

## ΤΥΧΗ Η ΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ;

### Η ΔΙΑΛΕΚΤΙΚΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΟΥ ΧΑΟΥΣ

Γάσος Μπούντης  
Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών  
Πανεπιστήμιο Πατρών  
Πάτρα 26500 τηλ./φαξ: 0610 - 997381  
[bountis@math.upatras.gr](mailto:bountis@math.upatras.gr)  
<http://www.math.upatras.gr/~crans>  
<http://www.math.upatras.gr/~bountis>

#### 1. Εισαγωγή

Από την πρώτη κιόλας εμφάνιση του ανθρώπου στη γη, οι έννοιες της τάξης και του χάους, του προβλέψιμου και του απρόβλεπτου, του καθοριστικού και του τυχαίου έπαιξαν σημαντικό ρόλο στον τρόπο που ο άνθρωπος αντιλαμβανόταν τη φύση γύρω του. Όλοι σχεδόν οι μέχρι σήμερα γνωστοί πολιτισμοί περιείχαν θεότητες που **εκπροσωπούσαν την τάξη** ή τη δημιουργία και το **χάος** ή την άβυσσο, το άμορφο κενό. Στην Αρχαία Ελλάδα, όπου λατρεύτηκε με τον δυϊσμό Απόλλωνα-Διονύσου η λογική και το όνειρο, η διαύγεια και η μέθη έζησε και ο Αριστοτέλης ο οποίος επιχείρησε με το έργο του να δείξει ότι η φύση - έμψυχη ή άψυχη- διέπεται από αιτιοκρατικούς νόμους και λειτουργεί σύμφωνα με κανόνες που ο άνθρωπος μπορεί να κατανοήσει και ίσως να χρησιμοποιήσει προς όφελός του.

Η Αριστοτέλεια λογική επηρέασε την Ευρωπαϊκή διάνοηση για πολλούς αιώνες. Μετά μάλιστα από την τόσο επιτυχή περιγραφή της κίνησης των ουρανίων σωμάτων από τους νόμους του Kepler και του Νεύτωνα, και μετά την εντυπωσιακή πρόοδο των επιστημών τον 17ο αιώνα, ο **ντετερμινισμός**, ή η αιτιοκρατική ερμηνεία του σύμπαντος, φαινόταν να ορθώνεται σαν ένα ακλόνητο οχυρό. Η κυριαρχία του ανθρώπινου νου πάνω στη φύση εμφανιζόταν αδιαμφισβήτητη. Εκφράστηκε μάλιστα, στα 1814, από τον ίδιο τον Laplace με τον εξής χαρακτηριστικό τρόπο:

«Μια διάνοια που σε μια δεδομένη στιγμή θα γνώριζε όλες τις δυνάμεις που κινούν τη φύση και την αντίστοιχη κατάσταση των όντων που την αποτελούν, ενώ ταυτόχρονα θα ήταν τόσο ευρεία ώστε να αναλύει όλα τα δεδομένα, θα είχε την δυνατότητα να συμπεριλάβει σε ένα σχήμα τόσο τις κινήσεις των μεγαλύτερων σωμάτων του σύμπαντος όσο και εκείνες των ελαχίστων ατόμων. **Τίποτε δεν θα ήταν αβέβαιο γι' αυτήν, το μέλλον και το παρελθόν θα ήταν πάντα παρόντα στα μάτια της**».

Ο 19ος και ο 20ος αιώνας όμως ήρθαν να αποκαλύψουν ότι η πραγματικότητα είναι πολύ διαφορετική. Οι αντιφάσεις στις οποίες υπέπεσε ο Boltzmann στη προσπάθειά του να συνδυάσει το Νευτώνειο μοντέλο με την επιστήμη της Θερμοδυναμικής, η ενδογενής αβεβαιότητα των νόμων της Κβαντομηχανικής και τέλος τα παράδοξα του

Russell και το θεώρημα του Godel, ήρθαν να καταφέρουν καιρία πλήγματα στην απόλυτη κυριαρχία του ντετερμινισμού και να κλονίσουν συθέμελα το αιτιοκρατικό οχυρό του Laplace.

Στο άρθρο αυτό θα περιγράψουμε πως, με την καθιέρωση της νέας επιστήμης της «Μη Γραμμικής Δυναμικής και του Χάους», ολοκληρώθηκε στα χρόνια μας η κατάρρευση του ντετερμινισμού ακόμα και στα πιο απλά συστήματα της Κλασσικής Φυσικής. Θα επιχειρήσουμε να δείξουμε πως τα μαθηματικά αποτελέσματα των Poincare (τέλος του 19ου αιώνα), Smale (1967) και Ruelle και Takens (1973) οι αριθμητικοί υπολογισμοί Φυσικών όπως ο Lorenz και ο Feigenbaum αλλά και οι πειραματικές ανακαλύψεις πολλών άλλων, θεμελίωσαν επιστημονικά τις βασικές έννοιες της Χαοτικής Δυναμικής. Θα δούμε πως η θεωρία του Χάους συνδέει **διαλεκτικά** το προβλέψιμο και το απρόβλεπτο, το κανονικό και το τυχαίο, ανακαλύπτοντας τάξη μέσα στη χαοτική συμπεριφορά συστημάτων που περιγράφονται από ντετερμινιστικές μη γραμμικές εξισώσεις.

