ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μη Παραμετρική Στατιστική, Κ. Πετρόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

Εισαγωγή

Στα προβλήματα που έχουμε ασχοληθεί μέχρι τώρα, υποστηρίζουμε ότι έχουμε ένα δείγμα $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n) \sim F(\cdot, \theta)$.

π.χ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. $\sim N(\mu, \sigma^2)$, $\theta = (\mu, \sigma^2)$.

Μας ενδιαφέρουν:

1. Εκτίμηση την παραμέτρων (ΑΟΕΔ, ΕΜΠ, minimax, Bayes)
2. Διαστήματα Εμπιστοσύνης (Ίσων Ουρών, Ελαχίστου μήκους)
3. Έλεγχοι Υποθέσεων (ΟΙΕ, ΕΛΠ)

Προβλήματα

π.χ. Το t-test προϋποθέτει κανονικότητα

Πως το αντιμετωπίζω;

Μέσω Κ.Ο.Θ. $\rightsquigarrow$ Απαιτεί μεγάλο μέγεθος δείγματος!

Συμπέρασμα

Σε περιπτώσεις που δεν είμαστε σίγουροι για το πως κατανέμεται το δείγμα μας, χρησιμοποιούμε μη παραμετρικές τεχνικές (ελεύθερες κατανομών.)

Εισαγωγή

Πλεονεκτήματα Μη Παραμετρικών Τεχνικών

1. Απλές στη χρήση τους.
2. Έχουν ευρύτερο πεδίο εφαρμογής.
3. Είναι περισσότερο ευσταθείς επειδή στηρίζονται σε ελάχιστες (εώς καθόλου) υποθέσεις για τους πληθυσμούς.
4. Εφαρμόζονται για κατηγορικά δεδομένα.
5. Χρησιμοποιούνται ως προπαρασκευαστικές για τις παραμετρικές μεθόδους (π.χ. έλεγχος Kolmogorov-Smirnov για κανονικότητα και κατόπιν t-test)

Μειονεκτήματα Μη Παραμετρικών Τεχνικών

1. Είναι λιγότερο ισχυροί από τους αντίστοιχους παραμετρικούς ελέγχους, οι οποίοι κάνουν χρήση της κανονικής κατανομής.
2. Για δεδομένη $P(\text{σφάλμα τύπου } I)$, οι μη παραμετρικοί έλεγχοι έχουν μεγαλύτερη $P(\text{σφάλμα τύπου } II)$

Χρήσιμες Έννοιες

Η στατιστική συμπερασματολογία έχει πολλές μορφές και η συνηθισμένη μορφή, που αφορά μη παραμετρικές μεθόδους, είναι ο έλεγχος υποθέσεων.
Έλεγχος υποθέσεων είναι η διαδικασία για να βγάλεις συμπέρασμα από το δείγμα, αν ισχύει ή δεν ισχύει μια συγκεκριμένη θεώρηση για τον πληθυσμό.

Παράδειγμα

1. Οι γυναίκες οδηγοί εμπλέκονται σε τροχαία περισσότερο από ότι οι άντρες;
2. Η οδοντόπαστα Α είναι πιο αποτελεσματική στην καταπολέμηση της τερηδόνας από την οδοντόπαστα Β;
3. Ο κατηγορούμενος είναι ένοχος κ.ο.κ.

Την υπόθεση που κάνουμε, είτε την απορρίπτουμε (δηλ. το δείγμα μας δίνει αρκετή αμφιβολία στο να δεχτούμε την υπόθεση, αφού με κάποιο βαθμό εμπιστοσύνης, η υπόθεση είναι λάθος), είτε την αποδεχόμαστε.

Χρήσιμες Έννοιες

Παράδειγμα 1

Μια συγκεκριμένη μηχανή κατασκευάζει εξαρτήματα. Η μηχανή θεωρείται ότι δουλεύει σωστά, αν λιγότερο από το 5% των κατασκευασμένων εξαρτημάτων είναι ελαττωματικά. Αν πάνω από το 5% των εξαρτημάτων είναι ελαττωματικά, τότε η μηχανή χρειάζεται επισκευή.

H_0 : Η μηχανή δουλεύει σωστά $\rightsquigarrow$ μηδενική υπόθεση
H_1 : Η μηχανή χρειάζεται επισκευή $\rightsquigarrow$ εναλλακτική υπόθεση

$$H_0 : p \leqslant 0.05 \ \ , \ H_1 : p > 0.05$$

Χρήσιμες Έννοιες

Ορισμός 1

Μια ελεγχοσυνάρτηση είναι μια στατιστική συνάρτηση η οποία μας βοηθάει να πάρουμε απόφαση σε έναν έλεγχο υποθέσεων.

Παράδειγμα 1 (συνέχεια)

Αν T είναι το σύνολο των ελαττωματικών εξαρτημάτων, τότε T θεωρείται ως η ελεγχοσυνάρτησή μας. $(n = 10)$

$$X_i = \begin{cases} 1 & , \quad \text{αν το εξάρτημα } i \text{ είναι ελαττωματικό} \\ 0 & , \quad \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$T = \sum_{i=1}^{10} X_i \sim \mathcal{B}(10, p).$$

Οπότε μικρές τιμές για την T είναι ένδειξη υπέρ της H_0

Χρήσιμες Έννοιες

Ορισμός 2

Η κρίσιμη περιοχή είναι το σύνολο όλων των σημείων του δειγματικού χώρου για τα οποία απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση.

