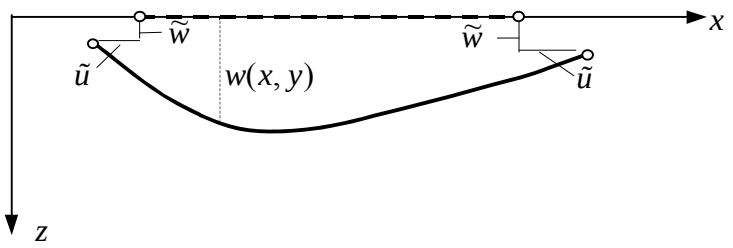
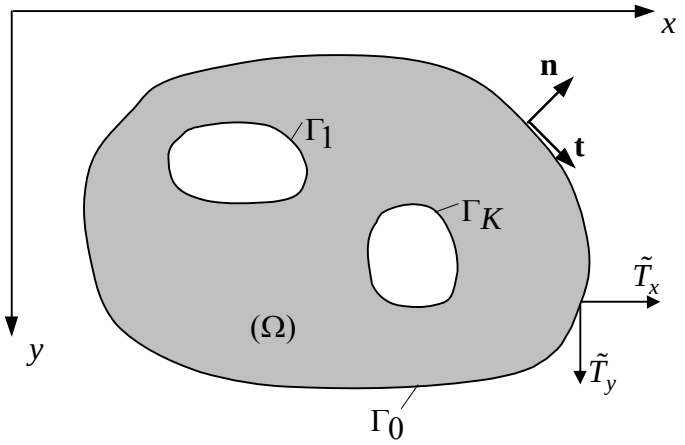
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ:
ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

ΣΤΑΤΙΚΗ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΩΝ ΚΑΙ ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΩΝ ΜΕΜΒΡΑΝΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΗΣ ΑΝΑΛΟΓΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΜΙΑ ΚΑΘΑΡΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

διπλωματική μεταπτυχιακή εργασία

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Χ. ΤΣΙΑΤΑ
Διπλ. Πολ. Μηχανικού Ε.Μ.Π.





Επιβλέπων:
Ι.Θ. Κατσικαδέλης: Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ, ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2000

Στη Χαρά και το Χρήστο

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η διπλωματική αυτή εργασία ξεκίνησε τον Ιανουάριο του 2000 υπό την επίβλεψη του καθηγητού κ. Ι.Θ. Κατσικαδέλη, Διευθυντή του εργαστηρίου Στατικής και Αντισεισμικών Ερευνών του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του Ε.Μ.Π. Ολοκληρώθηκε τον Οκτώβριο του 2000.

Από τη θέση αυτή, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον *Επιστήμονα* Ι.Θ. Κατσικαδέλη, για τη σοφή και πολύτιμη καθοδήγησή του τόσο κατά τη διάρκεια εκπόνησης της συγκεκριμένης εργασίας όσο και στην προσπάθεια ολοκλήρωσης της επιστημονικής μου κατάρτισης.

Θα ήθελα, επίσης, να ευχαριστήσω το *Δάσκαλο* Ι.Θ. Κατσικαδέλη, για τον συνεχή του αγώνα να μου εμφυσήσει όλες τις ακλόνητες αρχές και αξίες που διέπουν την επιστημονική κοινότητα και που ο ίδιος απαρέκκλιτα τηρεί τόσες δεκαετίες.

Αθήνα, Οκτώβριος 2000

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Εισαγωγικό κεφάλαιο 1

1.1. Περίληψη.....2

1.2. Γενικά 3

1.3. Προηγούμενη έρευνα.....5

1.4. Διάρθρωση των κεφαλαίων 6

1.4.1. Κεφ. 1: Εισαγωγικό κεφάλαιο.....6

1.4.2. Κεφ. 2: Εξαγωγή των εξισώσεων.....6

1.4.3. Κεφ. 3: Η Μέθοδος της Αναλογικής Εξισώσεως για το στατικό πρόβλημα και η αριθμητική της υλοποίηση 7

1.4.4. Κεφ. 4: Υπολογιστική επίλυση του στατικού προβλήματος.....7

1.4.5. Κεφ. 5: Η Μέθοδος της Αναλογικής Εξισώσεως για το δυναμικό πρόβλημα και η αριθμητική της υλοποίηση 7

1.4.6. Κεφ. 6: Υπολογιστική επίλυση του δυναμικού προβλήματος 7

1.4.7. Παράρτημα Α.....8

1.4.8. Παράρτημα Β.....8

2. Εξαγωγή των εξισώσεων.....9

2.1 Εισαγωγή 10

2.2. Ορισμός, προσομοίωμα και προένταση της μεμβράνης.....10

2.3. Συνιστώσες μετακινήσεως και εντατικά μεγέθη μεμβράνης.....10

2.4. Σχέσεις παραμορφώσεων μετατοπίσεων.....12

2.5. Σχέσεις τάσεων παραμορφώσεων 12

2.6. Εξαγωγή των εξισώσεων ισορροπίας για το στατικό πρόβλημα.....14

2.7. Εξαγωγή των εξισώσεων ισορροπίας για το δυναμικό πρόβλημα 17

3. Η Μέθοδος της Αναλογικής Εξισώσεως για το στατικό πρόβλημα και η αριθμητική της υλοποίηση 20

3.1 Εισαγωγή 21

3.2. Η αναλογική εξίσωση για το στατικό πρόβλημα 23

3.3. Η αριθμητική υλοποίηση της αναλογικής εξισώσεως για το στατικό πρόβλημα 29

4. Υπολογιστική επίλυση του στατικού προβλήματος 34

4.1. Εισαγωγή 35

4.2. Λύση του μη γραμμικού αλγεβρικού συστήματος 35

4.2.1 Απευθείας επίλυση 36

4.2.2. Μέθοδος βελτιστοποίησης 36

4.2.2. Επαναληπτική μέθοδος του σταθερού σημείου (fixed point) 37

4.3. Πρόγραμμα υπολογιστή για την επίλυση του στατικού προβλήματος (3NL2BECON) 39

4.3.1. Η δομή του προγράμματος 39

4.3.2. Το πρόγραμμα 3NL2BECON 40

4.4. Παραδείγματα 65

4.4.1. Ανισότροπη τετραγωνική μεμβράνη 65

4.4.2. Μη ομογενής τετραγωνική μεμβράνη 69

4.4.3. Μεμβράνη τυχαίου σχήματος 71

4.4.4. Ορθογωνική μεμβράνη με κυκλική οπή 73

5. Η Μέθοδος της Αναλογικής Εξισώσεως για το δυναμικό πρόβλημα και η αριθμητική της υλοποίηση 77

5.1 Εισαγωγή 78

5.2. Η αναλογική εξίσωση για το δυναμικό πρόβλημα 78

5.3. Η αριθμητική υλοποίηση της αναλογικής εξισώσεως για το δυναμικό πρόβλημα 81

6. Υπολογιστική επίλυση του δυναμικού προβλήματος 83

6.1. Εισαγωγή 84

6.2. Λύση της εξίσωσης κινήσεως της μεμβράνης.....84

6.2.1 Μέθοδος της Μέσης Επιταχύνσεως (Average Acceleration Method).....85

6.2.2. Μέθοδος της Αναλογικής Εξισώσεως (Analog Equation Method) 88

Α. Αρχικοί υπολογισμοί.....90

Β. Για κάθε χρονικό βήμα 90

6.3. Πρόγραμμα υπολογιστή για την επίλυση του στατικού προβλήματος (DYN3NL2BECON).....91

6.3.1. Η δομή του προγράμματος.....91

6.3.2. Το πρόγραμμα DYN3NL2BECON.....93

6.4. Παραδείγματα.....102

6.4.1. Μη ομογενής τετραγωνική μεμβράνη.....102

6.4.2. Μεμβράνη τυχαίου σχήματος 106

6.5. Συμπεράσματα.....111

Α. Παράρτημα 112

Α.1. Εισαγωγή 113

Α.2. Η άμεση BEM για την εξίσωση Laplace.....113

Α.3. Παράγωγοι της r 116

Α.4. Υπολογισμός των παραγώγων της πεδιακής συνάρτησης στο εσωτερικό.....118

Β. Παράρτημα 120

Β.1. Εισαγωγή.....121

Β.2. Γενικά.....121

Β.3. Υπολογισμός των συναρτήσεων $\hat{u}_j$ 122

Β.4. Υπολογισμός των παραγώγων των συναρτήσεων $\hat{u}_j$ 123

Βιβλιογραφία 125

1

Εισαγωγικό κεφάλαιο

1.1. Περίληψη

Στη διπλωματική αυτή εργασία η Μέθοδος της Αναλογικής Εξισώσεως (μία αμιγής συνοριακή μέθοδος) εφαρμόζεται στη στατική και δυναμική μη γραμμική ανάλυση ανισότροπων και μη ομογενών μεμβρανών με τυχαίο σχήμα. Στο πρόβλημα αυτό οι εγκάρσιες παραμορφώσεις επηρεάζουν τις μεμβρανικές (συνεπίπεδες) δυνάμεις, με αποτέλεσμα οι τρεις μερικές διαφορικές εξισώσεις που διέπουν την ισορροπία της μεμβράνης να είναι μη γραμμικές και πεπλεγμένες. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι εξισώσεις αυτές παρουσιάζονται για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία.

Η παρούσα διατύπωση, που γίνεται συναρτήσει των μετατοπίσεων, επιτρέπει την εφαρμογή γεωμετρικών συνοριακών συνθηκών μέσα στο επίπεδο της μεμβράνης έναντι εκείνης του Föppl (1920) που διατυπώνεται μέσω της τασικής συνάρτησης με τις εγγενείς δυσχέρειες στην επιβολή προεντάσεως μέσω συνοριακών μετατοπίσεων.

Χρησιμοποιώντας την Έννοια της Αναλογικής Εξισώσεως οι τρεις πεπλεγμένες μη γραμμικές εξισώσεις αντικαθιστώνται από τρεις μη πεπλεγμένες εξισώσεις Poisson με ιδεατά κατανεμημένα φορτία, ενώ οι συνοριακές συνθήκες παραμένουν οι ίδιες. Εν συνεχεία τα ιδεατά φορτία προσδιορίζονται χρησιμοποιώντας μία διαδικασία που βασίζεται στη Μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων. Τέλος οι μετατοπίσεις καθώς και οι μεμβρανικές δυνάμεις υπολογίζονται από τις ολοκληρωτικές παραστάσεις τους σε οποιοδήποτε σημείο της μεμβράνης.

Παρουσιάζονται πολλά παραδείγματα ανάλυσης μεμβρανών, με διάφορες γεωμετρίες και φορτίσεις (στατικές και δυναμικές), που καταδεικνύουν την αποτελεσματικότητα και την ακρίβεια της αναπτυχθείσης μεθόδου. Επιπρόσθετα, βγαίνουν χρήσιμα συμπεράσματα για τη μη γραμμική απόκριση των ανισότροπων και μη ομογενών μεμβρανών.

Η μέθοδος έχει όλα τα πλεονεκτήματα της καθαρής Μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων αφού η διακριτοποίηση σε στοιχεία και η ολοκλήρωση περιορίζονται μόνο στο σύνορο.

1.2. Γενικά

'Εφελκυστικές' κατασκευές (tension structures) ονομάζονται εκείνες, τα μέλη των οποίων, μεταφέρουν τα φορτία από την κατασκευή στη θεμελίωση, ή σε άλλες κατασκευές, με άμεση εφελκυστική τάση και χωρίς κάμψη ή θλίψη. Οι διαστάσεις των διατομών τους καθώς και η μέθοδος με την οποία κατασκευάζονται είναι τέτοιες που η διατμητική και καμπτική τους ακαμψία καθώς και η αντίστασή τους σε λυγισμό να είναι μηδαμινές. Οι 'εφελκυστικές' κατασκευές χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες (α) στις *καλωδιωτές κατασκευές* που αποτελούνται από μέλη που υπόκεινται σε μονοαξονική ένταση και (β) στις *μεμβρανικές κατασκευές* τα μέλη των οποίων υπόκεινται σε διαξονική ένταση.

Οι εφαρμογές των μεμβρανών είναι μεγάλες, λόγω της σημαντικής τους ικανότητας να καλύπτουν μεγάλους χώρους. Μερικά πλεονεκτήματα των μεμβρανών στις κατασκευές του μηχανικού είναι τα εξής:

- Έχουν μικρό βάρος και καταλαμβάνουν μικρό όγκο, συνεπώς είναι εύκολο να μεταφερθούν και να ανεγερθούν.
- Μπορούν να προκατασκευαστούν σε εργοστάσιο και έχουν μικρό κόστος εγκατάστασης.
- Τα φορτία που ασκούνται στην μεμβράνη μεταφέρονται με άμεση εφελκυστική τάση και χωρίς κάμψη.
- Οι φυσικές ιδιότητες των μοντέρνων υλικών επιτρέπουν ανοίγματα $80-100\,m$ μήκους, να καλύπτονται από μεμβράνες πάχους $1-1.2\,mm$.

Τα υλικά από τα οποία κατασκευάζονται οι μεμβράνες μπορούν να είναι:

- *Υπερελαστικά (rubberlike) υλικά* που παρουσιάζουν έντονη μη γραμμικότητα στη φύση και αντέχουν σε μεγάλες ανοιγμένες παραμορφώσεις (large strains). Η εφαρμογή τους όμως είναι περιορισμένη λόγω της μειωμένης τους μεμβρανικής ακαμψίας και αντοχής.
- *Ύφασμα*. Υλικό που παρουσιάζει υψηλή εφελκυστική αντοχή και παράλληλα είναι εύκαμπτο και με μικρό βάρος. Έχει επίσης σταθερότητα στις διαστάσεις του, υψηλή αντίσταση και είναι φθηνό και αξιόπιστο κατά τη ραφή του.

- *Σύνθετα υλικά*. Μεμβράνες ενισχυμένες με ίνες έχουν υψηλότερες εφελκυστικές αντοχές. Η ενίσχυση γίνεται στο ύφασμα που χρησιμοποιείται για την επικάλυψη της μεμβράνης, λόγω της πυκνότερης ύφανσής του σε σχέση με αυτό που χρησιμοποιείται για το εσωτερικό της.

Οι μεμβράνες λοιπόν μπορεί να κατασκευάζονται και από σύνθετα υλικά, τα οποία παρουσιάζουν ορθογωνική ανισοτροπία (ορθότροπα) ενώ ταυτόχρονα μπορεί να υπάρχει και μη ομοιογένεια. Για παράδειγμα μεμβράνες που έχουν κατασκευαστεί από ύφασμα με διαφορετικό προσανατολισμό της ύφανσής τους καθώς και μεμβράνες με μεταβλητό πάχος για την τοπική ενίσχυσή τους ή τον έλεγχο των εγκάρσιων παραμορφώσεων της.

Τα φορτία που ασκούνται στη μεμβράνη εκτός από στατικά, είναι πολύ συχνά και δυναμικά. Οι μεμβράνες όμως, λόγω της μειωμένης ακαμψίας τους, καθίστανται εξαιρετικά επιρρεπής στα δυναμικά φορτία. Γι αυτόν ακριβώς το λόγο θεωρείται επιβεβλημένη η δυναμική τους ανάλυση αφού κατά τη διάρκεια ζωής τους αντιμετωπίζουν δυναμικά φαινόμενα όπως (α) Η επίδραση της ροής του αέρα, η οποία έχει μεγάλη πρακτική σημασία διότι τα αρνητικά φορτία που παράγονται από τον άνεμο (αναρρόφηση) μπορεί να φτάσουν μέχρι τη τιμή $1.1 kN/m^2$ και να προκαλέσουν πολύ μεγάλες ταλαντώσεις (β) Η διάχυση του στροβιλισμού που προκαλεί αρμονικές δυνάμεις άνωσης κ.α.

Κατά την ανάλυση των επίπεδων ελαστικών μεμβρανών διακρίνουμε δύο φάσεις, τη φάση της προέντασης και τη φάση λειτουργίας. Η επίπεδη μεμβράνη επειδή προεντείνεται είτε με επιβαλλόμενες συνοριακές μετατοπίσεις είτε με επιβαλλόμενες γραμμικές δυνάμεις (tractions) κατά μήκος του συνόρου, στο εσωτερικό της δημιουργείται μία κατάσταση επίπεδης έντασης. Στη φάση λειτουργίας επιβάλλονται εγκάρσια φορτία, τα οποία δεν επιτρέπουν στη μεμβράνη να παραμείνει επίπεδη. Το ίδιο βάρος μόνο του προκαλεί εγκάρσια καμπυλότητα, η οποία παράγει εγκάρσιες συνιστώσες των μεμβρανικών δυνάμεων για να ισορροπήσουν το φορτίο.

Στην γραμμική μεμβρανική θεωρία υποθέτουμε ότι το επιπρόσθετο τέντωμα της μεμβράνης, λόγω του εγκάρσιου φορτίου, στη φάση λειτουργίας, είναι μικρό και οι μεμβρανικές δυνάμεις παραμένουν αμετάβλητες κατά τη διάρκεια της παραμόρφωσης. Αυξάνοντας όμως το φορτίο οι επιπρόσθετες μεμβρανικές δυνάμεις δεν μπορούν να αγνοηθούν με αποτέλεσμα οι προκύπτουσες διαφορικές εξισώσεις που διέπουν την ισορροπία της μεμβράνης να είναι

πεπλεγμένες και μη γραμμικές (γεωμετρική μη γραμμικότητα), ενώ οι ανηγμένες παραμορφώσεις (strains) των μετατοπίσεων παραμένουν μικρές σε σχέση με τη μονάδα

Στις ανισότροπες και μη ομογενείς μεμβράνες οι εξισώσεις αυτές είναι ακόμη πιο πολύπλοκες, καθώς οι συντελεστές τους μεταβάλλονται από σημείο σε σημείο. Στην παρούσα εργασία, χωρίς να περιορίζεται η γενικότητα, η ανάλυση ειδικεύεται στις ορθογωνικά ανισότροπες (ορθότροπες) και μη ομογενείς μεμβράνες, αφού είναι η συνήθης περίπτωση εφαρμογής στην πράξη.

1.3. Προηγούμενη έρευνα

Η επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων που διέπουν την ισορροπία της μεμβράνης είναι ένα δύσκολο μαθηματικό πρόβλημα. Αναλυτικές ή προσεγγιστικές λύσεις υπάρχουν μόνο για απλές γεωμετρίες (κυκλική ή ορθογωνική) και για απλές φορτίσεις. Λύσεις πραγματικών προβλημάτων του μηχανικού επιτυγχάνονται μόνο με αριθμητικές μεθόδους επίλυσης όπως είναι η Μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών (FDM) που έχει το βασικό μειονέκτημα της προσαρμογής του καννάβου στο σύνορο, η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM) καθώς και η Μέθοδος των Συνοριακών Στοιχείων (BEM).

Στην βιβλιογραφία δεν υπάρχει καμία αναφορά για το γενικό πρόβλημα της ανισότροπης και μη ομογενούς μεμβράνης, όσο ο συγγραφέας μπορεί να γνωρίζει. Απαντώνται όμως αναλυτικές, προσεγγιστικές και αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης για την ισότροπη και ομογενή μεμβράνη.

Όσον αφορά το στατικό πρόβλημα της ισότροπης και ομογενούς μεμβράνης, οι αναλυτικές λύσεις περιορίζονται μόνο σε αξονοσυμμετρικά φορτισμένες κυκλικές μεμβράνες (Hencky, 1915), όπου το πρόβλημα γίνεται μονοδιάστατο και η λύση του επιτυγχάνεται με τη χρήση σειρών. Προσεγγιστικές και αριθμητικές μέθοδοι έχουν επίσης χρησιμοποιηθεί για αξονοσυμμετρικά κυκλικές μεμβράνες από τους Kao and Perrone (1971) και Storåkers (1983a) καθώς και για ορθογωνικές μεμβράνες από τους Föppl and Föppl (1920), Neubert and Sommer (1940), Storåkers (1983b), Hencky (1921). Οι Kao and Perrone (1972) χρησιμοποίησαν τη Μέθοδο Πεπερασμένων Διαφορών με μη γραμμική χαλάρωση. Σε όλες τις προηγούμενες επιλύσεις οι μεμβράνες δεν ήταν προεντεταμένες κάτι που είναι απαραίτητο

για την κατασκευή τους. Η διατύπωση του Föppl (1920) βάσει της βύθισης και της τασικής συνάρτησης, παρόλο που η ολοκλήρωση φαίνεται απλούστερη, έχει το αδιαμφισβήτητο μειονέκτημα ότι δεν επιτρέπει την επιβολή μετατοπίσεων, μέσα στο επίπεδο της μεμβράνης, ως συνοριακές συνθήκες, πράγμα πού είναι σύνηθες στην πράξη. Επιπλέον, αυτή η διατύπωση παρουσιάζει δυσκολίες όταν αντιμετωπίζει προβλήματα μεμβράνων με εσωτερικές οπές. Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων έχει επίσης αναπτυχθεί για την επίλυση των μη γραμμικών προβλημάτων μεμβρανών (Leonard, 1988). Το πρόγραμμα MSC/NASTRAN επιτυγχάνει τον υπολογισμό ομογενών ανισότροπων μεμβρανών ως πλάκες λεπτού πάχους, χωρίς προένταση. Η Μέθοδος των Συνοριακών Στοιχείων έχει εφαρμοσθεί για την επίλυση του μη γραμμικού προβλήματος ισότροπων και ομογενών μεμβρανών. Οι Katsikadelis and Nerantzaki (1996) ανέπτυξαν μία Πεδιακή/Συνοριακή λύση βασισμένη στη μέθοδο της Αναλογικής Εξισώσεως. Η λύση αυτή χρησιμοποιεί και πεδιακή διακριτοποίηση, πράγμα το οποίο περιορίζει τα πλεονεκτήματα της BEM. Πρόσφατα οι Katsikadelis et al. (2000) μετεξέλιξαν τη μέθοδο αυτή ως καθαρά συνοριακή προσεγγίζοντας τα ιδεατά φορτία με σειρές βασικών ακτινικών συναρτήσεων.

Όσο αφορά το δυναμικό πρόβλημα δεν υπάρχουν αναλυτικές λύσεις ούτε για χωρία απλής γεωμετρίας. Μία προσπάθεια προσεγγιστικής επιλύσεως με τη βοήθεια διπλών σειρών Fourier για ορθογωνικές μεμβράνες (Ivovich and Pokrovski, 1991) οδηγεί σε ένα σύστημα από πεπλεγμένες συνήθεις μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις κίνησης τύπου Duffing, οι οποίες είναι πολύ δύσκολο να επιλυθούν. Οι αριθμητικές μέθοδοι που έχουν εφαρμοστεί είναι η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων για μη γραμμικές ταλαντώσεις (Leonard, 1988) καθώς και η Μέθοδος των Συνοριακών Στοιχείων για την δυναμική ανάλυση μη γραμμικών μεμβρανών (Katsikadelis, 2000).

1.4. Διάρθρωση των κεφαλαίων

Η διπλωματική αυτή εργασία αποτελείται από τα παρακάτω κεφάλαια

1.4.1. Κεφ. 1: Εισαγωγικό κεφάλαιο

1.4.2. Κεφ. 2: Εξαγωγή των εξισώσεων

Στο κεφάλαιο αυτό δίδεται ο ορισμός της μεμβράνης, παρουσιάζεται το προσομοίωμα και ο τρόπος προέντασής της. Διατυπώνονται οι σχέσεις παραμορφώσεων-μετατοπίσεων καθώς και οι σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων. Τέλος εξάγονται οι εξισώσεις ισορροπίας για το στατικό πρόβλημα με εφαρμογή του κριτηρίου της στάσιμης τιμής της ολικής δυναμικής ενέργειας ενώ για το δυναμικό πρόβλημα με εφαρμογή της Αρχής του Hamilton

1.4.3. Κεφ. 3: Η Μέθοδος της Αναλογικής Εξισώσεως για το στατικό πρόβλημα και η αριθμητική της υλοποίηση

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η εφαρμογή της Μεθόδου της Αναλογικής Εξισώσεως ως αμιγής συνοριακή μέθοδος για την επίλυση του στατικού προβλήματος και η αριθμητική της υλοποίηση.

1.4.4. Κεφ. 4: Υπολογιστική επίλυση του στατικού προβλήματος

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι τρόποι επίλυσης του μη γραμμικού αλγεβρικού συστήματος που προκύπτει από την αριθμητική υλοποίηση της ΑΕΜ για το στατικό πρόβλημα. Επίσης παρουσιάζονται ο κώδικας που έχει γραφεί για την αριθμητική επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος, σε γλώσσα προγραμματισμού FORTRAN, καθώς και αριθμητικά παραδείγματα.

1.4.5. Κεφ. 5: Η Μέθοδος της Αναλογικής Εξισώσεως για το δυναμικό πρόβλημα και η αριθμητική της υλοποίηση

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η εφαρμογή της Μεθόδου της Αναλογικής Εξισώσεως ως αμιγής συνοριακή μέθοδος για την επίλυση του δυναμικού προβλήματος και η αριθμητική της υλοποίηση.

1.4.6. Κεφ. 6: Υπολογιστική επίλυση του δυναμικού προβλήματος

Σ’ αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται οι μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν για την λύση της εξίσωσης κινήσεως της μεμβράνης όπως προκύπτει από την αριθμητική υλοποίηση της ΑΕΜ

για το δυναμικό πρόβλημα. Επίσης παρουσιάζονται ο κώδικας που έχει γραφεί για την αριθμητική επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος, σε γλώσσα προγραμματισμού FORTRAN, καθώς και αριθμητικά παραδείγματα.

1.4.7. Παράρτημα Α

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζονται βασικά στοιχεία της άμεσης Μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων που χρησιμοποιούνταιστην ανάπτυξη της παρούσας εργασίας.

1.4.8. Παράρτημα Β

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζονται οι ακτινικές συναρτήσεις βάσεως, multiquadrics, που χρησιμοποιούνται για την προσέγγιση των ιδεατών φορτίων στο εσωτερικό του χωρίου στην Μέθοδο της Αναλογικής Εξισώσεως.

2

Εξαγωγή των εξισώσεων

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η εξαγωγή των εξισώσεων που διέπουν το πρόβλημα. Οι εξισώσεις για το στατικό πρόβλημα προκύπτουν με εφαρμογή του κριτηρίου της στάσιμης τιμής της ολικής δυναμικής ενέργειας (Νεραντζάκη, 1991), ενώ για το δυναμικό πρόβλημα με τη βοήθεια της Αρχής του Hamilton (Katsikadelis and Sapountzakis, 1988).

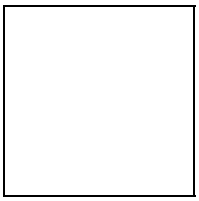
2.2. Ορισμός, προσομοίωμα και προένταση της μεμβράνης

Θεωρούμε μία ελαστική, αρχικώς επίπεδη μεμβράνη, η οποία αποτελείται από ένα μη ομογενές ανισότροπο, γραμμικώς ελαστικό υλικό και καταλαμβάνει το διδιάστατο, γενικά πολλαπλά συνεκτικό χωρίο Ω στο επίπεδο x, y. Το χωρίο περιβάλλεται από $K+1$ σύνορα $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots \Gamma_K$ (Σχ. 2.1). Η μεμβράνη προεντείνεται είτε με επιβαλλόμενες μετακινήσεις $\tilde{u}, \tilde{v}$ είτε με εξωτερικές δυνάμεις $\tilde{T}_x, \tilde{T}_y$ που δρουν κατά μήκος του συνόρου.

2.3. Συνιστώσες μετακινήσεως και εντατικά μεγέθη μεμβράνης

Η μεμβράνη υπό την επενέργεια των φορτίων της παραμορφώνεται γενικώς σε μία μη αναπτυχτή επιφάνεια, η οποία περιγράφεται με τις εγκάρσιες μετακινήσεις $w(x, y)$ του μέσου επιπέδου και τις μεμβρανικές (συνεπίπεδες) μετατοπίσεις $u(x, y), v(x, y)$ των σημείων του επιπέδου αυτού κατά τις διευθύνσεις των αξόνων x και y, αντιστοίχως.

Τα εντατικά μεγέθη της μεμβράνης, τα οποία είναι δυνάμεις ανηγμένες στη μονάδα μήκους της διατομής, προκύπτουν από την ολοκλήρωση των ορθών και διατμητικών τάσεων που αναπτύσσονται καθ' ύψος της μεμβράνης. Τα εντατικά μεγέθη ως προς ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων x, y είναι οι ορθές μεμβρανικές δυνάμεις N_x, N_y και οι τέμνουσες μεμβρανικές δυνάμεις N_{xy}, N_{yx} οι οποίες ορίζονται από τις ακόλουθες σχέσεις



Σχ. 2.1. Χωρίο Ω που καταλαμβάνει η μεμβράνη στο επίπεδο x, y

$$
\begin{aligned}
N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_x dz \\
N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_y dz \\
N_{yx} &= N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{xy} dz
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

όπου τα μεγέθη με μία παύλα πάνω στο σύμβολό τους αναφέρονται σε τυχόν σημείο της μεμβράνης ενώ τα αντίστοιχα μεγέθη χωρίς την παύλα αναφέρονται στο μέσο επίπεδο. Το πάχος της μεμβράνης μπορεί να είναι μεταβλητό, $h = h(x, y)$.

Για τις κατανομές των τάσεων στις παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$
\begin{aligned}
\bar{\sigma}_x &= \frac{N_x}{h} \\
\bar{\sigma}_y &= \frac{N_y}{h} \\
\bar{\tau}_{xy} &= \frac{N_{xy}}{h}
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

2.4. Σχέσεις παραμορφώσεων μετατοπίσεων

Οι συνιστώσες της μεμβρανικής παραμορφώσεως $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ του μέσου επιπέδου δίδονται από τις κατωτέρω σχέσεις αφού ληφθούν υπόψη οι παραδοχές (Νεραντζάκη, 1991) που ισχύουν για τις μετρίως μεγάλες παραμορφώσεις.

α) Τα μεγέθη $(\frac{\partial w}{\partial x})^2$, $(\frac{\partial w}{\partial y})^2$, $\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}$ είναι της αυτής τάξεως με τα μεγέθη $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ ενώ είναι μικρά σε σύγκριση με τη μονάδα.

β) Τα μεγέθη $(\frac{\partial u}{\partial x})^2$, $(\frac{\partial v}{\partial y})^2$, $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}$ είναι μικρά σε σύγκριση με τα $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x})^2 \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y})^2 \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

2.5. Σχέσεις τάσεων παραμορφώσεων

Ας υποθέσουμε ότι από κάθε σημείο του ελαστικού μέσου περνούν τρία επίπεδα συμμετρίας (Lekhnitskii, 1963). Κατευθύνοντας τους άξονες του συστήματος συντεταγμένων κάθετα στα επίπεδα αυτά λαμβάνουμε τις παρακάτω σχέσεις, από το γενικευμένο νόμο του Hooke, για τις συνιστώσες της παραμόρφωσης $\overline{\varepsilon}_x, \overline{\varepsilon}_y$ και $\overline{\gamma}_{xy}$

$$\begin{aligned}
\overline{\varepsilon}_x &= \frac{1}{E_1}\overline{\sigma}_x - \frac{\nu_{21}}{E_2}\overline{\sigma}_y \\
\overline{\varepsilon}_y &= -\frac{\nu_{12}}{E_1}\overline{\sigma}_x + \frac{1}{E_2}\overline{\sigma}_y \\
\overline{\gamma}_{xy} &= \frac{1}{G_{12}}\overline{\tau}_{xy}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

όπου E_1, E_2 τα μέτρα ελαστικότητας ως προς του άξονες x, y αντίστοιχα, G_{12} το μέτρο διατμήσεως στο επίπεδο x, y και ισχύει η σχέση $E_1\nu_{21} = E_2\nu_{12}$.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι για την θεωρία μεμβρανών ισχύει $\sigma_z = 0$ και λύνοντας τις σχέσεις (2.4) ως προς τις τάσεις λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_x &= \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}(\bar{\varepsilon}_x + \nu_{21}\bar{\varepsilon}_y) \\
\bar{\sigma}_y &= \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}(\bar{\varepsilon}_y + \nu_{12}\bar{\varepsilon}_x) \\
\bar{\tau}_{xy} &= G_{12}\bar{\gamma}_{xy}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Εισάγοντας τις σχέσεις (2.5) στις (2.1) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
N_x &= C_1\varepsilon_x + C\varepsilon_y \\
N_y &= C_2\varepsilon_y + C\varepsilon_x \\
N_{xy} &= C_{12}\gamma_{xy}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

όπου

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{E_1 h}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\
C_2 &= \frac{E_2 h}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\
C &= \frac{E_1\nu_{21}h}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_2\nu_{12}h}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\
C_{12} &= G_{12}h
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Οι εξισώσεις (2.6) αποτελούν τις καταστατικές εξισώσεις της μεμβράνης. Εξετάζοντας την γενικότερη περίπτωση του ανισότροπου και μη ομογενούς υλικού, οι ελαστικές ‘σταθερές’ C_1, C_2, C, C_{12} είναι συναρτήσεις των συντεταγμένων του εκάστοτε υλικού σημείου μέσα στο χωρίο Ω, δηλαδή $C_1 = C_1(x,y), C_2 = C_2(x,y), C = C(x,y)$ και $C_{12} = C_{12}(x,y)$.

2.6. Εξαγωγή των εξισώσεων ισορροπίας για το στατικό πρόβλημα

Στην παράγραφο αυτή εξάγονται οι μη γραμμικές εξισώσεις ισορροπίας με εφαρμογή του κριτηρίου της στάσιμης τιμής της ολικής δυναμικής ενέργειας (Νεραντζάκη, 1991). Η διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας με εφαρμογή του λογισμού των μεταβολών είναι σκόπιμη διότι παράγει αφενός τις διαφορικές εξισώσεις αλλά συγχρόνως δίδει με ασφαλή τρόπο και τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Η ολική δυναμική ενέργεια Π είναι $\Pi = U + A$ όπου U είναι το έργο παραμορφώσεως της μεμβράνης και A το δυναμικό των εξωτερικών φορτίων.

