ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ ΑΝΩ Ή ΚΑΤΩ ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ

Κ. Πετρόπουλος, Στατιστική Συμπερασματολογία ΙΙ

Κ. Πετρόπουλος

Ορισμός Διαστήματος Εμπιστοσύνης (Δ.Ε.)

Αν $T_1 = T_1(\underset{\sim}{X})$ και $T_2 = T_2(\underset{\sim}{X})$ είναι στατιστικές συναρτήσεις με $T_1 < T_2$, τότε το τυχαίο διάστημα $[T_1(\underset{\sim}{X}), T_2(\underset{\sim}{X})]$ ονομάζεται διάστημα εμπιστοσύνης (Δ.Ε.) για την παραμετρική συνάρτηση $g(\theta)$ με συντελεστή εμπιστοσύνης (σ.ε.) $100(1-a)\%$, αν

$$P_\theta(T_1(\underset{\sim}{X}) \leq g(\theta) \leq T_2(\underset{\sim}{X})) = 1 - a\ , \quad \forall\, \theta \in \Theta.$$

Ένας κανονικός πληθυσμός

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Δ.Ε. για την μέση τιμή με σ.ε. $100(1-a)\%$-Διασπορά γνωστή

$$\left[\bar{X} - z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \ \bar{X} + z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Δ.Ε. για την μέση τιμή με σ.ε. $100(1-a)\%$-Διασπορά άγνωστη

$$\left[\bar{X} - t_{n-1,a/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\ ,\ \ \bar{X} + t_{n-1,a/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

- $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$
- $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

Ένας κανονικός πληθυσμός

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Δ.Ε. για τη διασπορά με σ.ε. $100(1-a)\%$-μέση τιμή γνωστή

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\mathcal{X}^2_{n,a/2}}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\mathcal{X}^2_{n,1-a/2}} \right]$$

Δ.Ε. για την διασπορά με σ.ε. $100(1-a)\%$-μέση τιμή άγνωστη

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\mathcal{X}^2_{n-1,a/2}}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\mathcal{X}^2_{n-1,1-a/2}} \right]$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Δύο κανονικοί ανεξάρτητοι πληθυσμοί

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα $\sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$.
$Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ τυχαίο δείγμα $\sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$.

Δ.Ε. για το $\mu_1 - \mu_2$ με σ.ε. $100(1-a)\%$-Διασπορές γνωστές

$$\left[\bar{X} - \bar{Y} - z_{a/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}\ ,\ \ \bar{X} - \bar{Y} + z_{a/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}\right]$$

Δ.Ε. για το $\mu_1 - \mu_2$ με σ.ε. $100(1-a)\%$-Διασπορές άγνωστες $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$

$$\left[\bar{X} - \bar{Y} - t_{n+m-2,a/2} S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\ ,\ \ \bar{X} - \bar{Y} + t_{n+m-2,a/2} S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\right]$$

- $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $\bar{Y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} Y_i$
- $S_p^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}$, $S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$, $S_2^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y})^2$

Δύο κανονικοί ανεξάρτητοι πληθυσμοί

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα $\sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$.
$Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ τυχαίο δείγμα $\sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$.

Δ.Ε. για το σ_1^2/σ_2^2 με σ.ε. $100(1-a)\%$-μέσες τιμές γνωστές

$$\left[\frac{1}{F_{n,m,a/2}} \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2}, \quad \frac{1}{F_{n,m,1-a/2}} \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2}\right]$$

Δ.Ε. για το σ_1^2/σ_2^2 με σ.ε. $100(1-a)\%$-μέσες τιμές άγνωστες

$$\left[\frac{1}{F_{n-1,m-1,a/2}} \frac{S_1^2}{S_2^2}, \quad \frac{1}{F_{n-1,m-1,1-a/2}} \frac{S_1^2}{S_2^2}\right]$$

- $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $\bar{Y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} Y_i$
- $S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$, $S_2^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y})^2$
- $\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$, $\hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y})^2$

Ασυμπτωτικά Διαστήματα Εμπιστοσύνης (Α.Δ.Ε.) - Ένας πληθυσμός

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από **άγνωστη** κατανομή, με $EX = \mu$

Α.Δ.Ε. για την μέση τιμή με σ.ε. $100(1-a)\%$

$$\left[\bar{X} - z_{a/2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\ ,\ \ \bar{X} + z_{a/2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right]$$

Εφαρμογή: Α.Δ.Ε. για το ποσοστό με σ.ε. $100(1-a)\%$

$$\left[\bar{X} - z_{a/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\ ,\ \ \bar{X} + z_{a/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right]$$

- $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Ασυμπτωτικά Διαστήματα Εμπιστοσύνης (Α.Δ.Ε.) - Δύο πληθυσμοί

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από **άγνωστη** κατανομή με $EX = \mu_1$.
$Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ τυχαίο δείγμα από **άγνωστη** κατανομή με $EY = \mu_2$.