Έτσι θα οδηγηθούμε τελικά στο συμπέρασμα ότι και ο απόλυτος ντετερμινισμός αλλά και η απόλυτη τυχαιότητα δεν είναι παρά εξιδανικεύσεις, ακραίες και οριακές καταστάσεις που αποτελούν την εξαίρεση και όχι τον κανόνα. Το παιχνίδι της Φύσης και της Ζωής παίζεται κάπου ανάμεσα στην **τύχη** και τη **βεβαιότητα** σαν μία παρτίδα σκάκι: Οι κανόνες είναι γνωστοί και απλοί, οι διαφορετικοί συνδυασμοί όμως που επιτρέπονται είναι τόσο πολλοί, ώστε να προσδίδουν στον κόσμο γύρω μας μια θαυμαστή **πολυπλοκότητα** κινήσεων και μορφών που ποτέ δεν θα μπορούσαμε να κατανοήσουμε και να ελέγξουμε πλήρως.

Ίσως η πιο σημαντική συμβολή της Θεωρίας του Χάους να είναι η συνειδητοποίηση ότι όσο βαθύτερα κατανοούμε τη Φύση και τη Ζωή, τόσο θα συναντάμε εκπλήξεις και απρόοπτα, μαζί με νέες προκλήσεις και ερωτήματα που πρέπει να αντιμετωπίζουμε συνεχώς σε μία συναρπαστική αλληλουχία χωρίς τέλος...

## 2. Τύχη ή Βεβαιότητα ;

Η πρώτη αναφορά στον όρο «χάος» στην Ελληνική ιστορία γίνεται από τον Ησίοδο, τον 8ο αιώνα π.χ., στο έργο του «Θεογονία», με την έννοια του «κενού» που υπήρχε στον κόσμο πριν δημιουργηθεί η Γη. Από το χάος, σύμφωνα με τον Ησίοδο, προήλθε η Νεφέλη και το Σκότος αλλά και η Ημέρα και ο Αιθέρας.

Έτσι η έννοια του χάους δεν περιορίστηκε στο κενό και την ανυπαρξία αλλά αποτέλεσε και την κοιτίδα της δημιουργίας, την γενεσιουργό αιτία για την ύπαρξη και την εξέλιξη του «καινούργιου» και του «ζωντανού». Η διαλεκτική της απουσίας (ως **αβεβαιότητα**) και της παρουσίας (ως **σιγουριά**) είχε γεννηθεί!

Δύσκολα θα βρει κανείς στην ιστορία της ανθρωπότητας πολιτισμό που να μην έχει αναπτύξει, ως μια από τις θεμελιώδεις αρχές του, τον δυϊσμό ανάμεσα στο φως και το σκοτάδι, τη δημιουργία και την καταστροφή. Αυτό συνήθως γίνεται υπό τη μορφή ενός ζεύγους θεοτήτων:

Οι θεοί Nut και Ra συμβόλιζαν αντιστοίχως την άβυσσο και τον ήλιο για τους αρχαίους Αιγυπτίους ενώ το Yin και το Yang αντιπροσώπευαν τον ουρανό (χάος) και

την γη (τάξη) για τους Κινέζους. Τέλος ο Βισνού, θεότητα της τάξης, λατρεύεται ακόμα και σήμερα στην Ινδία, σε αντιδιαστολή με τον Σίβα, θεό της καταστροφής αλλά με την προϋπόθεση της γέννησης του καινούργιου.

Φυσικά δεν χρειάζεται να αναφέρουμε τον Απόλλωνα και τον Διόνυσο στην Αρχαία Ελλάδα που έδωσαν θεϊκή οντότητα στις έννοιες της τάξης-λογικής και της αταξίας-μέθης αντιστοίχως. Με το έργο του Αριστοτέλη όμως, τον 4ο αιώνα π.χ., προβάλλεται και υποστηρίζεται τελικά η άποψη ότι η φύση και η ζωή διέπονται από τάξη και αιτιοκρατικούς κανόνες που ο άνθρωπος έχει υποχρέωση να προσπαθήσει να κατανοήσει.

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι το πρωταρχικό ερώτημα που έκανε τον άνθρωπο, από καταβολής κόσμου, να προβληματισθεί σχετικά με τους νόμους και την προβλεψιμότητα της φύσης, ήταν η κίνηση των ουρανίων σωμάτων. Κατ' αρχάς η περιοδικότητα της ανατολής και της δύσης, του ήλιου και των τροχιών της σελήνης, αλλά και των αστερών στον ουρανό, εδραίωσε την πίστη του ανθρώπου στην αιτιοκρατία.