α) Το έργο παραμορφώσεως δίνεται από τη σχέση

$$U = \frac{1}{2}\int_V (\bar{\sigma}_x \bar{\varepsilon}_x + \bar{\sigma}_y \bar{\varepsilon}_y + \bar{\tau}_{xy}\bar{\gamma}_{xy})dV \tag{2.8}$$

Ολοκληρώνοντας την ανωτέρω σχέση καθ' ύψος της μεμβράνης και με τη βοήθεια των σχέσεων (2.6) λαμβάνουμε

$$U = \frac{1}{2}\int_\Omega (C_1\varepsilon_x^2 + C_2\varepsilon_y^2 + 2C\varepsilon_x\varepsilon_y + C_{12}\gamma_{xy}^2)d\Omega \tag{2.9}$$

β) Το δυναμικό των εξωτερικών φορτίων δίνεται από τη σχέση

$$A = -\int_\Omega gwd\Omega - \int_\Gamma (\tilde{T}_x u + \tilde{T}_y v + \tilde{V}w)ds \tag{2.10}$$

όπου $\tilde{T}_x, \tilde{T}_y$ και $\tilde{V}$ είναι οι εξωτερικές δράσεις που ασκούνται στο σύνορο. Η στάσιμη τιμή του συναρτησιακού της ολικής δυναμικής ενέργειας απαιτεί το μηδενισμό της πρώτης μεταβολής του, δηλαδή

$$\delta\Pi = 0$$

Το συναρτησιακό Π είναι της μορφής

$$\Pi = \int_\Omega F(u_{,x}, u_{,y}, v_{,x}, v_{,y}, w, w_{,x}, w_{,y}, w_{,xx}, w_{,yy}, w_{,xy})d\Omega - \int_\Gamma G(u,v,w)ds \tag{2.11}$$

Άρα

$$\delta\Pi = \int_{\Omega}(\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u_{,x}}\delta u_{,x} + \frac{\partial F}{\partial u_{,y}}\delta u_{,y} + \frac{\partial F}{\partial v}\delta v + \frac{\partial F}{\partial v_{,x}}\delta v_{,x} + \frac{\partial F}{\partial v_{,y}}\delta v_{,y} + \frac{\partial F}{\partial w}\delta w + \frac{\partial F}{\partial w_{,x}}\delta w_{,x} + \frac{\partial F}{\partial w_{,y}}\delta w_{,y})d\Omega - \int_{\Gamma}(\tilde{T}_x\delta u + \tilde{T}_y\delta v + \tilde{V}\delta w)ds \tag{2.12}$$

Από τις σχέσεις (2.9) και (2.10) λαμβάνουμε

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_{,x}} = C_{12}\gamma_{xy} = N_{xy}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_{,y}} = C_2\varepsilon_y + C\varepsilon_x = N_y \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial F}{\partial w} = -g$$

$$\frac{\partial F}{\partial w_{,x}} = (C_1\varepsilon_x + C\varepsilon_y)w_{,x} + C_{12}\gamma_{xy}w_{,y} = N_x w_{,x} + N_{xy}w_{,y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial w_{,y}} = (C_2\varepsilon_y + C\varepsilon_x)w_{,y} + C_{12}\gamma_{xy}w_{,x} = N_{xy}w_{,x} + N_y w_{,y}$$

Η σχέση (2.12) με τη βοήθεια των σχέσεων (2.13) γράφεται

$$\delta\Pi = \int_{\Omega}[N_x\delta u_{,x} + N_{xy}\delta u_{,y} + N_{xy}\delta v_{,x} + N_y\delta v_{,y} - g\delta w + (N_x w_{,x} + N_{xy}w_{,y})\delta w_{,x} + (N_{xy}w_{,x} + N_y w_{,y})\delta w_{,y}]d\Omega - \int_{\Gamma}(\tilde{T}_x\delta u + \tilde{T}_y\delta v + \tilde{V}\delta w)ds \tag{2.14}$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα αποκλίσεως του Gauss και την παραγοντική ολοκλήρωση, η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$\begin{aligned}\delta\Pi = &-\int_{\Omega}\{(N_{x,x} + N_{xy,y})\delta u + (N_{xy,x} + N_{y,y})\delta v + [(N_x w,_x + N_{xy} w,_y),_x + (N_{xy} w,_x + \\ &N_y w,_y),_y + g]\delta w\} d\Omega + \int_{\Gamma}\{(N_x \cos a + N_{xy} \sin a)\delta u + (N_{xy} \cos a + N_y \sin a)\delta v \\ &+[(N_x \cos a + N_{xy} \sin a) w,_x + (N_{xy} \cos a + N_y \sin a) w,_y]\delta w\} ds \\ &-\int_{\Gamma}(\tilde{T}_x \delta u + \tilde{T}_y \delta v + \tilde{V}\delta w) ds\end{aligned} \tag{2.15}$$

όπου a γωνία $(x, \mathbf{n})$ (βλ. Παράρτημα Α). Από την παραπάνω εξίσωση προκύπτουν οι τρεις μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις που διέπουν την ισορροπία της μεμβράνης

$$N_{x,x} + N_{xy,y} = 0 \tag{2.16a}$$

$$N_{xy,x} + N_{y,y} = 0 \tag{2.16b}$$

$$N_x w,_{xx} + 2N_{xy} w,_{xy} + N_y w,_{yy} + g = 0 \tag{2.16c}$$

στο Ω. Οι συνοριακοί όροι της εξίσωσης (2.15) δίνουν τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες

$$T_x = \tilde{T}_x \quad \text{ή} \quad u = \tilde{u} \tag{2.17a}$$

$$T_y = \tilde{T}_y \quad \text{ή} \quad v = \tilde{v} \tag{2.17b}$$

$$T_x w,_x + T_y w,_y = \tilde{V} \quad \text{ή} \quad w = \tilde{w} \tag{2.17c}$$

στο Γ. Στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής εργασίας και χωρίς να περιορίζεται η γενικότητα, υποθέτουμε ότι η μεμβράνη προεντείνεται με επιβαλλόμενες συνοριακές μετατοπίσεις οι οποίες δρουν ταυτόχρονα με το κατακόρυφο φορτίο. Συνεπώς οι συνοριακές συνθήκες είναι

$$u = \tilde{u} \tag{2.18a}$$

$$v = \tilde{v} \tag{2.18b}$$

$$w = \tilde{w} \tag{2.18c}$$

Οι τρις διαφορικές εξισώσεις (2.16) περιέχουν τέσσερις άγνωστες συναρτήσεις N_x, N_y, N_{xy} και w. Οι εξισώσεις αυτές με τη βοήθεια των καταστατικών εξισώσεων (2.6) και των κινηματικών εξισώσεων (2.3) δίδουν τις παρακάτω τρεις διαφορικές εξισώσεις ως προς τις συνιστώσες των μετατοπίσεων u, v, w.

$$(C_1 u,_x + C v,_y),_x + (C_{12} u,_y + C_{12} v,_x),_y = -(\frac{C_1}{2} w,_x^2 + \frac{C}{2} w,_y^2),_x - (C_{12} w,_x w,_y),_y \tag{2.19a}$$

$$(C_2 v,_y + C u,_x),_y + (C_{12} u,_y + C_{12} v,_x),_x = -(\frac{C_2}{2} w,_y^2 + \frac{C}{2} w,_x^2),_y - (C_{12} w,_x w,_y),_x \tag{2.19b}$$

$$\begin{aligned}[C_1(u,_x + \frac{1}{2} w,_x^2) + C(v,_y + \frac{1}{2} w,_y^2)]w,_{xx} + 2[C_{12}(u,_y + v,_x + w,_x w,_y)]w,_{xy} + \\ [C_2(v,_y + \frac{1}{2} w,_y^2) + C(u,_x + \frac{1}{2} w,_x^2)]w,_{yy} = -g\end{aligned} \tag{2.19c}$$

Οι εξισώσεις (2.19) μαζί με τις συνοριακές συνθήκες (2.18) αποτελούν το πρόβλημα συνοριακών τιμών από τη λύση του οποίου θα προκύψουν οι συνιστώσες των μετατοπίσεων u, v, w.

2.7. Εξαγωγή των εξισώσεων ισορροπίας για το δυναμικό πρόβλημα

Στην παράγραφο αυτή εξάγονται οι μη γραμμικές εξισώσεις ισορροπίας με εφαρμογή της Αρχής του Hamilton (Katsikadelis and Sapountzakis, 1988). Σύμφωνα με την αρχή αυτή, κατά την κίνηση ενός συστήματος από όλα τα γεωμετρικώς αποδεκτά πεδία μετατοπίσεων τα οποία συμπίπτουν σε δύο χρονικές στιγμές t_1 και t_2, το πραγματικό είναι εκείνο που ικανοποιεί την εξίσωση

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} (U - K + A) dt = 0 \tag{2.20}$$

όπου U είναι η ελαστική ενέργεια του συστήματος (2.9)

$$U = \frac{1}{2} \int_\Omega (C_1 \varepsilon_x^2 + C_2 \varepsilon_y^2 + 2C \varepsilon_x \varepsilon_y + C_{12} \gamma_{xy}^2) d\Omega$$

A η δυναμική ενέργεια των εξωτερικών φορτίων

$$A = -\int_\Omega [p_x(x,y,t)u + p_y(x,y,t)v + g(x,y,t)w] d\Omega - \int_\Gamma (\tilde{T}_x u + \tilde{T}_y v + \tilde{V} w) ds \tag{2.21}$$

όπου $p_x = p_x(x,y,t)$, $p_y = p_y(x,y,t)$ είναι τα φορτία που ασκούνται κατά τις διευθύνσεις x, y αντίστοιχα και $g = g(x,y,t)$ το εγκάρσιο φορτίο.

K είναι η κινητική ενέργεια του συστήματος και δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$K = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \rho(x,y)[(\frac{\partial u}{\partial t})^2 + (\frac{\partial v}{\partial t})^2 + (\frac{\partial w}{\partial t})^2]d\Omega \tag{2.22}$$

Δέον να σημειωθεί ότι η απευθείας χρησιμοποίηση της αρχής του Hamilton εφαρμόζεται κυρίως για συνεχή συστήματα (απειροβάθμια). Για τα συστήματα με διακεκριμένο βαθμό ελευθερίας κινήσεως η εφαρμογή της αρχής του Hamilton δίδει τις εξισώσεις Lagrange, οι οποίες μπορούν άμεσα να χρησιμοποιηθούν.

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.9), (2.21) και (2.22) στη (2.20) έχουμε

$$\begin{aligned}\delta I = \delta\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}\{\frac{1}{2}(C_1\varepsilon_x^2 + C_2\varepsilon_y^2 + 2C\varepsilon_x\varepsilon_y + C_{12}\gamma_{xy}^2) - \frac{1}{2}\rho(x,y)[(\frac{\partial u}{\partial t})^2 + (\frac{\partial v}{\partial t})^2 + (\frac{\partial w}{\partial t})^2] \\ -p_x(x,y,t)u - p_y(x,y,t)v - g(x,y,t)w\}d\Omega dt \\ -\delta\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma}(\tilde{T}_x u + \tilde{T}_y v + \tilde{V}w)dsdt = 0\end{aligned} \tag{2.23}$$

Χρησιμοποιώντας το λογισμό των μεταβολών και την παραγοντική ολοκλήρωση καταλήγουμε στις παρακάτω μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις κίνησης της μεμβράνης

$$\begin{aligned}\rho u,_{tt} -(C_1 u,_x + Cv,_y),_x -(C_{12}u,_y + C_{12}v,_x),_y -(\frac{C_1}{2}w,_x^2 + \frac{C}{2}w,_y^2),_x \\ -(C_{12}w,_x w,_y),_y = p_x\end{aligned} \tag{2.24a}$$

$$\begin{aligned}\rho v,_{tt} -(C_2 v,_y + Cu,_x),_y -(C_{12}u,_y + C_{12}v,_x),_x -(\frac{C_2}{2}w,_y^2 + \frac{C}{2}w,_x^2),_y \\ -(C_{12}w,_x w,_y),_x = p_y\end{aligned} \tag{2.24b}$$

$$\begin{aligned}\rho w,_{tt} -[C_1(u,_x + \frac{1}{2}w,_x^2) + C(v,_y + \frac{1}{2}w,_y^2)]w,_{xx} -2[C_{12}(u,_y + v,_x + w,_x w,_y)]w,_{xy} \\ -[C_2(v,_y + \frac{1}{2}w,_y^2) + C(u,_x + \frac{1}{2}w,_x^2)]w,_{yy} = g\end{aligned} \tag{2.24c}$$

που μαζί με τις συνοριακές συνθήκες (2.18)

$$u = \tilde{u}$$
$$v = \tilde{v}$$
$$w = \tilde{w}$$

στο Γ και τις αρχικές συνθήκες

$$w(x,y,0) = \tilde{w}_0 \tag{2.25a}$$

$$\dot{w}(x,y,0) = \dot{\tilde{w}}_0 \tag{2.25b}$$

στο Ω, αποτελούν το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για τη μεμβράνη.

3

Η Μέθοδος της Αναλογικής Εξισώσεως για το στατικό πρόβλημα και η αριθμητική της υλοποίηση

3.1 Εισαγωγή

Η Μέθοδος των Συνοριακών Στοιχείων (BEM) έχει αποδειχθεί, στην περίπτωση των γραμμικών προβλημάτων, ότι είναι μία αποτελεσματική εναλλακτική μέθοδος σε σχέση με τις πεδιακού τύπου μεθόδους των Πεπερασμένων Διαφορών (FDM) και των Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM). Πολλοί ερευνητές έχουν προσπαθήσει να αναπτύξουν μεθόδους BEM για μη γραμμικά προβλήματα. Η μόνη μέθοδος που μπορεί να θεωρηθεί καθαρά συνοριακή είναι η Μέθοδος της Δυαδικής Αμοιβαιότητας (DRM) (Partridge et al., 1992). Ο όρος '*καθαρά συνοριακή*' χρησιμοποιείται για να δηλώσει ότι μόνο συνοριακή διακριτοποίηση απαιτείται, παρόλο που μπορεί να χρησιμοποιηθούν και εσωτερικά σημεία μέσα στο χωρίο για να βελτιώσουν τη λύση. Ωστόσο η DRM δουλεύει όταν για μία μη-συνηθισμένη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση ή μία μη γραμμική, είναι δυνατό να αποσπαστεί ένας συνήθης γραμμικός διαφορικός τελεστής $L(\cdot)$ και να μεταφερθεί ότι απομένει στο δεξιό μέλος της εξίσωσης ως ένας όρος μαζικής φορτίσεως (Katsikadelis and Nerantzaki, 1999a). Δηλαδή

$$L(u) = b(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) \tag{3.1}$$

όπου $b(\cdot)$ είναι, γενικά, μία μη γραμμική συνάρτηση των $x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$.

Εν συνεχεία, η DRM εφαρμόζεται εάν η θεμελιώδης λύση της συζυγούς εξισώσεως είναι γνωστή ή μπορεί να βρεθεί, δηλαδή η μερική ιδιόμορφη (singular) λύση της εξισώσεως

$$L^*(u^*) = \delta(P - Q) \tag{3.2}$$

όπου $L^*(\cdot)$ είναι ο συζυγής τελεστής του $L(\cdot)$, $\delta(P - Q)$ η συνάρτηση Dirac και P, Q σημεία του διδιάστατου χώρου.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, είναι προφανές ότι η DRM δεν μπορεί να εφαρμοστεί στις περιπτώσεις που

(α) Η διαφορική εξίσωση δεν έχει τη μορφή της εξίσωσης (3.1) π.χ.

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = f(x, y)$$

(β) Η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης (3.2) δεν είναι διαθέσιμη, π.χ. όταν ο τελεστής $L^*(\cdot)$ έχει μεταβλητούς συντελεστές, όπως συμβαίνει στα προβλήματα που αντιμετωπίζονται στην παρούσα εργασία.

Επιπλέον των ανωτέρω περιορισμών είναι φανερό ότι διαφορετικοί τελεστές L, απαιτούν διαφορετικές διατυπώσεις της DRM, διαφορετική διαδικασία επιλύσεως και διαφορετικά προγράμματα Η/Υ, ακόμη και όταν η τάξη της διαφορικής εξίσωσης είναι η ίδια.

Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται η Μέθοδος της Αναλογικής Εξισώσεως (ΑΕΜ), η οποία αναπτύσσεται ως καθαρά συνοριακή μέθοδος, όπως εφαρμόζεται για μη γραμμικά προβλήματα (Katsikadelis and Nerantzaki, 1999a). Η μέθοδος είναι απαλλαγμένη από τους περιορισμούς της DRM. Απλές θεμελιώδεις λύσεις χρησιμοποιούνται, οι οποίες εξαρτώνται μόνο από την τάξη της διαφορικής εξίσωσης π.χ για διαφορικές εξισώσεις 2ας τάξεως χρησιμοποιείται η θεμελιώδης λύση της εξισώσεως Laplace. Η παρουσιαζόμενη μέθοδος είναι μία επέκταση της ΑΕΜ (Katsikadelis, 1994a) από πεδιακή/συνοριακή μέθοδος (Domain/Boundary Element Method, D/BEM) σε καθαρά συνοριακή μέθοδος (BEM) (Katsikadelis and Nerantzaki, 1999a).

Η ΑΕΜ έχει εφαρμοστεί με επιτυχία εκτός από γραμμικά, σε πλήθος από μη γραμμικά προβλήματα μεταξύ των οποίων αναφέρονται:

- Σε προβλήματα δυναμικού με ιδιότητες εξαρτώμενες από τη συνάρτηση του πεδίου, π.χ. προβλήματα θερμότητας σε σώματα με αγωγιμότητα που εξαρτάται από τη θερμοκρασία (Katsikadelis and Nerantzaki, 1999a).
- Στο πρόβλημα της ελάχιστης επιφάνειας (πρόβλημα του Plateau) (Katsikadelis and Nerantzaki, 2000a).
- Σε γεωμετρικά προβλήματα όπως η κατασκευή επιφανειών με δεδομένη μέση καμπυλότητα (Katsikadelis and Nerantzaki, 1999a).
- Στη μη γραμμική στατική ανάλυση ελαστικών μεμβρανών που υπόκεινται σε μεγάλες παραμορφώσεις, (Katsikadelis et al., 2000).
- Σε προβλήματα αλληλεπίδρασης υγρού-κατασκευής (Katsikadelis and Nerantzaki, 2000b).

- Στη μη γραμμική στατική ανάλυση πλακών που υπόκεινται σε μεγάλες παραμορφώσεις (Nerantzaki and Katsikadelis, 1988).
- Σε αντίστροφα προβλήματα (Katsikadelis and Nerantzaki, 1998).
- Σε προβλήματα που δεν υπάρχουν οι περιγράφουσες το πρόβλημα εξισώσεις, χρησιμοποιώντας μόνο συνοριακά δεδομένα (Katsikadelis and Nerantzaki, 1999b)
- Σε προβλήματα πεπερασμένης διδιάστατης ελαστικότητας (Kandilas and Katsikadelis, 1996)
- Σε πεπερασμένες παραμορφώσεις καλωδίων (Katsikadelis and Apostolopoulos, 1995)

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστεί η μέθοδος για το στατικό πρόβλημα της ανισότροπης και μη ομογενούς μεμβράνης καθώς και η αριθμητική της υλοποίηση, όπως έχει εφαρμοστεί τελευταία για το στατικό πρόβλημα της ισότροπης και ομογενούς μεμβράνης (Katsikadelis et al., 2000).

3.2. Η αναλογική εξίσωση για το στατικό πρόβλημα

Το πρόβλημα συνοριακών τιμών το οποίο διατυπώνεται από το σύστημα των τριών μη γραμμικών εξισώσεων ισορροπίας (2.19)

$$(C_1 u_{,x} + C v_{,y})_{,x} + (C_{12} u_{,y} + C_{12} v_{,x})_{,y} = -(\frac{C_1}{2} w_{,x}^2 + \frac{C}{2} w_{,y}^2)_{,x} - (C_{12} w_{,x} w_{,y})_{,y}$$

$$(C_2 v_{,y} + C u_{,x})_{,y} + (C_{12} u_{,y} + C_{12} v_{,x})_{,x} = -(\frac{C_2}{2} w_{,y}^2 + \frac{C}{2} w_{,x}^2)_{,y} - (C_{12} w_{,x} w_{,y})_{,x}$$

$$[C_1(u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2) + C(v_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2)] w_{,xx} + 2[C_{12}(u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y})] w_{,xy} + [C_2(v_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2) + C(u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2)] w_{,yy} = -g$$

στο Ω, μαζί με τις συνοριακές συνθήκες (2.18)

$$u = \tilde{u}$$
$$v = \tilde{v}$$
$$w = \tilde{w}$$

στο Γ, επιλύεται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της Αναλογικής Εξισώσεως που για το συγκεκριμένο πρόβλημα εφαρμόζεται ως εξής (Katsikadelis et al., 2000).

Έστω $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ και $w = w(x,y)$ είναι οι ζητούμενες λύσεις των εξισώσεων (2.19). Οι συναρτήσεις αυτές είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο Ω. Συνεπώς, εφαρμόζοντας τον τελεστή Laplace σ'αυτές, έχουμε

$$\nabla^2 u = b_1(x,y) \tag{3.3a}$$

$$\nabla^2 v = b_2(x,y) \tag{3.3b}$$

$$\nabla^2 w = b_3(x,y) \tag{3.3c}$$

Οι εξισώσεις (3.3), που στο εξής θα αναφέρονται ως αναλογικές εξισώσεις, υποδεικνύουν ότι η λύση των συζευγμένων εξισώσεων (2.19) θα μπορούσε να προσδιοριστεί λύνοντας τις τρεις ανεξάρτητες εξισώσεις Poisson με τις ίδιες συνοριακές συνθήκες (2.18) αν τα ιδεατά φορτία $b_i(x,y)$ $(i = 1,2,3)$ ήταν γνωστά.

Τα ιδεατά φορτία μπορούν να προσδιοριστούν σύμφωνα με την παρακάτω διαδικασία. Υποθέτουμε ότι

$$b_1 = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j^{(1)} f_j \tag{3.4a}$$

$$b_2 = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j^{(2)} f_j \tag{3.4b}$$

$$b_3 = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j^{(3)} f_j \tag{3.4c}$$

όπου $f_j = f_j(x,y)$ είναι ένα σύνολο από προσεγγιστικές συναρτήσεις και $\alpha_j^{(i)}$ $(i = 1,2,3)$ είναι $3M$ άγνωστοι συντελεστές που πρέπει να υπολογισθούν. Η επιλογή των σωστών προσεγγιστικών συναρτήσεων εγγυάται κατά ένα πολύ μεγάλο βαθμό τη σύγκλιση της μεθόδου και την ακρίβεια των αριθμητικών αποτελεσμάτων.

Η λύση των εξισώσεων (3.4) μπορεί να γραφεί ως ένα άθροισμα της ομογενούς λύσεως ($\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$) και μιας μερικής ($u^p, v^p, w^p$).

$$u = \overline{u} + u^p$$
$$v = \overline{v} + v^p \tag{3.5}$$
$$w = \overline{w} + w^p$$

Η μερική λύση βρίσκεται ως εξής

$$\nabla^2 u^p = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j^{(1)} f_j \tag{3.6a}$$

$$\nabla^2 v^p = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j^{(2)} f_j \tag{3.6b}$$

$$\nabla^2 w^p = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j^{(3)} f_j \tag{3.6c}$$

οι οποίες κατόπιν ολοκληρώσεως δίδουν

$$u^p = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j^{(1)} \hat{u}_j \tag{3.7a}$$

$$v^p = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j^{(2)} \hat{u}_j \tag{3.7b}$$

$$w^p = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j^{(3)} \hat{u}_j \tag{3.7c}$$

όπου $\hat{u}_j \ (j = 1,2,...M)$ είναι μία μερική λύση της εξίσωσης

$$\nabla^2 \hat{u}_j = f_j \qquad j = 1,2,...M \tag{3.8}$$

Σημειωτέον ότι η μερική λύση της εξισώσεως (3.8) μπορεί πάντα να προσδιορισθεί αν η f_j είναι δεδομένη (βλ. Παράρτημα Β). Η ομογενής λύση $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ προσδιορίζεται από τα παρακάτω τρία προβλήματα συνοριακών τιμών

$$\nabla^2 \overline{u} = 0 \qquad \text{στο } \Omega \tag{3.9a}$$

$$\overline{u} = \tilde{u} - \sum_{j=1}^{M} a_j^{(1)} \hat{u}_j \qquad \text{στο } \Gamma \tag{3.9b}$$

$$\nabla^2 \overline{v} = 0 \qquad \text{στο } \Omega \tag{3.10a}$$

$$\overline{v} = \tilde{v} - \sum_{j=1}^{M} a_j^{(2)} \hat{u}_j \qquad \text{στο } \Gamma \tag{3.10b}$$

$$\nabla^2 \overline{w} = 0 \qquad \text{στο } \Omega \tag{3.11a}$$

$$\overline{w} = \tilde{w} - \sum_{j=1}^{M} a_j^{(3)} \hat{u}_j \qquad \text{στο } \Gamma \tag{3.11b}$$

τα οποία λύνονται χρησιμοποιώντας τη Μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων (Κατσικαδέλης, 2000) όπως εφαρμόζεται για την εξίσωση Laplace (βλ. Παράρτημα Α).

Έτσι η ολοκληρωτική παράσταση της ομογενούς λύσεως $\overline{u}$ δίνεται ως εξής

$$c\overline{u}(P) = -\int_{\Gamma} (u^* \overline{u}_{,n} - \overline{u} q^*) ds \qquad P : \{x, y\} \in \Omega \cup \Gamma \tag{3.12}$$

στην οποία $\overline{u}_{,n} = \partial \overline{u} / \partial n$ είναι η παράγωγος της u ως προς την κάθετη διεύθυνση στο σύνορο και

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ell n r \,, \quad q^* = \partial u^* / \partial n \tag{3.13a,b}$$

είναι η θεμελιώδης λύση της εξισώσεως (3.9a) και η παραγωγός της κατά διεύθυνση κάθετη στο σύνορο, αντίστοιχα. Όπου

$$r = (Q - P) = \{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2\}^{1/2} \tag{3.14}$$

είναι η απόσταση μεταξύ δύο σημείων $P : \{x, y\}$ στο $\Omega \cup \Gamma$ και $Q(\xi, \eta)$ στο Γ; c είναι μία σταθερά η οποία παίρνει τις τιμές $c = 1$ αν $P \in \Omega$ και $c = a / 2\pi$ αν $P \in \Gamma$; a είναι η εσωτερική γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες στο σύνορο στο σημείο P. Δέον να σημειωθεί ότι για σημεία όπου το σύνορο είναι λείο $c = 1/2$.

Με τη βοήθεια των εξισώσεων (3.5a), (3.7a) και (3.12) η λύση της εξίσωσης (3.3a) σε ολοκληρωτική μορφή δίνεται ως εξής

$$cu = -\int_{\Gamma} (u^* \overline{u}_{,n} - \overline{u} q^*) ds + \sum_{j=1}^{M} a_j^{(1)} \hat{u}_j \tag{3.15}$$

παραγωγίζοντας την ανωτέρω εξίσωση για σημεία $P \in \Omega$ ($c = 1$) λαμβάνουμε

$$u,_x = -\int_\Gamma (u,_x^* \overline{u},_n - \overline{u} q,_x^*) ds + \sum_{j=1}^{M} (\hat{u}_j),_x a_j^{(1)} \tag{3.16a}$$

$$u,_y = -\int_\Gamma (u,_y^* \overline{u},_n - \overline{u} q,_y^*) ds + \sum_{j=1}^{M} (\hat{u}_j),_y a_j^{(1)} \tag{3.16b}$$

$$u,_{xx} = -\int_\Gamma (u,_{xx}^* \overline{u},_n - \overline{u} q,_{xx}^*) ds + \sum_{j=1}^{M} (\hat{u}_j),_{xx} a_j^{(1)} \tag{3.16c}$$

$$u,_{xy} = -\int_\Gamma (u,_{xy}^* \overline{u},_n - \overline{u} q,_{xy}^*) ds + \sum_{j=1}^{M} (\hat{u}_j),_{xy} a_j^{(1)} \tag{3.16d}$$

$$u,_{yy} = -\int_\Gamma (u,_{yy}^* \overline{u},_n - \overline{u} q,_{yy}^*) ds + \sum_{j=1}^{M} (\hat{u}_j),_{yy} a_j^{(1)} \tag{3.16e}$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για τις εξισώσεις (3.3b) και (3.3c) προκύπτει

$$cv = -\int_\Gamma (u^* \overline{v},_n - \overline{v} q^*) ds + \sum_{j=1}^{M} a_j^{(2)} \hat{u}_j \tag{3.17}$$

$$v,_x = -\int_\Gamma (u,_x^* \overline{v},_n - \overline{v} q,_x^*) ds + \sum_{j=1}^{M} (\hat{u}_j),_x a_j^{(2)} \tag{3.18a}$$

$$v,_y = -\int_\Gamma (u,_y^* \overline{v},_n - \overline{v} q,_y^*) ds + \sum_{j=1}^{M} (\hat{u}_j),_y a_j^{(2)} \tag{3.18b}$$

$$v,_{xx} = -\int_\Gamma (u,_{xx}^* \overline{v},_n - \overline{v} q,_{xx}^*) ds + \sum_{j=1}^{M} (\hat{u}_j),_{xx} a_j^{(2)} \tag{3.18c}$$

$$v,_{xy} = -\int_\Gamma (u,_{xy}^* \overline{v},_n - \overline{v} q,_{xy}^*) ds + \sum_{j=1}^{M} (\hat{u}_j),_{xy} a_j^{(2)} \tag{3.18d}$$

$$v,_{yy} = -\int_\Gamma (u,_{yy}^* \overline{v},_n - \overline{v} q,_{yy}^*) ds + \sum_{j=1}^{M} (\hat{u}_j),_{yy} a_j^{(2)} \tag{3.18e}$$

και

$$cw = -\int_\Gamma (u^* \overline{w},_n - \overline{w} q^*) ds + \sum_{j=1}^{M} a_j^{(3)} \hat{u}_j \tag{3.19}$$

$$w,_x = -\int_\Gamma (u,_x^* \overline{w},_n - \overline{w} q,_x^*) ds + \sum_{j=1}^{M} (\hat{u}_j),_x a_j^{(3)} \tag{3.20a}$$

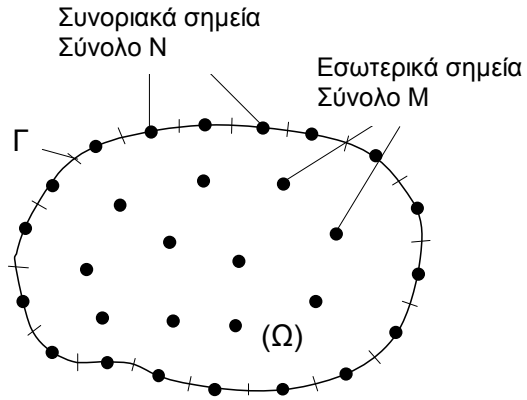
$$w,_y = -\int_\Gamma (u,_y^* \overline{w},_n - \overline{w} q,_y^*) ds + \sum_{j=1}^{M} (\hat{u}_j),_y a_j^{(3)} \tag{3.20b}$$

$$w,_{xx} = -\int_\Gamma (u,_{xx}^* \overline{w},_n - \overline{w} q,_{xx}^*) ds + \sum_{j=1}^{M} (\hat{u}_j),_{xx} a_j^{(3)} \tag{3.20c}$$

$$w,_{xy} = -\int_\Gamma (u,_{xy}^* \overline{w},_n - \overline{w} q,_{xy}^*) ds + \sum_{j=1}^{M} (\hat{u}_j),_{xy} a_j^{(3)} \tag{3.20d}$$

$$w,_{yy} = -\int_\Gamma (u,_{yy}^* \overline{w},_n - \overline{w} q,_{yy}^*) ds + \sum_{j=1}^{M} (\hat{u}_j),_{yy} a_j^{(3)} \tag{3.20e}$$

Το τελικό βήμα της μεθόδου της αναλογικής εξισώσεως είναι η εφαρμογή των εξισώσεων (2.19) σε M διακεκριμένα σημεία μέσα στο Ω (Σχ. 3.1).



Σχ. 3.1. Συνοριακή διακριτοποίηση και εσωτερικά κομβικά σημεία

Έτσι καταλήγουμε σε ένα σετ $3M$ πεπλεγμένων εξισώσεων της μορφής

$$\begin{aligned} F_j^{(1)}\{(u,_x)^j,(u,_y)^j,(u,_{xx})^j,(u,_{yy})^j,(v,_x)^j,(v,_y)^j,(v,_{xy})^j\} = \\ R_j^{(1)}\{(w,_x)^j,(w,_y)^j,(w,_{xx})^j,(w,_{xy})^j,(w,_{yy})^j\} \end{aligned} \tag{3.21a}$$

$$F_j^{(2)}\{(u,_x)^j,(u,_y)^j,(u,_{xy})^j,(v,_x)^j,(v,_y)^j,(v,_{xx})^j,(v,_{yy})^j\} = R_j^{(2)}\{(w,_x)^j,(w,_y)^j,(w,_{xx})^j,(w,_{xy})^j,(w,_{yy})^j\} \tag{3.21b}$$

$$F_j^{(3)}\{(u,_x)^j,(u,_y)^j,(v,_x)^j,(v,_y)^j,(w,_x)^j,(w,_y)^j,(w,_{xx})^j,(w,_{xy})^j,(w,_{yy})^j\} = -g^j \tag{3.21c}$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.15) εώς (3.20) για τον υπολογισμό των παραγώγων των u, v, w και αντικαθιστώντας στις εξισώσεις (3.21) καταλήγουμε σε ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων ως προς τους συντελεστές $a_j^{(1)}, a_j^{(2)}, a_j^{(3)}$

$$F_j^{(1)}(a_j^{(1)}, a_j^{(2)}) = R_j^{(1)}(a_j^{(3)}) \tag{3.22a}$$

$$F_j^{(2)}(a_j^{(1)}, a_j^{(2)}) = R_j^{(2)}(a_j^{(3)}) \tag{3.22b}$$

$$F_j^{(3)}(a_j^{(1)}, a_j^{(2)}, a_j^{(3)}) = -g^j \tag{3.22c}$$

Οι δύο πρώτες εξισώσεις είναι γραμμικές ως προς $a_j^{(1)}, a_j^{(2)}$, ενώ η τρίτη μη γραμμική.

3.3. Η αριθμητική υλοποίηση της αναλογικής εξισώσεως για το στατικό πρόβλημα

Η Μέθοδος των Συνοριακών Στοιχείων με σταθερά συνοριακά στοιχεία (Κατσικαδέλης, 2000) χρησιμοποιείται για την προσέγγιση των ολοκληρωμάτων στις σχέσεις (3.15), (3.17) και (3.19). Εάν N είναι ο αριθμός των συνοριακών κομβικών σημείων (Σχ. 3.1) τότε οι προαναφερθείσες εξισώσεις γράφονται

$$c^m \overline{u}^m = \sum_{k=1}^{M} \tilde{H}_{mk} \overline{u}^k - \sum_{k=1}^{N} G_{mk} (\overline{u},_n)^k \tag{3.23a}$$

$$c^m \overline{v}^m = \sum_{k=1}^{M} \tilde{H}_{mk} \overline{v}^k - \sum_{k=1}^{N} G_{mk} (\overline{v},_n)^k \tag{3.23b}$$

$$c^m \overline{w}^m = \sum_{k=1}^{M} \tilde{H}_{mk} \overline{w}^k - \sum_{k=1}^{N} G_{mk} (\overline{w},_n)^k \tag{3.23c}$$

όπου

$$\tilde{H}_{mk} = \int_k q^*(r_{mk})ds \tag{3.24a}$$

$$G_{mk} = \int_k u^*(r_{mk})ds \tag{3.24b}$$

Η ολοκλήρωση γίνεται στο k συνοριακό στοιχείο.

Εφαρμόζοντας τις εξισώσεις (3.23) σε όλα τα συνοριακά κομβικά σημεία και χρησιμοποιώντας συμβολισμό με μητρώα έχουμε

$$[H]\{\overline{u}\} - [G]\{\overline{u}_{,n}\} = 0 \tag{3.25a}$$

$$[H]\{\overline{v}\} - [G]\{\overline{v}_{,n}\} = 0 \tag{3.25b}$$

$$[H]\{\overline{w}\} - [G]\{\overline{w}_{,n}\} = 0 \tag{3.25c}$$

όπου

$$[H] = [\tilde{H}] - [I]\{c\} \tag{3.26}$$

και $\{c\}$ είναι ένα διάνυσμα που περιέχει τις τιμές του συντελεστή c; $[I]$ ο μοναδιαίος πίνακας.

Οι συνοριακές συνθήκες (2.18) όταν εφαρμοσθούν σε όλα τα συνοριακά κομβικά σημεία μπορούν να γραφούν

$$\{\overline{u}\} = \{\tilde{u}\} - [\hat{U}]\{a^{(1)}\} \tag{3.27a}$$

$$\{\overline{v}\} = \{\tilde{v}\} - [\hat{U}]\{a^{(2)}\} \tag{3.27b}$$

$$\{\overline{w}\} = \{\tilde{w}\} - [\hat{U}]\{a^{(3)}\} \tag{3.27c}$$

όπου $[\hat{U}] = [\hat{u}_j^m]$ είναι γνωστός πίνακας διαστάσεων $N \times M$ και

$$\{a^{(1)}\}^T = \{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots, a_M^{(1)}\} \tag{3.28a}$$

$$\{a^{(2)}\}^T = \{a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \ldots, a_M^{(2)}\} \tag{3.28b}$$

$$\{a^{(3)}\}^T = \{a_1^{(3)}, a_2^{(3)}, \ldots, a_M^{(3)}\} \tag{3.28c}$$

είναι τα άγνωστα διανύσματα των συντελεστών στις εξισώσεις (3.4).

