Μάθημα: Στατιστική Συμπερασματολογία ΙΙ
Διδάσκων: Κ. Πετρόπουλος

Διαστήματα Εμπιστοσύνης (Δ.Ε.)

Ένας κανονικός πληθυσμός

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

1. Δ.Ε. για την μέση τιμή με σ.ε. $100(1-a)\%$

   (α΄) Διασπορά γνωστή

$$\left[\bar{X} - z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \ \bar{X} + z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

   (β΄) Διασπορά άγνωστη

$$\left[\bar{X} - t_{n-1,a/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\ ,\ \ \bar{X} + t_{n-1,a/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

2. Δ.Ε. για τη διασπορά με σ.ε. $100(1-a)\%$

   (α΄) Μέση τιμή γνωστή

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\mathcal{X}^2_{n,a/2}}\ ,\ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\mathcal{X}^2_{n,1-a/2}}\right]$$

   (β΄) Μέση τιμή άγνωστη

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\mathcal{X}^2_{n-1,a/2}}\ ,\ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\mathcal{X}^2_{n-1,1-a/2}}\right]$$

- $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
- $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

Δύο κανονικοί πληθυσμοί

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα $\sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ τυχαίο δείγμα $\sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$

1. <u>Δ.Ε. για το $\mu_1 - \mu_2$ με σ.ε. $100(1-a)\%$</u>

   (α′) Διασπορές γνωστές

$$\left[\bar{X} - \bar{Y} - z_{a/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}\ ,\ \ \bar{X} - \bar{Y} + z_{a/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}\right]$$

   (β′) Διασπορές άγνωστες ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)

$$\left[\bar{X} - \bar{Y} - t_{n+m-2,a/2} S_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\ ,\ \ \bar{X} - \bar{Y} + t_{n+m-2,a/2} S_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\right]$$

2. <u>Δ.Ε. για το σ_1^2/σ_2^2 με σ.ε. $100(1-a)\%$</u>

   (α′) Μέσες τιμές γνωστές

$$\left[\frac{1}{F_{n,m,a/2}}\,\frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2}\ ,\ \ \frac{1}{F_{n,m,1-a/2}}\,\frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2}\right]$$

   (β′) Μέσες τιμές άγνωστες

$$\left[\frac{1}{F_{n-1,m-1,a/2}}\,\frac{S_1^2}{S_2^2}\ ,\ \ \frac{1}{F_{n-1,m-1,1-a/2}}\,\frac{S_1^2}{S_2^2}\right]$$

- $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $\bar{Y} = \dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} Y_i$
- $S_1^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$, $S_2^2 = \dfrac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y})^2$
- $S_p^2 = \dfrac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}$
- $\hat{\sigma}_1^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$, $\hat{\sigma}_2^2 = \dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y})^2$

Ασυμπτωτικά Διαστήματα Εμπιστοσύνης (Α.Δ.Ε.)

Ένας πληθυσμός

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από κάποια **άγνωστη** κατανομή.

1. <u>Α.Δ.Ε. για την μέση τιμή με σ.ε. $100(1-a)\%$</u>

$$\left[\bar{X} - z_{a/2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\ ,\ \ \bar{X} + z_{a/2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right]$$

2. <u>Α.Δ.Ε. για το ποσοστό με σ.ε. $100(1-a)\%$</u>

$$\left[\bar{X} - z_{a/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\ ,\ \ \bar{X} + z_{a/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right]$$

Δύο πληθυσμοί

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από κάποια **άγνωστη** κατανομή με $EX = \mu_1$.

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ τυχαίο δείγμα από κάποια **άγνωστη** κατανομή με $EY = \mu_2$.

1. <u>Α.Δ.Ε. για το $\mu_1 - \mu_2$ με σ.ε. $100(1-a)\%$</u>

$$\left[\bar{X} - \bar{Y} - z_{a/2}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{m}}\ ,\ \ \bar{X} - \bar{Y} + z_{a/2}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{m}}\right]$$

2. <u>Α.Δ.Ε. για τη διαφορά των ποσοστών με σ.ε. $100(1-a)\%$</u>

$$\left[\bar{X} - \bar{Y} - z_{a/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n} + \frac{\bar{Y}(1-\bar{Y})}{m}}\ ,\ \ \bar{X} - \bar{Y} + z_{a/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n} + \frac{\bar{Y}(1-\bar{Y})}{m}}\right]$$

- $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $\bar{Y} = \dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} Y_i$
- $\hat{\sigma}_1^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$, $\hat{\sigma}_2^2 = \dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y})^2$