Êþóôáò Áè. Äñüóïò

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΕΨΗ

Τόμ. 1ος: Μαθηματικές Περιηγήσεις

ÐÜôñá 1999

«ÊÜèå ìáèçìáôéêü ôáîßäé
óôçí áöçñçìÝíç ãåíéêüôçôá,
ðñÝðåé íá áñ÷ßæåé êáé íá ôåëåéþíåé
óôï óõãêåêñéìÝíï êáé óôï åéäéêü»

R. Courant

Ôï ÷áñáêôéêü ôïõ Escher, ðïõ õðÜñ÷åé óôï åîþöõëëï, ìáò äßíåé ìå èáõìáóôü ôñüðï ôç ó÷Ýóç ôùí áöçñçìÝíùí ìáèçìáôéêþí, ôùí åðé-óôçìþí êáé ôïõ ðñáãìáôéêïý êüóìïõ.

Ïé åðéêáëýøåéò ôïõ åðéðÝäïõ (Èåùñßá ÏìÜäùí-tesselations) ðáñéóôÜíïõí ôá áöçñçìÝíá ìáèçìáôéêÜ. Ìðáßíïíôáò ç óáýñá óôï ÷áñôß, áðü óõãêåêñéìÝíç ãßíåôáé áãçñçìÝíç êáé áöïý åìðëïõôéóôåß ìå ôéò ìáèçìáôéêÝò èåùñßåò, âãáßíåé áðü ôï ÷áñôß êáé ãßíåôáé îáíÜ óõãêåêñéìÝíç. Åôóé üðùò åßíáé ìáèçìáôéêÜ óïöÞ, êõñéåýåé ôéò öõóéêÝò åðéóôÞìåò (ôï âéâëßï), ôç Ãåùìåôñßá (ôñßãùíï) êáé ôåëéêÜ âñßóêåôáé óôçí êïñõöÞ ôïõ äùäåêÜåäñïõ, ðïõ êáôÜ ôïí ÐëÜôùíá óõìâïëßæåé ôï óýìðáí. Å÷ïíôáò ôçí øåõäáßóèçóç üôé åßíáé êõñßáñ÷ç ôïõ óýìðáíôïò, îåöõóÜåé ìå áõôáñÝóêåéá, áëëÜ ôåëéêÜ îáíáðÝöôåé óôç óêëçñÞ ðñáãìáôéêüôçôá (ôóéãÜñá êáé óðßñôá), ãéá íá îáíáñ÷ßóåé Üëëç ìéá ðåñéÞãçóç, áð' ôçí ïðïßá åëðßæåé íá âãåß óïöþôåñç.

ÊÜèå ãíÞóéï áíôßôõðï öÝñåé ôçí õðïãñáöÞ ôïõ óõããñáöÝá:

+3(0.61) 997-387
cdrossos@math.upatras.gr
http://www.math.upatras.gr/~cdrossos/

Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ

Το βιβλίο αυτό, άρχισε σαν πρόχειρες σημειώσεις για το μάθημα του πρώτου έτους των Μαθηματικών : «ΠΕΡΙΗΓΗΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ», που ενσωματώθηκε στο νέο πρόγραμμα σπουδών του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών, το 1983.

Στόχος του μαθήματος αυτού είναι, να δώσει στο νέο φοιτητή των Μαθηματικών, μία σφαιρική αντίληψη για τα Μαθηματικά και τις μεθόδους που χρησιμοποιούν. Επιπλέον επιδιώκεται αφ' ενός να προετοιμάσει το φοιτητή τεχνικά, μεθοδολογικά, αλλά και ψυχολογικά για την επιτυχή αντιμετώπιση των μετέπειτα σπουδών του, αφ'ετέρου δε, να του δώσει ένα ελάχιστο υπόβαθρο μαθηματικής κουλτούρας, απαραίτητης για τη δημιουργία ενός κατάλληλου κλίματος, μέσα από το οποίο μπορεί να ευδοκιμήσει η μαθηματική σκέψη. Η ανάπτυξη της διαίσθησης του φοιτητή και γενικότερα τα μη-αναλυτικά χαρακτηριστικά των Μαθηματικών, αποτελούν βασικό στόχο του βιβλίου. Τα Μαθηματικά ως πεπτουσία (βλ. Σχήμα 1.25), δεν περιορίζονται μόνον στα αναλυτικολογικά τους χαρακτηριστικά.