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.27) στις εξισώσεις (3.25) και λύνοντας ως προς $\{\overline{u}_{,n}\}$, $\{\overline{v}_{,n}\}$ και $\{\overline{w}_{,n}\}$ παίρνουμε

$$\{\overline{u}_{,n}\} = [G]^{-1}[H]\{\tilde{u}\} - [G]^{-1}[H][\hat{U}]\{a^{(1)}\} \tag{3.29a}$$

$$\{\overline{v}_{,n}\} = [G]^{-1}[H]\{\tilde{v}\} - [G]^{-1}[H][\hat{U}]\{a^{(2)}\} \tag{3.29b}$$

$$\{\overline{w}_{,n}\} = [G]^{-1}[H]\{\tilde{w}\} - [G]^{-1}[H][\hat{U}]\{a^{(3)}\} \tag{3.29c}$$

Από εδώ και στο εξής, για χάρη ευκολίας, γράφουμε τις εξισώσεις (3.27) και (3.29) στην εξής μορφή

$$\{\overline{u}\} = [S]\{a^{(1)}\} + [I]\{\tilde{u}\} \tag{3.30a}$$

$$\{\overline{u}_{,n}\} = [S_n]\{a^{(1)}\} + [R_n]\{\tilde{u}\} \tag{3.30b}$$

$$\{\overline{v}\} = [S]\{a^{(2)}\} + [I]\{\tilde{v}\} \tag{3.31a}$$

$$\{\overline{v}_{,n}\} = [S_n]\{a^{(2)}\} + [R_n]\{\tilde{v}\} \tag{3.31b}$$

$$\{\overline{w}\} = [S]\{a^{(3)}\} + [I]\{\tilde{w}\} \tag{3.32a}$$

$$\{\overline{w}_{,n}\} = [S_n]\{a^{(3)}\} + [R_n]\{\tilde{w}\} \tag{3.32b}$$

όπου τέθηκε

$$[S] = -[\hat{U}] \tag{3.33a}$$

$$[R_n] = [G]^{-1}[H] \tag{3.33b}$$

$$[S_n] = -[R_n][\hat{U}] \tag{3.33c}$$

Οι εξισώσεις (3.15)-(3.20) όταν διακριτοποιηθούν και εφαρμοστούν σε M εσωτερικά κομβικά σημεία στο Ω, μετά την απαλοιφή των διανυσμάτων $\{\overline{u}\}$, $\{\overline{u}_{,n}\}$, $\{\overline{v}\}$, $\{\overline{v}_{,n}\}$, $\{\overline{w}\}$, $\{\overline{w}_{,n}\}$ και με τη βοήθεια των εξισώσεων (3.30), (3.31), (3.32) δίνουν

$$\{u\} = [D]\{a^{(1)}\} + [E]\{\tilde{u}\} \tag{3.34a}$$

$$\{u,_x\} = [D_x]\{a^{(1)}\} + [E_x]\{\tilde{u}\} \tag{3.34b}$$

$$\{u,_y\} = [D_y]\{a^{(1)}\} + [E_y]\{\tilde{u}\} \tag{3.34c}$$

$$\{u,_{xx}\} = [D_{xx}]\{a^{(1)}\} + [E_{xx}]\{\tilde{u}\} \tag{3.34d}$$

$$\{u,_{xy}\} = [D_{xy}]\{a^{(1)}\} + [E_{xy}]\{\tilde{u}\} \tag{3.34e}$$

$$\{u,_{yy}\} = [D_{yy}]\{a^{(1)}\} + [E_{yy}]\{\tilde{u}\} \tag{3.34f}$$

$$\{v\} = [D]\{a^{(2)}\} + [E]\{\tilde{v}\} \tag{3.35a}$$

$$\{v,_x\} = [D_x]\{a^{(2)}\} + [E_x]\{\tilde{v}\} \tag{3.35b}$$

$$\{v,_y\} = [D_y]\{a^{(2)}\} + [E_y]\{\tilde{v}\} \tag{3.35c}$$

$$\{v,_{xx}\} = [D_{xx}]\{a^{(2)}\} + [E_{xx}]\{\tilde{v}\} \tag{3.35d}$$

$$\{v,_{xy}\} = [D_{xy}]\{a^{(2)}\} + [E_{xy}]\{\tilde{v}\} \tag{3.35e}$$

$$\{v,_{yy}\} = [D_{yy}]\{a^{(2)}\} + [E_{yy}]\{\tilde{v}\} \tag{3.35f}$$

$$\{w\} = [D]\{a^{(3)}\} + [E]\{\tilde{w}\} \tag{3.36a}$$

$$\{w,_x\} = [D_x]\{a^{(3)}\} + [E_x]\{\tilde{w}\} \tag{3.36b}$$

$$\{w,_y\} = [D_y]\{a^{(3)}\} + [E_y]\{\tilde{w}\} \tag{3.36c}$$

$$\{w,_{xx}\} = [D_{xx}]\{a^{(3)}\} + [E_{xx}]\{\tilde{w}\} \tag{3.36d}$$

$$\{w,_{xy}\} = [D_{xy}]\{a^{(3)}\} + [E_{xy}]\{\tilde{w}\} \tag{3.36e}$$

$$\{w,_{yy}\} = [D_{yy}]\{a^{(3)}\} + [E_{yy}]\{\tilde{w}\} \tag{3.36f}$$

όπου

$$[D] = [H][S] - [G][S_n] + [\hat{U}] \tag{3.37a}$$

$$[D_x] = [H_x][S] - [G_x][S_n] + [\hat{U}_x] \tag{3.37b}$$

$$[D_y\} = [H_y][S] - [G_y][S_n] + [\hat{U}_y] \tag{3.37c}$$

$$[D_{xx}] = [H_{xx}][S] - [G_{xx}][S_n] + [\hat{U}_{xx}] \tag{3.37d}$$

$$[D_{xy}] = [H_{xy}][S] - [G_{xy}][S_n] + [\hat{U}_{xy}] \tag{3.37e}$$

$$[D_{yy}] = [H_{yy}][S] - [G_{yy}][S_n] + [\hat{U}_{yy}] \tag{3.37f}$$

και

$$[E] = [H] - [G][R_n] \tag{3.38a}$$

$$[E_x] = [H_x] - [G_x][R_n] \tag{3.38b}$$

$$[E_y] = [H_y] - [G_y][R_n] \tag{3.38c}$$

$$[E_{xx}] = [H_{xx}] - [G_{xx}][R_n] \tag{3.38d}$$

$$[E_{xy}] = [H_{xy}] - [G_{xy}][R_n] \tag{3.38e}$$

$$[E_{yy}] = [H_{yy}] - [G_{yy}][R_n] \tag{3.38f}$$

Στις παραπάνω εκφράσεις τα $[H_x],[H_y]...[H_{yy}]$ και $[G_x],[G_y]...[G_{yy}]$ είναι γνωστά μητρώα διαστάσεων $M \times M$ τα οποία προκύπτουν από την ολοκλήρωση, πάνω στο σύνορο, των πυρήνων που εμφανίζονται στις εξισώσεις (3.15)-(3.20).

Τέλος, αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.34), (3.35), (3.36) στις εξισώσεις (3.22) δημιουργείται το παρακάτω αλγεβρικό σύστημα των εξισώσεων με αγνώστους τα διανύσματα $\{a^{(1)}\},\{a^{(2)}\}$ και $\{a^{(3)}\}$

$$\left\{F^{(1)}(\{a^{(1)}\},\{a^{(2)}\})\right\} = \left\{R^{(1)}(\{a^{(3)}\})\right\} \tag{3.39a}$$

$$\left\{F^{(2)}(\{a^{(1)}\},\{a^{(2)}\})\right\} = \left\{R^{(2)}(\{a^{(3)}\})\right\} \tag{3.39b}$$

$$\left\{F^{(3)}(\{a^{(1)}\},\{a^{(2)}\},\{a^{(3)}\})\{a^{(3)}\}\right\} = -\{g\} \tag{3.39c}$$

Οι δύο πρώτες εξισώσεις είναι γραμμικέςως προς τα $\{a^{(1)}\},\{a^{(2)}\}$, ενώ η τρίτη μη γραμμική.

Οι ανωτέρω εξισώσεις επιλύονται και προσδιορίζονται τα διανύσματα $\{a^{(1)}\},\{a^{(2)}\}$ και $\{a^{(3)}\}$. Κατόπιν τούτου οι μετατοπίσεις και οι παραγωγοί τους στα εσωτερικά κομβικά σημεία υπολογίζονται από τις σχέσεις (3.34), (3.35) και (3.36) ενώ οι μεμβρανικές δυνάμεις από τις σχέσεις (2.6) με τη βοήθεια των σχέσεων (2.3). Για σημεία του χωρίου $P \in \Omega$ τα οποία δεν συμπίπτουν με τα εσωτερικά κομβικά σημεία τα μεγέθη αυτά μπορούν να υπολογισθούν από τις σχέσεις (3.13) εώς (3.18).

4

Υπολογιστική επίλυση του στατικού προβλήματος

4.1. Εισαγωγή

Σ' αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται οι μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν για την λύση του μη γραμμικού αλγεβρικού συστήματος (3.39), το οποίο προκύπτει από την αριθμητική υλοποίηση της ΑΕΜ για το στατικό πρόβλημα της ανισότροπης και μη ομογενούς μεμβράνης. Επίσης παρουσιάζεται ο κώδικας που έχει γραφτεί για την υπολογιστική επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος, σε γλώσσα προγραμματισμού FORTRAN, καθώς και αριθμητικά παραδείγματα που καταδεικνύουν την ακρίβεια και αποτελεσματικότητα της μεθόδου.

4.2. Λύση του μη γραμμικού αλγεβρικού συστήματος

Το μη γραμμικό αλγεβρικό σύστημα όπως αυτό διατυπώνεται από τις εξισώσεις (3.39)

$$\mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{a}^{(1)},\mathbf{a}^{(2)}) = \mathbf{R}^{(1)}(\mathbf{a}^{(3)})$$
$$\mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{a}^{(1)},\mathbf{a}^{(2)}) = \mathbf{R}^{(2)}(\mathbf{a}^{(3)})$$
$$\mathbf{F}^{(3)}(\mathbf{a}^{(1)},\mathbf{a}^{(2)},\mathbf{a}^{(3)})\mathbf{a}^{(3)} = -\mathbf{g}$$

έχει $3M$ αγνώστους. Τα διανύσματα $\mathbf{a}^{(1)},\mathbf{a}^{(2)}$ και $\mathbf{a}^{(3)}$.

Οι δύο, όμως, πρώτες εξισώσεις είναι γραμμικές ως προς $\mathbf{a}^{(1)},\mathbf{a}^{(2)}$ και μπορούν να γραφούν ως εξής

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{a}^{(2)} = \mathbf{R}^{(1)}(\mathbf{a}^{(3)}) \tag{4.1a}$$

$$\mathbf{A}_{21}\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{a}^{(2)} = \mathbf{R}^{(2)}(\mathbf{a}^{(3)}) \tag{4.1b}$$

όπου $\mathbf{A}_{11},\mathbf{A}_{12},\mathbf{A}_{21}$ και $\mathbf{A}_{22}$ είναι γνωστά μητρώα διαστάσεων $M \times M$.

Έτσι αν οι παραπάνω εξισώσεις επιλυθούν ως προς $\mathbf{a}^{(1)}$ και $\mathbf{a}^{(2)}$, παίρνουμε

$$\mathbf{a}^{(1)} = \mathbf{S}^{(1)}(\mathbf{a}^{(3)}) \tag{4.2a}$$

$$\mathbf{a}^{(2)} = \mathbf{S}^{(2)}(\mathbf{a}^{(3)}) \tag{4.2b}$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (4.2) στην εξίσωση (3.39c) λαμβάνουμε την μη γραμμική αλγεβρική εξίσωση

$$\mathbf{S}^{(3)}(\mathbf{a}^{(3)})\mathbf{a}^{(3)} = -\mathbf{g} \tag{4.3}$$

με αγνώστους τα M στοιχεία του διανύσματος $\mathbf{a}^{(3)}$.

Τρεις διαφορετικοί μέθοδοι χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυσή της εξισώσεως (4.3)

4.2.1 Απευθείας επίλυση

Η απευθείας επίλυση των M μη γραμμικών εξισώσεων με τη βοήθεια της υπορουτίνας NEQNF, της IMSL, που βρίσκεται στη βιβλιοθήκη της Fortran PowerStation 4.0. Η NEQNF βασίζεται στην υπορουτίνα HYBRID1, η οποία χρησιμοποιεί μία τροποποίηση του υβριδικού αλγόριθμου του M.J.D. Powell. Ο αλγόριθμος είναι μία παραλλαγή της μεθόδου Newton, η οποία χρησιμοποιεί πεπερασμένες διαφορές για την προσέγγιση της Ιακωβιανής και λαμβάνει προφυλάξεις για την αποφυγή μεγάλων βημάτων ή συνεχώς αυξανομένων υπολοίπων.

4.2.2. Μέθοδος βελτιστοποίησης

Η μέθοδος βελτιστοποίησης (Scheid, 1988) βασίστηκε στην ιδέα ότι το σύστημα των εξισώσεων $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ ή $f_i = 0$ για $i = 1,2,\ldots,n$ επιλύεται όταν η συνάρτηση

$$S = f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2 = \sum_i^n f_i^2 \tag{4.4}$$

ελαχιστοποιείται, αφού το ελάχιστο προφανώς συμβαίνει όταν όλα τα f_i μηδενίζονται συγχρόνως.

Στην προκειμένη περίπτωση η συνάρτηση που ελαχιστοποιείται είναι το άθροισμα των τετραγώνων των στοιχείων του διανύσματος $\mathbf{S}^{(3)}(\mathbf{a}^{(3)})\mathbf{a}^{(3)} + \mathbf{g}$. Η ελαχιστοποίηση πραγματοποιείται με τη βοήθεια της υπορουτίνας UMINF, της IMSL, που βρίσκεται στη

βιβλιοθήκη της Fortran PowerStation 4.0. Η UMINF χρησιμοποιεί μία παραλλαγή της μεθόδου Newton και το μόνο που απαιτείται είναι οι τιμές της συνάρτησης.

4.2.2. Επαναληπτική μέθοδος του σταθερού σημείου (fixed point)

Η επαναληπτική μέθοδος του σταθερού σημείου (Scheid, 1988) επιλύει τα μονοδιάστατα προβλήματα της μορφής $x = f(x)$, χρησιμοποιώντας την αναδρομική σχέση

$$x_n = F(x_{n-1}) \tag{4.5}$$

και συγκλίνει στη λύση εάν $|F'(x)| \leq L < 1$. Το σφάλμα $e_n = \rho - x_n$, όπου ρ η ακριβής λύση, έχει την ιδιότητα

$$e_n \simeq F'(\rho) e_{n-1} \tag{4.6}$$

έτσι σε κάθε επανάληψη το λάθος μειώνεται κατά ένα συντελεστή $F'(\rho)$. Αν η τιμή του $F'(\rho)$ είναι κοντά στη μονάδα η σύγκλιση είναι πολύ αργή.

Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται με την ίδια ευκολία και σε n-διάστατα προβλήματα της μορφής $\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, χρησιμοποιώντας, όπως και προηγουμένως, την αναδρομική σχέση

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{F}(\mathbf{x}_{n-1}) \tag{4.7}$$

και συγκλίνει μόνο όταν το δεξί μέλος της εξισώσεως (4.7) παριστάνει μια συστολική απεικόνιση (contraction mapping) (Dahlquist and Björck, 1974), δηλαδή

$$|grad\mathbf{F}| = \left|\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}\right| \leq 1 \tag{4.8}$$

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα η μέθοδος εφαρμόζεται ως εξής

Ξεκινώντας από ένα τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{a}^{(3)}$ και με τη βοήθεια των εξισώσεων (4.2a), (4.2b) υπολογίζονται τα διανύσματα $\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}$. Εν συνεχεία, το νέο διάνυσμα $\mathbf{a}^{(3)}$ υπολογίζεται, αφού πρώτα αντιστραφεί ο τελεστής $\mathbf{S}^{(3)}(\cdot)$, από την εξίσωση (4.3) με την αναδρομική σχέση

$$\mathbf{a}_n^{(3)} = -[\mathbf{S}^{(3)}(\mathbf{a}_{n-1}^{(3)})]^{-1}\mathbf{g} \tag{4.9}$$

Η μέθοδος σταθερού σημείου έχει δύο πολύ σημαντικά πλεονεκτήματα.

(i) Μπορεί να εφαρμοστεί ακόμη και σε μερικές διαφορικές εξισώσεις που η αριθμητική υλοποίησή τους με την ΑΕΜ δεν καταλήγει σε αλγεβρικές μη γραμμικές εξισώσεις της μορφής $\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{a})$ π.χ.

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = f(x,y)$$

Στην περίπτωση αυτή μπορεί να προστεθεί και στα δύο μέλη της εξίσωσης ένας γραμμικός όρος ενώ ο μη γραμμικός να περάσει στο δεξί μέλος. Δηλαδή

$$u_{xx} + u_{yy} = (u_{xx} + u_{yy}) - (u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2) + f(x,y)$$

Εφαρμόζοντας τώρα την ΑΕΜ έχουμε

$$\mathbf{Ba} = \mathbf{F}(\mathbf{a})$$

η οποία τελικά γράφεται στην επιθυμητή μορφή

$$\mathbf{a} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{a})$$

(ii) Μπορεί σχεδόν πάντοτε να συγκλίνει στην ακριβή λύση αν ο γραμμικός όρος που προστίθεται, πολλαπλασιασμένος με μία σταθερά λ, ικανοποιεί τη συνθήκη συγκλίσεως π.χ. στο προηγούμενο παράδειγμα εφαρμόζεται ως εξής

$$\lambda(u_{xx} + u_{yy}) = \lambda(u_{xx} + u_{yy}) - (u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2) + f(x,y)$$

Εφαρμόζοντας τώρα την ΑΕΜ έχουμε

$$\lambda\mathbf{Ba} = \mathbf{F}(\mathbf{a},\lambda)$$

η οποία τελικά γράφεται στην γνωστή πλέον μορφή

$$\mathbf{a} = \lambda^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{a},\lambda)$$

Η σύγκλιση, των παραπάνω τριών μεθόδων, είναι πολύ καλή για προεντεταμένες μεμβράνες ενώ χειροτερεύει με την μείωση της προέντασης. Για μηδενική προένταση μόνο η δεύτερη και τρίτη μέθοδος μπορεί να δώσει καλά αποτελέσματα.

4.3. Πρόγραμμα υπολογιστή για την επίλυση του στατικού προβλήματος (3NL2BECON)

4.3.1. Η δομή του προγράμματος

Το πρόγραμμα 3NL2BECON έχει γραφεί σε γλώσσα προγραμματισμού FORTRAN για την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών που περιγράφεται από τις εξισώσεις (2.19) και (2.18). Το πρόγραμμα χρησιμοποιεί σταθερά στοιχεία για την προσέγγιση των συνοριακών ολοκληρωμάτων.

Το πρόγραμμα χωρίζεται σε δύο ενότητες, στο κύριο πρόγραμμα (main program) και στα υποπρογράμματα (subroutines).

Κύριο πρόγραμμα (Main program)

Το κύριο πρόγραμμα καθορίζει τις μέγιστες διαστάσεις των μητρώων, τη τιμή της σταθεράς των προσεγγιστικών συναρτήσεων multiquadrics (βλ. Παράρτημα Β) και ανοίγει δύο αρχεία. Το αρχείο από το οποίο διαβάζει τα δεδομένα (Αρχείο Εισόδου/Input File) και το αρχείο στο οποίο γράφονται τα αποτελέσματα (Αρχείο Εξόδου/Output File). Τέλος καλεί την εκάστοτε ρουτίνα επίλυσης του μη γραμμικού συστήματος.

Υποπρογράμματα (Subroutines).

Στη συνέχεια το κύριο πρόγραμμα καλεί τα ακόλουθα υποπρογράμματα

INPUT	Το υποπρόγραμμα αυτό διαβάζει τα δεδομένα από το αρχείο εισόδου.
GMATR	Το υποπρόγραμμα αυτό σχηματίζει το μητρώο $[G]$ που ορίζεται από τη σχέση (3.24b).

HMATR	Το υποπρόγραμμα αυτό σχηματίζει το μητρώο $[H]$ που ορίζεται από τη σχέση (3.24a).
UQMATR	Το υποπρόγραμμα αυτό σχηματίζει το μητρώο $[\hat{U}]$ που ορίζεται στην παράγραφο 3.2.
SMATR	Το υποπρόγραμμα αυτό σχηματίζει το μητρώο $[S]$ που ορίζεται από τη σχέση (3.33a).
UIN	Το υποπρόγραμμα αυτό σχηματίζει τα μητρώα $[D],[E]$ που ορίζονται από τις σχέσεις (3.37a) και (3.38a).
UXUY	Το υποπρόγραμμα αυτό σχηματίζει τα μητρώα $[D_x],[D_y],[E_x],[E_y]$ που ορίζονται από τις σχέσεις (3.37b), (3.37c), (3.38b), (3.38c) αντίστοιχα.
UXXUYYUXY	Το υποπρόγραμμα αυτό σχηματίζει τα μητρώα $[D_{xx}],[D_{xy}],[D_{yy}]$ και $[E_{xx}],[E_{xy}],[E_{yy}]$ που ορίζονται από τις σχέσεις (3.37d), (3.37e), (3.37f) και (3.38d), (3.38e), (3.38f) αντίστοιχα.
STRESSIN	Το υποπρόγραμμα αυτό υπολογίζει τις μεμβρανικές δυνάμεις στα εσωτερικά κομβικά σημεία.
STRESSB	Το υποπρόγραμμα αυτό υπολογίζει τις μεμβρανικές δυνάμεις στα κομβικά σημεία του συνόρου.
OUTPUT	Το υποπρόγραμμα γράφει τα αποτελέσματα στο αρχείο εξόδου.

4.3.2. Το πρόγραμμα 3NL2BECON

Το πρόγραμμα αυτό είναι προσαρμογή του προγράμματος που γράφθηκε για τη λήψη αριθμητικών αποτελεσμάτων στην εργασία (Katsikadelis and Nerantzaki, 1999a).

