Μάθημα: Στατιστική Συμπερασματολογία II
Διδάσκων: Κ. Πετρόπουλος

Έλεγχοι Υποθέσεων (Ε.Υ.)

Ένας κανονικός πληθυσμός

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

1. Ε.Υ. για τη μέση τιμή με ε.σ. a

   (α′) Διασπορά γνωστή ($z - test$)

$$z = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}$$

	Απόρριψη της H_0
$H_0 : \mu = \mu_0 \quad vs. \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$	$\lvert z\rvert > z_{a/2}$
$H_0 : \mu \leqslant \mu_0 \quad vs. \quad H_1 : \mu > \mu_0$	$z > z_a$
$H_0 : \mu \geqslant \mu_0 \quad vs. \quad H_1 : \mu < \mu_0$	$z < -z_a$

   (β′) Διασπορά άγνωστη ($t - test$)

$$t = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x} - \mu_0}{s}$$

	Απόρριψη της H_0
$H_0 : \mu = \mu_0 \quad vs. \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$	$\lvert t\rvert > t_{n-1,a/2}$
$H_0 : \mu \leqslant \mu_0 \quad vs. \quad H_1 : \mu > \mu_0$	$t > t_{n-1,a}$
$H_0 : \mu \geqslant \mu_0 \quad vs. \quad H_1 : \mu < \mu_0$	$t < -t_{n-1,a}$

2. Ε.Υ. για τη διασπορά με ε.σ. a

   (α′) Μέση τιμή γνωστή ($\mathcal{X}^2 - test$)

$$\mathcal{X}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{\sigma_0^2}$$

	Απόρριψη της H_0
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad vs. \quad H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\mathcal{X}^2 < \mathcal{X}^2_{n,1-a/2}$ ή $\mathcal{X}^2 > \mathcal{X}^2_{n,a/2}$
$H_0 : \sigma^2 \leqslant \sigma_0^2 \quad vs. \quad H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	$\mathcal{X}^2 > \mathcal{X}^2_{n,a}$
$H_0 : \sigma^2 \geqslant \sigma_0^2 \quad vs. \quad H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	$\mathcal{X}^2 < \mathcal{X}^2_{n,1-a}$

   (β′) Μέση τιμή άγνωστη ($\mathcal{X}^2 - test$)

$$\mathcal{X}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2}$$

	Απόρριψη της H_0
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad vs. \quad H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\mathcal{X}^2 < \mathcal{X}^2_{n-1,1-a/2}$ ή $\mathcal{X}^2 > \mathcal{X}^2_{n-1,a/2}$
$H_0 : \sigma^2 \leqslant \sigma_0^2 \quad vs. \quad H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	$\mathcal{X}^2 > \mathcal{X}^2_{n-1,a}$
$H_0 : \sigma^2 \geqslant \sigma_0^2 \quad vs. \quad H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	$\mathcal{X}^2 < \mathcal{X}^2_{n-1,1-a}$

Δύο κανονικοί πληθυσμοί

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα $\sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ τυχαίο δείγμα $\sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$

1. <u>Ε.Υ. για το $\mu_1 - \mu_2$ με ε.σ. a</u>

   (α′) Διασπορές γνωστές ($z - test$)

$$z = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n} + \dfrac{\sigma_2^2}{m}}}$$

	Απόρριψη της H_0
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0 \quad vs. \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$	$\lvert z\rvert > z_{a/2}$
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leqslant \mu_0 \quad vs. \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$	$z > z_a$
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geqslant \mu_0 \quad vs. \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$	$z < -z_a$

   (β′) Διασπορές άγνωστες ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$) ($t - test$)

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \mu_0}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}}}$$

	Απόρριψη της H_0
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0 \quad vs. \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$	$\lvert t\rvert > t_{n+m-2,a/2}$
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leqslant \mu_0 \quad vs. \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$	$t > t_{n+m-2,a}$
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geqslant \mu_0 \quad vs. \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$	$t < -t_{n+m-2,a}$

