**ΘΕΜΑΤΑ ΕΡΓΑΣΙΩΝ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ**

# ΧΑΟΣ ΚΑΙ ΦΡΑΚΤΑΛΣ

**ΠΡΟΣ ΤΟ ΠΑΡΟΝ ΤΑ ΚΑΤΩΘΙ ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΡΑΤΙΘΕΝΤΑΙ ΧΩΡΙΣ ΚΑΠΟΙΑ ΣΧΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΘΑ ΠΡΟΣΤΕΘΟΥΝ ΣΥΝΤΟΜΑ**

## Α. Μη Γραμμικές Απεικονίσεις

**Α.1.** Δίνεται η τριγωνική απεικόνιση:

$$x_{n+1}\begin{cases} rx_n\ , & 0\le x_n \le \alpha \le 1/2 \\ \dfrac{r\alpha}{1-\alpha}(1-x_n)\ , & \alpha \le x_n \le 1 \end{cases}$$

α) Να μελετηθούν οι περιοδικές τροχιές της και η ευστάθειά τους συναρτήσει των παραμέτρων r, α, για $0 \le r \le 1/\alpha$.

β) Να μελετηθεί η χαοτική συμπεριφορά του συστήματος συναρτήσει του α για $0 \le r \le 1/\alpha$.

γ) Θέτοντας $r>1/\alpha$ μελετήστε το σύνολο των σημείων που δεν διαφεύγουν ποτέ από το [0,1], χρησιμοποιώντας μεθόδους από το Κεφάλαιο 5 του βιβλίου του Α. Μπούντη, «Δυναμικά Συστήματα και Χάος», Τόμος Α’, Εκδ. Παπασωτηρίου, Αθήνα, 1995.

**Α.2.** α) Να βρεθούν οι εξισώσεις που περιγράφουν τις κρούσεις μιάς μπάλας με τα «τοιχώματα» της κλειστής καμπύλης ενός μπιλιάρδου r=r(φ). Οι κρούσεις θεωρούνται ελαστικές και περιγράφονται από τις γωνίες $(\varphi_n,\alpha_n)$ όπως δείχνει το σχήμα.

β) Να βρεθούν περιοδικές τροχιές και να μελετηθεί η ευστάθειά τους αν η r = r(φ) παριστάνει μία έλλειψη.

γ) Να μελετηθεί η έκταση των χαοτικών περιοχών καθώς το μπιλιάρδο τείνει να πάρει το σχήμα του «σταδίου» (μεταξύ 2 ημικυκλίων και 2 παράλληλων ευθειών).

**Α.3.** α) Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης μιάς μπάλας που αναπηδά από ένα επίπεδο καθώς Αυτό εκτελεί κατακόρυφες ταλαντώσεις της μορφής y = βsinωt. Υποθέτουμε ότι $0<\beta<<h_n$, όπου $h_n$ τα ύψη στα οποία αναπηδά η μπάλα και ότι οι κρούσεις γίνονται με ένα συντελεστή ανάκλασης $0<\alpha\le 1$.

β) Να βρεθούν περιοδικές τροχιές του συστήματος και να μελετηθεί η ευστάθειά τους συναρτήσει της παραμέτρου α.

γ) Να μελετηθεί η χαοτική συμπεριφορά του συστήματος καθώς αυξάνεται η τιμή του ω. Θέτοντας α=1, μπορείτε να βρείτε τροχιές για τις οποίες η ταχύτητα της μπάλας αυξάνει απεριόριστα;

**A.4.** Τοποθετείστε τρεις δίσκους ακτίνας ½ στα σημεία (1,1), (-1,1) και (0,L) του επιπέδου (x,y) όπως δείχνει το σχήμα, με $L \geq \sqrt{3}+1$.

α) Εκτοξεύοντας μία μπάλα από σημεία b του άξονα των x καθέτως προς τα επάνω (στη y>0 διεύθυνση), βρείτε τη γωνία α=α(b) (ως προς οριζοντία κατεύθυνση) με την οποία η μπάλα απομακρύνεται και από τους 3 δίσκους (οι κρούσεις θεωρούνται ελαστικές και η ταχύτητα της μπάλας σταθερή).