Το περιηγητικό πνεύμα του μαθήματος δεν εξαντλείται βεβαίως σε μια συρραφή κάποιων διαφορετικών μαθηματικών γνώσεων, αλλά κυρίως πραγματώνεται στο πλησίασμα και την προοπτική σύλληψη της ουσίας των μαθηματικών, μέσα ακριβώς από τις γνώσεις αυτές και τις σχετικές παρατηρήσεις και σχόλια.

Στην απεραντοσύνη της αναλυτικής μαθηματικής γνώσης και τον κυκεώνα της κατακερματισμένης μαθηματικής ουσίας, αναζητούμε, μέσα από τη συνθετική σκέψη, την αλληλουχία των εννοιών και των μαθηματικών θεωριών, αλλά και τη σχέση τους με την αντικειμενική πραγματικότητα.

Ολα αυτά προοπτικά, οδηγούν και μετατρέπουν την «ξερή» τεχνική μαθηματική γνώση σε μια συνθετική μαθηματική σοφία. Είναι ακριβώς τότε, που τα μαθηματικά και η φιλοσοφία ενώνονται σε μια «τέλεια γνώση».

Την τελευταία δεκαπενταετία το βιβλίο αυτό έχει εκτυπωθεί σε πολλές προκαταρκτικές εκδόσεις, κυρίως για την εξυπηρέτηση των φοιτητών του Μαθηματικού Τμήματος. Μετά από την πείρα αυτών των ετών, και μετά από πολλές εκδοτικές περιπέτειες, οι παλιές πρόχειρες σημειώσεις ξαναγράφτηκαν για να αποτελέσουν το παρόν βιβλίο,

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΕΨΗ

που τελικά θα αναπτυχθεί σε δύο τόμους:

Τόμος 1ος: Μαθηματικές Περιηγήσεις.

Τόμος 2ος: Το Περιεχόμενο, η Μεθοδολογία και η Φιλοσοφία των Μαθηματικών

Τα Κεφάλαια $0, 1$ και 3 μαζί με μία μικρή εισαγωγή στο Κεφάλαιο 2 του παρόντος πρώτου τόμου, αποτελούν την ύλη γύρω από την οποία κυρίως επικεντρώνονται οι διαλέξεις του μαθήματος. Επιπρόσθετα υπάρχει συνήθως ένα άτυπο και προαιρετικό εβδομαδιαίο σεμινάριο, όπου γίνονται ελεύθερες συζητήσεις σχετικά με τα μαθηματικά. Όπως συνηθίζεται, υπάρχουν και φροντιστηριακές ώρες, όπου η έμφαση δίνεται σε τεχνικές από τη Θεωρία Επίλυσης Προβλήματος (Problem Solving). Πριν κλείσουμε το προλογικό αυτό σημείωμα, θα θέλαμε να παρατηρήσουμε τα ακόλουθα:

(i) Η μέθοδος με την οποία προσπαθούμε να πετύχουμε τους στόχους μας είναι η ακόλουθη:

Με τη χρήση στοιχειωδών μαθηματικών στο τεχνικό επίπεδο και ως αφορμή, προσπαθούμε να διαυγάσουμε έννοιες και αποτελέσματα με συνθετικό-διαισθητικό τρόπο και με αντιλήψεις και φιλοσοφικές θεωρήσεις που προέρχονται από τεχνικά απρόσιτες, για το νεοεισερχόμενο, μαθηματικές θεωρίες (Μη- Συμβατικά Μαθηματικά, Θεωρία Τόπων και Κατηγοριών κ.λπ.) Η προοπτική αυτή προβολή πάνω σε προχωρημένες έννοιες και θεωρήσεις, βασισμένη σε συνθετικό και ενορατικό τρόπο, άλλοτε καταφέρνει να διαυγάσει τα πράγματα και άλλοτε παρουσιάζεται ως ασύλληπτη για τον αναγνώστη. Αυτό είναι φυσιολογικό και νομίζουμε θετικό για το βιβλίο και πρέπει να αναμένεται. Με την σταδιακή ωρίμανση όμως του αναγνώστη, διαυγάζονται και τα λίγα σημεία, που αρχικά θεωρήθηκαν ασαφή και ασύλληπτα.

