη:

Πρόταση 1. *Έστω a_n φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε:*

$$\liminf a_n \leq \limsup a_n.$$

Απόδειξη. Εάν K είναι το σύνολο των οριακών σημείων της ακολουθίας, τότε:

$$\liminf a_n = \min K \leq \max K = \limsup a_n.$$

$\square$

Συχνά, για να μελετήσουμε το ανώτερο και κατώτερο όριο μιας ακολουθίας, την γράφουμε ως άθροισμα δύο άλλων ακολουθιών. Οι σχέσεις μεταξύ των επί μέρους ανώτερων και κατώτερων ορίων δίνονται στην επόμενη:

Πρόταση 2. *Έστω a_n, b_n δύο φραγμένες ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Είναι:*

$$\liminf a_n + \liminf b_n \leq \liminf(a_n + b_n) \leq \limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n.$$

Απόδειξη. Έστω $k \geq 1$. Τότε, $\forall j \geq k$, είναι:

$$\inf_{n \geq k} a_n + \inf_{n \geq k} b_n \leq a_j + b_j \leq \sup_{n \geq k} a_n + \sup_{n \geq k} b_n.$$

Από τις παραπάνω ανισότητες, έχουμε ότι:

$$\inf_{n \geq k} a_n + \inf_{n \geq k} b_n \leq \inf_{n \geq k}(a_n + b_n)$$

και:

$$\sup_{n \geq k}(a_n + b_n) \leq \sup_{n \geq k} a_n + \sup_{n \geq k} b_n.$$

Θεωρώντας το όριο, για $k \to +\infty$, προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

Εάν, γράφοντας μια ακολουθία ως άθροισμα δύο άλλων ακολουθιών, μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο ενός από τους δύο προσθετέους, τότε η εύρεση του ανώτερου και του κατώτερου ορίου απλοποιείται.

Πρόταση 3. *Έστω a_n, b_n δύο φραγμένες ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Αν η b_n συγκλίνει στο b, τότε:*

- $\limsup(a_n + b_n) = \limsup a_n + b$
- $\liminf(a_n + b_n) = \liminf a_n + b$

Απόδειξη. Για να δείξουμε την πρώτη ισότητα, παρατηρούμε ότι:

$$\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n = \limsup a_n + b. \ (*)$$

Επίσης:

$$\limsup a_n = \limsup(a_n + b_n - b_n) \leq \limsup(a_n + b_n) + \limsup(-b_n) = \limsup(a_n + b_n) - b,$$

οπότε:

$$\limsup a_n + b \leq \limsup(a_n + b_n). \ (**)$$

Από τις ανισότητες $(*)$ και $(**)$ προκύπτει το ζητούμενο.

Η δεύτερη ισότητα αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη. □

Κάτι παρόμοιο ισχύει όταν γράφουμε την ακολουθία ως γινόμενο δύο ακολουθιών.

Πρόταση 4. *Έστω a_n, b_n δύο φραγμένες ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Εάν η b_n συγκλίνει στο $b \geq 0$, έχουμε:*

- $\limsup a_n b_n = b \limsup a_n$
- $\liminf a_n b_n = b \liminf a_n$.

Απόδειξη. Δείχνουμε την πρώτη ισότητα.

Έστω ότι $b = 0$. Τότε η ακολουθία $a_n b_n$ συγκλίνει επίσης στο 0 (γιατί;) και η ισότητα αληθεύει.

Έστω τώρα ότι $b > 0$. Αφού $a_n b_n = a_n b + (b_n - b)$, και η ακολουθία $b_n - b$ συγκλίνει στο 0, έπεται ότι:

$$\limsup(a_n b_n) = \limsup(a_n b).$$

Όμως, $b > 0$, άρα:

$$\sup_{n \geq k}(a_n b) = b \sup_{n \geq k} a_n,$$

και ομοίως:

$$\inf_{k \geq 1}(b \sup_{n \geq k} a_n) = b \inf_{k \geq 1} \sup_{n \geq k} a_n,$$

οπότε $\limsup a_n b = b \limsup a_n$.

Η δεύτερη ισότητα αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη. □

Προχωρούμε τώρα στη μελέτη μερικών παραδειγμάτων.