β) Μελετήστε τη συνάρτηση α=α(b) και δείξτε ότι υπάρχουν περιοχές τιμών του b όπου αυτή έχει fractal δομή. Πώς αλλάζει η α=α(b) καθώς μεταβάλλεται το L; .

**A.5.** α) Θεωρείστε την απεικόνιση του «κύκλου»

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - \frac{K}{2\pi}\sin 2\pi\theta_n$$

και λύστε την ΄Ασκηση 4.8 του βιβλίου του Α. Μπούντη, «Δυναμικά Συστήματα και Χάος», Τόμος Α’, Εκδ. Παπασωτηρίου, Αθήνα, 1995 (βλ. παρ. 4.5).

β) Υπολογίστε μερικές από τις μεγαλύτερες «γλώσσες του Arnol’d», στο επίπεδο (Κ.Ω) βλ. Σχήμα 4.16 του βιβλίου).

γ) Υπολογίστε μερικά «σκαλοπάτια» από τη «σκάλα του διαβόλου» του Σχήματος 4.17 του βιβλίου. Πιστοποιείστε σχετικά αποτελέσματα της βιβλιογραφίας, σύμφωνα με τα οποία η «σκάλα» αυτή παρουσιάζει αυτοομοιότητα υπό αλλαγή κλάμακας.

**A.6.** Θεωρείστε την τυπική απεικόνιση

$$x_{n+1} = x_n - \frac{K}{2\pi}\sin 2\pi y_n$$

$$n = 0,1,2,\ldots$$

$$y_{n+1} = y_n + x_{n+1}$$

βλ. εξ. (4.1) σελ. 120 του βιβλίου του Α. Μπούντη, «Δυναμικά Συστήματα και Χάος», Τόμος Α', Εκδ. Παπασωτηρίου, Αθήνα, 1995.

α) Υπολογίστε τις περιοδικές τροχιές που αντιστοιχούν στους αριθμούς στροφής $w_m = F_m / F_{m+1}$ όπου $F_m$ οι αριθμοί Fibonacci, $F_{m+1} = F_m + F_{m-1}$, $F_0=1$, $F_1=1$, $m \geq 1$, και μελετήστε την ευστάθειά τους.

β) Δείξτε ότι καθώς $K \to K_* = 0.971635\ldots..$ οι τροχιές αυτές γίνονται ασταθείς προσεγγίζοντας την αναλλοίωτη καμπύλη με $w=w^*=0.6180339$, η οποία «διασπάται» για $K>K_*$.

**Α.7.** Μελετήστε το φαινόμενο μετάβασης στο χάος μέσω διπλασιασμού περιόδων για την διατηρητική απεικόνιση του Hénon.

$$x_{n+1} = -y_n + 1 - r x_n^2$$

$$y_{n+1} = x_n$$

καθώς μεταβάλλεται το r. Υπολογίστε τους παγκόσμιους αριθμούς Feigenbaum δ,α και β για το φαινόμενο αυτό.

**Α.8.** Θεωρείστε μία μπάλα που αναπηδά από τα τοιχώματα μιάς γωνίας 2θ όπως δείχνει το σχήμα:

α) Ορίζοντας τις μεταβλητές

$$x = \upsilon \cdot e_r,\ \ y = |\upsilon \cdot e_\theta|$$

όπου υ η ταχύτητα της μπάλας, και

$X = x/\cos\theta$, $Y = y/\sin\theta$

$$\alpha = \tan\theta, \quad \xi = \frac{1-\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}.$$

Δείξτε ότι οι εξισώσεις

$$T_A: \quad \begin{aligned} X_{n+1} &= X_n - 2Y_n \\ Y_{n+1} &= Y_n \end{aligned}$$

και

$$T_B: \quad \begin{aligned} X_{n+1} &= Y_n - X_n - Y_{n+1} \\ Y_{n+1} &= 2+2\xi(Y_n - X_n)^2 - Y_n^2 \end{aligned}$$

περιγράφουν τις αναπηδήσεις της μπάλας: $T_A$ για διαδοχικές αναπηδήσεις από την ίδια πλευρά και $T_B$ για αναπηδήσεις από δύο διαφορετικές πλευρές της γωνίας.