Γεγονότα όπως η πρόβλεψη της έκλειψης ηλίου από τον Θαλή τον Μιλήσιο κατά τη διάρκεια μιας μάχης μεταξύ Λυδών και Μήδων το 585 π.χ., δημιούργησαν την πεποίθηση ότι με μαθηματικούς υπολογισμούς και επιστημονικές μετρήσεις, το μέλλον του ανθρώπου στη γη θα μπορούσε να προβλεφθεί με ακρίβεια.

Χρειάστηκε να περάσουν 2000 χρόνια για να φτάσουμε στην εποχή του Κοπέρνικου, ο οποίος, το 1473, βελτίωσε σημαντικά το μοντέλο του Πτολεμαίου για την αναπαράσταση των τροχιών των πλανητών του ηλιακού συστήματος. Όμως, η πιο σημαντική πρόοδος στο θέμα αυτό έγινε το 1596 από τον Kepler, ο οποίος πρότεινε το σχήμα της έλλειψης για τις πλανητικές τροχιές μέσω του οποίου εξηγήθηκαν με αξιοθαύμαστη ακρίβεια οι αποκλίσεις του μοντέλου του Κοπέρνικου από τις μέχρι τότε γνωστές αστρονομικές παρατηρήσεις.

Τέλος, η ιδιοφυία του μεγάλου Isaac Newton (1642-1727) ήρθε να αποδείξει, στο πρόβλημα της βαρυτικής έλξης, την ύπαρξη φαινομενικά απλών μαθηματικών εξισώσεων που περιγράφουν **παγκόσμιους νόμους**. Οι νόμοι αυτοί διέπουν από την κίνηση ενός μήλου που πέφτει στη γη μέχρι τις τροχιές των πιο απομακρυσμένων αστερών του σύμπαντος. Το μήνυμα του Νεύτωνα ήταν ξεκάθαρο: Δώστε μου τις σωστές μαθηματικές εξισώσεις και τις κατάλληλες αρχικές συνθήκες και θα σας περιγράψω με ακρίβεια τη κίνηση ενός συστήματος μαζών υπολογίζοντας το μέλλον και το παρελθόν του για όσο μεγάλο χρονικό διάστημα θέλετε.

Και πράγματι οι επιτυχίες των Μαθηματικών στην περιγραφή φυσικών φαινομένων άρχισαν να διαδέχονται η μία την άλλη, με εντυπωσιακούς ρυθμούς, τον 17ο, 18ο και 19ο αιώνα: Ο L. Euler εφαρμόζει τον Απειροστικό Λογισμό στη Μαθηματική Φυσική και λύνει ένα μεγάλο αριθμό προβλημάτων της Μηχανικής και της Υδροδυναμικής. Ο D' Alembert λύνει το πρόβλημα της παλλόμενης χορδής μέσω Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων, ο D. Bernoulli αναλύει την μουσική και τους ήχους ως υπερθέσεις ημιτονοειδών ταλαντώσεων, ο J. L. Lagrange κάνει μεγάλη πρόοδο στην επιστήμη της Ακουστικής, ενώ ο J. Fourier επιτυγχάνει να περιγράψει σωστά το πρόβλημα της ροής θερμότητας.

Ένας μετά τον άλλον, οι κλάδοι της Φυσικής αρχίζουν να υποτάσσονται στον έλεγχο μαθηματικών μεθόδων. Η ελαστικότητα μελετείται αποτελεσματικά από τους Laplace και Poisson, η Υδροδυναμική και η Ηλεκτροστατική ενοποιούνται υπό τη μαθηματική θεωρία Πεδίων Δυναμικού και ο Ηλεκτρομαγνητισμός παρουσιάζεται με άψογη κομψότητα υπό το ενιαίο πλαίσιο των εξισώσεων του Maxwell.

Μέσα στον ενθουσιασμό και την ευφορία που προκάλεσαν οι εντυπωσιακές αυτές ανακαλύψεις, μια μικρή ανησυχητική «λεπτομέρεια» φαίνεται ότι πέρασε στο περιθώριο: Οι περισσότερες διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν ρεαλιστικά τα ως άνω φυσικά φαινόμενα είναι **μη γραμμικές** και επομένως πολύ δύσκολο έως αδύνατο να επιλυθούν αναλυτικά εκτός από πολύ λίγες περιπτώσεις. Για το λόγο αυτό, οι επιστήμονες αναγκαζόντουσαν να καταφύγουν σε γραμμικοποιήσεις και σημαντικές απλουστεύσεις των προβλημάτων τους, οι οποίες μπορούσαν να δώσουν ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Η αναγκαιότητα της αντιμετώπισης **μη επιλύσιμων** εξισώσεων δεν είχε προκύψει ακόμα.