Η λίστα του προγράμματος έχει ως εξής

```
C=====================================================================
C
      PROGRAM 3NL2BECON
C
C
C  This program solves the system of (3) two-dimensional (NL)inear
C  (2)nd order partial differential equations using the (B)oundary
C  (E)lement method with (CON)stant boundary elements
C
      USE MSIMSL
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      CHARACTER*15 INPUTFILE,OUTPUTFILE
C
C  Set the maximum dimensions
C
      PARAMETER (N=100)
      PARAMETER (IN=49)
      COMMON C,EN,GG,EL,CC,TT
C
C  N= Number of boundary elelments equal to number of boundary
C     nodes
C  IN= Number of internal collocation points
C
      DIMENSION ICODE(N)
      DIMENSION XL(N+1),YL(N+1),XM(N),YM(N),G(N,N),H(N,N)
      DIMENSION A(2*N,2*N),XIN(IN),YIN(IN)
      DIMENSION UB1(N),UB2(N),UB3(N),UNB1(N),UNB2(N),UNB3(N)
      DIMENSION UHAT(N,IN),QHAT(N,IN),UQ(N,IN)
      DIMENSION S1(2*N,IN+1),S2(2*N,IN+1),S3(2*N,IN+1)
      DIMENSION W1(IN,IN+1),W2(IN,IN+1),W3(IN,IN+1)
      DIMENSION WX1(IN,IN+1),WX2(IN,IN+1),WX3(IN,IN+1)
      DIMENSION WY1(IN,IN+1),WY2(IN,IN+1),WY3(IN,IN+1)
      DIMENSION WXX1(IN,IN+1),WXX2(IN,IN+1),WXX3(IN,IN+1)
      DIMENSION WYY1(IN,IN+1),WYY2(IN,IN+1),WYY3(IN,IN+1)
      DIMENSION WXY1(IN,IN+1),WXY2(IN,IN+1),WXY3(IN,IN+1)
      DIMENSION W(3*IN,3*IN+3),WX(3*IN,3*IN+3),WY(3*IN,3*IN+3),
     *WXX(3*IN,3*IN+3),WYY(3*IN,3*IN+3),WXY(3*IN,3*IN+3),
     *U(3*IN),UX(3*IN),UY(3*IN),UXX(3*IN),UYY(3*IN),UXY(3*IN)
      DIMENSION X(IN),XU(3*IN+3),HELP(IN,IN)
      DIMENSION SNX(IN),SNY(IN),SNXY(IN)
      DIMENSION SXB(N),SYB(N),SXYB(N),TRN(N),TRT(N)
      DIMENSION XSCALE(IN),XGUESS(IN),IPARAM(7),RPARAM(7)
C
      EXTERNAL FCN
      COMMON/FC/ XU,XIN,YIN,W1,W2,W3,WX1,WX2,WX3,WY1,WY2,WY3,WXX1,WXX2,
     *            WXX3,WYY1,WYY2,WYY3,WXY1,WXY2,WXY3

      C=1.
      EN=3.D0/10.D0
      GG=10.*0.24175824
      EL=110000.D0
      TT=0.002
      CC=EL*TT/(1.D0-EN**2)

C
C  Read the names and open the input and output files
C
```

```
      WRITE (*,'(A)')' Name of the INPUTFILE (max.15 characters)'
      READ  (*,'(A)') INPUTFILE
      WRITE (*,'(A)')' Name of the OUTPUTFILE (max.15 characters)'
      READ  (*,'(A)') OUTPUTFILE
      OPEN (UNIT=1, FILE=INPUTFILE)
      OPEN (UNIT=2, FILE=OUTPUTFILE)
C
C  Read data from INPUTFILE
C
      CALL INPUT (XL,YL,XIN,YIN,ICODE,UB1,UB2,UB3,N,IN)
C
      WRITE(*,*)('FFFFFF  1 FFFFF')
C  Compute the G matrix
C
      CALL GMATR (XL,YL,XM,YM,G,N)
C
      WRITE(*,*)('FFFFFF  2 FFFFF')

C  Compute the H matrix
C
      CALL HMATR (XL,YL,XM,YM,H,N)
C
      WRITE(*,*)('FFFFFF  3 FFFFF')

C  Compute the  matrices UHAT,QHAT,UQ=-(A1*UHAT+A2*QHAT)
C
      CALL UQMATR (XL,YL,XM,YM,XIN,YIN,
     1              UHAT,QHAT,UQ,ICODE,N,IN)
C
      WRITE(*,*)('FFFFFF  4 FFFFF')
C
C  Form the S matrix: U=SUP*a+UB, Un=SLOW*a+UNB
C
      CALL SMATR(G,H,A,UB1,UB2,UB3,S1,S2,S3,UQ,ICODE,N,IN)
C
      WRITE(*,*)('FFFFFF  5 FFFFF')
C
C  Compute the values of U at the internal points
C
      CALL UIN(XL,YL,XIN,YIN,S1,S2,S3,W1,W2,W3,N,IN)
C
      WRITE(*,*)('FFFFFF  6 FFFFF')
C
C  Compute the values of Ux and Uy at the internal points
C
      CALL UXUY(XL,YL,XIN,YIN,S1,S2,S3,WX1,WX2,WX3,WY1,WY2,WY3,N,IN)
C
      WRITE(*,*)('FFFFFF  7 FFFFF')

C  Compute the values of Uxx, Uyy and Uxy at the internal points
C
      CALL UXXUYYUXY(XL,YL,XIN,YIN,S1,S2,S3,
     1                WXX1,WXX2,WXX3,WYY1,WYY2,WYY3,WXY1,WXY2,WXY3,N,IN)
C
      WRITE(*,*)('FFFFFF  8 FFFFF')
C
C  Compute the values
```

```
C
      DO 10 I=1,IN
      XSCALE(I)=1.0
      XGUESS(I)=0.001
   10 CONTINUE
C==========================================
      DO 21 I=1,IN
      DO 21 J=1,IN
   21 HELP(I,J)=W3(I,J)
      CALL DLINRG(IN,HELP,IN,HELP,IN)
      DO 31 I=1,IN
   31 XGUESS(I)=XGUESS(I)-W3(I,IN+1)
      XGUESS=MATMUL(HELP,XGUESS)
C==========================================
      IPARAM(1)=0
      FSCALE=1.0
      CALL DU4INF(IPARAM,RPARAM)
      IPARAM(3)=20000
      IPARAM(4)=20000
      IPARAM(5)=20000
      RPARAM(3)=0.001D0
      RPARAM(5)=0.001D0
      CALL DUMINF (FCN, IN, XGUESS, XSCALE, FSCALE, IPARAM, RPARAM,
     1       X, FVALUE)
C
C  Compute the values
C
      DO 20 J=1,3*IN+3
      W(I,J)=0.
      WX(I,J)=0.
      WY(I,J)=0.
      WXX(I,J)=0.
      WYY(I,J)=0.
   20 WXY(I,J)=0.
C
      DO 30 I=1,IN
      DO 30 J=1,IN+1
      W(I,J)=W1(I,J)
      W(IN+I,IN+1+J)=W2(I,J)
      W(2*IN+I,2*IN+2+J)=W3(I,J)

      WX(I,J)=WX1(I,J)
      WX(IN+I,IN+1+J)=WX2(I,J)
      WX(2*IN+I,2*IN+2+J)=WX3(I,J)

      WY(I,J)=WY1(I,J)
      WY(IN+I,IN+1+J)=WY2(I,J)
      WY(2*IN+I,2*IN+2+J)=WY3(I,J)

      WXX(I,J)=WXX1(I,J)
      WXX(IN+I,IN+1+J)=WXX2(I,J)
      WXX(2*IN+I,2*IN+2+J)=WXX3(I,J)

      WYY(I,J)=WYY1(I,J)
      WYY(IN+I,IN+1+J)=WYY2(I,J)
      WYY(2*IN+I,2*IN+2+J)=WYY3(I,J)
```

```
      WXY(I,J)=WXY1(I,J)
      WXY(IN+I,IN+1+J)=WXY2(I,J)
   30 WXY(2*IN+I,2*IN+2+J)=WXY3(I,J)
C
      U=MATMUL(W,XU)
      UX=MATMUL(WX,XU)
      UY=MATMUL(WY,XU)
      UXX=MATMUL(WXX,XU)
      UYY=MATMUL(WYY,XU)
      UXY=MATMUL(WXY,XU)
C
      DO 55 I=1,N
      DO 55 J=1,IN
      S1(I,J)=S1(I,J)+UHAT(I,J)
      S2(I,J)=S2(I,J)+UHAT(I,J)
      S3(I,J)=S3(I,J)+UHAT(I,J)
      S1(I+N,J)=S1(I+N,J)+QHAT(I,J)
      S2(I+N,J)=S2(I+N,J)+QHAT(I,J)
   55 S3(I+N,J)=S3(I+N,J)+QHAT(I,J)
C
      DO 56 I=1,IN
      X(I)=XU(I)
      X(I+IN)=XU(IN+1+I)
   56 X(I+2*IN)=XU(2*IN+2+I)
      DO 57 I=1,IN
   57 WRITE(2,*) X(I+2*IN)
C
      DO 60 I=1,N
      SUMUB1=0.
      SUMUB2=0.
      SUMUB3=0.
      SUMUNB1=0.
      SUMUNB2=0.
      SUMUNB3=0.
         DO 65 K=1,IN
         SUMUB1=SUMUB1+S1(I,K)*X(K)
         SUMUB2=SUMUB2+S2(I,K)*X(K+IN)
         SUMUB3=SUMUB3+S3(I,K)*X(K+2*IN)
         SUMUNB1=SUMUNB1+S1(I+N,K)*X(K)
         SUMUNB2=SUMUNB2+S2(I+N,K)*X(K+IN)
   65    SUMUNB3=SUMUNB3+S3(I+N,K)*X(K+2*IN)
      UB1(I)=SUMUB1+S1(I,IN+1)
      UB2(I)=SUMUB2+S2(I,IN+1)
      UB3(I)=SUMUB3+S3(I,IN+1)
      UNB1(I)=SUMUNB1+S1(I+N,IN+1)
      UNB2(I)=SUMUNB2+S2(I+N,IN+1)
   60 UNB3(I)=SUMUNB3+S3(I+N,IN+1)
C
      WRITE(*,*)('END OF SOLVE NON-LINEAR')
C
C  Compute the values of the stresses     at the internal points
C
      CALL STRESSIN(UX,UY,SNX,SNY,SNXY,IN)
      WRITE(*,*)('END OF STRESSIN')
C
C  Compute the values of the boundary stresses
C
```

```
      CALL STRESSB(XL,YL,UB1,UB2,UB3,UNB1,UNB2,UNB3,TRN,TRT,
      1                          SXB,SYB,SXYB,N)
      WRITE(*,*)('END OF STRESSB')
C
C  Print the results in the OUTPUTFILE
C
      CALL OUTPUT(XM,YM,UB1,UB2,UB3,UNB1,UNB2,UNB3,XIN,YIN,U,
     1UX,UY,UXX,UYY,UXY,SNX,SNY,SNXY,SXB,SYB,SXYB,TRN,TRT,N,IN)
      WRITE(*,*)('END OF OUTPUT')
C
C  Close input and output files
C
      CLOSE(1)
      CLOSE(2)
      STOP
      END
C
C
C=====================================================================
C
      SUBROUTINE INPUT (XL,YL,XIN,YIN,ICODE,UB1,UB2,UB3,N,IN)
C
C
C  This subroutine reads the input data from the input file
C  and writes them in the output file
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      CHARACTER*80 NAME,TITLE
      DIMENSION XL(N+1),YL(N+1),XIN(IN),YIN(IN)
      DIMENSION ICODE(N),UB1(N),UB2(N),UB3(N)
C
      WRITE(2,100)
  100 FORMAT(' ',79('*'))
C
C  Read user's name
C
      READ(1,'(A)')NAME
C
      WRITE(2,'(A)')NAME
C
C  Read the title of the program
C
      READ(1,'(A)')TITLE
C
      WRITE(2,'(A)')TITLE
C
      WRITE(2,200)N,IN
  200 FORMAT(//'BASIC PARAMETERS'//2X,'NUMBER OF BOUNDARY ELEMENTS='
     1,I4/2X,'NUMBER OF INTERNAL COLLOCATION POINTS =',I5)
C
C  Read the coordinates of the extreme points of the boundary elements
XL,YL
C
      READ(1,*) (XL(I),YL(I),I=1,N)
C
C  Write the coordinates in the output file
C
```

```
      WRITE(2,300)
  300 FORMAT(//2X,'COORDINATES OF THE EXTREME POINTS OF THE BOUNDARY ELE
     1MENTS',//2X,'POINT',9X,'XL',15X,'YL')
      DO 20 I=1,N
   20 WRITE(2,400) I,XL(I),YL(I)
  400 FORMAT(2X,I3,2(3X,E14.5))
C
C  Read the boundary conditions and store in UB(I). If ICODE(I)=0 the value
C  UB(I), is  the prescribed value of u. If ICODE(I)=1 the normal
derivative
C  un is prescribed.
C
      READ(1,*) (ICODE(I),UB1(I),I=1,N)
      READ(1,*) (UB2(I),UB3(I),I=1,N)
C
C  Write the boundary conditions in the output file
C
      WRITE(2,500)
  500 FORMAT(//2X,'BOUNDARY CONDITIONS'//2X,'NODE',6X,'ICODE',
     1 7X,'PRESCRIBED VALUE')
      DO 30 I=1,N
   30 WRITE(2,600) I,ICODE(I),UB1(I)
      DO 31 I=1,N
   31 WRITE(2,600) I,ICODE(I),UB2(I)
      DO 32 I=1,N
   32 WRITE(2,600) I,ICODE(I),UB3(I)
  600 FORMAT (2X,I3,9X,I1,8X,E14.5)
C
C  Read the coordinates of the internal points
C
      READ(1,*) (XIN(I),YIN(I),I=1,IN)
C
      RETURN
      END
C
C
C=================================================================
C
      SUBROUTINE GMATR (XL,YL,XM,YM,G,N)
C
C  This subroutine computes the elements of the G matrix
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION XL(N+1),YL(N+1),XM(N),YM(N)
      DIMENSION G(N,N)
C
C  Compute the nodal coordinates and store them in the arrays XM
C  and YM
C
      XL(N+1)=XL(1)
      YL(N+1)=YL(1)
      DO 10  I=1,N
      XM(I)=(XL(I)+XL(I+1))/2.
   10 YM(I)=(YL(I)+YL(I+1))/2.
C
C  Compute the elements of matrix G
C
```

```
      DO 20 I=1,N
      DO 20 J=1,N
      JP1=J+1
      IF(I.NE.J)THEN
      CALL RLINTC(XM(I),YM(I),XL(J),YL(J),XL(JP1),YL(JP1),RESULT)
      G(I,J)=RESULT
      ELSEIF(I.EQ.J)THEN
      CALL SLINTC(XL(J),YL(J),XL(JP1),YL(JP1),RESULT)
      G(I,J)=RESULT
      ENDIF
   20 CONTINUE
      RETURN
      END
C
C
C=================================================================
C
      SUBROUTINE RLINTC(X0,Y0,X1,Y1,X2,Y2,RESULT)
C
C
C  This subroutine computes the off-diagonal elelments of the
C  matrix G
C
C  RA= The distance of the point O from the Gauss integration point
C      on the boundary element
C
C  WG= The weights of the Gauss integration
C
C  XI= The coordinates of the Gauss integration points in the
C      interval [-1,1]
C
C  XC,YC=The global coordinates of the Gauss integration points
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION XC(4),YC(4),XI(4),WG(4)
      DATA XI/-0.86113631,-0.33998104,0.33998104,0.86113631/
      DATA WG/0.34785485,0.65214515,0.65214515,0.34785485/
      PI=DACOS(-1.D0)
      AX=(X2-X1)/2.
      AY=(Y2-Y1)/2.
      BX=(X2+X1)/2.
      BY=(Y2+Y1)/2.
C
C  Compute the line integral
C
      RESULT=0.
C
      DO 30  I=1,4
      XC(I)=AX*XI(I)+BX
      YC(I)=AY*XI(I)+BY
      RA=DSQRT((XC(I)-X0)**2+(YC(I)-Y0)**2)
   30 RESULT=RESULT+DLOG(RA)*WG(I)
      SL=2.*DSQRT(AX**2+AY**2)
      RESULT=RESULT*SL/(4.*PI)
      RETURN
      END
C
```

```
C
C=================================================================
C
      SUBROUTINE SLINTC(X1,Y1,X2,Y2,RESULT)
C
C
C  This subroutines computes the diagonal elements of the matrix G
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      PI=DACOS(-1.D0)
      AX=(X2-X1)/2.
      AY=(Y2-Y1)/2.
      SL=DSQRT(AX**2+AY**2)
      RESULT=SL*(DLOG(SL)-1.D0)/PI
      RETURN
      END
C
C
C=================================================================
C
      SUBROUTINE HMATR(XL,YL,XM,YM,H,N)
C
C
C  This subroutine computes the element of the H matrix
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION XL(N+1),YL(N+1),XM(N),YM(N)
      DIMENSION H(N,N)
C
      PI=DACOS(-1.D0)
C
      XL(N+1)=XL(1)
      YL(N+1)=YL(1)
      DO 10  I=1,N
      XM(I)=(XL(I)+XL(I+1))/2.
   10 YM(I)=(YL(I)+YL(I+1))/2.

C
C  Compute the elements of H matrix
C
      DO 20  I=1,N
      DO 20  J=1,N
      IF (I.NE.J) THEN
      CALL DALPHA (XM(I),YM(I),XL(J),YL(J),XL(J+1),YL(J+1),RESULT)
      H(I,J)=RESULT
      ELSEIF (I.EQ.J) THEN
      H(I,J)=-0.5D0
      ENDIF
   20 CONTINUE
      RETURN
      END
C
C
C=================================================================
C
      SUBROUTINE DALPHA(X0,Y0,X1,Y1,X2,Y2,RESULT)
C
```

```
C
C  This subroutine computes the off diagonal elements of the
C  matrix H
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      PI=DACOS(-1.D0)
      DY1=Y1-Y0
      DX1=X1-X0
      DY2=Y2-Y0
      DX2=X2-X0
      DL1=DSQRT(DX1**2+DY1**2)
      COS1=DX1/DL1
      SIN1=DY1/DL1
      DX2R=DX2*COS1+DY2*SIN1
      DY2R=-DX2*SIN1+DY2*COS1
      DA=ATAN2(DY2R,DX2R)
      RESULT=DA/(2.*PI)
      RETURN
      END
C
C
C=================================================================
C
      SUBROUTINE UQMATR (XL,YL,XM,YM,XIN,YIN,
     1                     UHAT,QHAT,UQ,ICODE,N,IN)
C
C
C  This subroutine computes the matrices UHAT,QHAT,UQ=-(A1*UHAT+A2*QHAT)
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON C
      DIMENSION ICODE(N),UHAT(N,IN),QHAT(N,IN),UQ(N,IN)
      DIMENSION XL(N+1),YL(N+1),XM(N),YM(N),XIN(IN),YIN(IN)
      XL(N+1)=XL(1)
      YL(N+1)=YL(1)
C
      DO 10 I=1,N
      DO 10 J=1,IN
      R=DSQRT((XM(I)-XIN(J))**2+(YM(I)-YIN(J))**2)
C
C  Computation of UHAT
C
      UHAT(I,J)=-C**3/3.*DLOG(C*DSQRT(R**2+C**2)+C**2)+
      1               (R**2+4.*C**2)*DSQRT(R**2+C**2)/9.
C
C  Computation of the direction cosines ofthe normal unit vector n
C
         DX=XL(I+1)-XL(I)
         DY=YL(I+1)-YL(I)
         SL=DSQRT(DX**2+DY**2)
         ENX=DY/SL
         ENY=-DX/SL
C
C  Computation of QHAT
C
      QHAT(I,J)=1./3./DSQRT(R**2+C**2)*(R**2+2.*C**2-C**3/
      1  (DSQRT(R**2+C**2)+C))*((XM(I)-XIN(J))*ENX+(YM(I)-YIN(J))*ENY)
```

```
C
   10 CONTINUE
C
C  Computation of UQ=-(A1*UHAT+A2*QHAT)
C

      DO 20 I=1,N
      DO 20 J=1,IN
      IF(ICODE(I).EQ.0)THEN
      UQ(I,J)=-UHAT(I,J)
      ELSEIF(ICODE(I).NE.0)THEN
      UQ(I,J)=-QHAT(I,J)
      ENDIF
   20 CONTINUE
      RETURN
      END
C
C=================================================================
C
      SUBROUTINE SMATR(G,H,A,UB1,UB2,UB3,S1,S2,S3,UQ,ICODE,N,IN)
C
C  This subroutine computes the matrix S : U=S*a+UB, Un=SLOW*a+UNB
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION G(N,N),H(N,N)
      DIMENSION A(2*N,2*N),ICODE(N),UQ(N,IN)
      DIMENSION UB1(N),UB2(N),UB3(N)
      DIMENSION S1(2*N,IN+1),S2(2*N,IN+1),S3(2*N,IN+1)
C
C  Form the matrix A(2*N,2*N)
C
      DO 10 I=1,2*N
      DO 10 J=1,2*N
   10 A(I,J)=0.
C
      DO 15 I=1,N
      IF(ICODE(I).EQ.0.)THEN
      A(N+I,I)=1.
      ELSEIF(ICODE(I).NE.0.)THEN
      A(N+I,N+I)=1.
      ENDIF
      DO 15 J=1,N
      A(I,J)=H(I,J)
      A(I,N+J)=-G(I,J)
   15 CONTINUE
C
C  Form the matrix S(2*N,IN+1)
C
      DO 20 I=1,2*N
      DO 20 J=1,IN+1
      S1(I,J)=0.
      S2(I,J)=0.
   20 S3(I,J)=0.
C
      DO 30 I=1,N
      S1(N+I,IN+1)=UB1(I)
      S2(N+I,IN+1)=UB2(I)
```

```
      S3(N+I,IN+1)=UB3(I)
      DO 30 J=1,IN
      S1(N+I,J)=UQ(I,J)
      S2(N+I,J)=UQ(I,J)
      S3(N+I,J)=UQ(I,J)
   30 CONTINUE
C     DO 40 I=1,2*N
C   40      WRITE (2,*) S1(I,IN+1),S2(I,IN+1),S3(I,IN+1)
C
C    Compute the inverse of A and store it in A
C    The subroutine  DLINRG of IMSL is used
C
      N2=2*N
      CALL DLINRG(N2,A,N2,A,N2)
C
      S1=MATMUL(A,S1)
      S2=MATMUL(A,S2)
      S3=MATMUL(A,S3)
C
      RETURN
      END
C
C
C=================================================================
C
      SUBROUTINE UIN(XL,YL,XIN,YIN,S1,S2,S3,W1,W2,W3,N,IN)
C
C
C  This subroutine computes the mattix W
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON C
      DIMENSION XL(N+1),YL(N+1),XIN(IN),YIN(IN),
     1          S1(2*N,IN+1),S2(2*N,IN+1),S3(2*N,IN+1),
     2          W1(IN,IN+1),W2(IN,IN+1),W3(IN,IN+1)
C
C  Compute the values of u at the internal points
C
      XL(N+1)=XL(1)
      YL(N+1)=YL(1)
      DO 10  I=1,IN
      DO 10  J=1,IN+1
         SUM1=0.
         SUM2=0.
         SUM3=0.
         DO 20 K=1,N
      KP1=K+1
      CALL DALPHA(XIN(I),YIN(I),XL(K),YL(K),XL(KP1),YL(KP1),RESH)
      CALL RLINTC(XIN(I),YIN(I),XL(K),YL(K),XL(KP1),YL(KP1),RESG)
C
      SUM1=SUM1+RESH*S1(K,J)-RESG*S1(N+K,J)
      SUM2=SUM2+RESH*S2(K,J)-RESG*S2(N+K,J)
      SUM3=SUM3+RESH*S3(K,J)-RESG*S3(N+K,J)
   20 CONTINUE
        W1(I,J)=SUM1
        W2(I,J)=SUM2
        W3(I,J)=SUM3
```

```
   10 CONTINUE
C
C   Computation of UINHAT(I,J)
C
      DO 30 I=1,IN
        DO 30 J=1,IN
      R=DSQRT((XIN(I)-XIN(J))**2+(YIN(I)-YIN(J))**2)
      IF (I.NE.J) THEN
      UINHAT=-C**3/3.*DLOG(C*DSQRT(R**2+C**2)+C**2)+
      1        (R**2+4.*C**2)*DSQRT(R**2+C**2)/9.
      ELSE
      UINHAT=-C**3/3.*(DLOG(2.*C**2)-4./3.)
      ENDIF
        W1(I,J)=W1(I,J)+UINHAT
        W2(I,J)=W2(I,J)+UINHAT
        W3(I,J)=W3(I,J)+UINHAT
   30 CONTINUE
      RETURN
      END
C
C=========================================================================
C
C
      SUBROUTINE UXUY(XL,YL,XIN,YIN,S1,S2,S3,WX1,WX2,WX3,
     1                        WY1,WY2,WY3,N,IN)
C
C
C  This subroutine computes the values of the matrices Wx and WY defined by
C  Ux=Wx*a+dx,Uy=Wy*a+dy
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON C
      DIMENSION XL(N+1),YL(N+1),XIN(IN),YIN(IN)
      DIMENSION S1(2*N,IN+1),S2(2*N,IN+1),S3(2*N,IN+1)
      DIMENSION WX1(IN,IN+1),WX2(IN,IN+1),WX3(IN,IN+1)
      DIMENSION WY1(IN,IN+1),WY2(IN,IN+1),WY3(IN,IN+1)
      DIMENSION XC(4),YC(4),XI(4),WG(4)
C
C  N        =Number of boundary elements
C  XL,YL    =Co-ordinates of the extrem points of the
C             boundary elements
C  XIN,YIN  =Co-ordinates of the the internal points
C  XM,YM    =Co-ordinates of boundary nodal points
C  WG       =Weights of the Gauss integration
C  XI       =Co-ordinates of of the Gauss integration points
C             in the interval [-1,1]
C  XC,YC    =Global co-ordinates of the gauss integration points
C
      DATA XI/-0.86113631,-0.33998104,0.33998104,0.86113631/
      DATA WG/0.34785485,0.65214515,0.65214515,0.34785485/
      PI=DACOS(-1.D0)
      XL(N+1)=XL(1)
      YL(N+1)=YL(1)
C
      DO 10 I=1,IN
      DO 10 J=1,IN+1
         SUMX1=0.
```

```
         SUMX2=0.
         SUMX3=0.
         SUMY1=0.
         SUMY2=0.
         SUMY3=0.
C
         DO 20 K=1,N
C
C  Computation of the direction cosines nx,ny of the normal
C  unit vector n on the K boundary element
C
      AX=(XL(K+1)-XL(K))/2.
      AY=(YL(K+1)-YL(K))/2.
      BX=(XL(K+1)+XL(K))/2.
      BY=(YL(K+1)+YL(K))/2.
      SL=DSQRT(AX**2+AY**2)
      ENX=AY/SL
      ENY=-AX/SL
C
C Computation of Hx,Hy,Gx,Gy
C
      GX=0.
      GY=0.
      HX=0.
      HY=0.
        DO 40 IK=1,4
        XC(IK)=AX*XI(IK)+BX
        YC(IK)=AY*XI(IK)+BY
        DX=XC(IK)-XIN(I)
        DY=YC(IK)-YIN(I)
        R=DSQRT(DX**2+DY**2)
        RX=-DX/R
        RY=-DY/R
        RN=-(RX*ENX+RY*ENY)
        RT=-(-RX*ENY+RY*ENX)
        UX=RX/(2.*PI*R)
        UY=RY/(2.*PI*R)
        UNX=-(RX*RN-RY*RT)/(2.*PI*R**2)
        UNY=-(RX*RT+RY*RN)/(2.*PI*R**2)
        GX=GX+UX*WG(IK)*SL
        GY=GY+UY*WG(IK)*SL
        HX=HX+UNX*WG(IK)*SL
        HY=HY+UNY*WG(IK)*SL
   40   CONTINUE
C
      SUMX1=SUMX1+HX*S1(K,J)-GX*S1(N+K,J)
      SUMX2=SUMX2+HX*S2(K,J)-GX*S2(N+K,J)
      SUMX3=SUMX3+HX*S3(K,J)-GX*S3(N+K,J)
      SUMY1=SUMY1+HY*S1(K,J)-GY*S1(N+K,J)
      SUMY2=SUMY2+HY*S2(K,J)-GY*S2(N+K,J)
      SUMY3=SUMY3+HY*S3(K,J)-GY*S3(N+K,J)
   20   CONTINUE
C
      WX1(I,J)=SUMX1
      WX2(I,J)=SUMX2
      WX3(I,J)=SUMX3
      WY1(I,J)=SUMY1
```

```
      WY2(I,J)=SUMY2
      WY3(I,J)=SUMY3
   10 CONTINUE

C
C   Computation of UXHAT(I,J), UYHAT(I,J)
C
        DO 50 I=1,IN
        DO 50 J=1,IN
      R=DSQRT((XIN(I)-XIN(J))**2+(YIN(I)-YIN(J))**2)
      UXHAT=1./3./DSQRT(R**2+C**2)*(R**2+2.*C**2-C**3/
      1                          (DSQRT(R**2+C**2)+C))*(XIN(I)-XIN(J))
      UYHAT=1./3./DSQRT(R**2+C**2)*(R**2+2.*C**2-C**3/
      1                          (DSQRT(R**2+C**2)+C))*(YIN(I)-YIN(J))
C
      WX1(I,J)=WX1(I,J)+UXHAT
      WX2(I,J)=WX2(I,J)+UXHAT
      WX3(I,J)=WX3(I,J)+UXHAT
      WY1(I,J)=WY1(I,J)+UYHAT
      WY2(I,J)=WY2(I,J)+UYHAT
      WY3(I,J)=WY3(I,J)+UYHAT
   50 CONTINUE
      RETURN
      END
C
C=================================================================
C
      SUBROUTINE UXXUYYUXY(XL,YL,XIN,YIN,S1,S2,S3,
     1                 WXX1,WXX2,WXX3,WYY1,WYY2,WYY3,WXY1,WXY2,WXY3,N,IN)
C
C  This subroutine computes the values of the matrices Wxx,Wyy and Wxy
C  defined by  Uxx=Wxx*a+dxx,Uyy=Wyy*a+dyy and Uxy=Wxy*a+dxy
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON C
      DIMENSION XL(N+1),YL(N+1),XIN(IN),YIN(IN)
      DIMENSION S1(2*N,IN+1),S2(2*N,IN+1),S3(2*N,IN+1)
      DIMENSION WXX1(IN,IN+1),WXX2(IN,IN+1),WXX3(IN,IN+1)
      DIMENSION WYY1(IN,IN+1),WYY2(IN,IN+1),WYY3(IN,IN+1)
      DIMENSION WXY1(IN,IN+1),WXY2(IN,IN+1),WXY3(IN,IN+1)
      DIMENSION XC(4),YC(4),XI(4),WG(4)
C
C  N        =Number of boundary elements
C  XL,YL    =Co-ordinates of the extrem points of the
C             boundary elements
C  XIN,YIN  =Co-ordinates of the the internal points
C  XM,YM    =Co-ordinates of boundary nodal points
C  WG       =Weights of the Gauss integration
C  XI       =Co-ordinates of of the Gauss integration points
C             in the interval [-1,1]
C  XC,YC    =Global co-ordinates of the gauss integration points
C
      DATA XI/-0.86113631,-0.33998104,0.33998104,0.86113631/
      DATA WG/0.34785485,0.65214515,0.65214515,0.34785485/
      PI=DACOS(-1.D0)
      XL(N+1)=XL(1)
      YL(N+1)=YL(1)
```

```
C
      DO 10 I=1,IN
      DO 10 J=1,IN+1
         SUMXX1=0.
         SUMXX2=0.
         SUMXX3=0.
         SUMYY1=0.
         SUMYY2=0.
         SUMYY3=0.
         SUMXY1=0.
         SUMXY2=0.
         SUMXY3=0.
         DO 20 K=1,N
C
C  Computation of the direction cosines nx,ny of the normal
C  unit vector n on the K boundary element
C
      AX=(XL(K+1)-XL(K))/2.
      AY=(YL(K+1)-YL(K))/2.
      BX=(XL(K+1)+XL(K))/2.
      BY=(YL(K+1)+YL(K))/2.
      SL=DSQRT(AX**2+AY**2)
      ENX=AY/SL
      ENY=-AX/SL
C
C Computation of Gxx,Gyy,Gxy,Hxx,Hyy,Hxy
C
      GXX=0.
      GYY=0.
      GXY=0.
      HXX=0.
      HYY=0.
      HXY=0.
        DO 40 IK=1,4
        XC(IK)=AX*XI(IK)+BX
        YC(IK)=AY*XI(IK)+BY
        DX=XC(IK)-XIN(I)
        DY=YC(IK)-YIN(I)
        R=DSQRT(DX**2+DY**2)
        RX=-DX/R
        RY=-DY/R
        RN=-(RX*ENX+RY*ENY)
        RT=-(-RX*ENY+RY*ENX)
        UXX=(RY**2-RX**2)/(2.*PI*R**2)
        UYY=-UXX
        UXY=-(RX*RY)/(PI*R**2)
        UNXX=-((RY**2-RX**2)*RN+2.*RX*RY*RT)/(PI*R**3)
        UNYY=-UNXX
        UNXY=-((RY**2-RX**2)*RT-2.*RX*RY*RN)/(PI*R**3)
        GXX=GXX+UXX*WG(IK)*SL
        GYY=GYY+UYY*WG(IK)*SL
        GXY=GXY+UXY*WG(IK)*SL
        HXX=HXX+UNXX*WG(IK)*SL
        HYY=HYY+UNYY*WG(IK)*SL
        HXY=HXY+UNXY*WG(IK)*SL
   40   CONTINUE
C
```

```
      SUMXX1=SUMXX1+HXX*S1(K,J)-GXX*S1(N+K,J)
      SUMXX2=SUMXX2+HXX*S2(K,J)-GXX*S2(N+K,J)
      SUMXX3=SUMXX3+HXX*S3(K,J)-GXX*S3(N+K,J)
      SUMYY1=SUMYY1+HYY*S1(K,J)-GYY*S1(N+K,J)
      SUMYY2=SUMYY2+HYY*S2(K,J)-GYY*S2(N+K,J)
      SUMYY3=SUMYY3+HYY*S3(K,J)-GYY*S3(N+K,J)
      SUMXY1=SUMXY1+HXY*S1(K,J)-GXY*S1(N+K,J)
      SUMXY2=SUMXY2+HXY*S2(K,J)-GXY*S2(N+K,J)
      SUMXY3=SUMXY3+HXY*S3(K,J)-GXY*S3(N+K,J)
   20   CONTINUE
C
         WXX1(I,J)=SUMXX1
         WXX2(I,J)=SUMXX2
         WXX3(I,J)=SUMXX3
         WYY1(I,J)=SUMYY1
         WYY2(I,J)=SUMYY2
         WYY3(I,J)=SUMYY3
         WXY1(I,J)=SUMXY1
         WXY2(I,J)=SUMXY2
         WXY3(I,J)=SUMXY3
   10 CONTINUE
C
C   Computation of UXXHAT(I,J),UYYHAT(I,J),UXYHAT(I,J)
C
      DO 50 I=1,IN
      DO 50 J=1,IN
      R=DSQRT((XIN(I)-XIN(J))**2+(YIN(I)-YIN(J))**2)
      IF(I.EQ.J) THEN
         UXXHAT=C/2.
         UYYHAT=C/2.
         UXYHAT=0.
      ELSEIF(I.NE.J) THEN
      U1=1./3./(R**2+C**2)**(3./2.)*(R**2+C**3*(2.*DSQRT(R**2+C**2)+C)/
      1       (DSQRT(R**2+C**2)+C)**2)
      U2=1./3./DSQRT(R**2+C**2)*(R**2+2.*C**2-C**3/
     1        (DSQRT(R**2+C**2)+C))

         UXXHAT=U1*(XIN(I)-XIN(J))**2+U2
         UYYHAT=U1*(YIN(I)-YIN(J))**2+U2
         UXYHAT=U1*(XIN(I)-XIN(J))*(YIN(I)-YIN(J))
      ENDIF
C
         WXX1(I,J)=WXX1(I,J)+UXXHAT
         WXX2(I,J)=WXX2(I,J)+UXXHAT
         WXX3(I,J)=WXX3(I,J)+UXXHAT
         WYY1(I,J)=WYY1(I,J)+UYYHAT
         WYY2(I,J)=WYY2(I,J)+UYYHAT
         WYY3(I,J)=WYY3(I,J)+UYYHAT
         WXY1(I,J)=WXY1(I,J)+UXYHAT
         WXY2(I,J)=WXY2(I,J)+UXYHAT
         WXY3(I,J)=WXY3(I,J)+UXYHAT
   50 CONTINUE
      RETURN
      END
C
C=================================================================
C
```

```
      SUBROUTINE FCN(IN,X,F)
C
C  This subroutine solves the Equation w(a)=g and computes
C  the values of u,un on the boundary and u,ux,uy,uxx,uyy
c  and uxy in the interior
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON C,EN,GG,EL,CC
      PARAMETER (INN=49)
      DIMENSION FUN(INN),X(INN),XIN(INN),YIN(INN)
      DIMENSION AA(2*INN,2*INN),T(2*INN)
      DIMENSION A1(INN),A2(INN),A3(INN),XU(3*INN+3)
      DIMENSION W1(INN,INN+1),W2(INN,INN+1),W3(INN,INN+1)
      DIMENSION WX1(INN,INN+1),WX2(INN,INN+1),WX3(INN,INN+1)
      DIMENSION WY1(INN,INN+1),WY2(INN,INN+1),WY3(INN,INN+1)
      DIMENSION WXX1(INN,INN+1),WXX2(INN,INN+1),WXX3(INN,INN+1)
      DIMENSION WYY1(INN,INN+1),WYY2(INN,INN+1),WYY3(INN,INN+1)
      DIMENSION WXY1(INN,INN+1),WXY2(INN,INN+1),WXY3(INN,INN+1)
C
      COMMON/FC/ XU,XIN,YIN,W1,W2,W3,WX1,WX2,WX3,WY1,WY2,WY3,WXX1,WXX2,
     *             WXX3,WYY1,WYY2,WYY3,WXY1,WXY2,WXY3
C
      IN=INN
      KIN=2*INN
      DO 1 I=1,IN
    1 A3(I)=X(I)
C
      DO 10 I=1,KIN
      T(I)=0.
      DO 10 J=1,KIN
10    AA(I,J)=0.
C
      DO 20 I=1,IN
      XX=XIN(I)
      YY=YIN(I)
C
      CALL ELSTCON(XX,YY,C1,C2,C12,C3,DXC1,DXC2,DXC12,DXC3,DYC1,DYC2,
      1                  DYC12,DYC3)

      DO 20 J=1,IN
      AA(I,J)=C1*WXX1(I,J)+C12*WYY1(I,J)+DXC1*WX1(I,J)+DYC12*WY1(I,J)
      AA(I,J+IN)=(C3+C12)*WXY2(I,J)+DXC3*WY2(I,J)+DYC12*WX2(I,J)
      AA(I+IN,J)=(C3+C12)*WXY1(I,J)+DYC3*WX1(I,J)+DXC12*WY1(I,J)
      AA(I+IN,J+IN)=C2*WYY2(I,J)+C12*WXX2(I,J)+DYC2*WY2(I,J)
     1             +DXC12*WX2(I,J)
   20 CONTINUE
C
      CALL DLINRG (KIN,AA,KIN,AA,KIN)
      KS=IN+1
      DO 30 I=1,IN
      SUMX3=0.
      SUMY3=0.
      SUMXX3=0.
      SUMYY3=0.
      SUMXY3=0.
      DO 40 J=1,IN
      SUMX3=SUMX3+WX3(I,J)*A3(J)
```

```
      SUMY3=SUMY3+WY3(I,J)*A3(J)
      SUMXX3=SUMXX3+WXX3(I,J)*A3(J)
      SUMYY3=SUMYY3+WYY3(I,J)*A3(J)
      SUMXY3=SUMXY3+WXY3(I,J)*A3(J)
   40 CONTINUE
C=================================================================
      XX=XIN(I)
      YY=YIN(I)
      CALL ELSTCON(XX,YY,C1,C2,C12,C3,DXC1,DXC2,DXC12,DXC3,DYC1,DYC2,
      1                  DYC12,DYC3)
C=================================================================
      T1=-C1*WXX1(I,KS)-C12*WYY1(I,KS)-DXC1*WX1(I,KS)-DYC12*WY1(I,KS)
      1   -(C3+C12)*WXY2(I,KS)-DXC3*WY2(I,KS)-DYC12*WX2(I,KS)
      T2=-C2*WYY2(I,KS)-C12*WXX2(I,KS)-DYC2*WY2(I,KS)-DXC12*WX2(I,KS)
      1   -(C3+C12)*WXY1(I,KS)-DYC3*WX1(I,KS)-DXC12*WY1(I,KS)
      GX=SUMX3+WX3(I,KS)
      GY=SUMY3+WY3(I,KS)
      GXX=SUMXX3+WXX3(I,KS)
      GYY=SUMYY3+WYY3(I,KS)
      GXY=SUMXY3+WXY3(I,KS)

      T(I)=T1-(C1*GX*GXX+C3*GY*GXY)-0.5*(DXC1*GX**2+DXC3*GY**2)
      1        -C3*(GXY*GY+GX*GYY)-DYC12*GX*GY
      T(I+IN)=T2-(C2*GY*GYY+C3*GX*GXY)-0.5*(DYC2*GY**2+DYC3*GX**2)
      1        -C3*(GXX*GY+GX*GXY)-DXC12*GX*GY
   30 CONTINUE
C
      T=MATMUL(AA,T)
      DO 50 I=1,IN
      A1(I)=T(I)
   50 A2(I)=T(I+IN)
C
      F=0.
      DO 60 I=1,IN
      SUMUX=0.
      SUMUY=0.
      SUMVX=0.
      SUMVY=0.
      SUMWX=0.
      SUMWY=0.
      SUMWXX=0.
      SUMWYY=0.
      SUMWXY=0.
      DO 170 J=1,IN
      SUMUX=SUMUX+WX1(I,J)*A1(J)
      SUMUY=SUMUY+WY1(I,J)*A1(J)
      SUMVX=SUMVX+WX2(I,J)*A2(J)
      SUMVY=SUMVY+WY2(I,J)*A2(J)
      SUMWX=SUMWX+WX3(I,J)*A3(J)
      SUMWY=SUMWY+WY3(I,J)*A3(J)
      SUMWXX=SUMWXX+WXX3(I,J)*A3(J)
      SUMWYY=SUMWYY+WYY3(I,J)*A3(J)
      SUMWXY=SUMWXY+WXY3(I,J)*A3(J)
  170 CONTINUE
C=================================================================
      XX=XIN(I)
      YY=YIN(I)
```

```
      CALL ELSTCON(XX,YY,C1,C2,C12,C3,DXC1,DXC2,DXC12,DXC3,DYC1,DYC2,
      1                  DYC12,DYC3)
C=================================================================
      SX=SUMUX+WX1(I,KS)+(SUMWX+WX3(I,KS))**2./2.
      SY=SUMVY+WY2(I,KS)+(SUMWY+WY3(I,KS))**2./2.
      SXY=SUMUY+WY2(I,KS)+SUMVX+WX2(I,KS)+(SUMWX+WX3(I,KS))*
      1                                   (SUMWY+WY3(I,KS))
      ANX=C1*SX+C3*SY
      ANXY=2.*C12*SXY
      ANY=C2*SY+C3*SX
      FUN(I)=ANX*(SUMWXX+WXX3(I,KS))+ANXY*(SUMWXY+WXY3(I,KS))+
      1      ANY*(SUMWYY+WYY3(I,KS))+GG/CC
      F=F+FUN(I)**2.
   60 CONTINUE
C
      WRITE(*,*) F
      DO 70 I=1,IN
      XU(I)=A1(I)
      XU(IN+1+I)=A2(I)
   70 XU(2*IN+2+I)=A3(I)
      XU(IN+1)=1.D0
      XU(2*IN+2)=1.D0
      XU(3*IN+3)=1.D0
      RETURN
      END
C
C ================================================================
C
      SUBROUTINE ELSTCON(XX,YY,C1,C2,C12,C3,DXC1,DXC2,DXC12,DXC3,DYC1
      1                      ,DYC2,DYC12,DYC3)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      H=0.002
C
      EN=3.D0/10.D0
      EL=110000.D0
      H=0.002
      CC=EL*H/(1.D0-EN**2)
C
C   HOMOGENEOUS
C
C     E1=110000.
C     E2=110000.
C     G12=E1/2./(1.+EN12)
C     EN12=0.30
C     EN21=0.30
C     C1=E1*H/(1.-EN12*EN21)/CC
C     C2=E2*H/(1.-EN12*EN21)/CC
C     C12=G12*H/CC
C     C3=E1*EN21*H/(1.-EN12*EN21)/CC
C
C   ORTHOTROPIC
C
      RATIO=1.5
      E1=110000.
      EN12=0.30
      E2=RATIO*E1
      EN21=RATIO*EN12
```

```
      G12=E1*RATIO/(RATIO*(2.*EN12+1.)+1.)
V
      C1=E1*H/(1.-EN12*EN21)/CC
      C2=E2*H/(1.-EN12*EN21)/CC
      C12=G12*H/CC
      C3=E1*EN21*H/(1.-EN12*EN21)/CC
      DXC1=0.
      DXC2=0.
      DXC12=0.
      DXC3=0.
      DYC1=0.
      DYC2=0.
      DYC12=0.
      DYC3=0.
C
C   ORTHOTROPIC HETEROGENEOUS
C
c     SK1=10.
c     SK2=10.
c     SK12=10.
c     SK3=10.
c     C1=C1+SK1*XX**2*YY**2/CC
c     C2=C2+SK2*XX**2*YY**2/CC
c     C12=C12+SK12*XX**2*YY**2/CC
c     C3=C3+SK3*XX**2*YY**2/CC
c     DXC1=DXC1+2.*SK1*XX*YY**2/CC
c     DXC2=DXC2+2.*SK2*XX*YY**2/CC
c     DXC12=DXC12+2.*SK12*XX*YY**2/CC
c     DXC3=DXC3+2.*SK3*XX*YY**2/CC
c     DYC1=DYC1+2.*SK1*YY*XX**2/CC
c     DYC2=DYC2+2.*SK2*YY*XX**2/CC
c     DYC12=DYC12+2.*SK12*YY*XX**2/CC
c     DYC3=DYC3+2.*SK12*YY*XX**2/CC
      RETURN
      END
C
C ================================================================
C
      SUBROUTINE STRESSIN(UX,UY,SNX,SNY,SNXY,IN)
c
C
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON C,EN,GG,EL,CC
      DIMENSION UX(3*IN),UY(3*IN),UUX(IN),VX(IN),UUY(IN),VY(IN),WX(IN)
      DIMENSION WY(IN),SNX(IN),SNY(IN),SNXY(IN)
C
      DO 10 I=1,IN
      UUX(I)=UX(I)
      VX(I)=UX(I+IN)
      UUY(I)=UY(I)
      VY(I)=UY(I+IN)
      WX(I)=UX(I+2*IN)
   10 WY(I)=UY(I+2*IN)
      DO 20 I=1,IN
      SEX=UUX(I)+1./2.*WX(I)**2
      SEY=VY(I)+1./2.*WY(I)**2
```

```
      SEXY=UUY(I)+VX(I)+WX(I)*WY(I)
      SNX(I)=CC*(SEX+EN*SEY)
      SNY(I)=CC*(SEY+EN*SEX)
   20 SNXY(I)=CC*(1.-EN)/2.*SEXY
      RETURN
      END
C
C
C=================================================================
C
      SUBROUTINE STRESSB(XL,YL,UB1,UB2,UB3,UNB1,UNB2,UNB3,TRN,TRT,
      1                          SXB,SYB,SXYB,N)
C
C
C  This subroutine computes the stress at the boundary
C  nodal points
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
      COMMON C,EN,GG,EL,CC,TT
      DIMENSION XL(N+1),YL(N+1),UB1(N),UB2(N),UNB1(N),UNB2(N)
      DIMENSION SXB(N),SYB(N),SXYB(N),SL(N),ENX(N),ENY(N),B(6)
      DIMENSION UB3(N),UNB3(N),TRN(N),TRT(N)
C
      XL(N+1)=XL(1)
      YL(N+1)=YL(1)
C
C  Computation ofthe element halh lenghts and direction
C  cosines of the normal vector
C
      DO 10 I=1,N
      AX=(XL(I+1)-XL(I))/2.
      AY=(YL(I+1)-YL(I))/2.
      SL(I)=DSQRT(AX**2+AY**2)
      ENX(I)=AY/SL(I)
      ENY(I)=-AX/SL(I)
   10 CONTINUE
C
C  Computation of the tangential derivatives UT and VT
C
      DO 20 I=1,N
      IF (I.EQ.1)THEN
      S1=SL(N)+SL(1)
      S2=SL(I)+SL(I+1)
      U1=UB1(N)
      U2=UB1(1)
      U3=UB1(2)
      V1=UB2(N)
      V2=UB2(1)
      V3=UB2(2)
      W1=UB3(N)
      W2=UB3(1)
      W3=UB3(2)
      ELSE IF (I.EQ.N) THEN
      S1=SL(N-1)+SL(N)
      S2=SL(N)+SL(1)
      U1=UB1(N-1)
      U2=UB1(N)
```

```
      U3=UB1(1)
      V1=UB2(N-1)
      V2=UB2(N)
      V3=UB2(1)
      W1=UB3(N-1)
      W2=UB3(N)
      W3=UB3(1)
      ELSE
      S1=SL(I-1)+SL(I)
      S2=SL(I)+SL(I+1)
      U1=UB1(I-1)
      U2=UB1(I)
      U3=UB1(I+1)
      V1=UB2(I-1)
      V2=UB2(I)
      V3=UB2(I+1)
      W1=UB3(I-1)
      W2=UB3(I)
      W3=UB3(I+1)
      ENDIF
C
C  Computation of the boundary stresses
C
      UT=(S1**2*U3-S2**2*U1+(S2**2-S1**2)*U2)
     1      /(S1*S2*(S1+S2))
      VT=(S1**2*V3-S2**2*V1+(S2**2-S1**2)*V2)
     1      /(S1*S2*(S1+S2))
      WT=(S1**2*W3-S2**2*W1+(S2**2-S1**2)*W2)
     1      /(S1*S2*(S1+S2))
      B(1)=UNB1(I)*ENX(I)-UT*ENY(I)
      B(2)=UT*ENX(I)+UNB1(I)*ENY(I)
      B(3)=UNB2(I)*ENX(I)-VT*ENY(I)
      B(4)=VT*ENX(I)+UNB2(I)*ENY(I)
      B(5)=UNB3(I)*ENX(I)-WT*ENY(I)
      B(6)=WT*ENX(I)+UNB3(I)*ENY(I)
C
      XX=(xl(i)+xl(i+1))/2.
      YY=(yl(i)+yl(i+1))/2.
      write(2,400) i,XX,YY,B(1),B(4)
  400 FORMAT(I4,4(2X,E14.5))
      SEX=B(1)+1./2.*B(5)**2
      SEY=B(4)+1./2.*B(6)**2
      SEXY=B(2)+B(3)+B(5)*B(6)
      SXB(I)=CC*(SEX+EN*SEY)
      SYB(I)=CC*(SEY+EN*SEX)
      SXYB(I)=CC*(1.-EN)/2.*SEXY
C****************************************
      SXLIN=CC*(B(1)+EN*B(4))
      SYLIN=CC*(B(4)+EN*B(1))
      SXYLIN=CC*(1.-EN)/2.*(B(2)+B(3))
C
      SXNLIN=CC/2.*(B(5)**2+EN*B(6)**2)
      SYNLIN=CC/2.*(B(6)**2+EN*B(5)**2)
      SXYNLIN=CC*(1-EN)/2.*B(6)*B(5)
C
      TRNLIN=SXLIN*ENX(I)+SXYLIN*ENY(I)
      TRTLIN=SXYLIN*ENX(I)+SYLIN*ENY(I)
```

```
C
      TRNNLIN=SXNLIN*ENX(I)+SXYNLIN*ENY(I)
      TRTNLIN=SXYNLIN*ENX(I)+SYNLIN*ENY(I)
C*****************************************
      TRN(I)=SXB(I)*ENX(I)+SXYB(I)*ENY(I)
      TRT(I)=SXYB(I)*ENX(I)+SYB(I)*ENY(I)
C
   20 CONTINUE
      RETURN
      END
C
C ================================================================
C
      SUBROUTINE OUTPUT(XM,YM,UB1,UB2,UB3,UNB1,UNB2,UNB3,XIN,YIN,U,
     1UX,UY,UXX,UYY,UXY,SNX,SNY,SNXY,SXB,SYB,SXYB,TRN,TRT,N,IN)
C
C  This subroutine prints the results in the outputfile.
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION XM(N),YM(N),UB1(N),UB2(N),UB3(N),UNB1(N),UNB2(N),UNB3(N)
      DIMENSION XIN(IN),YIN(IN),U(3*IN),UX(3*IN),UY(3*IN),UXX(3*IN)
      1                ,UYY(3*IN),UXY(3*IN)
      DIMENSION SNX(IN),SNY(IN),SNXY(IN)
      DIMENSION SXB(N),SYB(N),SXYB(N),TRN(N),TRT(N)
C
      WRITE(2,100)
  100 FORMAT('',79('*')//1X,'RESULTS'//2X,'BOUNDARY NODES'//
     1         11X,'X',15X,'Y',15X,'U',15X,'Un'/)

      DO 10 I=1,N
   10 WRITE(2,200) I,XM(I),YM(I),UB1(I),UNB1(I)
      WRITE(2,*)
      DO 11 I=1,N
   11 WRITE(2,200) I,XM(I),YM(I),UB2(I),UNB2(I)
      WRITE(2,*)
      DO 12 I=1,N
   12 WRITE(2,200) I,XM(I),YM(I),UB3(I),UNB3(I)
  200 FORMAT(I4,4(2X,E14.5))
C
C   DISPLACEMENTS
C
      WRITE (2,300)
  300 FORMAT(//,2X,'INTERNAL POINTS'//10X,'X',15X,'Y',14X,
     1 'U',14X,'V',16X,'W'/)
      DO 20 K=1,IN
   20 WRITE(2,400)K,XIN(K),YIN(K),U(K),U(K+IN),U(K+2*IN)
  400 FORMAT(I4,5(2X,E14.5))
        WRITE (2,350)
  350 FORMAT(//,2X,'INTERNAL POINTS'//10X,'X',15X,'Y',14X,
     1 'UX',14X,'VX',16X,'WX'/)
      DO 30 K=1,IN
   30 WRITE(2,450)K,XIN(K),YIN(K),UX(K),UX(K+IN),UX(K+2*IN)
  450 FORMAT(I4,5(2X,E14.5))
C
      WRITE(2,*)
      WRITE (2,301)
  301 FORMAT(//,2X,'INTERNAL POINTS'//10X,'X',15X,'Y',14X,
```

```
     1 'UY',14X,'VY',16X,'WY'/)
      DO 21 K=1,IN
   21 WRITE(2,400)K,XIN(K),YIN(K),UY(K),UY(K+IN),UY(K+2*IN)
        WRITE (2,351)
  351 FORMAT(//,2X,'INTERNAL POINTS'//10X,'X',15X,'Y',14X,
     1 'UXX',14X,'VXX',16X,'WXX'/)
      DO 31 K=1,IN
   31 WRITE(2,450) K,XIN(K),YIN(K),UXX(K),UXX(K+IN),UXX(K+2*IN)
C
      WRITE(2,*)
      WRITE (2,302)
  302 FORMAT(//,2X,'INTERNAL POINTS'//10X,'X',15X,'Y',14X,
     1 'UYY',14X,'VYY',16X,'WYY'/)
      DO 22 K=1,IN
   22 WRITE(2,400)K,XIN(K),YIN(K),UYY(K),UYY(K+IN),UYY(K+2*IN)
        WRITE (2,352)
  352 FORMAT(//,2X,'INTERNAL POINTS'//10X,'X',15X,'Y',14X,
     1 'UXY',14X,'VXY',16X,'WXY'/)
      DO 32 K=1,IN
   32 WRITE(2,450) K,XIN(K),YIN(K),UXY(K),UXY(K+IN),UXY(K+2*IN)
C
      WRITE (2,*)
      SS=0.
      WRITE (2,303)
  303 FORMAT(//,2X,'STRESSES AT INTERNAL POINTS'//10X,'X',15X,'Y',14X,
     1 'Nx',14X,'Ny',16X,'Nxy'/)
      DO 23 K=1,IN
   23 WRITE(2,400)K,XIN(K),YIN(K),SNX(K),SNY(K),SNXY(K)
      WRITE (2,*)
      WRITE (2,304)
  304 FORMAT(//,2X,'STRESSES AT BOUNDARY POINTS'//10X,'X',15X,'Y',14X,
     1 'Nx',14X,'Ny',16X,'Nxy'/)
      DO 24 K=1,N
   24 WRITE(2,400)K,XM(K),YM(K),SXB(K),SYB(K),SXYB(K)
C
      WRITE (2,*)
      WRITE (2,305)
  305 FORMAT(//,2X,'TRACTIONS AT BOUNDARY POINTS'//10X,'X',15X,'Y',14X,
     1 'Tn',14X,'Tt'/)
      DO 25 K=1,N
   25 WRITE(2,400)K,XM(K),YM(K),TRN(K),TRT(K)


      WRITE(2,500)
  500 FORMAT(' ',79('*'))
      RETURN
      END
C
C=================================================================
```