Α.Δ.Ε. για το $\mu_1 - \mu_2$ με σ.ε. $100(1-a)\%$

$$\left[\bar{X} - \bar{Y} - z_{a/2}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{m}}\ ,\ \ \bar{X} - \bar{Y} + z_{a/2}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{m}}\right]$$

Εφαρμογή: Α.Δ.Ε. για τη διαφορά των ποσοστών με σ.ε. $100(1-a)\%$

$$\left[\bar{X} - \bar{Y} - z_{a/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n} + \frac{\bar{Y}(1-\bar{Y})}{m}}\ ,\ \ \bar{X} - \bar{Y} + z_{a/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n} + \frac{\bar{Y}(1-\bar{Y})}{m}}\right]$$

- $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,\ \bar{Y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} Y_i$
- $\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2,\ \hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y})^2$

Ασκήσεις

Άσκηση 1

X : μετράει την επιφάνεια που καλύφθηκε από το χρώμα των κουτιών,

$$X_1, \ldots, X_{12} \text{ τυχαίο δείγμα } \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$\left[\bar{X} - t_{n-1,a/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\ ,\ \ \bar{X} + t_{n-1,a/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\bar{X} = 65\ ,\quad s = 3\ ,\quad n = 12\ ,\quad 1 - a = 0.9\ ,\quad t_{11,0.05} = 1.796$$

$$(63.44\ ,\ \ 66.56)$$

Ασκήσεις

Άσκηση 2

X : μετράει το πλήθος των ατόμων που δήλωσαν προτίμηση στα τσιγάρα τύπου A.

$$X_1, \ldots, X_{500} \text{ τυχαίο δείγμα } \sim \mathcal{B}(1, p)$$

$$\left[\bar{X} - z_{a/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\ ,\ \ \bar{X} + z_{a/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right]$$

$$\bar{X} = \frac{311}{500}\ ,\ \ n = 500\ ,\ \ 1 - a = 0.95\ ,\ \ z_{0.025} = 1.96$$

$$(0.58\ ,\ \ 0.66)$$

Άσκηση 3

X : μετράει το βάρος του πακέτου από την παραγωγή M_1
Y : μετράει το βάρος του πακέτου από την παραγωγή M_2

$$X_1, \ldots, X_8 \text{ τυχαίο δείγμα } \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$$

$$Y_1, \ldots, Y_7 \text{ τυχαίο δείγμα } \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$$

Ερώτημα: Υπάρχει ισότητα διασπορών;

NAI $\dashrightarrow \left[\bar{X} - \bar{Y} - t_{n+m-2,a/2} S_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\ ,\ \bar{X} - \bar{Y} + t_{n+m-2,a/2} S_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\right]$

OXI $\dashrightarrow \left[\bar{X} - \bar{Y} - z_{a/2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{m}}\ ,\ \bar{X} - \bar{Y} + z_{a/2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{m}}\right]$

$$\bar{x} = 94.3\ ,\quad \bar{y} = 85.7\ ,\quad s_1^2 = 5.7\ ,\quad s_2^2 = 6.2\ ,\quad n = 8\ ,\quad m = 7\ ,\quad 1 - a = 0.95\ ,$$

$$t_{13,0.025} = 2.16\ ,\quad z_{0.025} = 1.96$$

$$(5.88\ ,\quad 11.32)\ (6.3\ ,\quad 10.9)$$

Άσκηση 4

Y_1 : μετράει την τιμή κλεισίματος της 1ης μετοχής
Y_2 : μετράει την τιμή κλεισίματος της 2ης μετοχής

$$Y_{11}, \ldots, Y_{1,16} \text{ τυχαίο δείγμα } \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$$

$$Y_{21}, \ldots, Y_{2,16} \text{ τυχαίο δείγμα } \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$$

$$\left[\frac{1}{F_{n-1,m-1,a/2}} \frac{S_1^2}{S_2^2} , \quad \frac{1}{F_{n-1,m-1,1-a/2}} \frac{S_1^2}{S_2^2} \right]$$

$$s_1^2 = 1.54 \ , \quad s_2^2 = 2.96 \ , \quad n = 16 \ , \quad m = 16 \ , \quad 1 - a = 0.9$$

$$F_{15,15,0.05} = 2.4 \ , \quad F_{15,15,0.95} = \frac{1}{F_{15,15,0.05}} = \frac{1}{2.40} = 0.417$$

$$(0.216 \ , \quad 1.248)$$

Ορισμός Άνω Φράγμα Εμπιστοσύνης (Α.Φ.Ε.) και Κάτω Φράγμα Εμπιστοσύνης (Κ.Φ.Ε.)