Έτσι φτάνουμε στην περίφημη ρήση του Pierre Simon de Laplace, το 1814, που περιέχεται στο έργο του «Φιλοσοφικά Δοκίμια επί των Πιθανοτήτων», και την οποία διατυπώσαμε στην Εισαγωγή του παρόντος άρθρου. Η ρήση αυτή αποτελεί την αποθέωση του ντετερμινισμού και σηματοδοτεί μία από τις σοβαρότερες απόπειρες να αναδειχθεί η αιτιοκρατία σε αποφασιστικό παράγοντα στην προσπάθειά του ανθρώπου να ερμηνεύσει τη φύση και τη ζωή.

Αυτή η αναγωγική και μηχανιστική αντίληψη για τη λειτουργία της φύσης κυριάρχησε μέχρι το τέλος του 19ου αιώνα, οπότε εμφανίστηκαν στο προσκήνιο οι θεωρίες του L. Boltzmann για την Θερμοδυναμική θεώρηση της χρονικής εξέλιξης φυσικών συστημάτων όπως τα αέρια, που αποτελούνται από δισεκατομμύρια δισεκατομμυρίων μόρια ή άτομα.

Ο βασικός στόχος του Boltzmann ήταν να εξηγήσει, βάσει των νόμων της Κλασικής Μηχανικής, πως είναι δυνατόν ένα αέριο να φτάσει σε μία κατάσταση ισορροπίας, όπου τα μόρια θα καταλαμβάνουν ομοιογενώς όλο το διαθέσιμο χώρο, σε μία κατανομή πλήρους αταξίας και «μοριακού χάους». Δυστυχώς τα επιχειρήματα του Boltzmann συνάντησαν σοβαρότερες αντιρρήσεις από πολλούς φυσικούς της εποχής του, οι οποίες συνίσταντο κυρίως στα εξής:

Αν η ισορροπία είναι το «μοιραίο» επακόλουθο της δυναμικής του αερίου, τότε, αντέτειναν οι αντίπαλοί του, αν αντιστρέψαμε τις ταχύτητες όλων των μορίων, αυτά θα έπρεπε πάλι να κινηθούν προς την ομοιογενή κατανομή. Όμως οι εξισώσεις της Κλασικής Μηχανικής είναι αναλλοίωτες υπό την αντιστροφή του χρόνου και έτσι μία αλλαγή ταχυτήτων σαν αυτή που αναφέραμε θα οδηγούσε τα μόρια πίσω στην αρχική τους κατάσταση, αντί στην ισορροπία. Επί πλέον, αυτή η ιδιότητα της αντιστρεψιμότητας δείχνει ότι οι εξισώσεις δεν διακρίνουν μεταξύ της «έμπροσθεν» και «όπισθεν» φοράς του χρόνου, και επομένως δεν μπορούν να ξεχωρίσουν το μέλλον από το παρελθόν, όπως απαιτούσε η θεώρηση του Boltzmann.

Μία άλλη σοβαρή αντίρρηση επίσης βασίστηκε στο γεγονός ότι οι νόμοι της Μηχανικής που χρησιμοποίησε ο Boltzmann, υπονοούν ότι μετά από μεγάλα χρονικά διαστήματα το αέριο θα επανέρχεται όσο κοντά θέλουμε στην αρχική κατάσταση,

πράγμα που αποκλείει την σταθεροποίησή του για πάντα στην ομοιογενή ισορροπία που ήθελε να αποδείξει ο Boltzmann.

Έτσι η Επιστήμη της Φυσικής και συγκεκριμένα η Στατιστική Φυσική εισήλθε στον 20ο αιώνα συνοδευόμενη από ένα πολύ σοβαρό παράδοξο: Πως θα ήταν δυνατόν να συμβιβαστούν οι νόμοι της Θερμοδυναμικής (όπως π.χ. ο 2ος νόμος της συνεχώς αυξανόμενης αταξίας ενός κλειστού συστήματος) με τους νόμους της Κλασσικής Μηχανικής; Πως μεταβαίνουμε από την αντιστρέψιμη δυναμική των 2-3 σωμάτων στην στατιστική μελέτη των δισεκατομμυρίων μορίων ενός αερίου;

Χωρίς να το ξέρει ούτε ο Boltzmann, που αυτοκτόνησε από κατάθλιψη στα 1906, ούτε πολλοί από τους επικριτές του, η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα είχε ήδη δοθεί λίγο πριν την εκπονή του 19ου αιώνα από τον μεγάλο Γάλλο Μαθηματικό Henri Poincaré.