4.4. Παραδείγματα

Οι προσεγγιστικές συναρτήσεις f_j που χρησιμοποιήθηκαν, για τη λήψη αριθμητικών αποτελεσμάτων, ήταν τα multiquadrics (βλ. Παράρτημα Β) που ορίζονται ως εξής

$$f_j = \sqrt{r^2 + c^2} \tag{4.10}$$

όπου c αυθαίρετη σταθερά κατάλληλα επιλεγμένη και

$$r = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} \qquad j = 1,2,...M \tag{4.11}$$

όπου x_j, y_j οι συντεταγμένες των M εσωτερικών κομβικών σημείων μέσα στο Ω.

Τα αριθμητικά αποτελέσματα παρουσιάζονται χρησιμοποιώντας τις παρακάτω αδιάστατες ποσότητες

$$\bar{u} = u / a\,,\ \bar{v} = v / a\,,\ \bar{w} = w / a\,,\ \bar{N} = N\frac{(1 - \nu_1\nu_2)}{Eh},\ \bar{g} = g\frac{a(1 - \nu_1\nu_2)}{Eh} \tag{4.12}$$

όπου a είναι ένα χαρακτηριστικό μήκος της μεμβράνης και N μέγεθος με διαστάσεις μεμβρανικής δύναμης.

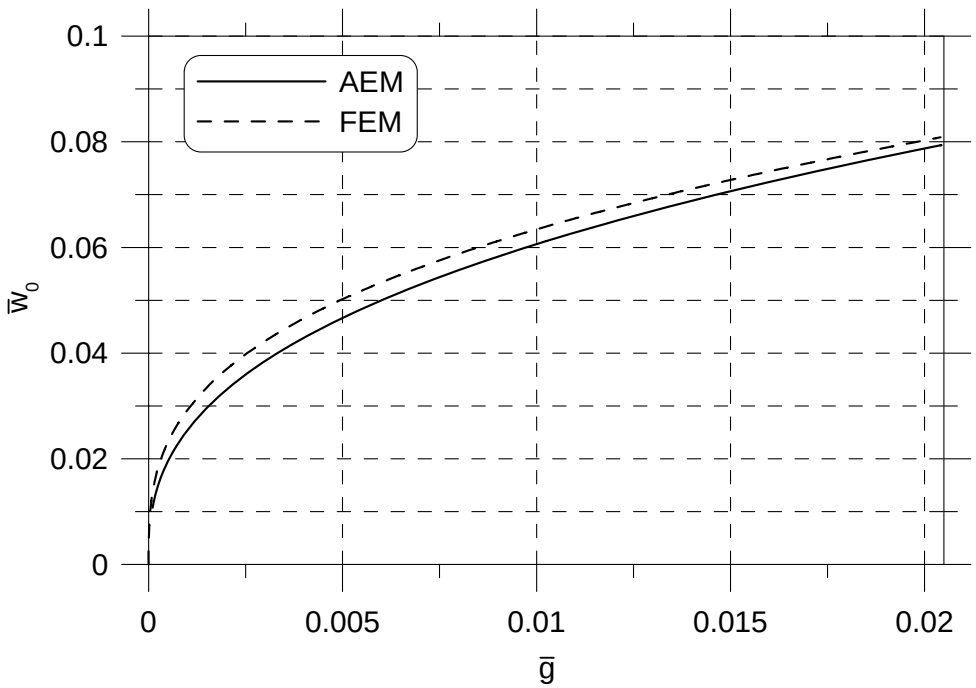
4.4.1. Ανισότροπη τετραγωνική μεμβράνη

Μία τετραγωνική μεμβράνη με πλευρά $a = 5.0m$ επιλύθηκε χρησιμοποιώντας $N = 100$ συνοριακά σταθερά στοιχεία και $M = 49$ εσωτερικά κομβικά σημεία. Τα δεδομένα είναι $E_1 = E / \sqrt{\lambda}$, $E_2 = E\sqrt{\lambda}$; $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = \lambda\nu_1$.

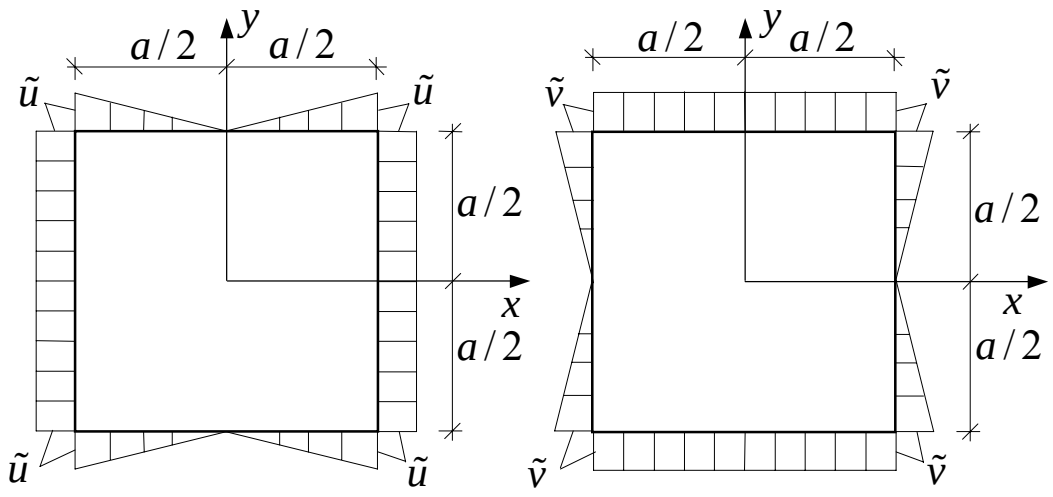
Πρώτα η μεμβράνη αναλύθηκε με μηδενική προένταση και $\lambda = 1.5$, $E = 134722\,kN / m^2$, $G = 48529\,kN / m^2$, για να μπορέσουμε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα με αυτά από τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα MSC/NASTRAN, για λεπτές ορθότροπες πλάκες με αμελητέο πάχος ($h = 0.004m$), το οποίο δεν έχει τη δυνατότητα να λάβει υπόψη και προένταση συγχρόνως. Τα αποτελέσματα για την βύθιση στο

κέντρο της μεμβράνης $\overline{w}_0$ συναρτήσει του φορτίου $\overline{g}$ φαίνονται στο Σχ. 4.1. Αξιοπρόσεκτο είναι ότι ότι οι βυθίσεις που δίδει η FEM είναι μεγαλύτερες αν και αναμένονταν μικρότερες. Θεωρούμε ότι οι δικές μας είναι ακριβέστερες δεδομένου ότι έχουν συγκριθεί με αναλυτικές λύσεις (Katsikadelis et al., 2000).

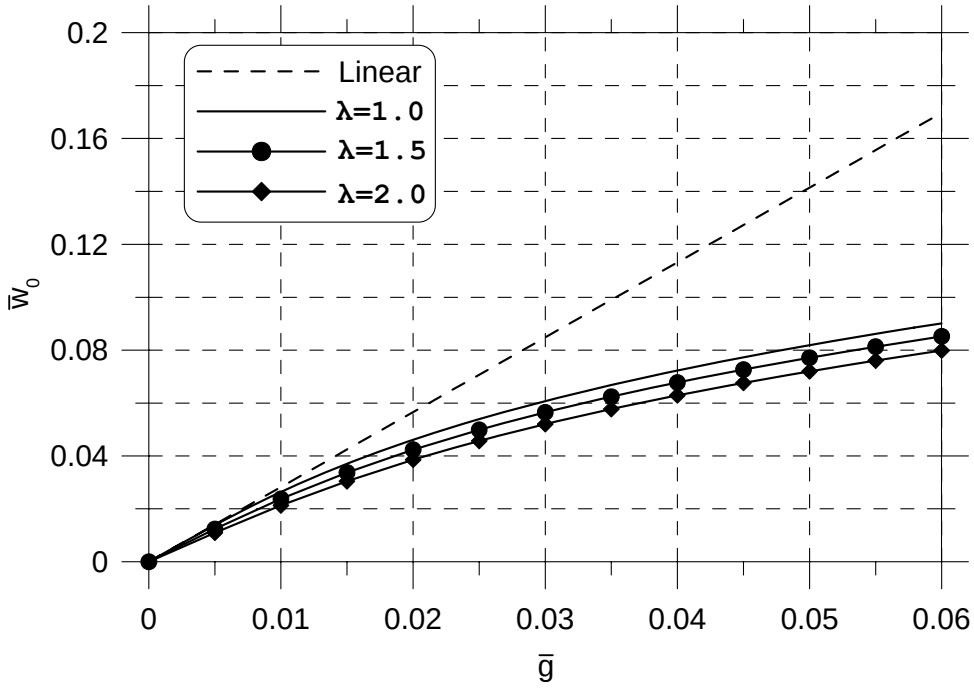
Κατόπιν η μεμβράνη προεντάθηκε όπως φαίνεται στο Σχ. 4.2 με $\tilde{u} = \tilde{v} = 0.05m$ και αναλύθηκε με επιβαλλόμενο ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο. Τα δεδομένα είναι $\overline{g} = 0.06$, $h = 0.002m$; $\lambda = 1.0, 1.5, 2.0$ και $\sqrt{E_1 E_2} = E = 110000kN/m^2$, $G = E/2(1+\nu_1\sqrt{\lambda})$. Τα αποτελέσματα για την απόκριση της μεμβράνης παρουσιάζονται στα Σχ. 4.3 εώς Σχ. 4.6.



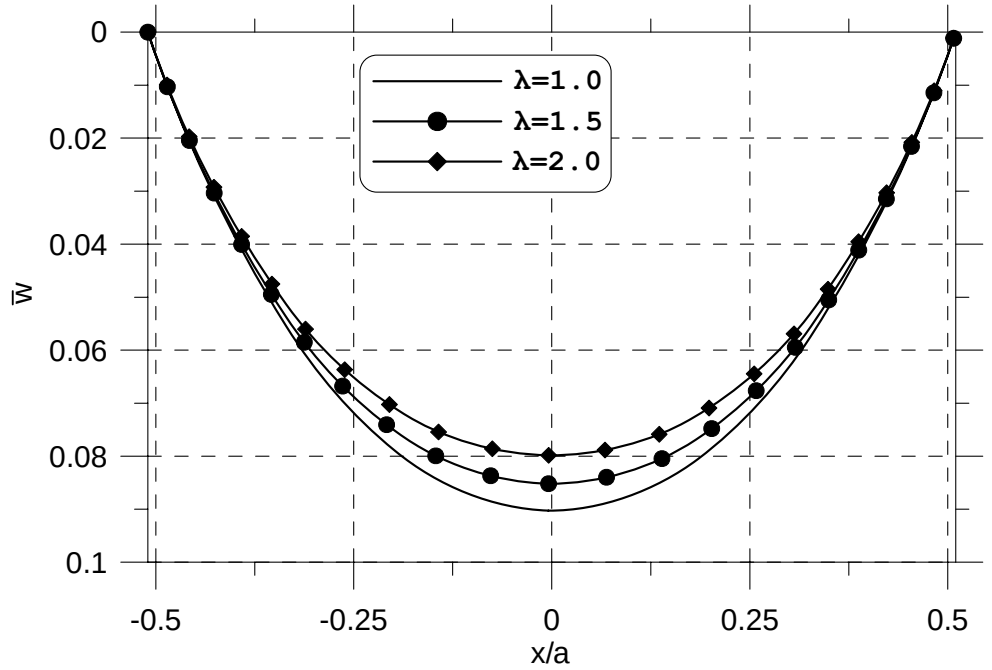
Σχ. 4.1. Βύθιση στο κέντρο συναρτήσει του φορτίου στην ορθότροπη ($\lambda = 1.5$) τετραγωνική μεμβράνη του παραδείγματος *4.4.1.* υπό μηδενική προένταση



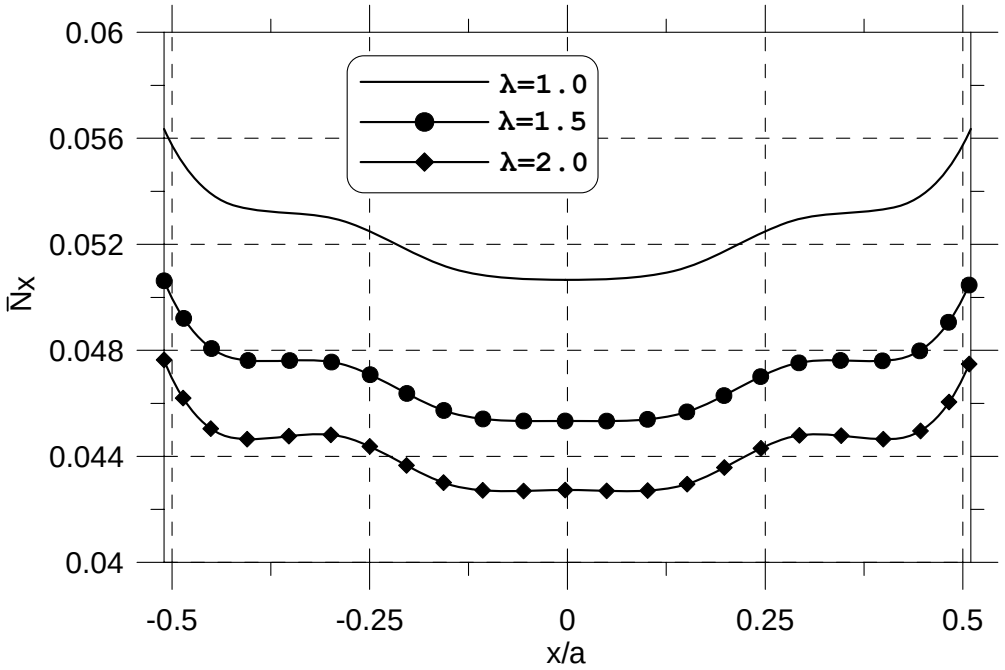
Σχ. 4.2. Προένταση μεμβράνης με επιβαλλόμενες συνοριακές μετατοπίσεις στη μεμβράνη του παραδείγματος *4.4.1.* Η παραγόμενη ένταση δίδει με καλή ακρίβεια $N_x = N_y$, $N_{xy} = 0$



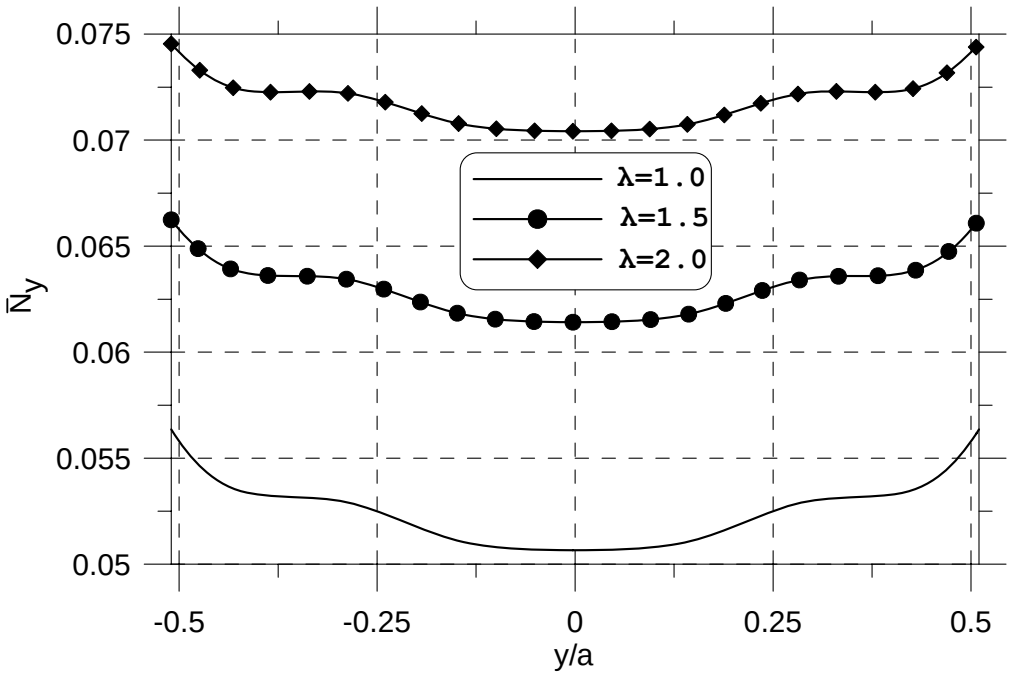
Σχ. 4.3. Βύθιση στο κέντρο συναρτήσει του φορτίου στην προεντεταμένη ορθότροπη τετραγωνική μεμβράνη του παραδείγματος *4.4.1.* για διάφορες τιμές του λ



Σχ. 4.4. Μεταβολή των βυθίσεων κατά μήκος της διατομής $y = 0$ στην προεντεταμένη ορθότροπη τετραγωνική μεμβράνη του παραδείγματος *4.4.1.* για διάφορες τιμές του λ



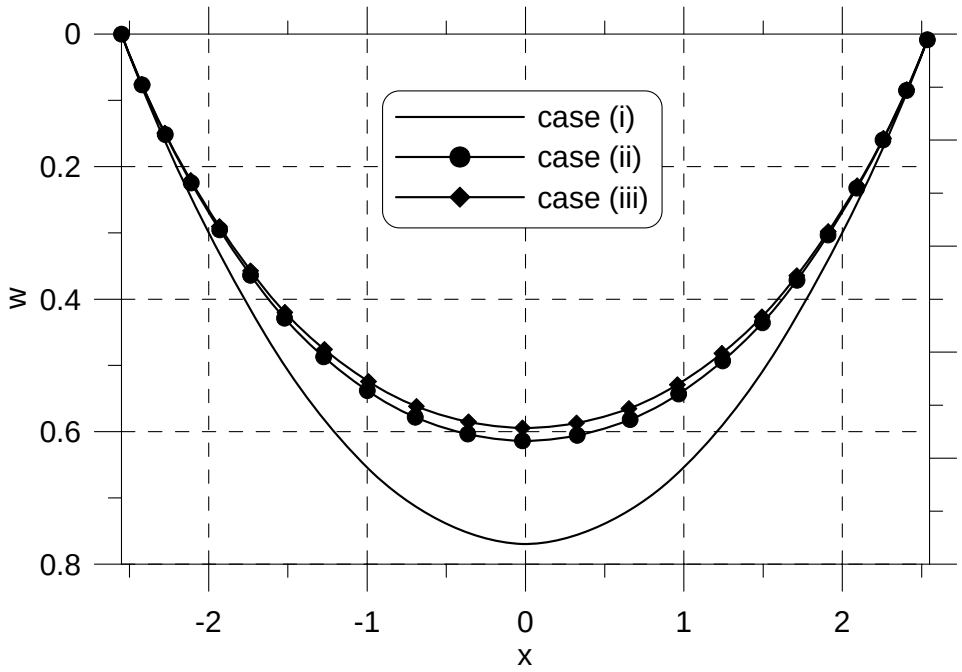
Σχ. 4.5. Μεταβολή της $\bar{N}_x$ κατά μήκος της διατομής $y = 0$ στην προεντεταμένη ορθότροπη τετραγωνική μεμβράνη του παραδείγματος *4.4.1.* για διάφορες τιμές του λ



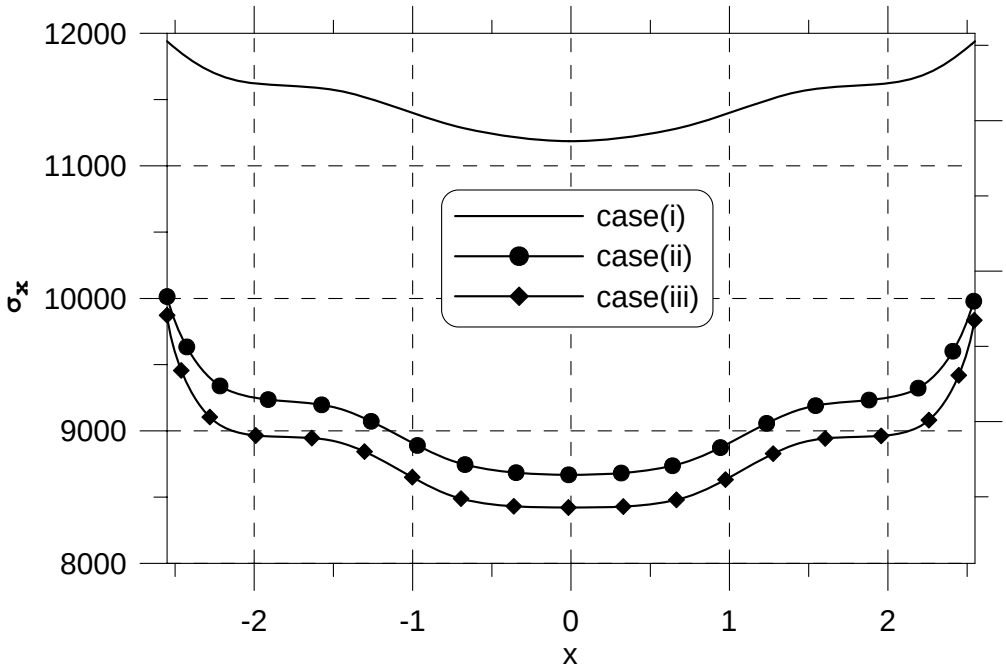
Σχ. 4.6. Μεταβολή της $\bar{N}_y$ κατά μήκος της διατομής $x = 0$ στην προεντεταμένη ορθότροπη τετραγωνική μεμβράνη του παραδείγματος *4.4.1.* για διάφορες τιμές του λ

4.4.2. Μη ομογενής τετραγωνική μεμβράνη

Μία μη ομογενής ισότροπη ($\lambda = 1$) τετραγωνική μεμβράνη που υπόκειται σε ένα ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο αναλύθηκε χρησιμοποιώντας $N = 100$ συνοριακά σταθερά στοιχεία και $M = 49$ εσωτερικά κομβικά σημεία. Η μεμβράνη προεντάθηκε όπως στο παράδειγμα *4.4.1.* Η μη ομογένεια προκύπτει από τη μεταβολή του πάχους της μεμβράνης. Τα δεδομένα είναι $a = 5.0m$, $g = 3kN/m^2$, $E_1 = E_2 = E = 110000kN/m^2$ και $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$. Τρεις περιπτώσεις διαφορετικής κατανομής του πάχους εξετάστηκαν (i) $h = h_0[1 + 7r^2/a^2]$ (ii) $h = 13h_0/6$ και (iii) $h = h_0[12 - 7r^2/a^2]/5$, όπου $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ και $h_0 = 0.0005\,m$. Σε όλες τις περιπτώσεις ο όγκος V του χρησιμοποιούμενου υλικού παρέμεινε αμετάβλητος και ίσος με $V = 13h_0a^2/6$. Τα αποτελέσματα για τις βυθίσεις και τις τάσεις κατά μήκος της διατομής $y = 0$ παρουσιάζονται στα Σχ. 4.7 και Σχ. 4.8. Όπως μπορεί κάποιος να παρατηρήσει η περίπτωση (i) δίνει μεγαλύτερες βυθίσεις ενώ οι άλλες δύο δεν έχουν μεγάλη διαφορά.



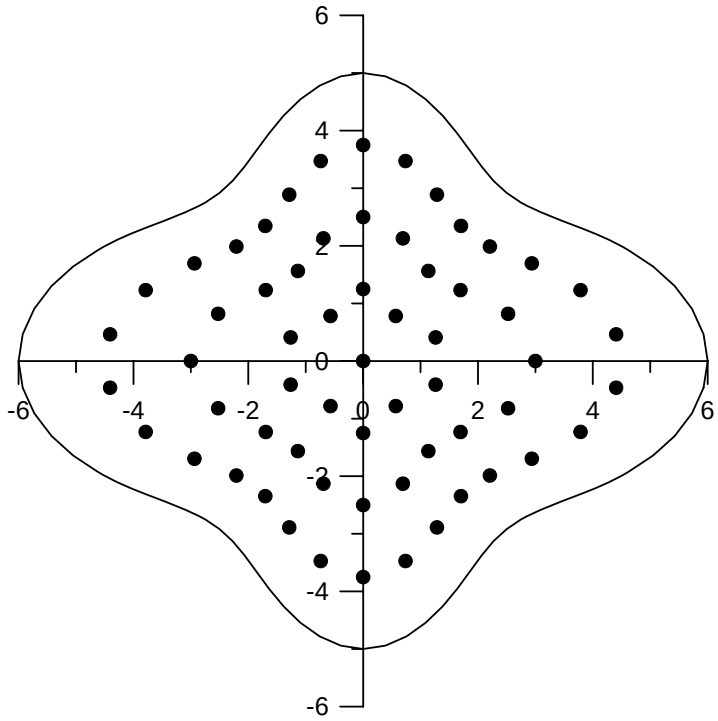
Σχ. 4.7. Μεταβολή των βυθίσεων κατά μήκος της διατομής $y = 0$ στην προεντεταμένη μη ομογενή τετραγωνική μεμβράνη του παραδείγματος *4.4.2*.



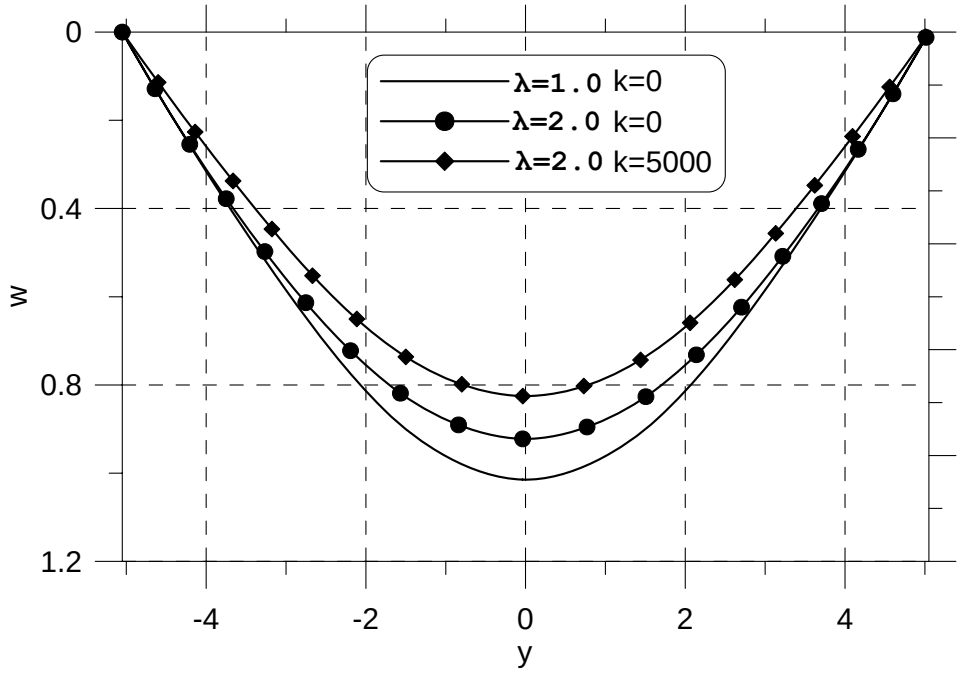
Σχ. 4.8 Μεταβολή της σ_x κατά μήκος της διατομής $y = 0$ στην προεντεταμένη μη ομογενή τετραγωνική μεμβράνη του παραδείγματος *4.4.2*.