Έστω $T_1 = T_1(\underset{\sim}{X})$ και $T_2 = T_2(\underset{\sim}{X})$ είναι στατιστικές συναρτήσεις. Αν,

$$P_\theta(T_1(\underset{\sim}{X}) \leq g(\theta)) = 1 - a\ , \quad \forall\ \theta \in \Theta,$$

τότε η $T_1(\underset{\sim}{X})$ ονομάζεται κάτω φράγμα (Κ.Φ.) για την $g(\theta)$ με συντελεστή εμπιστοσύνης (σ.ε.) $100(1-a)\%$. Ενώ, αν

$$P_\theta(g(\theta) \leq T_2(\underset{\sim}{X})) = 1 - a\ , \quad \forall\ \theta \in \Theta,$$

τότε η $T_2(\underset{\sim}{X})$ ονομάζεται άνω φράγμα (Α.Φ.) για την $g(\theta)$ με συντελεστή εμπιστοσύνης (σ.ε.) $100(1-a)\%$.

Ένας κανονικός πληθυσμός

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Α.Φ.Ε. και Κ.Φ.Ε. για την μέση τιμή με σ.ε. $100(1-a)\%$-Διασπορά γνωστή

$\bar{X} - z_a \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightsquigarrow$ Κ.Φ.Ε. $\qquad \bar{X} + z_a \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightsquigarrow$ Α.Φ.Ε.

Α.Φ.Ε. και Κ.Φ.Ε. για την μέση τιμή με σ.ε. $100(1-a)\%$-Διασπορά άγνωστη

$\bar{X} - t_{n-1,a} \dfrac{S}{\sqrt{n}} \rightsquigarrow$ Κ.Φ.Ε. $\qquad \bar{X} + t_{n-1,a} \dfrac{S}{\sqrt{n}} \rightsquigarrow$ Α.Φ.Ε.

- $\bar{X} = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$
- $S^2 = \dfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$

Δύο κανονικοί ανεξάρτητοι πληθυσμοί

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα $\sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$.
$Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ τυχαίο δείγμα $\sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$.

Α.Φ.Ε. και Κ.Φ.Ε. για το $\mu_1 - \mu_2$ με σ.ε. $100(1-a)\%$-Διασπορές γνωστές

$$\bar{X} - \bar{Y} - z_a\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} \rightsquigarrow \text{Κ.Φ.Ε.} \qquad \bar{X} - \bar{Y} + z_a\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} \rightsquigarrow \text{Α.Φ.Ε.}$$

Α.Φ.Ε. και Κ.Φ.Ε. για το $\mu_1 - \mu_2$ με σ.ε. $100(1-a)\%$-Διασπορές άγνωστες

$$\bar{X} - \bar{Y} - t_{n+m-2,a} S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \rightsquigarrow \text{Κ.Φ.Ε.}$$

$$\bar{X} - \bar{Y} + t_{n+m-2,a} S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \rightsquigarrow \text{Α.Φ.Ε.}$$

- $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $\bar{Y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} Y_i$
- $S_p^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}$, $S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$, $S_2^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y})^2$

Δύο κανονικοί ανεξάρτητοι πληθυσμοί

$X_1, X_2, \dots, X_n$ τυχαίο δείγμα $\sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$.
$Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ τυχαίο δείγμα $\sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$.