Ο Poincaré, προσπαθώντας να λύσει το πρόβλημα 3 σωμάτων, Γη, Ηλιος και Σελήνη, που είχε τεθεί το 1887 με έπαθλο 2500 κορώνες από τον Βασιλιά Όσκαρ της Σουηδίας, ανακάλυψε κάτι πραγματικά εντυπωσιακό: ότι δηλαδή, οι εξισώσεις της Κλασσικής Μηχανικής, για το πρόβλημα αυτό, ήταν αδύνατον να λυθούν αναλυτικά με τις ως τότε γνωστές μαθηματικές μεθόδους!

Ο Poincaré κέρδισε το έπαθλο, αλλά η ανακάλυψη που είχε κάνει ήταν πολύ πιο σημαντική και θεμελιώδης από την απόδειξη της μη επιλυσιμότητας του προβλήματος 3 σωμάτων: Ουσιαστικά αυτό που απέδειξε ο Poincaré ήταν ότι ακόμα και στα πιο απλά προβλήματα της Μηχανικής και της Αστρονομίας, διαθέτουν στο **χώρο φάσεων** τους (\*) περιοχές όπου οι λύσεις (ή τροχιές) εξαρτώνται **εξαιρετικά ευαίσθητα από την επιλογή των αρχικών συνθηκών**.

Αυτό σημαίνει, με δύο λόγια, ότι ακόμα και τα απλούστερα ντετερμινιστικά συστήματα της Φυσικής που περιγράφονται από **μη γραμμικές** εξισώσεις και κινούνται σε ένα χώρο φάσεων 3 τουλάχιστον διαστάσεων, έχουν περιοχές όπου οι τροχιές τους είναι **έντονα ασταθείς**, ώστε ακόμα και **ελάχιστες αλλαγές** στην αρχική κατάσταση οδηγούν σε τεράστιες αλλαγές στην εξέλιξη της κίνησης. Οι περιοχές αυτές ονομάστηκαν, 70 χρόνια αργότερα, **χαοτικές** και η έντονη αστάθεια που τις χαρακτηρίζει, **χάος**.

Έτσι, η **αβεβαιότητα** του προσδιορισμού της δυναμικής έκανε την εμφάνισή της με φυσιολογικό και συγκεκριμένο τρόπο, σε φυσικά συστήματα που θα τα χαρακτηρίζαμε απολύτως αιτιοκρατικά. Ο ντετερμινισμός του Laplace, με την έννοια της δυνατότητας πρόβλεψης της δυναμικής για απεριόριστο χρόνο στο μέλλον (ή το παρελθόν) δέχτηκε ένα καίριο πλήγμα, από το οποίο δεν επρόκειτο να συνέλθει ποτέ.

### 3. Η Θεωρία του Χάους

Έπρεπε βέβαια να περάσουν πολλά χρόνια προτού γίνουν ευρέως κατανοητές οι ανακαλύψεις του Poincaré και η σημασία τους για τη Φυσική και τις άλλες

---

(\*) Χώρος φάσεων είναι ο χώρος όλων των δυνατών θέσεων και ταχυτήτων ενός συστήματος της Κλασσικής Μηχανικής.

εφαρμοσμένες επιστήμες. Ενας από τους πρώτους που διαισθάνθηκαν την απήχηση των αποτελεσμάτων του Poincaré και τα επέκτειναν σε δυναμικά συστήματα διακριτού χρόνου που περιγράφονται από αλγεβρικές, μη γραμμικές **απεικονίσεις**, ήταν ο Αμερικανός Μαθηματικός G. D. Birkhoff.

Οι εργασίες του Birkhoff, στη δεκαετία του 1920, έδειξαν περίτρανα ότι οι ανακαλύψεις του Poincaré δεν περιορίζονταν μόνο στον κλάδο των διαφορικών εξισώσεων. Ακόμα και απλές εξισώσεις διαφορών (απεικονίσεων) που χρησιμοποιούνται συχνά για τη μοντελοποίηση βιολογικών ή οικονομικών συστημάτων μπορούν να εμφανίσουν πλούσια και πολύπλοκη συμπεριφορά που δεν επιδέχεται αναλυτική λύση μέσω γνωστών μεθόδων.

Όμως η επόμενη σημαντική εξέλιξη στην ανάπτυξη της θεωρίας του Χάους επρόκειτο να καθυστερήσει λίγες δεκαετίες. Συγκεκριμένα, χρειάστηκε να εμφανισθεί στο προσκήνιο στα 1960 περίπου ο μεγάλος Αμερικανός τοπολόγος S. Smale για να γίνει κατανοητή σε όλο της το μεγαλείο η θεωρία του Poincaré. Χρησιμοποιώντας απλά γεωμετρικά παραδείγματα, ο Smale έδειξε ότι ένα μεγάλο πλήθος δι-διάστατων αιτιοκρατικών απεικονίσεων εμπεριέχουν λύσεις με ιδιότητες τόσο **τυχαίες**, όσο και η ρίψη ενός νομίσματος ή το παίγνιδι της ρουλέτας!