(ii) Πρέπει από την αρχή να γίνει ένας σαφής διαχωρισμός μεταξύ τεχνικής μαθηματικής γνώσης και συνθετικής μαθηματικής σοφίας. Για τον Descartes και τον Leibniz «η σοφία είναι η τέλεια γνώση των αρχών όλων των επιστημών και της τέχνης εφαρμογής των». Στο Λεξικό της Φιλοσοφίας του A. Ladande, (τομ. τρίτος, Πάπυρος), βρίσκουμε την ακόλουθη άποψη του M. Bondel: «Στην παραδοσιακή γλώσσα, ο όρος **σοφία** έχει μία ισχυρή και τεχνική σημασία, η οποία επιφυλάσσει τη χρήση του για μία μορφή θεωρητικής και έμφυτου, συγκεκριμένης και συνθετικής, αγαπητής και απολαυστικής γνώσεως, της οποίας η αφηρημένη νόηση ή η διεξοδική σκέψη, δεν μπορούν ποτέ να φθάσουν την πληρότητα και το φως της, την ενότητα και την αποτελεσματικότητά της. Αυτή κατέχει τις αρχές που δεν τις παίρνει από καμιά άλλη επιστήμη. Και με μία ματιά πηγαίνει από τις υψηλές αιτίες στους τελευταίους σκοπούς. 'Η επιστήμη αποκτάται με τη μελέτη, αλλά η σοφία είναι έμφυτη μέσα μας' (S. Thomas, S. Th. I, Ia6). Ηταν ταυτόχρονα **γνώση** και **κλίση**, προχωρεί με την ενόραση του πραγματικού που είναι ατομικό με τον τρόπο της ομοφυΐας και της ενώσεως... Η επιστήμη είναι η πράξη του πνεύματος που γνωρίζει.

Η σοφία είναι η εμπειρία αυτής της ίδιας της πράξεως του πράγματος που γνωρίσαμε και γευτήκαμε, του όντος που επικοινωνεί και αφήνεται να κατέχεται, είναι η γνώση του intellectus με το ουσιαστικό του αντικείμενο, αλλά μέσα από την κύρια ενέργεια αυτού του ίδιου του αντικειμένου».

Σ' αυτό το βιβλίο, μέσα από παρατηρήσεις, σχόλια εικονικές παραστάσεις, φυσικές αναλογίες κ.λπ. γίνεται προσπάθεια να συντεθεί η τεχνική μαθηματική γνώση με τη συνθετική-φιλοσοφική διαύγαση. Η τακτική αυτή, εναρμονίζεται με το Δεύτερο Θεώρημα μη-Πληρότητας του Gödel, το οποίο συνεπάγεται ότι δεν πρόκειται ποτέ να πείσουμε τον εαυτό μας, ότι τα Μαθηματικά δεν περιέχουν αντινομίες και αντιφάσεις μέσα από μια τυπική απόδειξη συνέπειας. Το μόνο που απομένει είναι η ανάπτυξη μιας αυθεντικής και ξεκάθαρης μαθηματικής διαίσθησης, μέσα από την οποία μπορούμε να κερδίσουμε μια βεβαιότητα για τη συνέπεια των αποτελεσμάτων μας. Στο βιβλίο αυτό η εν λόγω διαίσθηση βασίζεται στην φιλοσοφική θέση ότι τα μαθηματικά αντικείμενα μέσα από τη διαλεκτική της αφαίρεσης του μακρόκοσμου, έχουν και αυτά κληρονομήσει ιδιότητες εξαιρετικά παρόμοιες αν όχι και ταυτόσημες με τις ιδιότητες των υλικών μακροσκοπικών σωμάτων. Έχουμε δηλαδή εδώ μια προσπάθεια «επιστημονικοποίησης των Μαθηματικών» αντί της συνηθισμένης «μαθηματικοποίησης των επιστημών». Η θέση αυτή εκφράζεται πολύ καλά από το ακόλουθο απόσπασμα του P. Cohen (μετάλλιο Fields): *«...όλη η διαίσθησή μας προέρχεται από την πίστη μας σ' ένα φυσικό, σχεδόν υλικό μοντέλο του μαθηματικού σύμπαντος.»*[1]