4.4.3. Μεμβράνη τυχαίου σχήματος

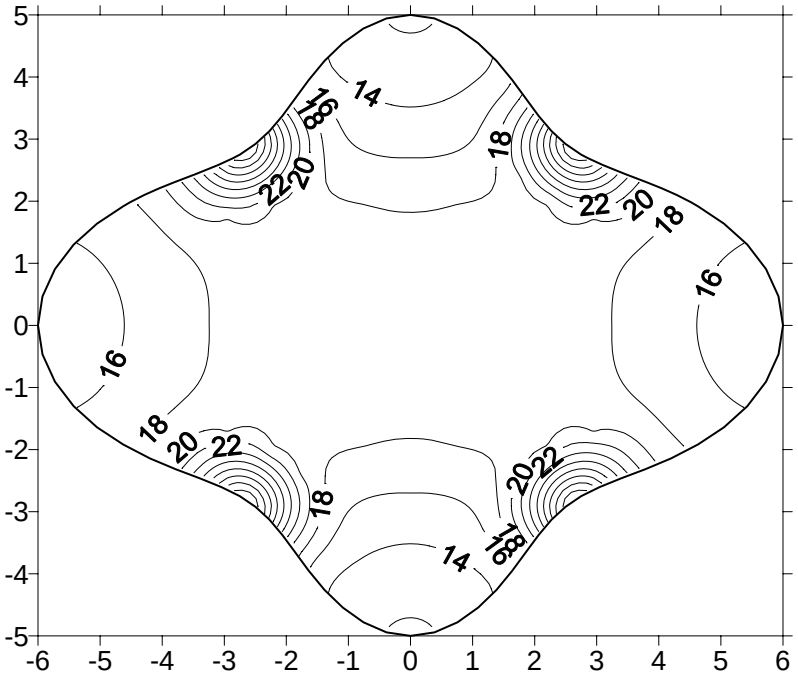
Στο παράδειγμα αυτό η μη ομογενής ορθότροπη μεμβράνη τυχαίου σχήματος (Σχ. 4.9.) αναλύθηκε χρησιμοποιώντας $N = 80$ συνοριακά σταθερά στοιχεία και $M = 61$ εσωτερικά κομβικά σημεία. Το σύνορο της μεμβράνης ορίζεται από την καμπύλη $r = 5|\sin\theta|^3 + 6|\cos\theta|^3$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Η μεμβράνη προεντάθηκε με $u_n = 0.05m$ κατά την κάθετη διεύθυνση στο σύνορο και $u_t = 0$ κατά την εφαπτομενική διεύθυνση. Τα δεδομένα είναι $h = 0.002m$, $g = 3kN/m^2$, $E_1 = E/\sqrt{\lambda}$, $E_2 = E\sqrt{\lambda}$, $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = \lambda\nu_1$ και $G = E/2(1+\nu_1\sqrt{\lambda})$ όπου $E = 110000 + kr^2$, $r = (x^2+y^2)^{1/2}$ και k μία σταθερά. Οι βυθίσεις και οι ισοσταθμικές καμπύλες της κύριας μεμβρανικής δύναμης N_1 για διάφορες τιμές των k, λ παρουσιάζονται στα Σχ. 4.10. έως Σχ. 4.12.



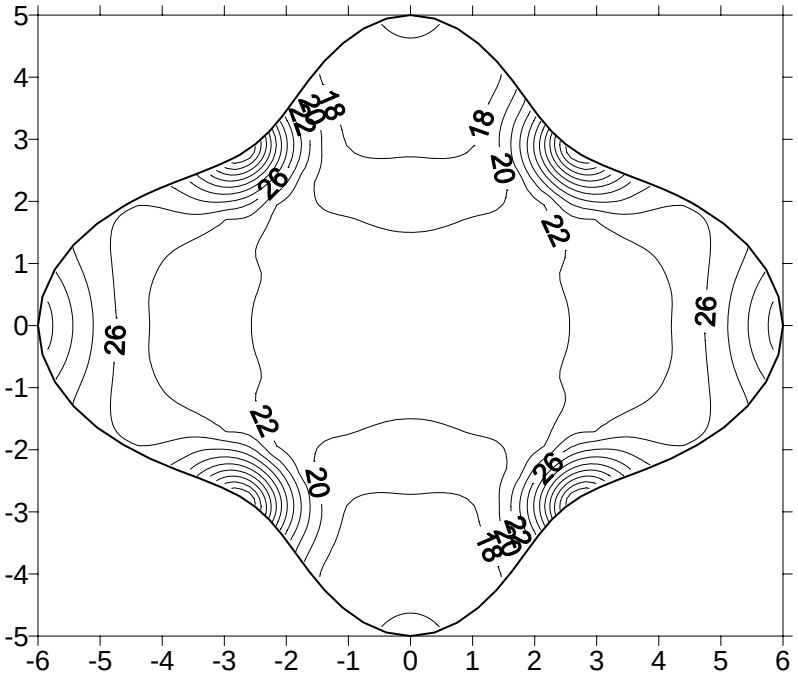
Σχ. 4.9. Μεμβράνη τυχαίου σχήματος και κατανομή των εσωτερικών κομβικών σημείων



Σχ. 4.10. Μεταβολή των βυθίσεων κατά μήκος της διατομής $x = 0$ στην ορθότροπη και μη ομογενή μεμβράνη τυχαίου σχήματος του παραδείγματος *4.4.3.* για διάφορες τιμές των λ, k



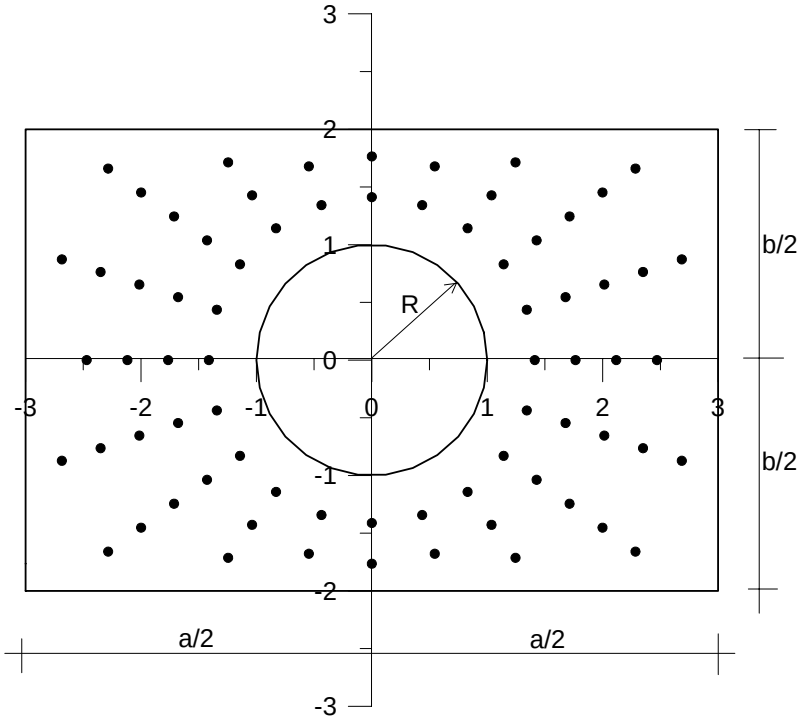
Σχ. 4.11. Ισοσταθμικές καμπύλες της N_1 στην ορθότροπη και μη ομογενή μεμβράνη τυχαίου σχήματος του παραδείγματος *4.4.3.* για $\lambda = 2$ και $k = 0$



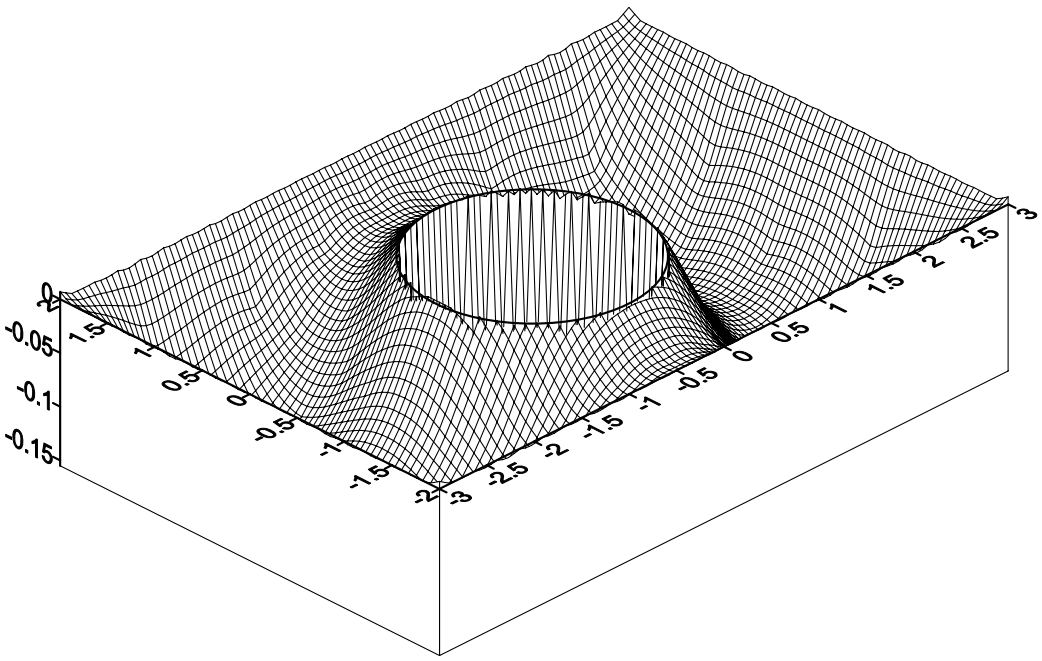
Σχ. 4.12. Ισοσταθμικές καμπύλες της N_1 στην ορθότροπη και μη ομογενή μεμβράνη τυχαίου σχήματος του παραδείγματος *4.4.3.* για $\lambda = 2$ και $k = 5000$

4.4.4. Ορθογωνική μεμβράνη με κυκλική οπή

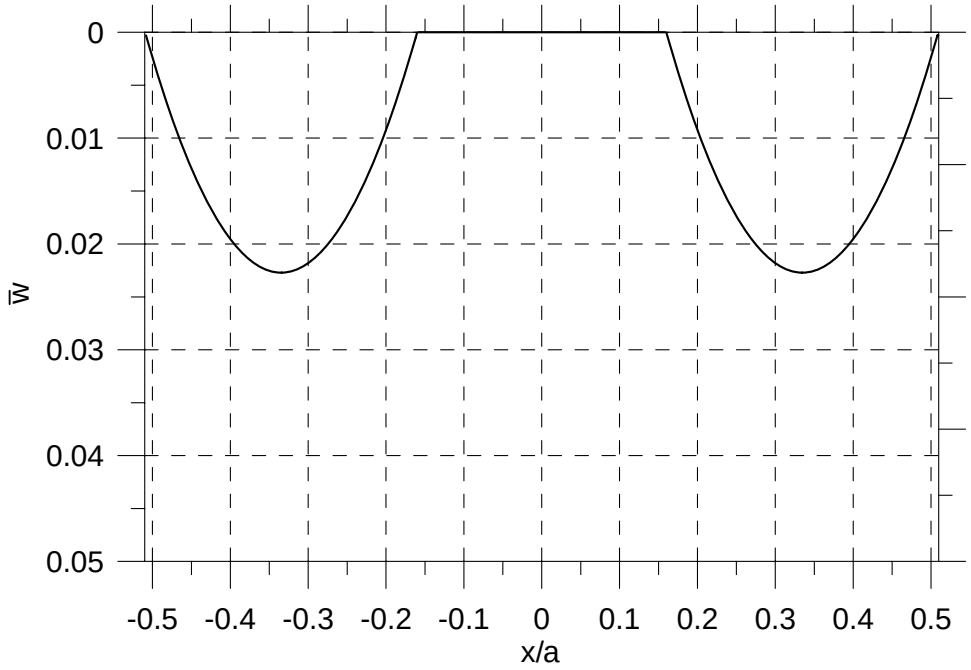
Μία ορθογωνική ορθότροπη ($\lambda = 0.5$) μεμβράνη με κυκλική οπή (Σχ. 4.13) που υπόκειται σε ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο αναλύθηκε χρησιμοποιώντας $N_{rect} = 84$ και $N_{circ} = 26$ σταθερά συνοριακά στοιχεία κατά μήκος του ορθογωνικού και του κυκλικού συνόρου αντίστοιχα και $M = 72$ εσωτερικά κομβικά σημεία κατανεμημένα όπως φαίνεται στο Σχ. 4.13. Το ορθογωνικό σύνορο προεντάθηκε όπως στο παράδειγμα *4.4.1.* με $\tilde{u} = \tilde{v} = 0.05m$, ενώ το κυκλικό με $u_n = 0.05m$ κατά τη διεύθυνση κάθετα στο σύνορο και $u_t = 0$ κατά την εφαπτομενική διεύθυνση. Τα δεδομένα είναι $a = 6.0m$, $b = 4.0m$, $R = 1.0m$, $h = 0.002m$, $g = 5kN/m^2$, $E_1 = E/\sqrt{\lambda}$, $E_2 = E\sqrt{\lambda}$, $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = \lambda\nu_1$ και $G = E/2(1+\nu_1\sqrt{\lambda})$ όπου $E = 110000kN/m^2$. Η παραμορφωμένη επιφάνεια φαίνεται στο Σχ. 4.14 ενώ η μεταβολή της βυθίσεως $\overline{w}$ και της μεμβρανικής δύναμης $\overline{N}_x$ κατά μήκος του άξονα x ($y = 0$) παρουσιάζονται στα Σχ. 4.15 και Σχ. 4.16. Αριθμητικές τιμές για τις μετατοπίσεις και τις μεμβρανικές δυνάμεις παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.



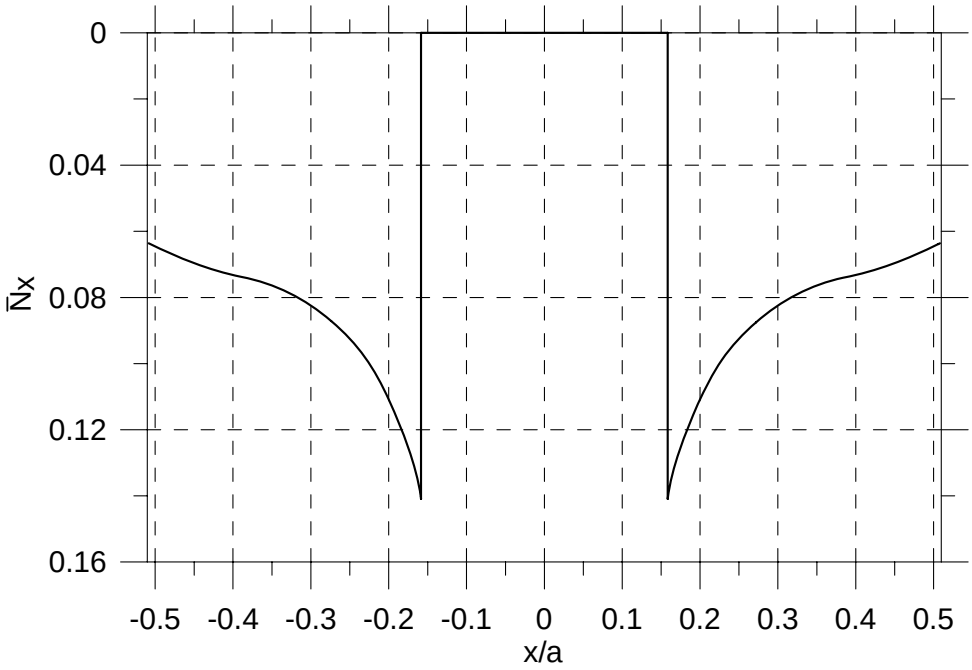
Σχ. 4.13. Ορθογωνικό χωρίο με κυκλική οπή και κατανομή των εσωτερικών κομβικών σημείων στη μεμβράνη του παραδείγματος *4.4.4.*



Σχ. 4.14. Παραμορφωμένη επιφάνεια στη μεμβράνη του παραδείγματος *4.4.4.*



Σχ. 4.15. Μεταβολή της βύθισης κατά μήκος της διατομής $y = 0$ στη μεμβράνη του παραδείγματος *4.4.4.*



Σχ. 4.16. Μεταβολή της μεμβρανικής δύναμης $\overline{N}_x$ κατά μήκος της διατομής $y = 0$ στη μεμβράνη του παραδείγματος *4.4.4.*

$\overline{x}$	$\overline{u}$	$\overline{w}$	$\overline{N}_x$	$\overline{N}_y$
0.16667	-0.00833	0.00000	0.14091	0.06544
0.23530	-0.00368	0.01416	0.09769	0.00669
0.29412	-0.00017	0.02120	0.08343	0.01560
0.35293	0.00316	0.02267	0.07587	0.02078
0.41177	0.00602	0.01810	0.07214	0.02365
0.50000	0.00833	0.00000	0.06363	0.01759

Πίνακας 1. Μετατοπίσεις $\overline{u}, \overline{w}$ και μεμβρανικές δυνάμεις $\overline{N}_x$, $\overline{N}_y$ κατά μήκος της διατομής $y = 0$ στη μεμβράνη του παραδείγματος *4.4.4.*

5

Η Μέθοδος της Αναλογικής Εξισώσεως για το δυναμικό πρόβλημα και η αριθμητική της υλοποίηση

5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η Μέθοδος της Αναλογικής Εξισώσεως (ΑΕΜ), μία αμιγής συνοριακή μέθοδος, όπως εφαρμόζεται για μη γραμμικά προβλήματα συνοριακών και αρχικών τιμών καθώς και η αριθμητική της υλοποίηση. Η μέθοδος έχει εφαρμοστεί με επιτυχία σε μη γραμμικά δυναμικά προβλήματα μεταξύ των οποίων είναι: δυναμική μη γραμμική ανάλυση πλακών (Katsikadelis et al., 1993), δυναμική μη γραμμική ανάλυση ισότροπων και ομογενών μεμβρανών (Katsikadelis, 2000).

5.2. Η αναλογική εξίσωση για το δυναμικό πρόβλημα

Οι εξισώσεις κινήσεως της μεμβράνης δίδονται από τις (2.24). Στην παρούσα ανάλυση, χωρίς να περιορίζουμε την γενικότητα, αμελούμε τους αδρανειακούς όρους $\rho u,_{tt}$ και $\rho v,_{tt}$, των οποίων την επιρροή θα εξετάσουμε σε μελλοντική έρευνα. Έτσι οι εξισώσεις γίνονται

$$(C_1 u,_x + C v,_y),_x + (C_{12} u,_y + C_{12} v,_x),_y = (\frac{C_1}{2} w,_x^2 + \frac{C}{2} w,_y^2),_x + (C_{12} w,_x w,_y),_y \tag{5.1a}$$

$$(C_2 v,_y + C u,_x),_y + (C_{12} u,_y + C_{12} v,_x),_x = (\frac{C_2}{2} w,_y^2 + \frac{C}{2} w,_x^2),_y + (C_{12} w,_x w,_y),_x \tag{5.1b}$$

$$\begin{aligned} \rho w,_{tt} - [C_1(u,_x + \frac{1}{2} w,_x^2) + C(v,_y + \frac{1}{2} w,_y^2)] w,_{xx} - 2[C_{12}(u,_y + v,_x + w,_x w,_y)] w,_{xy} \\ - [C_2(v,_y + \frac{1}{2} w,_y^2) + C(u,_x + \frac{1}{2} w,_x^2)] w,_{yy} = g \end{aligned} \tag{5.1c}$$

στο Ω.

Το πρόβλημα συνοριακών και αρχικών τιμών το οποίο διατυπώνεται από τις τρεις μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις κινήσεως της μεμβράνης (5.1) μαζί με τις συνοριακές συνθήκες (2.18)

$$u = \tilde{u}$$
$$v = \tilde{v}$$
$$w = \tilde{w}$$

στο Γ, και τις αρχικές συνθήκες (2.25)

$$w(x,y,0) = \tilde{w}_0$$

$$\dot{w}(x,y,0) = \dot{\tilde{w}}_0$$

στο Ω, επιλύεται χρησιμοποιώντας τη Μέθοδο της Αναλογικής Εξισώσεως όπως αναπτύχθηκε για τις ομογενείς και ισότροπες μεμβράνες από τον Katsikadelis (2000).

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή οι εξισώσεις (5.1) αντικαθιστώνται από τρεις εξισώσεις Poisson

$$\nabla^2 u_i = b_i \quad (i = 1,2,3) \tag{5.2}$$

όπου $b_i = b_i(x,y,t)$ είναι τα ιδεατά φορτία των αναλογικών εξισώσεων που στην συγκεκριμένη περίπτωση εξαρτώνται και από το χρόνο, ενώ με u_i συμβολίζεται κάθε μία από τις συναρτήσεις u, v, w. Συνεπώς οι τρεις αναλογικές εξισώσεις (5.2) είναι 'οιονεί στατικές' ή ψευδοδυναμικές (quasi-static), δηλαδή ο χρόνος υπεισέρχεται ως παράμετρος.

Η διαδικασία υπολογισμού των ιδεατών φορτίων είναι η ίδια με αυτή για το στατικό πρόβλημα. Για χάριν πληρότητας παρουσιάζεται συνοπτικά και σε αυτό το κεφάλαιο. Έτσι τα ιδεατά φορτία προσεγγίζονται ως εξής

$$b_i = \sum_{j=1}^{M} a_j^{(i)} f_j \tag{5.3}$$

όπου $f_j = f_j(x,y)$ είναι ένα σύνολο από προσεγγιστικές συναρτήσεις και $\alpha_j^{(i)}(t)$ $(i = 1,2,3)$ $3M$ χρονικά εξαρτώμενοι συντελεστές που πρέπει να υπολογισθούν. Αναζητούμε μία λύση της μορφής $\overline{u}_i + u_i^p$ όπου $\overline{u}_i$ είναι η ομογενής λύση και u_i^p μία μερική. Η μερική λύση υπολογίζεται ως

$$u_i^p = \sum a_j^{(i)} \hat{u}_j \tag{5.4}$$

όπου $\hat{u}_j$ $(j = 1,2,\ldots M)$ είναι μία μερική λύση της εξίσωσης

$$\nabla^2 \hat{u}_j = f_j \qquad j = 1,2,...M \tag{5.5}$$

Η ομογενής λύση προσδιορίζεται από το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\nabla^2 \overline{u}_i = 0 \qquad \text{στο } \Omega \qquad \text{και} \qquad \overline{u}_i = \tilde{u}_i - \sum_{j=1}^{M} a_j^{(i)} \hat{u}_j \qquad \text{στο } \Gamma \tag{5.6a,b}$$

Συνεπώς, γράφοντας τη λύση της ομογενούς εξισώσεως (5.6) σε ολοκληρωτική μορφή, η λύση της εξισώσεως (5.2) δίνεται ως

$$cu_i = -\int_\Gamma (u^* \overline{u}_{i,n} - \overline{u}_i q^*) ds + \sum_{j=1}^{M} a_j^{(i)} \hat{u}_j \tag{5.7}$$

όπου $u^* = \ell n r / 2\pi$, $r = |P - Q|$, $Q \in \Gamma$ είναι η θεμελιώδης λύση της εξισώσεως Laplace και $c = 1, 1/2, 0$ εξαρτάται από τη θέση του σημείου $P \in \Omega$, $P \in \Gamma$, $P \notin \Omega \cup \Gamma$, αντίστοιχα. Οι πρώτες και δεύτερες παράγωγοι της εξίσωσης (5.7) για σημεία μέσα στο χωρίο Ω $(c = 1)$ υπολογίζονται με απευθείας παραγώγιση. Ήτοι

$$u_{i,k} = -\int u,_k^* \overline{u}_{i,n} - \overline{u}_i u,_{nk}^*) ds + \sum a_j^{(i)} \hat{u}_{j,k} \qquad (k = 1,2) \tag{5.8}$$

$$u_{i,kl} = -\int (u,_{kl}^* \overline{u}_{i,n} - \overline{u}_i u,_{nkl}^*) ds + \sum a_j^{(i)} u_{j,k\ell} \qquad (k,l = 1,2) \tag{5.9}$$

Το τελικό βήμα της μεθόδου της ΑΕΜ είναι η εφαρμογή των εξισώσεων (5.1) σε M διακεκριμένα σημεία μέσα στο Ω (Σχ. 3.1)

$$\begin{aligned} F_j^{(1)}\{(u,_x)^j,(u,_y)^j,(u,_{xx})^j,(u,_{yy})^j,(v,_x)^j,(v,_y)^j,(v,_{xy})^j\} = \\ R_j^{(1)}\{(w,_x)^j,(w,_y)^j,(w,_{xx})^j,(w,_{xy})^j,(w,_{yy})^j\} \end{aligned} \tag{5.10a}$$

$$\begin{aligned} F_j^{(2)}\{(u,_x)^j,(u,_y)^j,(u,_{xy})^j,(v,_x)^j,(v,_y)^j,(v,_{xx})^j,(v,_{yy})^j\} = \\ R_j^{(2)}\{(w,_x)^j,(w,_y)^j,(w,_{xx})^j,(w,_{xy})^j,(w,_{yy})^j\} \end{aligned} \tag{5.10b}$$

$$\begin{aligned} \rho(w,_{tt})^j - F_j^{(3)}\{(u,_x)^j,(u,_y)^j,(v,_x)^j,(v,_y)^j,(w,_x)^j,(w,_y)^j,(w,_{xx})^j, \\ (w,_{xy})^j,(w,_{yy})^j\} = g^j \end{aligned} \tag{5.10c}$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (5.8) και (5.9) για τον υπολογισμό των παραγώγων των u, v, w και αντικαθιστώντας στις εξισώσεις (5.10) καταλήγουμε στις εξισώσεις

$$F_j^{(1)}(a_j^{(1)}, a_j^{(2)}) = R_j^{(1)}(a_j^{(3)}) \tag{5.11a}$$

$$F_j^{(2)}(a_j^{(1)}, a_j^{(2)}) = R_j^{(2)}(a_j^{(3)}) \tag{5.11b}$$

$$\rho^j(\ddot{w})^j - F_j^{(3)}(a_j^{(1)}, a_j^{(2)}, a_j^{(3)}) = g^j \tag{5.11c}$$

Οι εξισώσεις (5.11a,b) επιτρέπουν την απαλοιφή των $a_j^{(1)}$ και $a_j^{(2)}$ $j = 1,2,...M$ από την (5.11c), η οποία θα δώσει τελικά την ημιδιακριτοποιημένη εξίσωση κινήσεως της μεμβράνης.

5.3. Η αριθμητική υλοποίηση της αναλογικής εξισώσεως για το δυναμικό πρόβλημα

Η Μέθοδος των Συνοριακών Στοιχείων με σταθερά συνοριακά στοιχεία (Κατσικαδέλης, 2000) χρησιμοποιείται για την προσέγγιση των ολοκληρωμάτων στις σχέσεις (5.7), (5.8) και (5.9). Εάν N είναι ο αριθμός των συνοριακών κομβικών σημείων (Σχ. 3.1) τότε η εξίσωση (5.7) γράφεται

$$\frac{1}{2}\{\tilde{u}_i\} = [H]\{\overline{u}_i\} - [G]\{\overline{u}_{i,n}\} + [\hat{U}]\{a^{(i)}\} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{5.12}$$

όπου $[H]$, $[G]$ είναι γνωστά μητρώα διαστάσεων $N \times N$ και $[\hat{U}]$ γνωστό μητρώο διαστάσεων $N \times M$, τα οποία προκύπτουν από την ολοκλήρωση των πυρήνων των συνοριακών ολοκληρωμάτων και $\{a^{(i)}\}$ είναι το διάνυσμα των αγνώστων συντελεστών. Οι εξισώσεις (5.7), (5.8) και (5.9) όταν διακριτοποιηθούν και εφαρμοστούν σε M εσωτερικά κομβικά σημεία στο Ω, μετά την απαλοιφή των διανυσμάτων $\{\overline{u}_i\}$ και $\{\overline{u}_{i,n}\}$ δίνουν

$$\{u_i\} = [D]\{a^{(i)}\} + [E]\{\tilde{u}_i\} \tag{5.13}$$

$$\{u_{i,k}\} = [D_k]\{a^{(i)}\} + [E_k]\{\tilde{u}_i\} \tag{5.14}$$

$$\{u_{i,kl}\} = [D_{kl}]\{a^{(i)}\} + [E_{kl}]\{\tilde{u}_i\} \qquad i = 1,\ 2,\ 3 \qquad k, l = 1,\ 2 \tag{5.15}$$

όπου $[D],[E],...[E_{kl}]$ γνωστά μητρώα.

Παραγωγίζοντας την εξίσωση (5.13), για $i = 3$, ως προς το χρόνο έχουμε

$$\{\ddot{w}\} = [D]\{\ddot{a}^{(3)}\} \tag{5.16}$$

Τέλος, αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (5.14) εώς (5.16) στις εξισώσεις (5.11) παίρνουμε

$$\left\{F^{(1)}(\{a^{(1)}\},\{a^{(2)}\})\right\} = \left\{R^{(1)}(\{a^{(3)}\})\right\} \tag{5.17a}$$

$$\left\{F^{(2)}(\{a^{(1)}\},\{a^{(2)}\})\right\} = \left\{R^{(2)}(\{a^{(3)}\})\right\} \tag{5.17b}$$

$$[\rho][D]\{\ddot{a}^{(3)}\} - \left\{F^{(3)}(\{a^{(1)}\},\{a^{(2)}\},\{a^{(3)}\})\right\} = \{g(t)\} \tag{5.17c}$$

όπου $[\rho]$ είναι ένα τετραγωνικό διαγώνιος μητρώο διαστάσεων $M \times M$ που περιέχει τις τιμές της πυκνότητας $\rho(x,y)$ στα M κομβικά σημεία μέσα στο Ω. Οι αρχικές συνθήκες για το $\{a^{(3)}(t)\}$ λαμβάνονται από την εξίσωση (5.13), για $i = 3$, έχοντας υπόψη ότι ο όρος $[E]\{\tilde{w}\}$ είναι σταθερός (δεν μεταβάλλεται με το χρόνο). Έτσι έχουμε

$$\{a^{(3)}(0)\} = [D]^{-1}(\{w(x,y,0)\} - [E]\{\tilde{w}\}) \tag{5.18a}$$

$$\{\dot{a}^{(3)}(0)\} = [D]^{-1}\{\dot{w}(x,y,0)\} \tag{5.18b}$$

Η εξίσωση (5.17c) είναι η ημι-διακριτοποιημένη εξίσωση κίνησης της μεμβράνης, η οποία μπορεί να λυθεί αριθμητικά για την εύρεση του αγνώστου διανύσματος $\{a^{(3)}(t)\}$. Το διάνυσμα αυτό χρησιμοποιείται για την εύρεση των διανυσμάτων $\{a^{(1)}(t)\}$ και $\{a^{(2)}(t)\}$ από τις εξισώσεις (5.17a,b).

Εφόσον τα άγνωστα διανύσματα $\{a^{(1)}\},\{a^{(2)}\}$ και $\{a^{(3)}\}$ υπολογισθούν, τότε οι μετατοπίσεις και οι παραγωγοί τους στα εσωτερικά κομβικά σημεία υπολογίζονται από τις σχέσεις (5.13), (5.14) και (5.16) ενώ οι μεμβρανικές δυνάμεις από τις σχέσεις (2.6) με τη βοήθεια των σχέσεων (2.3). Για σημεία του χωρίου $P \in \Omega$ τα οποία δεν συμπίπτουν με τα εσωτερικά κομβικά σημεία τα μεγέθη αυτά μπορούν να υπολογισθούν από τις σχέσεις (5.7) εώς (5.8).

6

Υπολογιστική επίλυση του δυναμικού προβλήματος

6.1. Εισαγωγή

Σ' αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται οι μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν για την λύση της εξίσωσης κινήσεως της μεμβράνης (5.17), η οποία προκύπτει από την αριθμητική υλοποίηση της ΑΕΜ για το δυναμικό πρόβλημα της ανισότροπης και μη ομογενούς μεμβράνης. Επίσης παρουσιάζεται ο κώδικας που έχει γραφεί για την υπολογιστική επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος, σε γλώσσα προγραμματισμού FORTRAN, καθώς και αριθμητικά παραδείγματα που καταδεικνύουν την ακρίβεια και αποτελεσματικότητα της μεθόδου.

6.2. Λύση της εξίσωσης κινήσεως της μεμβράνης

Η ημι-διακριτοποιημένη εξίσωση κινήσεως της μεμβράνης, όπως αυτή διατυπώνεται από τις εξισώσεις (5.17)

$$\mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{a}^{(1)},\mathbf{a}^{(2)}) = \mathbf{R}^{(1)}(\mathbf{a}^{(3)})$$
$$\mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{a}^{(1)},\mathbf{a}^{(2)}) = \mathbf{R}^{(2)}(\mathbf{a}^{(3)})$$
$$\rho\mathbf{D}\ddot{\mathbf{a}}^{(3)} - \mathbf{F}^{(3)}(\mathbf{a}^{(1)},\mathbf{a}^{(2)},\mathbf{a}^{(3)})\mathbf{a}^{(3)} = \mathbf{g}(t)$$

έχει M αγνώστους, τα στοιχεία του διανύσματος $\mathbf{a}^{(3)}$. Το διάνυσμα αυτό χρησιμοποιείται για την εύρεση των διανυσμάτων $\mathbf{a}^{(1)},\mathbf{a}^{(2)}$ από τις εξισώσεις (5.17a,b).

Οι δύο πρώτες εξισώσεις, όμως, είναι γραμμικές ως προς $\mathbf{a}^{(1)},\mathbf{a}^{(2)}$ (4.1a,b)

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{a}^{(2)} = \mathbf{R}^{(1)}(\mathbf{a}^{(3)})$$
$$\mathbf{A}_{21}\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{a}^{(2)} = \mathbf{R}^{(2)}(\mathbf{a}^{(3)})$$

Έτσι αν επιλυθούν ως προς $\mathbf{a}^{(1)}$ και $\mathbf{a}^{(2)}$, παίρνουμε τις εξισώσεις (4.2)

$$\mathbf{a}^{(1)} = \mathbf{S}^{(1)}(\mathbf{a}^{(3)})$$
$$\mathbf{a}^{(2)} = \mathbf{S}^{(2)}(\mathbf{a}^{(3)})$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (4.2) στην εξίσωση (5.17c) λαμβάνουμε την εξίσωση

$$\rho \mathbf{D}\ddot{\mathbf{a}}^{(3)} - \mathbf{S}^{(3)}(\mathbf{a}^{(3)}) = \mathbf{g}(t) \tag{6.1}$$

που μαζί με τις αρχικές συνθήκες (5.18)

$$\mathbf{a}^{(3)}(0) = \mathbf{D}^{-1}[\mathbf{w}(x,y,0) - \mathbf{E}\tilde{\mathbf{w}}]$$
$$\dot{\mathbf{a}}^{(3)}(0) = \mathbf{D}^{-1}\dot{\mathbf{w}}(x,y,0)$$

αποτελεί ένα πρόβλημα αρχικών τιμών για το διάνυσμα $\mathbf{a}^{(3)}$.

Επειδή η επίλυση των μη γραμμικών εξισώσεων κινήσεως είναι δύσκολο πρόβλημα και οι διάφοροι μέθοδοι δεν είναι πάντοτε επιτυχείς, χρησιμοποιήθηκαν δύο διαφορετικές μέθοδοι για την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων.

6.2.1. Μέθοδος της Μέσης Επιταχύνσεως (Average Acceleration Method)

Η δυναμική συμπεριφορά μη γραμμικών συστημάτων, με N βαθμούς ελευθερίας, μπορεί να μελετηθεί απαιτώντας την ικανοποίηση της εξισώσεως κινήσεως (Κατσικαδέλης, 1998)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{f}_D(\dot{\mathbf{U}}) + \mathbf{f}_S(\mathbf{U}) = \mathbf{p} \tag{6.2}$$

σε διακεκριμένες χρονικές στιγμές, που απέχουν μεταξύ τους κατά Δt. Όπου $\mathbf{U}$, $\dot{\mathbf{U}}$, $\ddot{\mathbf{U}}$ είναι τα διανύσματα των μετατοπίσεων, ταχυτήτων και επιταχύνσεων αντίστοιχα; $\mathbf{p}$ το διάνυσμα φορτίσεως; $\mathbf{M}$ το μητρώο μάζας; $\mathbf{f}_S(\mathbf{U})$, $\mathbf{f}_D(\dot{\mathbf{U}})$ οι δυνάμεις ακαμψίας και αποσβέσεως του συστήματος που είναι μη γραμμικά εξαρτώμενες από τα διανύσματα των μετατοπίσεων και των ταχυτήτων αντιστοίχως.