Τα συμπεράσματα του Smale γενικεύθηκαν από τους Μαθηματικούς Φυσικούς D. Ruelle (Γαλλία) και F. Takens (Ολλανδία) το 1973, ενώ η πειραματική τους επαλήθευση σε εργαστηριακές μελέτες της χαοτικής κίνησης υγρού ανάμεσα σε δύο περιστρεφόμενους κυλίνδρους, δημοσιοποιήθηκε 2 χρόνια αργότερα από τους Αμερικανούς Φυσικούς J. Gollub και H. Swinney.

Εν τω μεταξύ, το 1963, ο Αμερικανός μετεωρολόγος E. Lorenz δημοσίευσε μία πολύ σημαντική εργασία στην οποία περιέγραφε την εκπληκτική διαπίστωση ότι οι λύσεις ενός απλού ντετερμινιστικού μοντέλου 3 διαφορικών εξισώσεων, αν και διακρίνονται από τη γνωστή ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες που αναφέραμε πιο πάνω, τελικά συγκεντρώνονται όλες σε ένα πολύπλοκο σύνολο στο χώρο των φάσεων που ονομάστηκε **παράξενος ή χαοτικός ελκυστής**.

Ο ελκυστής του Lorenz παρουσιάζει μία τόσο σύνθετη δομή υπό συνεχείς μεγεθύνσεις, που δίνει την εντύπωση ότι εκτείνεται πέραν των 2 διαστάσεων, χωρίς όμως και να «γεμίζει» ένα τμήμα του 3-διάστατου χώρου. Σήμερα, ξέρουμε ότι το αντικείμενο αυτό έχει διάσταση περίπου 2.1 και ανήκει στην κατηγορία των **φράκταλς**, αυτών των απείρως πολύπλοκων συνόλων, τα οποία σίγουρα θα γνωρίζεις ο αναγνώστης, από τις τόσο όμορφες έγχρωμες εικόνες τους που συναντάμε καθημερινά στη βιβλιογραφία.

Τέλος, σε όλα αυτά, πρέπει να προσθέσουμε και την πολύ σημαντική ανακάλυψη του Αμερικανού Μαθηματικού Φυσικού M. Feigenbaum, ο οποίος απέδειξε με τη βοήθεια απλών μη γραμμικών απεικονίσεων, το 1977, την δυνατότητα **μετάβασης στο χάος**, μέσω μιας ακολουθίας διακλαδώσεων με «παγκόσμια» χαρακτηριστικά. Η μεγάλη σημασία της ανακάλυψης του Feigenbaum αποκαλύφθηκε 2 χρόνια αργότερα στα 1979, όταν οι Γάλλοι Φυσικοί A. Libchaber και M. Maurer, επιβεβαίωσαν πειραματικά ότι κατά την αυξανόμενη θέρμανση ενός λεπτού στρώματος υγρού, είναι δυνατόν να παρατηρηθεί μετάβαση στο χάος με τον ίδιο ακριβώς τρόπο και τις ίδιες παγκόσμιες σταθερές που προέβλεπε η θεωρία του Feigenbaum.

Σήμερα, μετά και τις εντυπωσιακές ανακαλύψεις της γεωμετρίας των φράκταλς, βρισκόμαστε μπροστά στην εδραίωση μιας νέας κατεύθυνσης στον χώρο των επιστημών που λέγεται **Επιστήμη της Πολυπλοκότητας**. Το ένα της σκέλος αφορά στο «χάος», ως πολύπλοκη και απρόβλεπτη εξέλιξη της δυναμικής μη γραμμικών συστημάτων **στο χρόνο**, και το άλλο στα «φράκταλς», ως πολύπλοκες μορφές **στο χώρο** που εμφανίζουν ιδιότητες αυτο-ομοιότητας υπό αλλαγή κλίμακας, όπως αυτό της φτέρης του Barnsley που δείχνουμε στο κάτωθι σχήμα.



*Εικόνα 1. Η φτέρη του Barnsley. Προσέξτε την αυτο-ομοιότητα μεταξύ του μεγάλου μίσχου και της αλληλουχίας των μικρότερων που βρίσκονται επάνω του.*

Γνωρίζουμε επίσης ότι πολλά (τα περισσότερα ίσως) φυσικά, βιολογικά και οικονομικά συστήματα που μελετάμε δεν είναι ούτε απολύτως προβλέψιμα, ούτε εντελώς τυχαία. Θα μπορούσαμε μάλιστα να πούμε ότι οι κλιματικές αλλαγές, η λειτουργία της καρδιάς, οι σεισμοί, οι διακυμάνσεις του χρηματιστηρίου και τόσα άλλα, είναι χαοτικά φαινόμενα που διέπονται από ένα **πολύ μικρότερο** αριθμό μεταβλητών (3-5) από ότι ίσως θα φανταζόμαστε.