Πρέπει ακόμα να σημειωθεί, ότι η πλειοψηφία των επαγγελματιών μαθηματικών, παρ' όλο που η συνθετική σκέψη είναι η δύναμη-οδηγός στη δουλειά τους, δε συμπαθούν, αν κιόλας δεν εχθρεύονται, τις εξηγήσεις και παρατηρήσεις συνθετικού τύπου, από το φόβο, ότι είναι δυνατόν να οδηγήσουν σε λαναθασμένες αντιλήψεις. Αυτό φαίνεται καθαρά από τη ρήση του Hardy: «είναι μία μελαγχολική εμπειρία το να γράφει κανείς για τα μαθηματικά, παρά να αποδεικνύει θεωρήματα !»

Γενικότερα οι επαγγελματίες μαθηματικοί κάτω από το περιοριστικό δόγμα, ότι τα μαθηματικά ασχολούνται μόνο με το ψευδές και το αληθές, μόνο με το $0-1$, μόνο με τα αναλλοίωτα μαθηματικά αντικείμενα, αντιπαθούν και ισχυρίζονται ότι, το ασαφές, το μεταβαλλόμενο, το μερικά σωστό, αλλά και οι φιλοσοφικές θεωρήσεις δεν έχουν θέση στα μαθηματικά.

Τελευταία όμως είμαστε μάρτυρες μιας ραγδαίας εξέλιξης προς την αντίθετη κατεύθυνση. Προς την κατεύθυνση, δηλαδή, που επιγραμματικά χαρακτηρίζουν οι Vopěnka-Hájek: *«Παρουσιάζοντας τη Θεωρία των Ημισυνόλων, οι συγγραφείς ελπίζουν να συμβάλλουν στο να σπάσουν τα δεσμά της φυλακής στα οποία έχουν βρεθεί οι μαθηματικοί. Αυτή η φυλακή είναι η Καντοριανή Θεωρία Συνόλων, οι δε συγγραφείς πιστεύουν ότι οι μαθηματικοί θα δραπετεύσουν και από αυτή, όπως ακριβώς δραπέτευσαν από τη φυλακή του τρισδιάστατου χώρου*[2]*».* Θεωρίες που έχουν αναπτυχθεί, με στόχο την απελευ-

[1] "... all our intuition comes from our belief in a natural, almost physical, model of mathematical universe." (P. Cohen: *Set Theory and the Continuum Hypothesis.* Benjamin, 1966, p.107)

[2] Σχόλιο του συγγραφέα: Δεν είναι καθόλου σίγουρο ότι πράγματι δραπέτευσαν από τον τρισδιάστατο χώρο όχι μόνον τυπικά αλλά ουσιαστικά, αφού διαστάσεις πέρα από τις τρεις ή έστω τέσσερις, μόνον στην μικροσκοπική δομή της «μαθηματικής ύλης» μπορεί να αναζητηθούν. Για παράδειγμα ένα διάνυσμα που αναφέρεται στην κατάσταση υγείας ενός ατόμου και είναι π.χ. διαστάσεως 20, εμπλέκει εκτός ίσως από τις χωρικές συντεταγμένες, και συντεταγμένες που αναφέρονται στην *πίεση* στο *βάρος*, κ.λπ. που είναι χαρακτηριστικά του εσωτερικού επιπέδου του ανθρώπου. Στα μαθηματικά όμως δεν υπάρχει άμεσα εκπε-

θέρωση του μαθηματικού από τα δεσμά του $0-1$, του σταθερού, αναλλοίωτου και απόλυτα ακριβούς, του ενεστωτικού απείρου κλπ. είναι:

η Θεωρία των Πιθανοτήτων και τα μη-προσθετικά μέτρα, η Στατιστική, η απειροστική ανάλυση και τα μη συμβατικά μαθηματικά γενικώς (μοντέλα του Boole), η Θεωρία των Θυσάνων ή Δραγμάτων (Sheaf Theory), η Θεωρία των Κατηγοριών και Τόπων, η Θεωρία των Ασαφών Συνόλων και των Πλειότιμων Λογικών, η Εναλλακτική Θεωρία Συνόλων του Vopěnka και η Εσωτερική Θεωρία Συνόλων του Nelson, κ.λπ. 'Ολα αυτά αλληλοσυσχετίζονται και καθορίζουν έναν κοινό πυρήνα εννοιών και μεθόδων, που θα μπορούσε να ονομαστεί *μη-Καντοριανά Μαθηματικά.* Είναι ακριβώς τα μαθηματικά που βασίζονται, στο αόριστο, στο μη-ακριβές, σε σχέσεις μη-διακριτότητας, στο εν δυνάμει άπειρο, κ.λπ.