Η εξίσωση κινήσεως τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$ εκφράζεται ως

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} + \mathbf{f}_D(\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}) + \mathbf{f}_S(\mathbf{U}_{t+\Delta t}) = \mathbf{p}_{t+\Delta t} \tag{6.3}$$

Αφαιρώντας τη (6.2) κατά μέλη από την ανωτέρω εξίσωση λαμβάνουμε

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{U}} + \Delta\mathbf{f}_D + \Delta\mathbf{f}_S = \Delta\mathbf{p} \tag{6.4}$$

Αναπτύσσοντας τις $\Delta\mathbf{f}_D$ και $\Delta\mathbf{f}_S$ σε σειρά Taylor παίρνουμε

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{f}_D &= \mathbf{f}_D(\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}) - \mathbf{f}_D(\dot{\mathbf{U}}_t) \\ &= \mathbf{f}_D(\dot{\mathbf{U}}_t + \Delta\dot{\mathbf{U}}_t) - \mathbf{f}_D(\dot{\mathbf{U}}_t) \\ &= \frac{d\mathbf{f}_D}{d\dot{\mathbf{U}}_t}\Delta\dot{\mathbf{U}}_t + \frac{1}{2}\frac{d^2\mathbf{f}_D}{d\dot{\mathbf{U}}_t^2}(\Delta\dot{\mathbf{U}}_t)^2 + \cdots\end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{f}_S &= \mathbf{f}_S(\mathbf{U}_{t+\Delta t}) - \mathbf{f}_S(\mathbf{U}_t) \\ &= \mathbf{f}_S(\mathbf{U}_t + \Delta\mathbf{U}_t) - \mathbf{f}_S(\mathbf{U}_t) \\ &= \frac{d\mathbf{f}_S}{d\mathbf{U}_t}\Delta\mathbf{U}_t + \frac{1}{2}\frac{d^2\mathbf{f}_S}{d\mathbf{U}_t^2}(\Delta\mathbf{U}_t)^2 + \cdots\end{aligned} \tag{6.6}$$

Επειδή τα χρονικά διαστήματα Δt είναι μικρά τότε και τα $\Delta\mathbf{U}_t$, $\Delta\dot{\mathbf{U}}_t$ είναι μικρά, συνεπώς μπορούμε να παραλείψουμε τους μη γραμμικούς όρους στις σχέσεις (6.5) και (6.6). Έτσι προκύπτει

$$\Delta\mathbf{f}_D \simeq \frac{d\mathbf{f}_D}{d\dot{\mathbf{U}}_t}\Delta\dot{\mathbf{U}}_t = \mathbf{C}_T\Delta\dot{\mathbf{U}}_t \tag{6.7}$$

$$\Delta\mathbf{f}_S \simeq \frac{d\mathbf{f}_S}{d\mathbf{U}_t}\Delta\mathbf{U}_t = \mathbf{K}_T\Delta\mathbf{U}_t \tag{6.8}$$

όπου $\mathbf{C}_T$ τετραγωνικό μητρώο διαστάσεων $N \times N$ που εκφράζει την Ιακωβιανή των $f_{D,1}(\dot{u}_1, \dot{u}_2, ..., \dot{u}_N), f_{D,2}(\dot{u}_1, \dot{u}_2, ..., \dot{u}_N), ..., f_{D,N}(\dot{u}_1, \dot{u}_2, ..., \dot{u}_N)$ ως προς $\dot{u}_1, \dot{u}_2, ..., \dot{u}_N$ τη χρονική στιγμή t ή αλλιώς (για μονοδιάστατα προβλήματα) την κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης που εκφράζει τη δύναμη αποσβέσεως του συστήματος. Η προσέγγιση του $\Delta\mathbf{f}_D$ από τη σχέση (6.7) εισάγει σφάλμα διότι το $\mathbf{C}_T$ είναι η κλίση της εφαπτομένης.

Το ίδιο ισχύει και για τη $\mathbf{f}_S$. Το $\mathbf{K}_T$ είναι τετραγωνικό μητρώο διαστάσεων $N \times N$ που εκφράζει την Ιακωβιανή των $f_{S,1}(u_1, u_2, ..., u_N), f_{S,2}(u_1, u_2, ..., u_N), ..., f_{S,N}(u_1, u_2, ..., u_N)$ ως προς $u_1, u_2, ..., u_N$ τη χρονική στιγμή t ή αλλιώς (για μονοδιάστατα προβλήματα) την κλίση

της εφαπτομένης της καμπύλης που εκφράζει την ακαμψία του συστήματος. Ομοίως, η προσέγγιση του $\Delta\mathbf{f}_S$ από τη σχέση (6.8) εισάγει σφάλμα διότι η $\mathbf{K}_T$ είναι η κλίση της εφαπτομένης.

Τα σφάλματα είναι αναπόφευκτα επειδή στη βήμα προς βήμα ολοκλήρωση της εξισώσεως κινήσεως οι $\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$ και $\mathbf{U}_{t+\Delta t}$ δεν είναι γνωστές τη χρονική στιγμή t. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (6.7) και (6.8) η (6.4) γράφεται υπό αυξητική μορφή

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}_T\Delta\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_T\Delta\mathbf{U} = \Delta\mathbf{p} \tag{6.9}$$

Η Μέθοδος της Μέσης Επιταχύνσεως (Κατσικαδέλης, 1998) προσφέρεται για την επίλυση της ανωτέρω εξισώσεως. Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις για τις $\Delta\ddot{\mathbf{U}}_t$ και $\Delta\dot{\mathbf{U}}_t$ (Κατσικαδέλης, 1998) έχουμε

$$\Delta\dot{\mathbf{U}} = \frac{2}{\Delta t}\Delta\mathbf{U} - 2\dot{\mathbf{U}}_t \tag{6.10}$$

$$\Delta\ddot{\mathbf{U}} = \frac{4}{\Delta t^2}(\Delta\mathbf{U} - \Delta t\dot{\mathbf{U}}_t) - 2\ddot{\mathbf{U}}_t \tag{6.11}$$

Η (6.9) γράφεται

$$(\mathbf{K}_T + \frac{2}{\Delta t}\mathbf{C}_T + \frac{4}{\Delta t^2}\mathbf{M})\Delta\mathbf{U} = \Delta\mathbf{p} + (\frac{4}{\Delta t}\mathbf{M} + 2\mathbf{C}_T)\dot{\mathbf{U}}_t + 2\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_t \tag{6.12}$$

Μετά τον υπολογισμό της $\Delta\mathbf{U}$ από την παραπάνω σχέση υπολογίζουμε

$$\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{U}_t + \Delta\mathbf{U} \tag{6.13}$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}_t + \Delta\dot{\mathbf{U}} \tag{6.14}$$

Η $\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$ υπολογίζεται απ' ευθείας από την εξίσωση (6.3)

$$\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \mathbf{M}^{-1}[\mathbf{p}_{t+\Delta t} - \mathbf{f}_D(\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}) - \mathbf{f}_S(\mathbf{U}_{t+\Delta t})] \tag{6.15}$$

Η τιμή που λαμβάνεται από την ανωτέρω σχέση περιορίζει το σφάλμα που εισάγουν τα $\mathbf{C}_T$ και $\mathbf{K}_T$.

6.2.2. Μέθοδος της Αναλογικής Εξισώσεως (Analog Equation Method)

Σύμφωνα με τη Μέθοδο της Αναλογικής Εξισώσεως, όπως διατυπώνεται για προβλήματα αρχικών τιμών, το μη γραμμικό σύστημα των εξισώσεων της κίνησης αντικαθίσταται από ένα σύνολο γραμμικών μη πεπλεγμένων και χωρίς απόσβεση εξισώσεων. Η μέθοδος αυτή, η οποία αναπτύχθηκε από τον Katsikadelis (1994b), δίδει πολύ καλά αποτελέσματα σε περιπτώσεις μη γραμμικών εξισώσεων κινήσεως, ενώ άλλες μέθοδοι ή αστοχούν ή τα αποτελέσματά τους δεν είναι αξιόπιστα.

Το σύστημα των N βαθμών ελευθερίας αντικαθίσταται από N απλούς γραμμικούς και χωρίς απόσβεση ταλαντωτές που υπόκεινται σε κατάλληλα ιδεατά εξωτερικά φορτία. Τα ιδεατά αυτά φορτία υπολογίζονται αριθμητικά από την ολοκληρωτική έκφραση της λύσεως των μονοβάθμιων ταλαντωτών και την απαίτηση ότι οι εξισώσεις κινήσεως ικανοποιούνται σε διακεκριμένα χρονικά διαστήματα.

Οι εξισώσεις κινήσεως (6.1) για ένα μη γραμμικό πολυβάθμιο σύστημα διατυπώνονται ως

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{f}_D(\dot{\mathbf{U}}) + \mathbf{f}_S(\mathbf{U}) = \mathbf{p}$$

Βάση των ανωτέρω υποθέσεων, στην Μέθοδο της Αναλογικής Εξισώσεως το μη γραμμικό σύστημα των εξισώσεων (6.1) αντικαθίσταται από ένα σύνολο γραμμικών εξισώσεων της μορφής

$$\ddot{\mathbf{U}} + \Lambda\mathbf{U} = \mathbf{q} \tag{6.11}$$

όπου Λ διαγώνιο μητρώο που περιέχει τις τιμές λ_i^2 ($i = 1,2,\ldots N$); όπου λ_i είναι οι ιδιοσυχνότητες των ιδεατών μονοβάθμιων ταλαντωτών που επιλέγονται αυθαίρετα. Το νόημα της αντικατάστασης αυτής είναι ότι το πραγματικό σύστημα των N βαθμών ελευθερίας αντικαθίσταται από N ισοδύναμα γραμμικά μη πεπλεγμένα και χωρίς απόσβεση συστήματα που έχουν μοναδιαία μάζα και υπόκεινται σε 'κατάλληλα' ιδεατά εξωτερικά φορτία $q_i(t)$ που υπολογίζονται εργαζόμενοι ως κατωτέρω.

Οι εξισώσεις (6.1) και (6.11) όταν εφαρμοστούν τις χρονικές στιγμές t και $t + \Delta t$ δίνουν

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_t + \mathbf{f}_D(\dot{\mathbf{U}}_t) + \mathbf{f}_S(\mathbf{U}_t) = \mathbf{p}_t \tag{6.12a}$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} + \mathbf{f}_D(\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}) + \mathbf{f}_S(\mathbf{U}_{t+\Delta t}) = \mathbf{p}_{t+\Delta t} \tag{6.12b}$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_t = -\Lambda\mathbf{U}_t + \mathbf{q}_t \tag{6.13a}$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = -\Lambda\mathbf{U}_{t+\Delta t} + \mathbf{q}_{t+\Delta t} \tag{6.13b}$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (6.13a) στην εξίσωση (6.12a) και την (6.13b) στην (6.12b) και χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις για τις $\mathbf{U}_{t+\Delta t}$ και $\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$ (Katsikadelis, 1994b)

$$\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \bar{\mathbf{U}}_t + \mathbf{A}_1\mathbf{q}_t + \mathbf{A}_2\mathbf{q}_{t+\Delta t} \tag{6.14}$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \dot{\bar{\mathbf{U}}}_t + \mathbf{B}_1\mathbf{q}_t + \mathbf{B}_2\mathbf{q}_{t+\Delta t} \tag{6.15}$$

έχουμε

$$\mathbf{q}_t = \mathbf{M}^{-1}[\mathbf{p}_t - \mathbf{f}_D(\dot{\mathbf{U}}_t) + \mathbf{M}\Lambda\mathbf{U}_t - \mathbf{f}_S(\mathbf{U}_t)] \tag{6.16}$$

$$\mathbf{q}_{t+\Delta t} = \mathbf{M}^{-1}[\mathbf{p}_{t+\Delta t} + \mathbf{G}(\mathbf{q}_{t+\Delta t})] \tag{6.17}$$

όπου

$$\begin{aligned}\mathbf{G}(\mathbf{q}_{t+\Delta t}) = -\mathbf{f}_D(\dot{\bar{\mathbf{U}}}_t + \mathbf{B}_1\mathbf{q}_t + \mathbf{B}_2\mathbf{q}_{t+\Delta t}) + \mathbf{M}\Lambda(\bar{\mathbf{U}}_t + \mathbf{A}_1\mathbf{q}_t + \mathbf{A}_2\mathbf{q}_{t+\Delta t}) \\ -\mathbf{f}_S(\bar{\mathbf{U}}_t + \mathbf{A}_1\mathbf{q}_t + \mathbf{A}_2\mathbf{q}_{t+\Delta t})\end{aligned} \tag{6.18}$$

Στην εξίσωση (6.17) το ισοδύναμο φορτίο $\mathbf{q}_{t+\Delta t}$ είναι ο μόνος άγνωστος, αφού το $\mathbf{q}_t$ έχει υπολογιστεί από την εξίσωση (6.16). Δέον να σημειωθεί ότι η σχέση (6.16) εφαρμόζεται μόνο μία φορά, για τον υπολογισμό της $\mathbf{q}_0$, στη χρονική στιγμή $t = 0$.

Η εξίσωση (6.17) είναι μία μη γραμμική αλγεβρική εξίσωση ως προς το $\mathbf{q}_{t+\Delta t}$ η οποία μπορεί να λυθεί αριθμητικά με την επαναληπτική μέθοδος του σταθερού σημείου (§4.2.2).

Εν συνεχεία τα διανύσματα των μετατοπίσεων $\mathbf{U}_{t+\Delta t}$ και $\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$ την χρονική στιγμή $t+\Delta t$ υπολογίζονται από τις σχέσεις (6.14) και (6.15).

Ο Πίνακας 6.1 (Katsikadelis, 1994b) συνοψίζει τα βήματα της μεθόδου έτσι όπως μπορούν να υλοποιηθούν σε οποιαδήποτε γλώσσα προγραμματισμού.

Πίνακας 6.1 Βήμα προς βήμα υπολογιστική επίλυση

Α. Αρχικοί υπολογισμοί

1. Σχηματίζεται το μητρώο μάζας $\mathbf{M}$ και οι συναρτήσεις που εκφράζουν τα διανύσματα $\mathbf{f}_D(\dot{\mathbf{U}}), \mathbf{f}_S(\dot{\mathbf{U}})$ και $\mathbf{p}$.

2. Ορίζονται οι αρχικές τιμές των $\mathbf{U}_0$ και $\dot{\mathbf{U}}_0$.

3. Επιλέγονται οι παράμετροι λ_i (συνήθως $\lambda_i = 1$) και μορφώνεται το διαγώνιο μητρώο $\Lambda = [\lambda_i^2]$.

4. Επιλέγεται το ε (ανεκτικότητα του σφάλματος) και ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων $i_{\max}$.

5. Επιλέγεται το χρονικό βήμα Δt και υπολογίζονται τα διαγώνια μητρώα

$$\mathbf{A}_1 = \left[\frac{1}{\lambda_i^2}(-\cos\lambda_i\Delta t + \frac{\sin\lambda_i\Delta t}{\lambda_i\Delta t})\right] \quad ; \quad \mathbf{A}_2 = \left[\frac{1}{\lambda_i^2}(1 - \frac{\sin\lambda_i\Delta t}{\lambda_i\Delta t})\right]$$

$$\mathbf{B}_1 = \left[\frac{1}{\lambda_i^2}(\lambda_i\sin\lambda_i\Delta t - \frac{1-\cos\lambda_i\Delta t}{\Delta t})\right] \quad ; \quad \mathbf{B}_2 = \left[\frac{1}{\lambda_i^2\Delta t}(1-\cos\lambda_i\Delta t)\right]$$

6. Υπολογίζεται το $\mathbf{q}_0$

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{M}^{-1}[\mathbf{p}_0 - \mathbf{f}_D(\dot{\mathbf{U}}_0) + \mathbf{M}\Lambda\mathbf{U}_0 - \mathbf{f}_S(\mathbf{U}_0)]$$

Β. Για κάθε χρονικό βήμα

1. Τη χρονική στιγμή t υπολογίζονται

$$\bar{\mathbf{U}}_t = \left[\cos\lambda_i\Delta t\right]\mathbf{U}_t + \left[\frac{\sin\lambda_i\Delta t}{\lambda_i}\right]\dot{\mathbf{U}}_t \quad ; \quad \dot{\bar{\mathbf{U}}}_t = \left[-\lambda_i\sin\lambda_i\Delta t\right]\mathbf{U}_t + \left[\cos\lambda_i\Delta t\right]\dot{\mathbf{U}}_t$$

$$\mathbf{Q}_t = \bar{\mathbf{U}}_t + \mathbf{A}_1\mathbf{q}_t \quad ; \; \dot{\mathbf{Q}}_t = \dot{\bar{\mathbf{U}}}_t + \mathbf{B}_1\mathbf{q}_t$$

2. Μέχρι να επιτευχθεί δυναμική ισορροπία για $i = 1$ και $i \leq i_{\max}$

a. Επιλέγεται το αρχικό διάνυσμα

$$\mathbf{q}_{t+\Delta t}^{i} = \mathbf{q}_{t}$$

b. Υπολογίζονται τα

$$\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i} = \mathbf{Q}_{t} + \mathbf{A}_{2}\mathbf{q}_{t+\Delta t}^{i} \quad ; \; \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^{i} = \dot{\mathbf{Q}}_{t} + \mathbf{B}_{2}\mathbf{q}_{t+\Delta t}^{i}$$

c. Υπολογίζεται το

$$\mathbf{q}_{t+\Delta t}^{*} = \mathbf{M}^{-1}[\mathbf{p}_{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{D}(\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^{i}) + \mathbf{M}\Lambda\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i} - \mathbf{f}_{S}(\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i})]$$

d. Ελέγχεται η σύγκλιση.

Ισχύει

$$\left|\mathbf{q}_{t+\Delta t}^{*} - \mathbf{q}_{t+\Delta t}^{i}\right| / \left|\mathbf{q}_{t+\Delta t}^{i}\right| < \varepsilon \; ;$$

Αν όχι τότε

$i = i + 1$ (έλεγξε αν $i > i_{\max}$ τότε όχι σύγκλιση)

$\mathbf{q}_{t+\Delta t}^{i} = \mathbf{q}_{t+\Delta t}^{*}$ πήγαινε στο βήμα **B2**

Αν ναι τότε $t = t + \Delta t$ και πήγαινε στο βήμα **B1**

6.3. Πρόγραμμα υπολογιστή για την επίλυση του στατικού προβλήματος (DYN3NL2BECON)

6.3.1. Η δομή του προγράμματος

Το πρόγραμμα DYN3NL2BECON έχει γραφεί σε γλώσσα προγραμματισμού FORTRAN για την επίλυση του προβλήματος συνοριακών και αρχικών τιμών που περιγράφεται από τις εξισώσεις (5.1), (2.18) και (2.25). Το πρόγραμμα χρησιμοποιεί σταθερά στοιχεία για την προσέγγιση των συνοριακών ολοκληρωμάτων.

Το πρόγραμμα χωρίζεται σε δύο ενότητες, στο κύριο πρόγραμμα (main program) και στα υποπρογράμματα (subroutines).

Κύριο πρόγραμμα (Main program)

Το κύριο πρόγραμμα καθορίζει τις μέγιστες διαστάσεις των μητρώων, τη τιμή της σταθεράς των προσεγγιστικών συναρτήσεων multiquadrics (βλ. Παράρτημα Β) και ανοίγει δύο αρχεία. Το αρχείο από το οποίο διαβάζει τα δεδομένα (Αρχείο Εισόδου/Input File) και το αρχείο στο οποίο γράφονται τα αποτελέσματα (Αρχείο Εξόδου/Output File). Τέλος καλεί την εκάστοτε ρουτίνα επίλυσης του μη γραμμικού συστήματος αρχικών τιμών.

Υποπρογράμματα (Subroutines).

Στη συνέχεια το κύριο πρόγραμμα καλεί τα ακόλουθα υποπρογράμματα

INPUT	Το υποπρόγραμμα αυτό διαβάζει τα δεδομένα από το αρχείο εισόδου.
GMATR	Το υποπρόγραμμα αυτό σχηματίζει το μητρώο $[G]$ που ορίζεται από τη σχέση (3.24b).
HMATR	Το υποπρόγραμμα αυτό σχηματίζει το μητρώο $[H]$ που ορίζεται από τη σχέση (3.24a).
UQMATR	Το υποπρόγραμμα αυτό σχηματίζει το μητρώο $[\hat{U}]$ που ορίζεται στην παράγραφο 3.2.
SMATR	Το υποπρόγραμμα αυτό σχηματίζει το μητρώο $[S]$ που ορίζεται από τη σχέση (3.33a).
UIN	Το υποπρόγραμμα αυτό σχηματίζει τα μητρώα $[D],[E]$ που ορίζονται από τις σχέσεις (3.37a) και (3.38a).
UXUY	Το υποπρόγραμμα αυτό σχηματίζει τα μητρώα $[D_x],[D_y],[E_x],[E_y]$ που ορίζονται από τις σχέσεις (3.37b), (3.37c), (3.38b), (3.38c) αντίστοιχα.
UXXUYYUXY	Το υποπρόγραμμα αυτό σχηματίζει τα μητρώα $[D_{xx}],[D_{xy}],[D_{yy}]$ και $[E_{xx}],[E_{xy}],[E_{yy}]$ που ορίζονται από τις σχέσεις (3.37d), (3.37e), (3.37f) και (3.38d), (3.38e), (3.38f) αντίστοιχα.

STRESSIN Το υποπρόγραμμα αυτό υπολογίζει τις μεμβρανικές δυνάμεις στα εσωτερικά κομβικά σημεία.

STRESSB Το υποπρόγραμμα αυτό υπολογίζει τις μεμβρανικές δυνάμεις στα κομβικά σημεία του συνόρου.

OUTPUT Το υποπρόγραμμα γράφει τα αποτελέσματα στο αρχείο εξόδου.

6.3.2. Το πρόγραμμα DYN3NL2BECON

Το πρόγραμμα αυτό είναι προσαρμογή του κώδικα που χρησιμοποιήθηκε για τη λήψη αριθμητικών αποτελεσμάτων στην εργασία (Katsikadelis, 2000).

Τα υποπρογράμματα που καλεί ο παρακάτω κώδικας είναι τα ίδια που που βρίσκονται στο πρόγραμμα 3NL2BECON του τετάρτου κεφαλαίου και είναι τα εξής

GMATR, HMATR, UQMATR, SMATR, UIN, UXUY, UXXUYYUXY, STRESSIN, STRESSB, OUTPUT

Η λίστα του προγράμματος έχει ως εξής

```
C=====================================================================
C
      PROGRAM DYN3NL2BECON
C
C
C  This program solves the dynamic system of (3) two-dimensional
C  (NL)inear (2)nd order partial differential equations using
C  the (B)oundary (E)lement method with (CON)stant boundary elements
C
      USE MSIMSL
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      CHARACTER*15 INPUTFILE,OUTPUTFILE
C
C  Set the maximum dimensions
C
      PARAMETER (N=100)
      PARAMETER (IN=49)
      COMMON C,EN,GG,EL,CC,TT
C
C  N= Number of boundary elelments equal to number of boundary
C     nodes
C  IN= Number of internal collocation points
C
      DIMENSION ICODE(N)
      DIMENSION XL(N+1),YL(N+1),XM(N),YM(N),G(N,N),H(N,N)
      DIMENSION A(2*N,2*N),T(IN),XIN(IN),YIN(IN)
      DIMENSION UB1(N),UB2(N),UB3(N),UNB1(N),UNB2(N),UNB3(N)
      DIMENSION UHAT(N,IN),QHAT(N,IN),UQ(N,IN)
      DIMENSION S1(2*N,IN+1),S2(2*N,IN+1),S3(2*N,IN+1)
      DIMENSION W1(IN,IN+1),W2(IN,IN+1),W3(IN,IN+1)
      DIMENSION WX1(IN,IN+1),WX2(IN,IN+1),WX3(IN,IN+1)
      DIMENSION WY1(IN,IN+1),WY2(IN,IN+1),WY3(IN,IN+1)
      DIMENSION WXX1(IN,IN+1),WXX2(IN,IN+1),WXX3(IN,IN+1)
      DIMENSION WYY1(IN,IN+1),WYY2(IN,IN+1),WYY3(IN,IN+1)
      DIMENSION WXY1(IN,IN+1),WXY2(IN,IN+1),WXY3(IN,IN+1)
      DIMENSION SNX(IN),SNY(IN),SNXY(IN),FK(IN)
      DIMENSION SXB(N),SYB(N),SXYB(N),TRN(N),TRT(N)
      DIMENSION SM(IN,IN),U0(IN),V0(IN),U1(IN),V1(IN),U(IN),V(IN)
     1            ,Q1(IN),Q2(IN),UBAR(IN),VBAR(IN),Q(IN),QDOT(IN),U2(IN)
     1            ,V2(IN),HELP(IN),RHELP(IN),SMINV(IN,IN),Q2STAR(IN)
      DIMENSION HELP1(IN),HELP3(IN,IN),XU(3*IN+3)
      DIMENSION W(3*IN,3*IN+3),WX(3*IN,3*IN+3),WY(3*IN,3*IN+3),
     *WXX(3*IN,3*IN+3),WYY(3*IN,3*IN+3),WXY(3*IN,3*IN+3),
     *UX(3*IN),UY(3*IN),UXX(3*IN),UYY(3*IN),UXY(3*IN)
C
      COMMON/FC/ XU,W1,W2,W3,WX1,WX2,WX3,WY1,WY2,WY3,WXX1,WXX2,WXX3,
     *               WYY1,WYY2,WYY3,WXY1,WXY2,WXY3

      C=1.
      EN=3.D0/10.D0
      GG=0.*0.24175824
      EL=110000.D0
      TT=0.002
      CC=EL*TT/(1.D0-EN**2)

C
C  Read the names and open the input and output files
```

```
C
      WRITE (*,'(A)')' Name of the INPUTFILE (max.15 characters)'
      READ  (*,'(A)') INPUTFILE
      WRITE (*,'(A)')' Name of the OUTPUTFILE (max.15 characters)'
      READ  (*,'(A)') OUTPUTFILE
      OPEN (UNIT=1, FILE=INPUTFILE)
      OPEN (UNIT=2, FILE=OUTPUTFILE)
C
C  Read data from INPUTFILE
C
      CALL INPUT (XL,YL,XIN,YIN,ICODE,UB1,UB2,UB3,U0,V0,N,IN)
C
      WRITE(*,*)('FFFFFF  1 FFFFF')
C  Compute the G matrix
C
      CALL GMATR (XL,YL,XM,YM,G,N)
C
      WRITE(*,*)('FFFFFF  2 FFFFF')

C  Compute the H matrix
C
      CALL HMATR (XL,YL,XM,YM,H,N)
C
      WRITE(*,*)('FFFFFF  3 FFFFF')

C  Compute the  matrices UHAT,QHAT,UQ=-(A1*UHAT+A2*QHAT)
C
      CALL UQMATR (XL,YL,XM,YM,XIN,YIN,
     1              UHAT,QHAT,UQ,ICODE,N,IN)
C
      WRITE(*,*)('FFFFFF  4 FFFFF')
C
C  Form the S matrix: U=SUP*a+UB, Un=SLOW*a+UNB
C
      CALL SMATR(G,H,A,UB1,UB2,UB3,S1,S2,S3,UQ,ICODE,N,IN)
C
      WRITE(*,*)('FFFFFF  5 FFFFF')
C
C  Compute the values of U at the internal points
C
      CALL UIN(XL,YL,XIN,YIN,S1,S2,S3,W1,W2,W3,N,IN)
C
      WRITE(*,*)('FFFFFF  6 FFFFF')
C
C  Compute the values of Ux and Uy at the internal points
C
      CALL UXUY(XL,YL,XIN,YIN,S1,S2,S3,WX1,WX2,WX3,WY1,WY2,WY3,N,IN)
C
      WRITE(*,*)('FFFFFF  7 FFFFF')

C  Compute the values of Uxx, Uyy and Uxy at the internal points
C
      CALL UXXUYYUXY(XL,YL,XIN,YIN,S1,S2,S3,
     1                WXX1,WXX2,WXX3,WYY1,WYY2,WYY3,WXY1,WXY2,WXY3,N,IN)
C
      WRITE(*,*)('FFFFFF  8 FFFFF')
C
```

```
C  The following program solves the non-linear equation
c  of motion for n degrees of freedom     by AEM
c
C
      DO 5 I=1,IN
      HELP1(I)=U0(I)-W3(I,IN+1)
      DO 5 J=1,IN
    5 HELP3(I,J)=W3(I,J)
C
      CALL DLINRG (IN,HELP3,IN,HELP3,IN)
      U0=MATMUL(HELP3,HELP1)
      V0=MATMUL(HELP3,V0)
C
C  Maximum Number of Iterations NMAX and time step DT
C
      NMAX = 1000
      AL=1.
      DT=0.01
      EPS = 0.0000001
      TL=50.
C
C  Form Mass Matrix SM(I)
C
      DO 100 I=1,IN
      DO 100 J=1,IN
  100 SM(I,J)=-10.*W3(I,J)
C
C  Initial Calculations
C
      SINDT=DSIN(AL*DT)
      COSDT=DCOS(AL*DT)
      A2=1./AL**2.*(1.-SINDT/AL/DT)
      A1=1./AL**2.*(-COSDT+SINDT/AL/DT)
      B2=1./AL**2./DT*(1.-COSDT)
      B1=1./AL*SINDT-1./DT*(1.-COSDT)
      TT=0.
C
      DO 1 I=1,IN
      U1(I)=U0(I)
      V1(I)=V0(I)
    1 CONTINUE
C
      DO 2 I=1,IN
      HELP(I) = 0.
      DO 2 J=1,IN
      HELP(I) = HELP(I)+AL*SM(I,J)*U1(J)
    2 CONTINUE
C
      CALL FNK(U1,FK)
      DO 4 I=1,IN
      CALL LOAD(I,TT,PLOAD)
      RHELP(I) = HELP(I)+PLOAD-FK(I)
    4 CONTINUE
C
      CALL DLINRG (IN,SM,IN,SMINV,IN)
      DO 110 I=1,IN
      HELP(I)=0.
```

```
      DO 110 J=1,IN
  110 HELP(I)=HELP(I)+SMINV(I,J)*RHELP(J)
C
      DO 7 I=1,IN
      Q1(I)=HELP(I)
    7 CONTINUE
C
C   for each time step
C
C   calculate at time T
C
  240 TT =TT+DT
      IF(TT.GT.TL) GOTO 460
      DO 8 I=1,IN
      UBAR(I) = U1(I)*COSDT+V1(I)*SINDT/AL
      VBAR(I) = -U1(I)*AL*SINDT+V1(I)*COSDT
      Q(I) = UBAR(I)+A1*Q1(I)
      QDOT(I) = VBAR(I)+B1*Q1(I)
    8 CONTINUE
C
C   Select Initial guess for Q2
C
      II=0
      DO 9 I=1,IN
      Q2(I) = Q1(I)
    9 CONTINUE
C ******************************************
C   ITERATE FOR DYNAMIC EQUILIBRIUM
C
  250 II=II+1
      IF(II.GT.NMAX) GOTO 450
C
      DO 10 I=1,IN
      U(I) = Q(I)+A2*Q2(I)
      V(I) = QDOT(I)+B2*Q2(I)
   10 CONTINUE
C
      DO 11 I=1,IN
      HELP(I) = 0.
      DO 11 J=1,IN
      HELP(I) = HELP(I)+AL*SM(I,J)*U(J)
   11 CONTINUE
C
      CALL FNK(U,FK)
      DO 12 I=1,IN
      CALL LOAD(I,TT,PLOAD)
      RHELP(I) = HELP(I)-FK(I)+PLOAD
   12 CONTINUE
      DO 120 I=1,IN
      HELP(I)=0.
      DO 120 J=1,IN
  120 HELP(I)=HELP(I)+SMINV(I,J)*RHELP(J)
C
      DO 334 I=1,IN
      Q2STAR(I)=HELP(I)
  334 CONTINUE
C
```

```
C     write (2,*) TT,Q2STAR(25)
      BIGDIF=0.
      DO 14 I=1,IN
      DIF = ABS(Q2STAR(I)-Q2(I))
      IF(DIF.GT.BIGDIF) BIGDIF = DIF
   14 CONTINUE
      IF (BIGDIF.LT.EPS) GOTO 410
C
      DO 15 I=1,IN
      Q2(I)=Q2STAR(I)
   15 CONTINUE
      GOTO 250
C
C
C ******************************************
  410 DO 16 I=1,IN
      Q2(I)=Q2STAR(I)
      U2(I)=Q(I)+A2*Q2STAR(I)
      V2(I)=QDOT(I)+B2*Q2STAR(I)
   16 CONTINUE
C
      DO 18 I=1,IN
      Q1(I)=Q2(I)
      U1(I)=U2(I)
      V1(I)=V2(I)
C     A3(I)=U2(I)
   18 CONTINUE
C
      DO 20 J=1,3*IN+3
      W(I,J)=0.
      WX(I,J)=0.
      WY(I,J)=0.
      WXX(I,J)=0.
      WYY(I,J)=0.
   20 WXY(I,J)=0.
C
      DO 30 I=1,IN
      DO 30 J=1,IN+1
      W(I,J)=W1(I,J)
      W(IN+I,IN+1+J)=W2(I,J)
      W(2*IN+I,2*IN+2+J)=W3(I,J)

      WX(I,J)=WX1(I,J)
      WX(IN+I,IN+1+J)=WX2(I,J)
      WX(2*IN+I,2*IN+2+J)=WX3(I,J)

      WY(I,J)=WY1(I,J)
      WY(IN+I,IN+1+J)=WY2(I,J)
      WY(2*IN+I,2*IN+2+J)=WY3(I,J)

      WXX(I,J)=WXX1(I,J)
      WXX(IN+I,IN+1+J)=WXX2(I,J)
      WXX(2*IN+I,2*IN+2+J)=WXX3(I,J)

      WYY(I,J)=WYY1(I,J)
      WYY(IN+I,IN+1+J)=WYY2(I,J)
      WYY(2*IN+I,2*IN+2+J)=WYY3(I,J)
```

```
      WXY(I,J)=WXY1(I,J)
      WXY(IN+I,IN+1+J)=WXY2(I,J)
   30 WXY(2*IN+I,2*IN+2+J)=WXY3(I,J)
C
      UX=MATMUL(WX,XU)
      UY=MATMUL(WY,XU)
      UXX=MATMUL(WXX,XU)
      UYY=MATMUL(WYY,XU)
      UXY=MATMUL(WXY,XU)
C
      DO 55 I=1,N
      DO 55 J=1,IN
      S1(I,J)=S1(I,J)+UHAT(I,J)
      S2(I,J)=S2(I,J)+UHAT(I,J)
      S3(I,J)=S3(I,J)+UHAT(I,J)
      S1(I+N,J)=S1(I+N,J)+QHAT(I,J)
      S2(I+N,J)=S2(I+N,J)+QHAT(I,J)
   55 S3(I+N,J)=S3(I+N,J)+QHAT(I,J)
C
      DO 56 I=1,IN
      X(I)=XU(I)
      X(I+IN)=XU(IN+1+I)
   56 X(I+2*IN)=XU(2*IN+2+I)
      DO 57 I=1,IN
   57 WRITE(2,*) X(I+2*IN)
C
      DO 60 I=1,N
      SUMUB1=0.
      SUMUB2=0.
      SUMUB3=0.
      SUMUNB1=0.
      SUMUNB2=0.
      SUMUNB3=0.
         DO 65 K=1,IN
         SUMUB1=SUMUB1+S1(I,K)*X(K)
         SUMUB2=SUMUB2+S2(I,K)*X(K+IN)
         SUMUB3=SUMUB3+S3(I,K)*X(K+2*IN)
         SUMUNB1=SUMUNB1+S1(I+N,K)*X(K)
         SUMUNB2=SUMUNB2+S2(I+N,K)*X(K+IN)
   65    SUMUNB3=SUMUNB3+S3(I+N,K)*X(K+2*IN)
      UB1(I)=SUMUB1+S1(I,IN+1)
      UB2(I)=SUMUB2+S2(I,IN+1)
      UB3(I)=SUMUB3+S3(I,IN+1)
      UNB1(I)=SUMUNB1+S1(I+N,IN+1)
      UNB2(I)=SUMUNB2+S2(I+N,IN+1)
   60 UNB3(I)=SUMUNB3+S3(I+N,IN+1)
C
C=================================================================
C
C  Compute the values of the stresses     at the internal points
C
      CALL STRESSIN(TT,UX,UY,SNX,SNY,SNXY,IN)
      WRITE(*,*)('END OF STRESSIN')
C
C  Compute the values of the boundary stresses
C
```

```
      CALL STRESSB(TT,XL,YL,UB1,UB2,UB3,UNB1,UNB2,UNB3,TRN,TRT,
      1                          SXB,SYB,SXYB,N)
      WRITE(*,*)('END OF STRESSB')
C
C  Print the results in the OUTPUTFILE
C
      CALL OUTPUT(tt,XM,YM,UB1,UB2,UB3,UNB1,UNB2,UNB3,XIN,YIN,U,
     1UX,UY,UXX,UYY,UXY,SNX,SNY,SNXY,SXB,SYB,SXYB,TRN,TRT,N,IN)
      WRITE(*,*)('END OF OUTPUT')
C
C  Close input and output files
C
C
      GOTO 240
  450 WRITE(*,*)('NO CONVERGENCE')
  460 CLOSE(1)
      CLOSE(2)
      STOP
      END
C
C
C=================================================================
C
      SUBROUTINE INPUT (XL,YL,XIN,YIN,ICODE,UB1,UB2,UB3,U0,V0,N,IN)
C
C
C  This subroutine reads the input data from the input file
C  and writes them in the output file
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      CHARACTER*80 NAME,TITLE
      DIMENSION XL(N+1),YL(N+1),XIN(IN),YIN(IN)
      DIMENSION ICODE(N),UB1(N),UB2(N),UB3(N)
      DIMENSION U0(IN),V0(IN)
C
      WRITE(2,100)
  100 FORMAT(' ',79('*'))
C
C  Read user's name
C
      READ(1,'(A)')NAME
C
      WRITE(2,'(A)')NAME
C
C  Read the title of the program
C
      READ(1,'(A)')TITLE
C
      WRITE(2,'(A)')TITLE
C
      WRITE(2,200)N,IN
  200 FORMAT(//'BASIC PARAMETERS'//2X,'NUMBER OF BOUNDARY ELEMENTS='
     1,I4/2X,'NUMBER OF INTERNAL COLLOCATION POINTS =',I5)
C
C  Read the coordinates of the extreme points of the boundary elements
XL,YL
C
```

```
      READ(1,*) (XL(I),YL(I),I=1,N)
C
C  Write the coordinates in the output file
C
      WRITE(2,300)
  300 FORMAT(//2X,'COORDINATES OF THE EXTREME POINTS OF THE BOUNDARY ELE
     1MENTS',//2X,'POINT',9X,'XL',15X,'YL')
      DO 20 I=1,N
   20 WRITE(2,400) I,XL(I),YL(I)
  400 FORMAT(2X,I3,2(3X,E14.5))
C
C  Read the boundary conditions and store in UB(I). If ICODE(I)=0 the value
C  UB(I), is  the prescribed value of u. If ICODE(I)=1 the normal
derivative
C  un is prescribed.
C
      READ(1,*) (ICODE(I),UB1(I),I=1,N)
      READ(1,*) (UB2(I),UB3(I),I=1,N)
      READ(1,*) (U0(I),V0(I),I=1,IN)
C
C  Write the boundary conditions in the output file
C
      WRITE(2,500)
  500 FORMAT(//2X,'BOUNDARY CONDITIONS'//2X,'NODE',6X,'ICODE',
     1 7X,'PRESCRIBED VALUE')
      DO 30 I=1,N
   30 WRITE(2,600) I,ICODE(I),UB1(I)
      DO 31 I=1,N
   31 WRITE(2,600) I,ICODE(I),UB2(I)
      DO 32 I=1,N
   32 WRITE(2,600) I,ICODE(I),UB3(I)
  600 FORMAT (2X,I3,9X,I1,8X,E14.5)
C
C  Read the coordinates of the internal points
C
      READ(1,*) (XIN(I),YIN(I),I=1,IN)
C
      RETURN
      END
C
C
C=================================================================
C
```

6.4. Παραδείγματα

Οι προσεγγιστικές συναρτήσεις f_j που χρησιμοποιήθηκαν, για τη λήψη αριθμητικών αποτελεσμάτων, ήταν τα multiquadrics (βλ. Παράρτημα Β) που ορίζονται ως εξής

$$f_j = \sqrt{r^2 + c^2}$$

όπου c αυθαίρετη σταθερά κατάλληλα επιλεγμένη και

$$r = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} \qquad j = 1,2,...M$$

όπου x_j, y_j οι συντεταγμένες των M εσωτερικών κομβικών σημείων μέσα στο Ω.