β) Υπολογίστε σταθερά σημεία και μερικές τροχιές χαμηλής περιόδου του προβλήματος και μελετήστε την ευστάθειά τους.

γ) Μελετήστε τη χαοτική συμπεριφορά του συστήματος για διαφορετικές τιμές του θ στο επίπεδο $X_n$, $Y_n$.

**Α.9.** Θεωρείστε το πρόβλημα του Fermi μιάς μπάλας κινούμενης με σταθερή ταχύτητα πάνω σε μία ευθεία μεταξύ ενός ακίνητου και ενός ταλαντούμενου τοίχου όπως δείχνει το σχήμα:

α) Αν ο ταλαντούμενος τοίχος κινείται με ταχύτητα

$$V(\varphi) = V_0 \sin 2\pi\varphi$$

να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης της μπάλας για την ταχύτητα $u_n$ της μπάλας και τη χρονική «φάση» $\varphi_n$ μετά τη n-οστή κρούση με τον ταλαντούμενο τοίχο.

β) Να βρεθούν περιοδικές τροχιές του συστήματος και να μελετηθεί η ευστάθειά τους.

γ) Να μελετηθεί η χαοτική συμπεριφορά του συστήματος για διάφορες τιμές των παραμέτρων $V_0$, L.

**Β. Μη Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις.**

**Β.1.** Θεωρείστε τον μη γραμμικό ταλαντωτή του Duffing

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} - x + 2x^3 = \gamma x \cos\omega t$$

όπου β≥0 συντελεστές τριβών και γ≥0 ο συντελεστής ενός όρου εξωτερικής παραμετρικής ταλάντωσης.

α) Θέτοντας β=γ=0 μελετήστε πλήρως την κίνηση του ταλαντωτή στο χώρο φάσεων $(x, \dot{x})$ . Βρείτε τη διαχωριστική καμπύλη που διέρχεται από το (0,0).

β) Θέτοντας τώρα β=0 αλλά γ>0 μικρό, υπολογίστε τις τροχιές του συστήματος μέσω της απεικόνισης Poincaré $P : \Sigma \to \Sigma$ όπου

$$\Sigma = \{x(t_k),\ \dot{x}(t_k) \ /\ t_k = k\frac{2\pi}{\omega}, \quad k = 0,1,2,...\}.$$

Βρείτε τη γραμμική μορφή της απεικόνισης P κοντά στο (0,0) και υπολογίστε τις ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα αυτής.

γ) Σχεδιάστε αριθμητικά τις διαχωριστικές καμπύλες της απεικόνισης Poincaré για $\gamma=0.001$, 0.01, 0.1 και 0.5, με $\beta=0$. Τι παρατηρείτε για τις καμπύλες αυτές σε σχέση με τη χαοτική συμπεριφορά του συστήματος κοντά στο (0,0) της Σ; Πώς αλλάζει η συμπεριφορά αυτή όταν το $\beta>0$;

**B.2.** Θεωρείστε το περιοδικώς διαταραγμένο απλό εκκρεμές μήκους L:

$$\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = \gamma\cos\omega t$$

με $\beta\geq 0$ και g της σταθερά βαρύτητας.

Να απαντηθούν τα ίδια ερωτήματα (α), (β), (γ) όπως στην **B.1**. Πως εξαρτώνται οι απαντήσεις από το L;

**B.3.** Θεωρείστε το απλό εκκρεμές με περιοδικώς μεταβαλλόμενο μήκος $L(t)=L_0+\gamma\cos\omega t$, $0<\gamma<<L_0$

$$\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + \frac{g\sin\theta}{L_0 + \gamma\cos\omega t} = 0$$

με $\beta\geq 0$, και g τη σταθερά βαρύτητας. Να απαντηθούν τα ίδια ερωτήματα όπως στις **B.1.** και **B.2.**

**B.4.** Θεωρείστε το μη γραμμικό RLC ηλεκτρικό κύκλωμα του σχήματος, στο οποίο ένα σήμα μεγεθύνεται, υψώνεται στο τετράγωνο και επανεισέρχεται στο κύκλωμα χωρίς καθυστέρηση. Χωρίς επανείσοδο και με $R_m=0$ το κύκλωμα παρουσιάζει ταλαντώσεις με συχνότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L}\left(\frac{1}{C_m} + \frac{1}{C}\right)}$$

οι οποίες, για $R_m>0$, τείνουν στο μηδέν.

