Πραγματική Ανάλυση

Ειδικά Θέματα Σειρών

Σταύρος Αναστασίου

Μερικά κριτήρια σύγκλισης

Εκτός από τα κριτήρια σύγκλισης που αναφέρονται στο βιβλίο [Γ2], θα μας χρειαστούν επίσης τα ακόλουθα.

Πρόταση 1 (Κριτήριο Ολοκληρώματος). *Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής, φθίνουσα και μη αρνητική. Τότε, η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(n)$ συγκλίνει αν, και μόνο αν, η ακολουθία $x_n = \int\limits_0^n f(x)dx$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω s_n η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της σειράς. Αφού η f είναι φθίνουσα, είναι: $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k),\ \forall x \in [k, k+1],\ k \in \mathbb{N}$. Ολοκληρώνοντας ως προς x έχουμε:

$$\int_k^{k+1} f(k+1)dx \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k)dx,$$

άρα:

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k).$$

Αθροίζοντας ως προς k, έχουμε:

$$\sum_{k=0}^{n} f(k+1) \leq \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=0}^{n} f(k),$$

κι έτσι:

$$\sum_{k=0}^{n} f(k+1) \leq \int_0^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=0}^{n} f(k),$$

ή, ισοδύναμα:

$$s_{n+1} - f(0) \leq x_{n+1} \leq s_n.$$

Έτσι, μπορούμε να συμπεράνουμε τα εξής: εάν η σειρά συγκλίνει, τότε η s_n είναι φραγμένη, άρα και η x_n είναι φραγμένη και έτσι συγκλίνει, καθώς είναι αύξουσα. Εάν η x_n συγκλίνει, τότε είναι φραγμένη, άρα είναι και η s_n φραγμένη, επομένως η σειρά συγκλίνει. □

Παράδειγμα 1. *Να εξεταστεί ως προς την σύγκλιση η $\sum\limits_{2}^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$.*

Λύση: Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [2, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x \ln x}$. Δεν είναι δύσκολο να *δείξουμε ότι η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του παραπάνω θεωρήματος, είναι δηλαδή συνεχής, φθίνουσα και μη αρνητική. Ακόμα:*

$$\int_2^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to+\infty}\int_2^a f(x)dx = \lim_{a\to+\infty}[\ln(\ln x)]_2^a = +\infty,$$

οπότε η σειρά αποκλίνει.

Πρόταση 2 (Κριτήριο της ρίζας)**.** *Έστω* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *μια σειρά. Τότε:*

- *εάν* $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *η σειρά συγκλίνει και μάλιστα απολύτως.*
- *εάν* $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, *η σειρά αποκλίνει.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$. Υπάρχει επομένως ένα $\epsilon > 0$ και ένας $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιοι, ώστε:

$$\forall n \geq n_0,\ \ \sqrt[n]{|a_n|} < 1-\epsilon.$$

Έτσι, $0 < |a_n| < (1-\epsilon)^n$. Συνεπώς:

$$0 < \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < \sum_{n=0}^{+\infty} (1-\epsilon)^n,$$

η σειρά στο δεξί μέλος συγκλίνει, ως γεωμετρική, άρα, από το κριτήριο σύγκρισης και η $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ συγκλίνει.

Η απόδειξη για την δεύτερη περίπτωση γίνεται με τον ίδιο τρόπο και αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη. □

Σχόλιο 1. *Το πλεονέκτημα της χρήσης του* $\limsup$ *αντί για το* $\lim$ *στο παραπάνω κριτήριο, έγκειται στο ότι δεν μας απασχολεί η σύγκλιση της ακολουθίας* $\sqrt[n]{|a_n|}$. *Δηλαδή, το παραπάνω κριτήριο μπορεί να αποφανθεί για τη σύγκλιση μιας σειράς ακόμα και στην περίπτωση που το όριο της* $\sqrt[n]{|a_n|}$ *δεν υπάρχει.*

Παράδειγμα 2. *Θεωρούμε την σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, *όπου:*

$$a_n = \begin{cases} 2^{-n}, & \text{εάν } n \text{ άρτιος} \\ 0, & \text{εάν } n \text{ περιττός} \end{cases}.$$

Να εξεταστεί ως προς την σύγκλιση.