Α.Φ.Ε. και Κ.Φ.Ε. για το σ_1^2/σ_2^2 με σ.ε. $100(1-a)\%$-μέσες τιμές γνωστές

$$\frac{1}{F_{n,m,a}} \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2} \rightsquigarrow \text{Κ.Φ.Ε.} \qquad \frac{1}{F_{n,m,1-a}} \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2} \rightsquigarrow \text{Α.Φ.Ε.}$$

Α.Φ.Ε. και Κ.Φ.Ε. για το σ_1^2/σ_2^2 με σ.ε. $100(1-a)\%$-μέσες τιμές άγνωστες

$$\frac{1}{F_{n-1,m-1,a}} \frac{S_1^2}{S_2^2} \rightsquigarrow \text{Κ.Φ.Ε.} \qquad \frac{1}{F_{n-1,m-1,1-a}} \frac{S_1^2}{S_2^2} \rightsquigarrow \text{Α.Φ.Ε.}$$

- $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $\bar{Y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} Y_i$
- $S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$, $S_2^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y})^2$
- $\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$, $\hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y})^2$

Ορισμός Ασυμπτωτικό Άνω Φράγμα Εμπιστοσύνης (Α.Α.Φ.Ε.) και Ασυμπτωτικό Κάτω Φράγμα Εμπιστοσύνης (Α.Κ.Φ.Ε.)

Έστω $T_{1,n} = T_{1,n}(\underset{\sim}{X})$ και $T_{2,n} = T_{2,n}(\underset{\sim}{X})$ είναι στατιστικές συναρτήσεις. Αν,

$$\lim_{n\to+\infty} P_\theta(T_{1,n}(\underset{\sim}{X}) \leq g(\theta)) = 1 - a\ ,\ \ \forall\ \theta \in \Theta,$$

τότε η $T_{1,n}(\underset{\sim}{X})$ ονομάζεται Ασυμπτωτικό Κάτω Φράγμα (Α.Κ.Φ.) για την $g(\theta)$ με συντελεστή εμπιστοσύνης (σ.ε.) $100(1-a)\%$. Ενώ, αν

$$\lim_{n\to+\infty} P_\theta(g(\theta) \leq T_{2,n}(\underset{\sim}{X})) = 1 - a\ ,\ \ \forall\ \theta \in \Theta,$$

τότε η $T_{2,n}(\underset{\sim}{X})$ ονομάζεται Ασυμπτωτικό Άνω Φράγμα (Α.Α.Φ.) για την $g(\theta)$ με συντελεστή εμπιστοσύνης (σ.ε.) $100(1-a)\%$.

Ασυμπτωτικά Κάτω Φράγμα και Άνω Φράγμα Εμπιστοσύνης (Α.Α.Φ.Ε.–Α.Κ.Φ.Ε.) - Ένας πληθυσμός

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από **άγνωστη** κατανομή, με $EX = \mu$

Α.Α.Φ.Ε. και Α.Κ.Φ.Ε. για την μέση τιμή με σ.ε. $100(1-a)\%$

$$\bar{X} - z_a \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \rightsquigarrow \text{Κ.Φ.Ε.} \qquad \bar{X} + z_a \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \rightsquigarrow \text{Α.Φ.Ε.}$$

Εφαρμογή: Α.Α.Φ.Ε. και Α.Κ.Φ.Ε. για το ποσοστό με σ.ε. $100(1-a)\%$

$$\bar{X} - z_a \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} \rightsquigarrow \text{Κ.Φ.Ε.} \qquad \bar{X} + z_a \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} \rightsquigarrow \text{Α.Φ.Ε.}$$

- $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

Ασυμπτωτικά Κάτω Φράγμα και Άνω Φράγμα Εμπιστοσύνης (Α.Α.Φ.Ε.–Α.Κ.Φ.Ε.) - Δύο πληθυσμοί

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από **άγνωστη** κατανομή με $EX = \mu_1$.
$Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ τυχαίο δείγμα από **άγνωστη** κατανομή με $EY = \mu_2$.

Α.Α.Φ.Ε. και Α.Κ.Φ.Ε. για το $\mu_1 - \mu_2$ με σ.ε. $100(1-a)\%$

$$\bar{X} - \bar{Y} - z_a \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{m}} \rightsquigarrow \text{Κ.Φ.Ε.} \qquad \bar{X} - \bar{Y} + z_a \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{m}} \rightsquigarrow \text{Α.Φ.Ε.}$$

Εφαρμογή: Α.Α.Φ.Ε. και Α.Κ.Φ.Ε. για τη διαφορά των ποσοστών με σ.ε. $100(1-a)\%$

$$\bar{X} - \bar{Y} - z_a \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n} + \frac{\bar{Y}(1-\bar{Y})}{m}} \rightsquigarrow \text{Κ.Φ.Ε.}$$

$$\bar{X} - \bar{Y} + z_a \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n} + \frac{\bar{Y}(1-\bar{Y})}{m}} \rightsquigarrow \text{Α.Φ.Ε.}$$

- $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $\bar{Y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} Y_i$
- $\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$, $\hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y})^2$