Ολες αυτές οι θεωρίες έχουν ένα μη - Καντοριανό, και «επιστημικό» (epistemic) χαρακτήρα, καθώς επίσης και έναν τοπικό προσανατολισμό, εναρμονίζονται δε πλήρως με τις ανάγκες της πληροφορικής, της τεχνητής νοημοσύνης και γενικά της μεταβιομηχανικής κοινωνίας της πληροφορίας. Το ενεστωτικό άπειρο, η απόλυτη ακρίβεια και σαφήνεια, η διακριτικότητα, διασαλεύεται και απειλείται από τον αοριστολογικά πεπερασμένο, ασαφή και ρευστό κόσμο της οθόνης του υπολογιστή, επιβάλλοντας έτσι ένα αναπότρεπτο μη - Καντοριανό πλαίσιο για τα μαθηματικά. Ταυτόχρονα έχει αναπτυχθεί λογισμικό υπολογιστικής άλγεβρας, όπως π.χ. το Mathematica, το Maple V, το Reduce, το Derive κ.λπ. που όχι μόνον επιτρέπουν αλλά ίσως επιβάλλουν τη δημιουργία «μαθηματικού εργαστηρίου» όπου ο μαθηματικός μαζί με την ισχυρή οπτικοποίηση ή εξεικόνιση (visualization) που διαθέτει, μπορεί ταυτόχρονα να πειραματίζεται όπως ο φυσικός ή ο χημικός. *Η διαλεκτική αυτή, της πλασματικής πραγματικότητας του νου και της εικονικής πραγματικότητας της οθόνης, σε σχέση με τον πραγματικό κόσμο, μέσα από κατάλληλο λογισμικό υπολογιστικής άλγεβρας, θα είναι η βάση και η μόνιμη πηγή έμπνευσης για τα μαθηματικά του* $21^{ου}$ *αιώνα, που σε τελευταία ανάλυση θα αναδείξουν όλα τα μη-Καντοριανά χαρακτηριστικά τους.*

Την προοπτική αυτή τη βλέπουμε ήδη να επηρεάζει τις εξελίξεις στην Τεχνητή νοημοσύνη και Ρομποτική, όπου μια τοπική και μη-Καντοριανή έκφραση των μαθηματικών είναι η βάση για την παραπέρα ανάπτυξη.

Είναι εξ' άλλου γνωστό, ότι κάτω από τη Θεωρία Τόπων, έχουν πλέον συστεγαστεί η Αλγεβρική Γεωμετρία, τα μαθηματικά του διαισθητισμού και οι κατηγορικές λογικές ανώτερης τάξης. Ετσι κοντά στα μαθηματικά του «είναι»

φρασμένα μια θεωρία επιπέδων πραγματικότητας, ούτε μια θεωρία της δομής του σημείου, εκτός ίσως της απειροστικής ανάλυσης.

έχουμε τώρα και τα μαθηματικά του «γίγνεσθαι» που μια έκφρασή τους αποτελεί η Θεωρία Κατηγοριών και Τόπων. Στο μέλλον, η ανάδειξη, η διαισθητική θεμελίωση και κατανόηση όλων των μη-Καντοριανών χαρακτηριστικών των Μαθηματικών, θα κατοχυρώσουν το γνωστό χαρακτηρισμό της Θεωρίας Τόπων ως «Τοποσοφίας».