Λύση: Εάν επιχειρήσουμε να εφαρμόσουμε την εκδοχή του κριτηρίου της ρίζας που χρησιμοποιεί το $\lim$ *και όχι το* $\limsup$, *βλέπουμε ότι το* $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ *δεν υπάρχει (γιατί;) και έτσι δεν θα καταφέρουμε να βγάλουμε συμπέρασμα για την σύγκλιση της ακολουθίας αυτής.*

Εάν χρησιμοποιήσουμε την εκδοχή του κριτηρίου της ρίζας που αναφέρεται παραπάνω, τότε, επειδή $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 1/2 < 1$ *(γιατί;), μπορούμε να αποφανθούμε ότι η σειρά συγκλίνει και μάλιστα απολύτως.*

Πρόταση 3 (Κριτήριο του λόγου)**.** *Έστω* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *μια σειρά. Τότε:*

- *εάν* $\limsup |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$*, η σειρά συγκλίνει και μάλιστα απολύτως.*
- *εάν* $\liminf |\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1$*, η σειρά αποκλίνει.*

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει από το κριτήριο της ρίζας, χρησιμοποιώντας την παρακάτω ανισότητα:

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

η οποία ισχύει για κάθε ακολουθία θετικών αριθμών a_n. □

Σχόλιο 2. *Όπως και στο κριτήριο της ρίζας, χρησιμοποιούμε τα* $\limsup$, $\liminf$ *διότι μπορούν να εφαρμοστούν ακόμα και όταν το όριο της ακολουθίας δεν υπάρχει.*

Γενικώς, το κριτήριο της ρίζας είναι ισχυρότερο του κριτηρίου του λόγου, αλλά το κριτήριο του λόγου είναι μάλλον ευκολότερο να εφαρμοστεί σε συγκεκριμένες σειρές. Ακόμα, όπως είδαμε, το κριτήριο του λόγου μπορεί να αποδειχθεί από το κριτήριο της ρίζας, ενώ το αντίστροφο δεν συμβαίνει.

Παράδειγμα 3. *Θεωρούμε την σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$*, όπου:*

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \text{εάν } n \text{ άρτιος} \\ \frac{1}{2^{n+1}}, & \text{εάν } n \text{ περιττός} \end{cases}.$$

Εάν προσπαθήσουμε να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του λόγου, στην εκδοχή με το $\lim$*, θα καταλήξουμε στο ότι το όριο δεν υπάρχει, άρα το κριτήριο αυτό δεν μπορεί να εφαρμοστεί.*

Παρατηρήστε επίσης ότι $\liminf |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 1/4$ *και* $\limsup |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 1$*, οπότε ούτε η εκδοχή του κριτηρίου του λόγου που αναφέρεται παραπάνω μπορεί να μας βοηθήσει.*

Όμως το κριτήριο της ρίζας (ακόμα και στην απλή του εκδοχή) αρκεί για να αποφανθούμε ότι η σειρά συγκλίνει. Πράγματι, προσέξτε ότι $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1/2 < 1$ *(να το δείξετε!).*

Πρόταση 4 (Κριτήριο του Raabe)**.** *Έστω* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *σειρά θετικών όρων και ας υποθέσουμε ότι υπάρχει το:*

$$\lambda = \lim_{n \to +\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1).$$

Τότε:

- *εάν* $\lambda > 1$ *η σειρά συγκλίνει.*
- *εάν* $\lambda < 1$ *η σειρά αποκλίνει.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στην βιβλιογραφία. □

Παράδειγμα 4. *Να εξετάσετε ως προς την σύγκλιση τη σειρά* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$.
Λύση: Εφαρμόζουμε το κριτήριο του Raabe. Είναι:

$$\lambda = \lim_{n\to+\infty} n(\frac{(n+1)^p}{n^p} - 1) = \lim_{n\to+\infty} (n\frac{(n+1)^p}{n^p} - n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^p - 1}{\frac{1}{n}} = p.$$

Επομένως, από το κριτήριο του Raabe, η σειρά συγκλίνει για $p > 1$ *και αποκλίνει για* $p < 1$.