α) Να δειχθεί ότι η εξίσωση για τη μεταβλητή $U = Q_m/C_m$ (όπου $Q_m$ το φορτίο του πυκνωτή $C_m$) είναι

$$\dddot{U} + \alpha\ddot{U} + b\dot{U} + cU = c\upsilon^2(U-U_0)^2 \qquad (1)$$

όπου

$$\alpha = \frac{1}{RC} + \frac{R_m}{L}, \quad b = \frac{1}{LC}\left(1 + \frac{R_m}{R} + \frac{C}{C_m}\right)$$

$$c = (LCRC_m)^{-1}$$

υ και U σταθερές και η τελεία πάνω από ένα σύμβολο δηλώνει παραγώγιση ως προς t.

Κατόπιν, κάνοντας τις αλλαγές μεταβλητών:

$$t = b^{-1/2}\,\tilde{t}, \quad b = \alpha b^{-1/2}, \quad U = A - Bx$$

με

$$A = \frac{1}{2\upsilon^2}\left(1 + 2\upsilon^2 U_0 + \sqrt{1 + 4\upsilon^2 U_0}\right), \qquad B = \upsilon^{-2}\sqrt{1 + 4\upsilon^2 U_0}$$

δείξτε ότι η εξίσωση κίνησης (1) γίνεται

$$x''' + \beta x'' + x' = f(x) = \mu x(1 - x) \qquad (2)$$

όπου $\mu = cb^{-3/2}\sqrt{1 + 4\upsilon^2 U_0}$ και ο τόνος δηλώνει παραγώγιση ως προς $\tilde{t}$ .

β) Να λυθεί η εξίσωση (2) ως σύστημα με y=x΄, z=y΄, χρησιμοποιώντας μέθοδο Runge-Kutta $4^{ης}$ τάξης και τη μέθοδο Heun σύμφωνα με την οποία η λύση μιάς Σ.Δ.Ε. dy/dt=f(y,t) διακριτοποιείται μέσω της σχέσης

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta t}{2}\{f(y_i, t_i) + \{f(y_i + \Delta t f(y_i, t_i), t_i + \Delta t)\}$$

Να συγκριθούν τα αποτελέσματα των δύο μεθόδων.

γ) Να μελετηθούν τα σημεία ισορροπίας και οι περιοδικές τροχιές του (2) ως προς την ευστάθειά τους, για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων β και μ.

Χρησιμοποιείστε τις τιμές υ=1.2, R=3300, $C=C_m=47\cdot 10^{-9}$ , L=0.1, $U_0=4$ και αλλάζετε την τιμή του $R_m \geq 50$.

**B.5.** Να μελετηθεί το σύστημα εξισώσεων του Lorenz

$$\dot{x} = \sigma(y-x)$$

$$\dot{y} = \rho x - zx - y$$

$$\dot{z} = xy - \beta z$$

για διάφορες τιμές των παραμέτρων ρ,σ,b>0.

α) Να μελετηθεί η ευστάθεια των σημείων ισορροπίας για σταθερές τιμές σ=β=1 και μεταβαλλόμενο 0≤ρ<30.

β) Να μελετηθεί ο χαοτικός ελκυστής του Lorenz για σ=10, β=8/3 και $\rho>\rho_c$, όπου $\rho_c$ το σημείο αποσταθεροποίησης των δύο σημείων ισορροπίας.

Να υπολογιστεί ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov και η fractal διάσταση του ελκυστή για $\rho=28$.

γ) Να βρεθούν ευσταθείς περιοδικές τροχιές για $\sigma=10$, $\beta=8/3$ και μεγάλες τιμές του $\rho\geq 145$.

**B.6.** Να μελετηθεί το σύστημα εξισώσεων του Rössler

$$\dot{x} = -y - z$$

$$\dot{y} = x + \alpha y$$

$$\dot{z} = b + zx - cz$$

για διάφορες τιμές των παραμέτρων $\alpha,b,c>0$.