Το βιβλίο αυτό, προσπαθεί να δει τα στοιχειώδη μαθηματικά από μία τέτοια προχωρημένη φιλοσοφικό-μαθηματική τοποθέτηση, αλλά ταυτόχρονα χρησιμοποιεί την παραδοσιακή έκφραση. Το αναγνωστικό κοινό στο οποίο απευθύνεται το βιβλίο, είναι κυρίως οι φοιτητές των μαθηματικών, αλλά και άλλων κλάδων, οι καθηγητές των μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, οι φιλόσοφοι που ενδιαφέρονται για μία φιλοσοφίζουσα εισαγωγή στα μαθηματικά, οι ψυχολόγοι που θα ήθελαν να διαπιστώσουν αν υπάρχουν ευέλικτα μαθηματικά κατάλληλα για τη μαθηματικοποίηση των «μη-σκληρών» ή «μαλακών»[3] επιστημών, και τέλος σ' όλους όσους ενδιαφέρονται για μία εισαγωγή στην ουσία των μαθηματικών.
Το βιβλίο αυτό ακολουθεί όσο είναι δυνατόν την ακόλουθη γενική μέθοδο:

(i) **Εννοιολογική Ανάπτυξη.** Στη πρώτη αυτή φάση, γίνεται προσπάθεια για την ουσιαστική πρόσληψη της έννοιας. Αυτό επιτυγχάνεται μέσα από ιστορικά σχόλια, ενορατικές παρατηρήσεις, εμπειρικές προσομοιώσεις αλλά και οπτικοποιήσεις εννοιών, όπως η Ρωμαϊκή κρήνη, κ.λπ. Με τον τρόπο αυτό ενισχύεται η ανάπτυξη κριτικής σκέψης, η δημιουργικότητα, η ευρηματικότητα, και η φαντασία του σπουδαστή.

(ii) **Τεχνική Ανάπτυξη.** Στη φάση αυτή εισάγονται με τεχνικό τρόπο, οι έννοιες που έχουν ήδη εμπεδωθεί στο προηγούμενο βήμα.

(iii) **Προοπτικά Σχόλια.** Υπάρχουν πολλά πολύ προχωρημένα θέματα των Μαθηματικών, που είναι απρόσιτα για το νεοεισερχόμενο. Είναι δυνατόν ωστόσο, με τη χρήση μιας διαισθητικής γλώσσας, να μεταβιβαστεί η ουσία των εννοιών αυτών. Όταν αυτός ο δύσκολος στόχος είναι δυνατός θα προωθείται.

(iv) **Περίληψη.** Είναι πάντοτε επιθυμητό, στο τέλος κάθε ενότητας να τονίζονται τα κύρια σημεία της ανάπτυξης. Η εργασία αυτή, ακόμα και στην περίπτωση που δεν υπάρχει εδώ για διάφορους λόγους, θα πρέπει να είναι βασικό μέλημα αυτού του ίδιου του σπουδαστή.

[3] soft sciences

(iv) Επίλυση Ασκήσεων και Συμπληρώματα. Κάθε βιβλίο θα πρέπει να δίνει οργανωμένες σε κατηγορίες ασκήσεις μαζί με υποδειγματικά λυμένες ασκήσεις για κάθε κατηγορία. Με την εμπειρία από την ενεργητική λύση ασκήσεων ο φοιτητής εκπαιδεύει το μη-αναλυτικό δεξί ημισφαίριό του στην κατάλληλη δόμηση των σχετικών προβλημάτων και μεθόδων. Αν το βιβλίο δεν κάνει τα παραπάνω με ικανοποιητικό τρόπο, τότε θα πρέπει ο φοιτητής με δική του πρωτοβουλία να κάνει κάτι ανάλογο.

Και μια τελευταία λέξη. Η σωστή διδακτική διαδικασία τελικά, αρχίζει με το να απευθύνεται κατάλληλα πρώτα στο δεξί ημισφαίριο του εκγεφάλου και να καταλήγει στην τεχνική ανάπτυξη, που τελικά είναι μια διαλεκτική σύνθεση των ικανοτήτων του δεξιού και του αριστερού ημισφαιρίου. Επίσης όπου είναι δυνατόν θα πρέπει να προτιμώνται οι γεωμετρικοί «συναλλοίωτοι ορισμοί» από τους αλγεβρικούς «ανταλλοίωτους». Περισσότερα για τα θέματα αυτά στον δεύτερο τόμο. Στο βιβλίο δεν ακολουθείται με γραμμικό τρόπο η πιο πάνω διαδικασία, αλλά γίνεται ωστόσο προσπάθεια για μια διαλεκτική μη-γραμμική σύνθεσή τους.