Παράδειγμα 5. *Να εξεταστεί ως προς την σύγκλιση η σειρά* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}$.
Λύση: Εάν προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε το (απλό) κριτήριο του λόγου, θα δούμε ότι:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!(2n+3)} \frac{(2n)!!(2n+1)}{(2n-1)!!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{2n+2}\frac{2n+1}{2n+3} = 1.$$

Άρα, το κριτήριο αυτό δεν μπορεί να εφαρμοστεί.

Προχωρούμε στο κριτήριο του Raabe. Είναι:

$$\lim_{n\to+\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = \lim_{n\to+\infty} n(\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)(2n+1)} - 1) = \lim_{n\to+\infty} n\frac{6n+5}{4n^2+4n+1} = \frac{3}{2}.$$

Επομένως, η σειρά συγκλίνει.

Κάντε το ίδιο με την σειρά $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{4n+3}{2n+2}$ (αποκλίνει).

Αναδιατάξεις σειρών

Όταν προσθέτουμε $n \in \mathbb{N}$ πραγματικούς αριθμούς, τότε δεν έχει σημασία με ποια σειρά κάνουμε την πρόσθεση. Εάν, π.χ., $n = 5$, τότε:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_4 + a_2 + a_5 + a_3 + a_1.$$

Το ίδιο ισχύει και για οποιαδήποτε αναδιάταξη των προσθετέων a_n.

Κάτι τέτοιο όμως δεν ισχύει πάντοτε όταν προσθέτουμε άπειρους πραγματικούς αριθμούς μεταξύ τους, δεν ισχύει δηλαδή πάντοτε όταν έχουμε να κάνουμε με σειρές.

Για να δούμε πότε ισχύει και πότε δεν ισχύει αυτό, δίνουμε πρώτα τον ορισμό της αναδιάταξης σειράς.

Ορισμός 1. *Έστω* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ *σειρά πραγματικών αριθμών και* $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *μία* $1-1$ *και επί συνάρτηση. Η σειρά* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{\tau(n)}$ *ονομάζεται αναδιάταξη της αρχικής σειράς.*

Το ερώτημα που μας απασχολεί σε αυτήν την παράγραφο διατυπώνεται ως εξής: εάν μία σειρά συγκλίνει, συγκλίνουν και όλες οι αναδιατάξεις της; Στο ίδιο αποτέλεσμα;

Εάν όλοι οι όροι της σειράς είναι θετικοί, η απάντηση είνα «ναι», όπως βεβαιώνει το ακόλουθο:

Θεώρημα 1. *Έστω* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ *μια συγκλίνουσα σειρά μη αρνητικών όρων. Τότε, οποιαδήποτε αναδιάταξη* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{\tau(n)}$ *αυτής είναι επίσης συγκλίνουσα και μάλιστα* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{\tau(n)}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_N = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n$ και $t_N = \sum\limits_{n=0}^{N} a_{\tau(n)}$. Γνωρίζουμε ότι το $L = \lim_{N\to+\infty} s_N$ είναι πεπερασμένος αριθμός. Για να δείξουμε το ζητούμενο, αρκεί να δείξουμε ότι $L' = L$, όπου $L' = sup\{t_N\}$ (γιατί υπάρχει αυτό το sup;).

Θα δείξουμε πρώτα ότι $L' \leq L$.

Έστω $M \in \mathbb{N}$ και $Y := \{m \in \mathbb{N}/m \leq M\}$. Η συνάρτηση $\tau : Y \to \tau(Y)$ είναι «1–1» και επί. Έτσι, έχουμε:

$$t_M = \sum_{m=0}^{M} a_{\tau(m)} = \sum_{m\in Y} a_{\tau(m)} = \sum_{n\in\tau(Y)} a_n.$$

Η ακολουθία $\{\tau(m)\}_{m=0}^{M}$ είναι πεπερασμένη, άρα και φραγμένη, δηλαδή $\exists N \in \mathbb{N} : \forall m \leq N$ να είναι $\tau(m) \leq N$. Έτσι, το $\tau(Y)$ είναι υποσύνολο του $n \in \mathbb{N} : n \leq N$, οπότε:

$$t_M = \sum_{n\in\tau(Y)} a_n \leq \sum_{\{n\in\mathbb{N}:n\leq N\}} a_n = s_N \leq L,$$

συνεπώς $t_M \leq L$ και αφού $L' = \sup t_M$ είναι $L' \leq L$.