Παραδείγματα 1. *Να βρεθούν, εάν υπάρχουν, τα ανώτερα και κατώτερα όρια των παρακάτω ακολουθιών.*

1. $a_n = (-1)^n$
2. $a_n = n^{\sin\frac{n\pi}{2}}$
3. $a_n = \sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}$
4. $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$

Λύση:

1. *Η ακολουθία αυτή είναι προφανώς φραγμένη. Μάλιστα,* $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in \{-1,1\}$*, δηλαδή τα* $\min,\ \max$ *των τιμών της ακολουθίας είναι* -1 *και* 1 *αντίστοιχα. Εάν βρούμε δύο υπακολουθίες της* a_n *που να συγκλίνουν στα σημεία αυτά, τότε θα έχουμε δείξει ότι τα σημεία αυτά είναι τα ζητούμενα* $\liminf$ *και* $\limsup$.

   Οι δύο αυτές υπακολουθίες είναι οι υπακολουθίες των όρων με περιττούς και άρτιους δείκτες. Έτσι:

   $$\liminf a_n = -1,\ \limsup a_n = 1.$$

   ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: *Με τον ίδιο τρόπο μπορούν να αντιμετωπιστούν όλες οι περιοδικές ακολουθίες.*

2. *Η ακολουθία αυτή περιέχει μόνο θετικούς όρους, άρα είναι κάτω φραγμένη από το* 0. *Δεν είναι όμως άνω φραγμένη (γιατί;). Δηλαδή,* $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in (0,+\infty)$. *Αυτό σημαίνει ότι τα* $\liminf$ *και* $\limsup$ *της ακολουθίας μπορεί να είναι τα* $0,\ +\infty$ *αντίστοιχα.*

   Για να είναι, θα πρέπει να βρούμε δύο υπακολουθίες της a_n *που να τείνουν στα δύο αυτά σημεία. Γράφοντας μερικούς όρους της ακολουθίας παρατηρούμε ότι:*

   - *η υπακολουθία* $a_{k_n},\ k_n = 4n-1,\ n \geq 1$*, τείνει στο* 0 *(να το δείξετε με τον ορισμό!!!)*
   - *η υπακολουθία* $a_{k_n},\ k_n = 4n+1,\ n \geq 0$*, τείναι στο* $+\infty$ *(να το δείξετε με τον ορισμό!!!).*

   Συνεπώς, όντως, $\liminf a_n = 0,\ \limsup a_n = +\infty$.

3. *Η* $\frac{1}{n^2}$ *συγκλίνει στο* 0 *(να το δείξετε με τον ορισμό!!!), ενώ η* $\sin\frac{n\pi}{2}$ *είναι περιοδική και λαμβάνει μόνο τις τιμές* $-1,0,1$. *Άρα* $\liminf a_n = -1$ *και* $\limsup a_n = 1$.

   Παρεμπιπτόντως, μόλις δείξαμε ότι η ακολουθία a_n *δεν συγκλίνει (γιατί;).*

4. *Η ακολουθία αυτή συγκλίνει στο* e*, το οποίο είναι και το* $\limsup$ *και το* $\liminf$ *αυτής.*

Παραδείγματα 2. *Να βρεθούν, εάν υπάρχουν, τα ανώτερα και κατώτερα όρια των παρακάτω ακολουθιών.*

$$(1)\ a_n = \begin{cases} \frac{n}{n+1}, & \text{για } n \text{ περιττό} \\ \frac{1}{n+1}, & \text{για } n \text{ άρτιο} \end{cases} \qquad (2)\ a_n = \begin{cases} 2^{\frac{1}{n}}, & \text{για } n \text{ περιττό} \\ 1, & \text{για } n \text{ άρτιο} \end{cases}$$

Λύση:

1. *Και οι δύο κλάδοι της ακολουθίας φράσσονται από τα σημεία* $0, 1$. *Οπότε, εάν βρούμε δύο υπακολουθίες της που να συγκλίνουν στα δύο αυτά σημεία, έχουμε βρει τα ζητούμενα όρια.*

   Δύο τέτοιες υπακολουθίες όντως υπάρχουν (ποιές είναι;), οπότε:

   $$\limsup a_n = 1,\ \liminf a_n = 0.$$

2. *Ο δεύτερος κλάδος της ακολουθίας είναι σταθερός και ίσος με τη μονάδα. Για τον πρώτο κλάδο της ακολουθίας έχουμε:*

   $$\lim_{k \to +\infty} (\sup\{a_k, a_{k+1} ...\}) = 1,$$

   άρα $\limsup a_n = 1$. *Είναι εύκολο να δείξουμε ότι* $\liminf a_n = 1$ *(οπότε η ακολουθία αυτή συγκλίνει).*