Η στοιχειοθεσία του βιβλίου έγινε από το συγγραφέα, με τη βοήθεια του WTEX και του DviWin για windows του Ιπποκράτη Σεντούκα, και του Ελληνικού LaTeX των Μοσχοβάκη-Σπηλιώτη. Ο κ. Σεντούκας εκτός του ότι μου διέθεσε τις τελευταίες εκδόσεις των ανωτέρω προγραμμάτων, με βοήθησε στο χειρισμό των γραφικών, μέσω του DviWin. Τον ευχαριστώ θερμά και από τη θέση αυτή. Προηγούμενες πρόχειρες εκδόσεις είχαν στοιχειοθετηθεί με το VTEX, που είχε εξελληνιστεί από το συγγραφέα. Ευχαριστίες οφείλονται στους φοιτητές μου, Ανδρέα Παπαδόπουλο και Άκη Ματζάρη για τη βοήθειά τους στη στοιχειοθεσία.

Ευχαριστίες επίσης οφείλονται στους φίλους μου, Καθηγητές Γ. Δάσιο και Γ. Γ. Ρούσσα, καθώς επίσης και στους συναδέλφους μου Ε. Παπαδοπετράκη και Α. Πατρώνη. Ευχαριστώ επίσης όλους τους φίλους και συναδέλφους, πολλούς για να αναφερθούν εδώ ονομαστικά, που με τον έναν ή άλλο τρόπο βοήθησαν στη συγγραφή αυτού του βιβλίου.

Τέλος ευχαριστώ τη σύζυγό μου Θέκλη και τα παιδιά μου Θανάση και Νικόλα, για την υπομονή που έδειξαν κατά τη διάρκεια της συγγραφής του βιβλίου αυτού, αλλά και για την ποικίλη βοήθεια που μου προσέφεραν.

Π Α Τ Ρ Α 1999

Περιεχόμενα

(Exert from the Introduction)

INTRODUCTION

This book started as Lecture Notes for a first year course in The Department of Mathematics -University of Patras. The title of the course was ***«A Mathematical Journey»*** which have been incorporated into the new Program of Study of the Mathematics Department in 1983**.**

The target of this course is to give to the new student of mathematics, a global conception for mathematics and their methods. In addition, on the one hand it tries to prepare the student from a technical, methodological and psychological point of view, in order to face successfully the subsequent studies, and on the other hand to give him/her a minimum of a mathematical culture, indispensable for the creation of an appropriate climate, on which a mathematical thinking can be developed.

The development of the intuition, and in general the non-analytic aspects of mathematics constitute a basic objective of the book. The mathematics as «pemptousia» (see Figure 1.25) does not restrict them only into their analytic aspects.

The expedition inceprion of the course, certainly is not exhausted with a «sewing together» certain mathematical pieces, but mainly it is materialized by approaching and grasping in perspective, the mathematical substance, exactly through these pieces of mathematics and the related remarks and comments.

In the wilderness of the analytical mathematical knowledge and the in the confusion of the splintering of mathematical substance, we are looking , using synthetic reasoning, for the interrelationship of the mathematical concepts and theories, but also for their relationship with thw real objective reality.

All these lead and transform the «dry» technical mathematical knowledge into a synthetic mathematical wisdom. It is exactly then where mathematics and philosophy are united into a «perfect knowledge».

In the last 15 years this book have been printed into many preliminary editions, mainly for the service of the students of the Department of Mathematics. After all these experiences and after many «publication adventures» the old Notes have been rewritten to form the present book***:***

INTRODUCTION TO MATHEMATICAL THOUGHT

which finally shall be developed into two volumes:

Vol.1 Mathematical Journeys.
Vol.2 The Content, the Method, and the Philosophy of Mathematics.

In the present book (vol. 1), Chapters 0,1 and 3, together with a crash introduction to Chapter 2, constitute the material of the lectures. In addition we run a non compulsory, weekly seminar, where we held free discussions concerning mathematics. In the «exercises session» we were focused on the Problem Solving techniques. ...

CONTENTS