Με το ίδιο ακριβώς σκεπτικό, χρησιμοποιώντας την τ^{-1} αντί για την τ, δείχνουμε ότι $L \leq L'$ και έτσι $L' = L$. □

Παράδειγμα 6. *Η σειρά* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *συγκλίνει και διαθέτει μόνο θετικούς όρους. Επομένως, οποιαδήποτε αναδιάταξη αυτής συγκλίνει, στον ίδιο αριθμό με αυτήν.*

Τι γίνεται εάν η σειρά δεν διαθέτει μόνο μη αρνητικούς όρους;

Θεώρημα 2. *Έστω* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *σειρά η οποία συγκλίνει απολύτως και* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{\tau(n)}$ *τυχαία αναδιάταξη αυτής. Τότε και η* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{\tau(n)}$ *συγκλίνει απολύτως και μάλιστα* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{\tau(n)} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη, ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία. □

Όταν η σειρά συγκλίνει, αλλά όχι απολύτως, τα πράγματα είναι πολύ διαφορετικά.

Παράδειγμα 7. *Η σειρά:*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}...$$

συγκλίνει, αλλά όχι απολύτως (γιατί;). Μάλιστα, εάν γράψουμε το παραπάνω άθροισμα ως εξής:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}) = (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{6}) + (\frac{1}{7} - \frac{1}{8}) + (\frac{1}{9} - \frac{1}{10})...,$$

τότε, επειδή οι όροι μέσα σε κάθε παρένθεση είναι θετικοί αριθμοί, βεβαιωνόμαστε ότι η σειρά συγκλίνει σε έναν θετικό αριθμό.

Ξαναγράφουμε την ίδια σειρά ως εξής:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{4n} - \frac{1}{4n+2}) = (\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10}) + ...$$

και τώρα, οι όροι μέσα σε κάθε παρένθεση είναι αρνητικοί. Επομένως η σειρά συγκλίνει σε αρνητικό αριθμό.

Τι άλλαξε; Η σειρά με την οποία κάναμε τις προσθέσεις.

Το παραπάνω παράδειγμα δείχνει ότι οι αναδιατάξεις μιας μη απολύτως συγκλίνουσας σειράς συμπεριφέρονται με πολύ διαφορετικό τρόπο από την αρχική σειρά.

Θεώρημα 3 (Riemann). *Εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει υπό συνθήκη, τότε $\forall s \in \mathbb{R}$ υπάρχει αναδιάταξη $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\tau(n)}$ αυτής τέτοια, ώστε $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\tau(n)} = s$.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στην βιβλιογραφία. □

Γινόμενα Cauchy σειρών

Ορίζουμε τώρα το γινόμενο δύο σειρών, ως εξής:

Ορισμός 2. *Έστω a_n, b_n δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Η ακολουθία $a_n * b_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$ ονομάζεται συνέλιξη, ή γινόμενο Cauchy, των a_n, b_n. Η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n * b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$, ονομάζεται συνέλιξη, ή γινόμενο Cauchy, των σειρών $\sum_{k=0}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.*

Παράδειγμα 8. *Εάν $a_n = n$ και $b_n = 1/n$, $n \geq 1$, τότε:*

$$a_2 * b_2 = a_1 b_1 = 1, \; a_3 * b_3 = a_2 b_1 + a_1 b_2 = \frac{9}{2}, \; ...$$

Το γινόμενο αυτό, για απολύτως συγκλίνουσες σειρές, συμπεριφέρεται όπως θα έπρεπε να συμπεριφέρεται ένα γινόμενο.

Θεώρημα 4. *Έστω* $\sum_{n=0}^{n} a_n$, $\sum_{n=0}^{n} b_n$ *δύο σειρές που συγκλίνουν απολύτως. Τότε, η συνέλιξη των σειρών αυτών συγκλίνει απολύτως και μάλιστα:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n * b_n) = (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n).$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στη βιβλιογραφία. $\square$