Παράδειγμα 1 (συνέχεια)

Αν H_0 είναι αληθής ($p \leqslant 0.05$), τότε $P(T \leqslant 2) \geqslant 0.9885$ ή διαφορετικά $P(T > 2) \leqslant 0.0115$.
Οπότε αποφασίζουμε να απορρίψουμε την H_0 αν $T > 2$ οπότε το σύνολο των σημείων $\{3, 4, \ldots, 10\}$ αποτελεί την κρίσιμη περιοχή.

Ορισμός 3

Σφάλμα τύπου I, είναι το σφάλμα να απορρίψουμε την H_0, ενώ αυτή ισχύει.

Ορισμός 4

Σφάλμα τύπου II, είναι το σφάλμα να αποδεχτούμε την H_0, ενώ αυτή δεν ισχύει.

Χρήσιμες Έννοιες

Ορισμός 5

Το επίπεδο σημαντικότητας α είναι το μέγιστο της πιθανότητας να απορρίψω την H_0, ενώ αυτή ισχύει.

Παράδειγμα 1 (συνέχεια)

$$P(\text{σφάλμα τύπου } I) = P(T > 2 | p \leqslant 0.05) = \sum_{i=3}^{10} \binom{10}{i} p^i (1-p)^{10-i},$$
$$a = \max P(I) = P(T > 2 | p = 0.05) = 0.0115$$

Το a κάποιες φορές καλείται και μέγεθος της κρίσιμης περιοχής.

Συμβολισμός : β = $P(\text{σφάλμα τύπου } II)$

Ορισμός 6

Η ισχύς ενός ελέγχου είναι η πιθανότητα να απορρίψω την H_0, ενώ αυτή πράγματι δεν ισχύει.

Παράδειγμα 1 (συνέχεια)

1-β = $P(T > 2 | p > 0.05)$

Έλεγχοι Υποθέσεων βασισμένοι στη Διωνυμική Κατανομή

Πολλές φορές στην εφαρμοσμένη έρευνα, τα πειραματικά μας δεδομένα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες.

1. Πελάτες μπαίνουν σε ένα κατάστημα και αποφασίζουν να αγοράσουν ή να μην αγοράσουν ένα συγκεκριμένο προϊόν.
2. Σε ένα συγκεκριμένο πλήθος ατόμων δίνεται μια συγκεκριμένη δίαιτα, οπότε για κάθε ένα από αυτά τα άτομα είτε αδυνατίζει, είτε δεν αδυνατίζει.

Τότε τα δεδομένα που λαμβάνουμε μπορούν να αναλυθούν με χρήση ελέγχων, οι οποίοι βασίζονται στη διωνυμική κατανομή.

Έλεγχοι Υποθέσεων βασισμένοι στη Διωνυμική Κατανομή

Δεδομένα

Το δείγμα αποτελείται από τα αποτελέσματα n ανεξάρτητων δοκιμών.
Κάθε αποτέλεσμα ανήκει είτε στην κατηγορία 1, είτε στην κατηγορία 2, ΠΟΤΕ και στις δύο!
Έστω O_1 οι παρατηρήσεις στην Κατηγορία 1
άρα $O_2 = n - O_1$ οι παρατηρήσεις στην Κατηγορία 2.

Υποθέσεις

1. Οι n δοκιμές είναι αμοιβαία ανεξάρτητες.
2. Κάθε δοκιμή έχει πιθανότητα p να οδηγήσει σε ενδεχόμενο της Κατηγορίας 1, όπου p είναι η ίδια για όλες τις δοκιμές.

Έλεγχοι Υποθέσεων βασισμένοι στη Διωνυμική Κατανομή

Έλεγχοι

Έστω p_0 Μια συγκεκριμένη τιμή στο $[0, 1]$.

$$H_0 : p = p_0 \quad , \; H_1 : p \neq p_0$$

$$H_0 : p \leqslant p_0 \quad , \; H_1 : p > p_0$$

$$H_0 : p \geqslant p_0 \quad , \; H_1 : p < p_0$$

Ελεγχοσυνάρτηση

Αφού θέλουμε να ελέγξουμε την πιθανότητα, το ενδεχόμενο να ανήκει στην κατηγορία 1, τότε προφανώς $T = O_1$.
Θεωρούμε, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τ.μ. (δοκιμές)

$$X_i = \begin{cases} 1 & , \quad \text{αν η } i \text{ δοκιμή οδηγεί σε επιτυχία.} \\ 0 & , \quad \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

$$T = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Κρίσιμο επίπεδο (p-value)

Ορισμός

Το κρίσιμο επίπεδο είναι το ελάχιστο επίπεδο σημαντικότητας για το οποίο απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση (H_0), για τις δοθείσες παρατηρήσεις, αυτό ονομάζεται και παρατηρούμενο επίπεδο σημαντικότητας (observed level of significance) ή τιμή πιθανότητας (probability value ή p-value)

$\hat{p}$

Έλεγχος	$\hat{p}$
$H_0 : p \leqslant p_0 \quad , \quad H_1 : p > p_0$	$P(T \geqslant \tau \mid p = p_0)$
$H_0 : p \geqslant p_0 \quad , \quad H_1 : p < p_0$	$P(T \leqslant \tau \mid p = p_0)$
$H_0 : p = p_0 \quad , \quad H_1 : p \neq p_0$	$\begin{cases} 2P(T \leqslant \tau \mid p = p_0) & , \quad \tau \leqslant np_0 \\ 2P(T \geqslant \tau \mid p = p_0) & , \quad \tau > np_0 \end{cases}$