α) Να μελετηθεί ακολουθία περιοδικών τροχιών που οδηγεί σε χαοτική ελκυστή μέσω διακλαδώσεων διπλασιασμού περιόδων.

β) Θέτοντας $\alpha=b=0.2$ και $c=5.7$ μελετήστε τις γεωμετρικές και δυναμικές ιδιότητες του προκύπτοντος παράξενου ελκυστή (Lyapunov εκθέτες, fractal διάσταση).

γ) Εξετάστε ιδιαιτέρως την περίπτωση $c=8$. Περιγράψτε την συμπεριφορά των τροχιών για διαφορετικές αρχικές συνθήκες καθώς $t \to \infty$ .

**B.7.** Θεωρείστε το περιορισμένο πρόβλημα 3 σωμάτων δύο μεγάλων μαζών ($m_1$=Ήλιος, $m_2$= Δίας) και μία μικρής με μοναδιαία μάζα (αστεροειδής) στο σύστημα συντεταγμένων ενός περιστρεφόμενου επιπέδου που δείχνουμε στο σχήμα, στο οποίο οι δύο μεγάλες μάζες είναι ακίνητες.

α) Δείξτε ότι οι εξισώσεις της κίνησης για τη μικρή μάζα στο επίπεδο αυτό είναι:

$$\dot{x} = p + y, \quad \dot{p} = q - \frac{m(x+n)}{[(x+n)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{n(x-m)}{[(x-m)^2 + y^2]^{3/2}}$$

$$\dot{y} = q - x, \quad \dot{q} = -p - \frac{my}{[(x+n)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{ny}{[(x-m)^2 + y^2]^{3/2}}$$

όπου $m=m_1/(m_1+m_2)$, $n=m_2/(m_1+m_2)$ και p,q οι ορμές στη x,y διεύθυνση αντιστοίχως.

β) Να βρεθούν τα 5 σημεία ισορροπίας $L_i$, i=1,2,…,5 (τα λεγόμενα σημεία Lagrange) και να μελετηθεί η ευστάθειά τους συναρτήσει των παραμέτρων m,n. Δείξτε ότι για $m_1/m_2<0.04$ τα δύο σημεία ισορροπίας $L_4$, $L_5$ (στις κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου) είναι ευσταθή. Η συνθήκη αυτή ικανοποιείται για τον Δία και τον Ήλιο και για τον λόγο αυτό παρατηρούνται αστεροειδείς κοντά στα εν λόγω σημεία.

γ) Λύνοντας αριθμητικά τις ως άνω εξισώσεις μελετήστε τις τροχιές του συστήματος κοντά στα ευσταθή και ασταθή σημεία ισορροπίας.

**Β.8.** Θεωρείστε το σύστημα Σ.Δ.Ε. Hénon-Heiles

$$\ddot{x} = -x - 2xy$$

$$\ddot{y} = -y - x^2 + y^2$$

που προέρχεται από τη Χαμιλτονιανή

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{1}{3} y^3 = E$$

όπου E η ολική (σταθερή) ενέργεια του συστήματος.

α) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας και να μελετηθεί η ευστάθειά τους. Να σχεδιαστεί σε 3 διαστάσεις η συνάρτηση δυναμικού

$$V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{1}{3} y^3$$

και οι ισοδυναμικές καμπύλες στο επίπεδο x,y.

β) Να βρεθούν τρεις απλές περιοδικές τροχιές του συστήματος οι οποίες είναι ισοδύναμες λόγω μίας συμμετρίας της V(x,y). Ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις κίνησης κοντά σε μία από τις τροχιές μελετήστε την ευστάθειά της καθώς αυξάνεται η τιμή της ενέργειας $0 \le E \le 1/6$.

γ) Υπολογίστε τις τομές των τροχιών με την επιφάνεια τιμών Poincaré

$$\Sigma = \{y(t_k),\ \ \dot{y}(t_k) / x(t_k) = 0,\ \ \dot{x}(t_k) > 0,\ \ k = 0,1,2,...\}$$

για διάφορες τιμές του E. Μελετήστε την έκταση των χαοτικών περιοχών του συστήματος καθώς και η ενέργεια αυξάνεται $0 \le E \le 1/6$.

---