Επιπλέον σήμερα είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε και το ποσοστό του «θορύβου» ή «τυχειότητας» που υπάρχει στα δεδομένα ενός συστήματος σχετικά με την αντίστοιχη συμβολή της αιτιοκρατικής δυναμικής. Αν το ποσοστό αυτό είναι χαμηλό, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μεθοδολογία του χάους για να **βελτιώσουμε** τη δυνατότητα **πρόβλεψης** και **ελέγχου** που διαθέτουμε για τα συστήματα αυτά.

Ακόμα όμως και αν υποθέταμε ότι οι εξισώσεις που τα διέπουν είναι απολύτως ντετερμινιστικές, χωρίς ίχνος θορύβου, πάλι θα ήταν αδύνατον να προβλέψουμε την χαοτική τους εξέλιξη για μεγάλα χρονικά διαστήματα. **Στατιστικά**, θα γνωρίζαμε που βρίσκονται, αφού μπορούμε να προσδιορίσουμε με ακρίβεια τη θέση και το μέγεθος των χαοτικών περιοχών στο χώρο των φάσεων. Για κάθε συγκεκριμένη

αρχική κατάσταση όμως, η ενδογενής αβεβαιότητα του χάους δεν θα μας επέτρεπε να παρακολουθήσουμε την εξέλιξη της δυναμικής για μεγάλα διαστήματα στο χρόνο.

#### 4. Συμπεράσματα

Είναι γεγονός ότι ο αιώνας μας σηματοδεύτηκε από μία σειρά συγκλονιστικών επιστημονικών ανακαλύψεων: Η **ντετερμινιστική** θεωρία της Γενικής Σχετικότητας του Einstein και οι μετέπειτα εφαρμογές και πειραματικές της επαληθεύσεις μας αποκάλυψαν πολλά ενδιαφέροντα στοιχεία για την έκταση, την ηλικία και το μέλλον του σύμπαντος.

Από την άλλη μεριά, η **πιθανοκρατική** θεωρία της Κβαντομηχανικής με τους νόμους της αβεβαιότητας που την διέπουν μας φανέρωσε τα μυστικά της δομής της ύλης και των λειτουργιών του μικρόκοσμου των στοιχειωδών σωματιδίων.

Καμία άλλη επιστήμη όμως δεν πραγματοποίησε τόσο εντυπωσιακά άλματα όσο η Βιολογία και συγκεκριμένα ο κλάδος της Γενετικής: Αποκαλύπτοντας τη δομή του DNA και τον ρόλο των γονιδίων στο εσωτερικό του κυττάρου, μας οδήγησε στο συμπέρασμα ότι, παρά την ύπαρξη συγκεκριμένων κανόνων διάταξης των βάσεων στη διπλή έλικα, τελικά η ζωή δοκιμάζει, ως ένα βαθμό τυχαία, διαφορετικούς συνδυασμούς γονιδίων, επιλέγοντας τελικά αυτόν που είναι περισσότερο ανθεκτικός στις περιβαλλοντικές συνθήκες.

Όμως, στον αιώνα μας δεν έλειψαν και οι εντυπωσιακές ανακαλύψεις στο χώρο των Μαθηματικών: Στις αρχές του 1900, ο Αγγλος Μαθηματικός και Φιλόσοφος Bertrand Russel κλόνησε συθέμελα το οικοδόμημα της Συνολοθεωρίας, προτείνοντας παραδείγματα συνόλων για τα οποία ήταν αδύνατο να απαντηθούν βασικά ερωτήματα, όπως π.χ. το αν ανήκαν ή όχι στον εαυτό τους.

Το θέμα επίσης της **πληρότητας** και **αυτοσυνέπειας** μιας μαθηματικής θεωρίας έθιξε και ο ιδιοφυής Ούγγρος Μαθηματικός K. Gödel, μέσω μιας σειράς εκπληκτικών θεωρημάτων που απέδειξε γύρω στα 1930. Το κύριο αποτέλεσμα του Gödel ήταν ότι υπάρχουν μαθηματικές θεωρίες οι οποίες είναι αδύνατον να είναι πλήρεις και συγχρόνως συνεπείς με τον εαυτό τους. Έτσι, διατυπώνοντας μια θεωρία υπό τη μορφή αλγόριθμου, ο οποίος σταματάει ανάλογα με το αν έχει βρεθεί λύση ή όχι η λύση του προβλήματος, είναι δυνατόν να **μην μπορούμε ποτέ να προβλέψουμε** με απόλυτη σιγουριά αν ο αλγόριθμος τελικά τερματίζεται ή όχι!