2. <u>Ε.Υ. για το σ_1^2/σ_2^2 με ε.σ. a</u>

   (α′) Μέσες τιμές γνωστές ($F - test$)

$$F = \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2}$$

	Απόρριψη της H_0
$H_0 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \delta_0 \quad vs. \quad H_1 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq \delta_0$	$F < F_{n,m,1-a/2}\,\delta_0$ ή $F > F_{n,m,a/2}\,\delta_0$
$H_0 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leqslant \delta_0 \quad vs. \quad H_1 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > \delta_0$	$F > F_{n,m,a}\,\delta_0$
$H_0 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \geqslant \delta_0 \quad vs. \quad H_1 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \delta_0$	$F < F_{n,m,1-a}\,\delta_0$

   (β′) Μέσες τιμές άγνωστες ($F - test$)

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

	Απόρριψη της H_0
$H_0 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \delta_0 \quad vs. \quad H_1 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq \delta_0$	$F < F_{n-1,m-1,1-a/2}\,\delta_0$ ή $F > F_{n-1,m-1,a/2}\,\delta_0$
$H_0 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leqslant \delta_0 \quad vs. \quad H_1 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > \delta_0$	$F > F_{n-1,m-1,a}\,\delta_0$
$H_0 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \geqslant \delta_0 \quad vs. \quad H_1 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \delta_0$	$F < F_{n-1,m-1,1-a}\,\delta_0$

Ασυμπτωτικοί Έλεγχοι Υποθέσεων (Α.Ε.Υ.)

Ένας πληθυσμός

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από κάποια **άγνωστη** κατανομή.

1. Α.Ε.Υ. για την μέση τιμή με ε.σ. a

$$z = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x}-\mu_0}{\hat{\sigma}}$$

			Απόρριψη της H_0
$H_0 : \mu = \mu_0$	$vs.$	$H_1 : \mu \neq \mu_0$	$\lvert z\rvert > z_{a/2}$
$H_0 : \mu \leqslant \mu_0$	$vs.$	$H_1 : \mu > \mu_0$	$z > z_a$
$H_0 : \mu \geqslant \mu_0$	$vs.$	$H_1 : \mu < \mu_0$	$z < -z_a$

2. Α.Ε.Υ. για το ποσοστό με ε.σ. a $(z - test)$

$$z = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x}-p_0}{\sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})}}$$

			Απόρριψη της H_0
$H_0 : p = p_0$	$vs.$	$H_1 : p \neq p_0$	$\lvert z\rvert > z_{a/2}$
$H_0 : p \leqslant p_0$	$vs.$	$H_1 : p > p_0$	$z > z_a$
$H_0 : p \geqslant p_0$	$vs.$	$H_1 : p < p_0$	$z < -z_a$

Δύο πληθυσμοί

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από κάποια **άγνωστη** κατανομή με $EX = \mu_1$.

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ τυχαίο δείγμα από κάποια **άγνωστη** κατανομή με $EY = \mu_2$.

1. Α.Ε.Υ. για το $\mu_1 - \mu_2$ με ε.σ. a

$$z = \frac{\bar{x}-\bar{y}-\mu_0}{\sqrt{\dfrac{\hat{\sigma}_1^2}{n}+\dfrac{\hat{\sigma}_2^2}{m}}}$$

			Απόρριψη της H_0
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$	$vs.$	$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$	$\lvert z\rvert > z_{a/2}$
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leqslant \mu_0$	$vs.$	$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$	$z > z_a$
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geqslant \mu_0$	$vs.$	$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$	$z < -z_a$

2. Α.Ε.Υ. για τη διαφορά των ποσοστών με ε.σ. a $(z - test)$

$$z = \frac{\bar{x}-\bar{y}-p_0}{\sqrt{\dfrac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}+\dfrac{\bar{y}(1-\bar{y})}{m}}}$$

			Απόρριψη της H_0
$H_0 : p_1 - p_2 = p_0$	$vs.$	$H_1 : p_1 - p_2 \neq p_0$	$\lvert z\rvert > z_{a/2}$
$H_0 : p_1 - p_2 \leqslant p_0$	$vs.$	$H_1 : p_1 - p_2 > p_0$	$z > z_a$
$H_0 : p_1 - p_2 \geqslant p_0$	$vs.$	$H_1 : p_1 - p_2 < p_0$	$z < -z_a$