Συμπεραίνουμε λοιπόν από τα παραπάνω ότι, σε όλες τις βασικές έννοιες των θετικών επιστημών, η τύχη και η βεβαιότητα συνυπάρχουν, χωρίς να είναι δυνατόν πάντα να τις διαχωρίσουμε πλήρως. Σε κάθε περίπτωση βέβαια, το πρώτο βήμα του επιστήμονα είναι να προσδιορίσει το **ποσοστό** της τύχης, σε σχέση με αυτό της βεβαιότητας, ώστε να αποφανθεί μέχρι ποιο σημείο θα ήταν δυνατόν να βελτιωθεί η δυνατότητα πρόβλεψης του συγκεκριμένου φαινομένου.

Η διαλεκτική αυτή μεταξύ βεβαιότητας και τύχης γίνεται ολοφάνερη στην Επιστήμη της Πολυπλοκότητας και ειδικότερα στη θεωρία του Χάους: Όπως προσπαθήσαμε να δείξουμε εδώ, η θεωρία αυτή ήρθε να γεφυρώσει το χάσμα ανάμεσα στη Στατιστική και την Κλασική Μηχανική. Επισημαίνοντας την ενδογενή αστάθεια που

χαρακτηρίζει ευρείες περιοχές στο χώρο των φάσεων, το χάος μας αποκάλυψε την **αναγκαιότητα** μιας **στατιστικής ανάλυσης** της δυναμικής στις εν λόγω χαοτικές περιοχές.

Έτσι μάθαμε ότι η «αβεβαιότητα» και το «τυχαίο» δεν είναι εξωτερικοί παράγοντες που χρειάζεται να εισαγάγουμε τεχνητά στις εξισώσεις μας, για να μιμηθούμε την τάση προς την ισορροπία που εμφανίζουν τα συστήματα της Θερμοδυναμικής. Είναι βασικοί συντελεστές που είναι παρόντες μέσα στις χαοτικές περιοχές και το αν τελικά θα επηρεάσουν ή όχι τη δυναμική θα εξαρτηθεί από την επιλογή των αρχικών συνθηκών.

Καταλήγοντας λοιπόν, μπορούμε να πούμε ότι, με το τέλος του 20ου αιώνα φτάσαμε στην απάντηση της διαφοράς ανάμεσα στη Στατιστική και την Κλασική Μηχανική και την κατανόηση της διάκρισης ανάμεσα στην **τυχειότητα** και τον **ντετερμινισμό**: Φαίνεται ότι ο κόσμος μας είναι **κατά κύριο λόγο αιτιοκρατικός** και περιγράφεται από ντετερμινιστικά συστήματα εξισώσεων, η ομορφιά του όμως και τα απρόοπτα και γοητευτικά μυστικά του δεν θα λείψουν ποτέ αφού θα είναι πάντοτε κρυμμένα μέσα στις **χαοτικές περιοχές** της μη γραμμικής μαθηματικής περιγραφής του.

## 5. Βιβλιογραφία

1. J. Gleick, «Χάος: Μία Νέα Επιστήμη», Εκδ. Κάτοπτρο, Αθήνα, 1990 (Viking Penguin, New York, 1987).
2. Α. Μπούντης, «Δυναμικά Συστήματα και Χάος», Τόμος Α', Εκδ. Γ. Παπασωτηρίου, Αθήνα, 1995.
3. Α. Μπούντης, «Δυναμικά Συστήματα και Χάος», Τόμος Β', Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 1997.
4. Α. Μπούντης, «Ο Θαυμαστός Κόσμος των Φράκταλ», Leader Books, Athens, 2004.
5. «Τάξη και Χάος», Τόμοι Α', Β', Γ', Δ', Ε', Στ', Ζ', και Η' Πρακτικών Ελληνικών Θερινών Σχολείων/Συνεδρίων, επιμ. Α. Μπούντης, Σπ. Πνευματικός και Στ. Πνευματικός, εκδ. Γ. Πνευματικός, Αθήνα, 1988, 1990, 1993, 1998, 1999, και 2000, 2001 και 2003.
6. J. S. Nicolis, «Dynamics of Hierarchical Systems: An Evolutionary Approach», Springer Verlag, Berlin, 1986.
7. G. Nicolis και I. Prigogine, «Exploring Complexity», W. H. Freeman, New York, 1989.
8. G. Nicolis, «Introduction to Nonlinear Science», Cambridge University Press, 1995.
9. H. O. Peitgen, H. Jurgens και D. Saupe, «Chaos and Fractals», Springer Verlag, Berlin, 1992.
10. M. Barnsley, "Fractals Everywhere", Academic Press, San Diego, 1988.
11. M. Schroeder, «Fractals, Chaos and Power Laws», W. H. Freeman, New York, 1991.
12. I. Stewart, «Παίζει ο Θεός Ζάρια;», Εκδ. Κωσταράκη, Αθήνα, 1991 (Blackwell, 1989).
13. I. Prigogine και I. Stengers, «Τάξη Μέσα από το Χάος», εκδ. Κέδρος, 1986 (Heinemann, London, 1984).