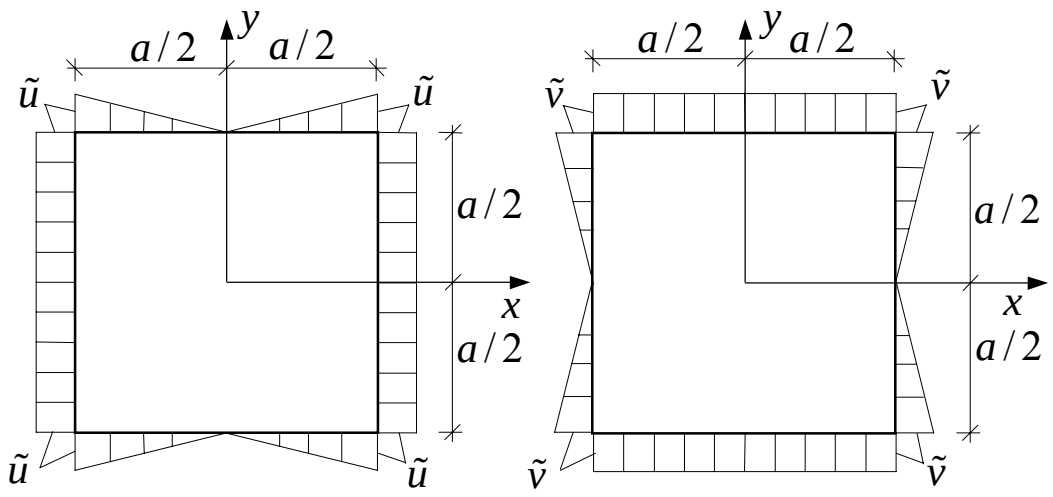
6.4.1. Μη ομογενής τετραγωνική μεμβράνη

Μία μη ομογενής ισότροπη ($\lambda = 1$) τετραγωνική μεμβράνη, η οποία προεντείνετε όπως στο Σχ. 6.1, αναλύθηκε χρησιμοποιώντας $N = 100$ συνοριακά σταθερά στοιχεία και $M = 49$ εσωτερικά κομβικά σημεία. Η μη ομογένεια προκύπτει από τη μεταβολή του πάχους της μεμβράνης. Τα δεδομένα είναι $a = 5.0m$, $\rho = 7850kgr/m^3$, $g_0 = 1kN/m^2$, $E_1 = E_2 = E = 110000kN/m^2$ και $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$. Τρεις περιπτώσεις διαφορετικής κατανομής του πάχους εξετάστηκαν (i) $h = h_0[1 + 7r^2/a^2]$ (ii) $h = 13h_0/6$ και (iii) $h = h_0[12 - 7r^2/a^2]/5$, όπου $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ και $h_0 = 0.0005m$. Σε όλες τις περιπτώσεις ο όγκος V του χρησιμοποιούμενου υλικού παρέμεινε αμετάβλητος και ίσος με $V = 13h_0a^2/6$.

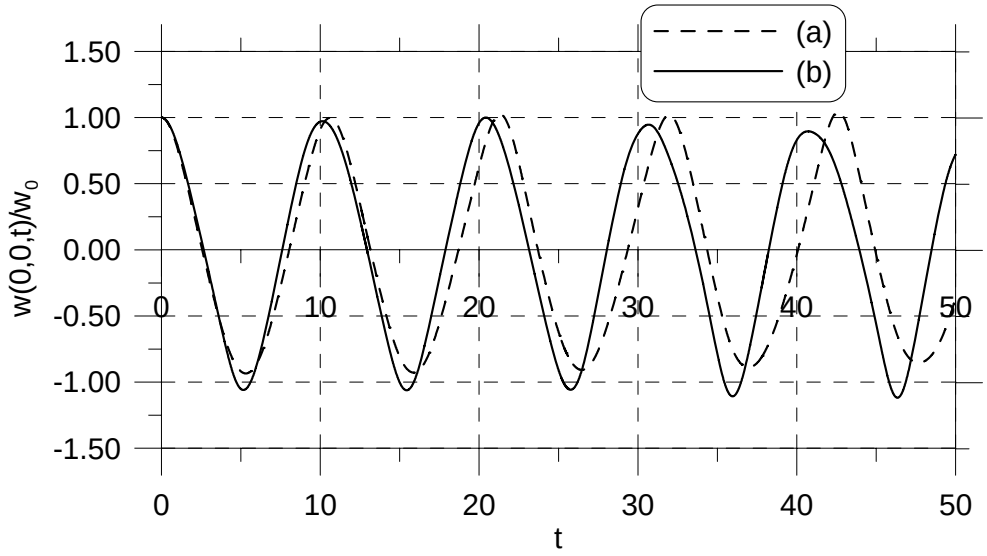
Τα αποτελέσματα για τις ελεύθερες ταλαντώσεις και των τριών περιπτώσεων, για τιμή προέντασης $\tilde{u} = \tilde{v} = 0.02m$, παρουσιάζονται στα Σχήματα 6.2, 6.3 και 6.4 για (a): $w(x,y,0) = w_0 \sin(\pi x/a)\sin(\pi y/a)$ όπου $w_0 = 0.545m$, $w_0 = 0.437m$, $w_0 = 0.424m$ αντίστοιχα και $\dot{w}(x,y,0) = 0$ (b): $w(x,y,0) =$ επιφάνεια της βύθισης λόγω του κατανεμημένου φορτίου g_0 και $\dot{w}(x,y,0) = 0$. Η μεταβολή του λόγου T/T_0 όπου T η

περίοδος της μεμβράνης και T_0 η περίοδος στη γραμμικώς ελεύθερη ταλάντωση, συναρτήσει της μέγιστης βύθισης για την περίπτωση (a) παρουσιάζεται στο Σχ. 6.5. Όπως μπορεί κάποιος να παρατηρήσει, η μεταβολή της περιόδου είναι η ίδια και για τις τρεις περιπτώσεις διαφορετικής κατανομής του πάχους. Δηλαδή η συμπεριφορά του συστήματος δεν εξαρτάται από τον τρόπο κατανομής της μάζας του.

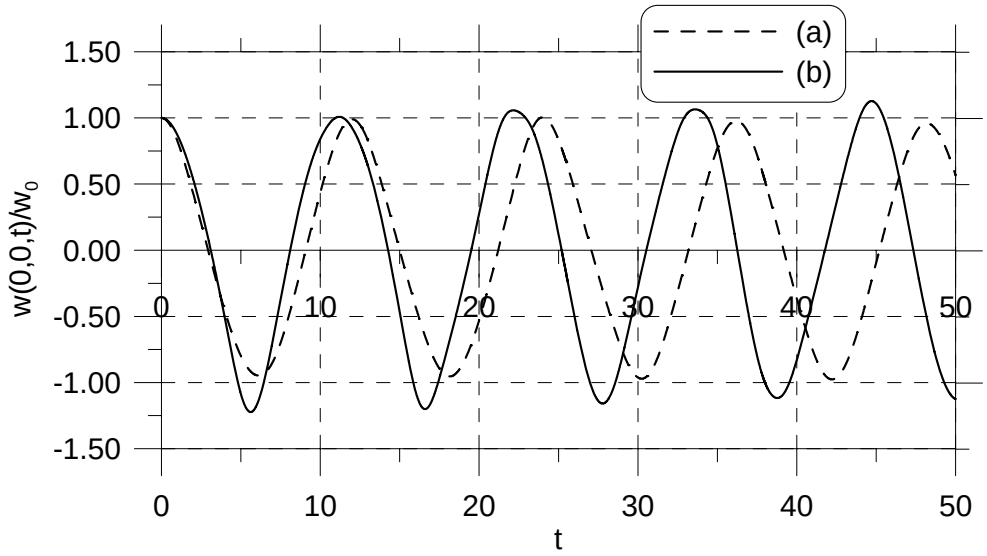
Τέλος στο Σχ. 6.6 μελετάται η επιρροή της προεντάσεως στην ιδιοπερίοδο T για τιμές της (α) $\tilde{u} = \tilde{v} = 0.01m$, (β) $\tilde{u} = \tilde{v} = 0.02m$, (γ) $\tilde{u} = \tilde{v} = 0.03m$ και (δ) $\tilde{u} = \tilde{v} = 0.04m$ συναρτήσει της μέγιστης βύθισης, για την περίπτωση αρχικής επιφάνειας $w(x,y,0) = w_0 \sin(\pi x / a)\sin(\pi y / a)$ και $\dot{w}(x,y,0) = 0$.



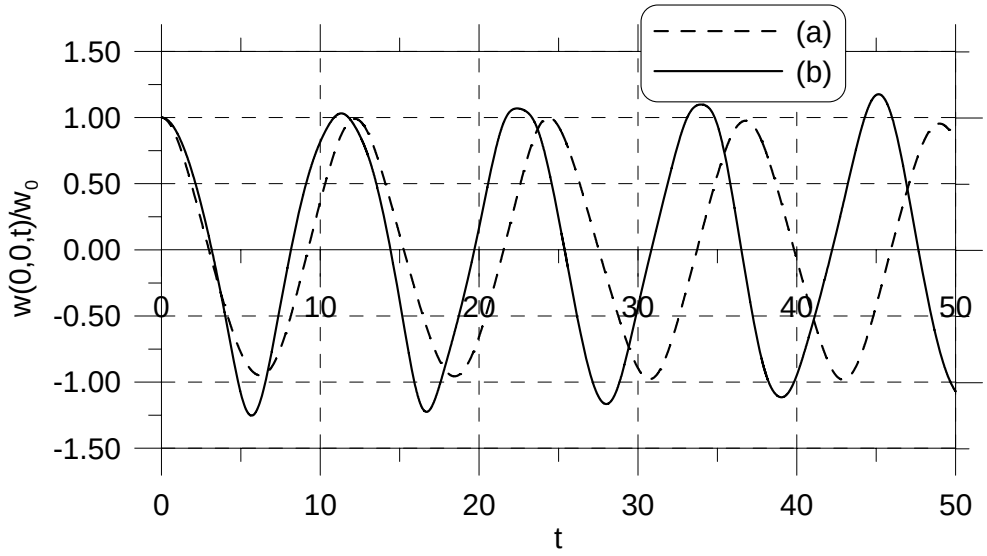
Σχ. 6.1. Προένταση μεμβράνης με επιβαλλόμενες συνοριακές μετατοπίσεις στη μεμβράνη του παραδείγματος *6.4.1.* Η παραγόμενη ένταση δίδει με καλή ακρίβεια $N_x = N_y$, $N_{xy} = 0$



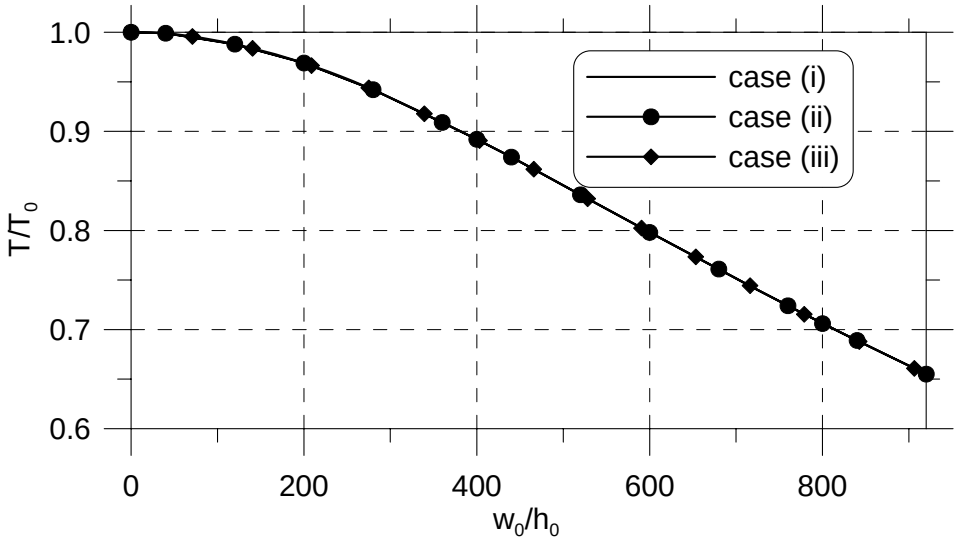
Σχ. 6.2. Χρονική εξέλιξη της βύθισης στο κέντρο της τετραγωνικής μεμβράνης του παραδείγματος *6.4.1.*, περίπτωση (i).



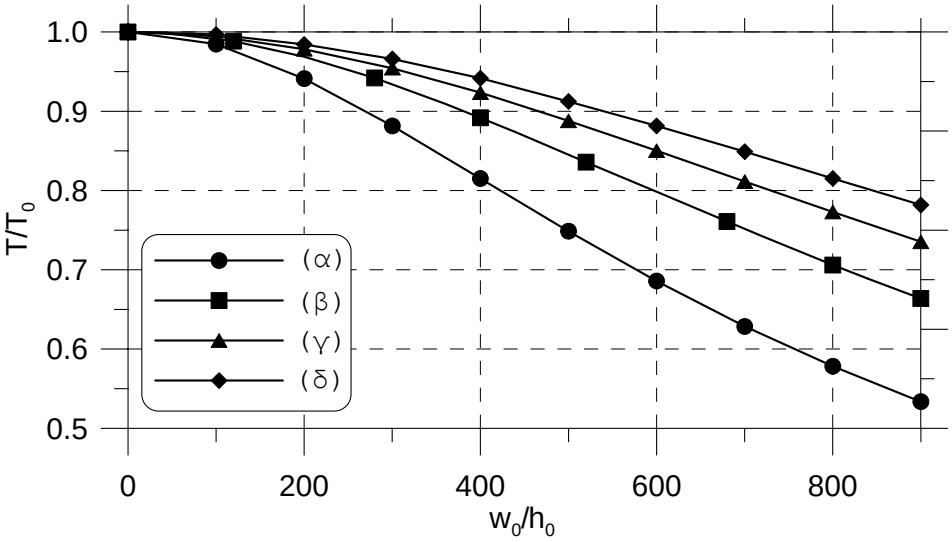
Σχ. 6.3. Χρονική εξέλιξη της βύθισης στο κέντρο της τετραγωνικής μεμβράνης του παραδείγματος *6.4.1.*, περίπτωση (ii).



Σχ. 6.4. Χρονική εξέλιξη της βύθισης στο κέντρο της τετραγωνικής μεμβράνης του παραδείγματος *6.4.1.*, περίπτωση (iii).



Σχ. 6.5. Μεταβολή της περιόδου συναρτήσει της μέγιστης βύθισης στη τετραγωνική μεμβράνη του παραδείγματος *6.4.1.*



Σχ. 6.6. Μεταβολή της περιόδου συναρτήσει του μέγιστου βέλους στη τετραγωνική μεμβράνη του παραδείγματος *6.4.1.*, για διάφορες τιμές της προεντάσεως.

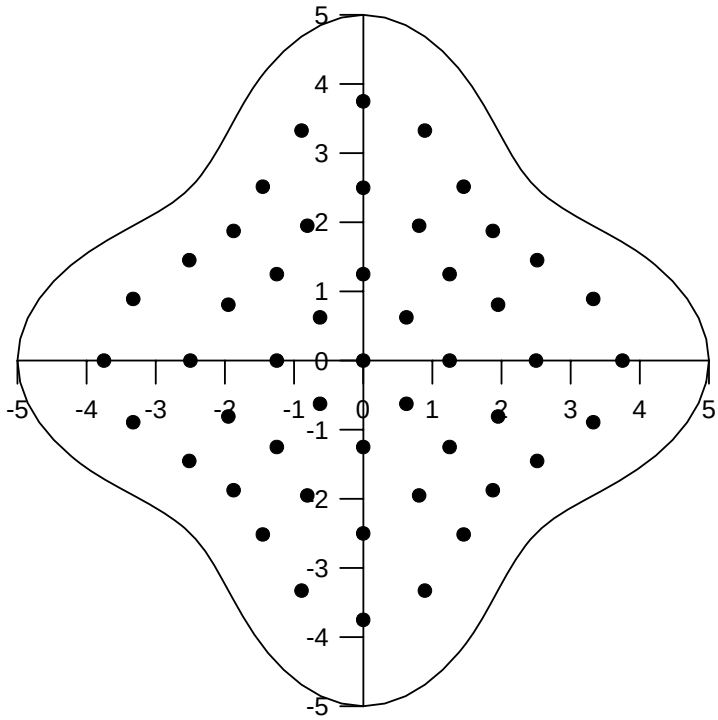
6.4.2. Μεμβράνη τυχαίου σχήματος

Στο παράδειγμα αυτό η μη ομογενής ορθότροπη μεμβράνη τυχαίου σχήματος (Σχ. 6.7) αναλύθηκε χρησιμοποιώντας $N = 100$ συνοριακά σταθερά στοιχεία και $M = 49$ εσωτερικά κομβικά σημεία. Το σύνορο της μεμβράνης ορίζεται από την καμπύλη $r = a(|\sin\theta|^3 + |\cos\theta|^3)$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Η μεμβράνη προεντάθηκε με $u_n = 0.04m$ κατά την κάθετη διεύθυνση στο σύνορο και $u_t = 0$ κατά την εφαπτομενική διεύθυνση. Τα δεδομένα είναι $a = 5.0m$, $\rho = 5000kgr/m^3$, $h = 0.002m$, $E_1 = E/\sqrt{\lambda}$, $E_2 = E\sqrt{\lambda}$, $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = \lambda\nu_1$ και $G = E/2(1+\nu_1\sqrt{\lambda})$ όπου $E = 110000 + kr^2$, $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ και k μία σταθερά.

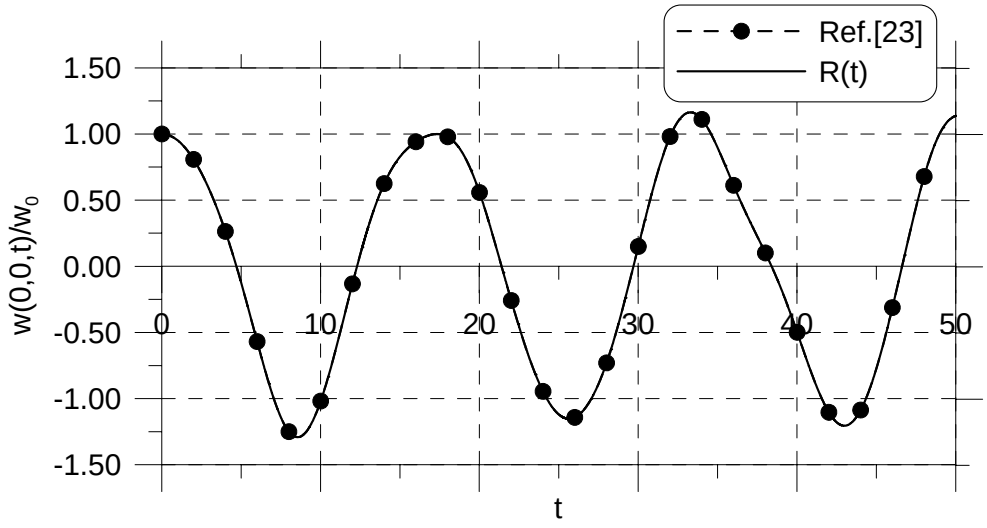
Στο Σχήμα 6.8 γίνεται σύγκριση με τη λύση του προβλήματος της ομογενούς και ισότροπης μεμβράνης (Katsikadelis, 2000) για ελεύθερες ταλαντώσεις με αρχικές συνθήκες, $w(x,y,0) =$ επιφάνεια της βύθισης λόγω του κατανεμημένου φορτίου $g_0 = 0.242kN/m^2$ και $\dot{w}(x,y,0) = 0$.

Τα αποτελέσματα για ελεύθερες ταλαντώσεις με αρχικές συνθήκες, $w(x,y,0) =$ επιφάνεια της βύθισης λόγω του κατανεμημένου φορτίου $g_0 = 3kN/m^2$ και $\dot{w}(x,y,0) = 0$, για διάφορες τιμές των k, λ παρουσιάζονται στα Σχήματα 6.9 και 6.10.

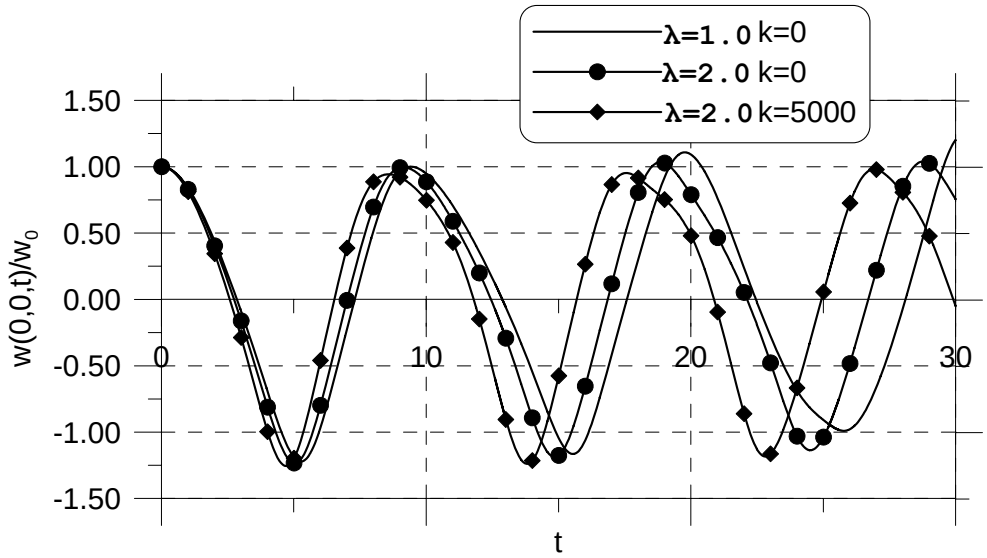
Επιπλέον, εξαναγκασμένες ταλαντώσεις, με μηδενικές αρχικές συνθήκες, έχουν μελετηθεί για το αποκαλούμενο 'στατικό' φορτίο $g = g_0 t / t_1$ για $0 \le t \le t_1$ και $g = g_0$ για $t_1 \le t$ ($t_1 = 10\,\mathrm{sec}$). Τα αποτελέσματα για διάφορες τιμές των k, λ παρουσιάζονται στα Σχήματα 6.11 ως 6.13.



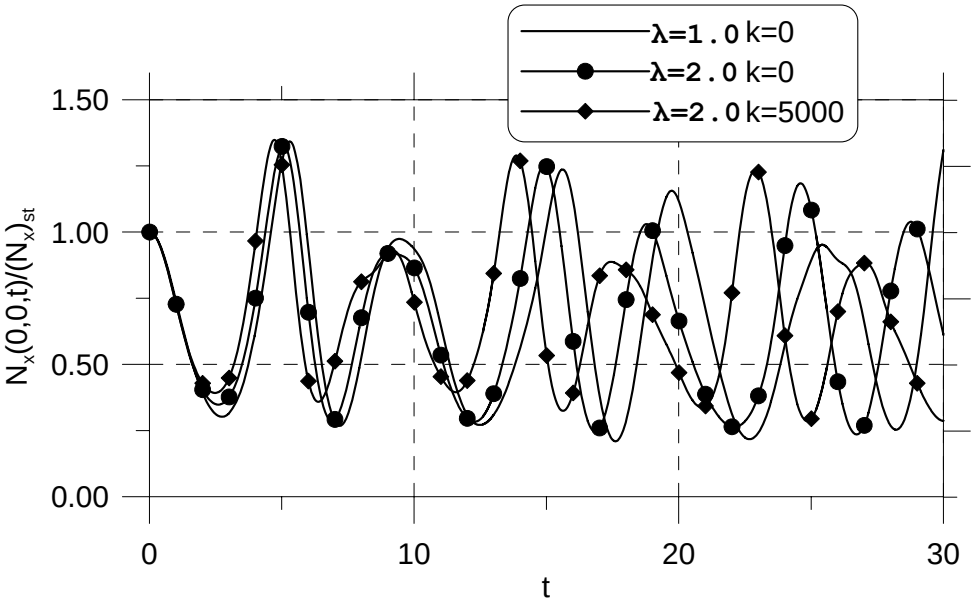
Σχ. 6.7. Μεμβράνη τυχαίου σχήματος και κατανομή των εσωτερικών κομβικών σημείων



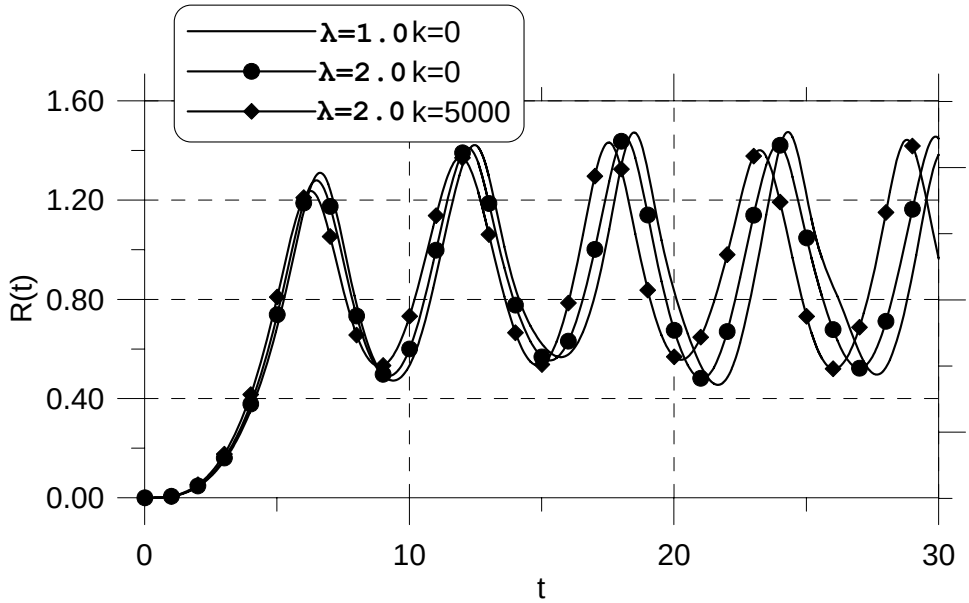
Σχ. 6.8. Χρονική εξέλιξη της βύθισης στο κέντρο της μεμβράνης τυχαίου σχήματος, του παραδείγματος *6.4.2.*



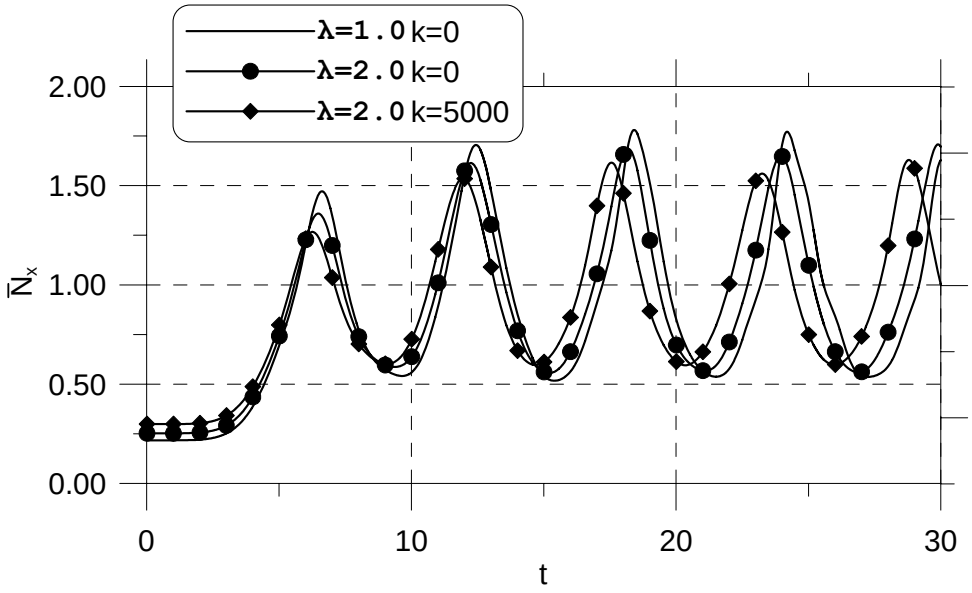
Σχ. 6.9. Χρονική εξέλιξη της βύθισης στο κέντρο της μεμβράνης τυχαίου σχήματος, του παραδείγματος *6.4.2.* για διάφορες τιμές του λ και k, w_0 = μέγιστη βύθιση σε κάθε περίπτωση



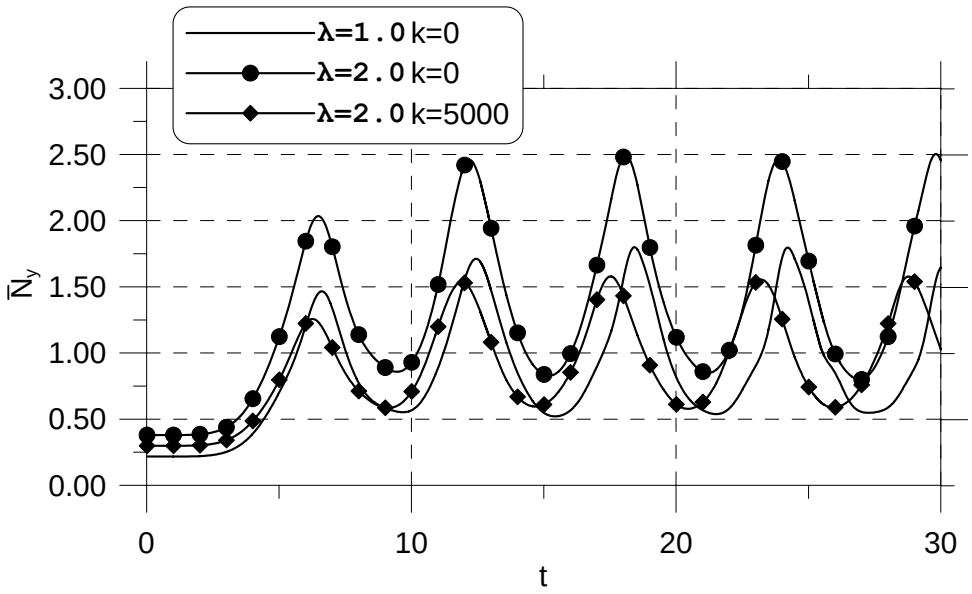
Σχ. 6.10. Χρονική εξέλιξη της μεβρανικής δύναμης N_x στο κέντρο της μεμβράνης τυχαίου σχήματος, του παραδείγματος *6.4.2.* για διάφορες τιμές του λ και k, $(N_x)_{st}$ = τιμή της N_x σε κάθε περίπτωση



Σχ. 6.11. Χρονική εξέλιξη του λόγου απόκρισης $R(t) = w(0,0,t)\,/\,w_{st}$ για εξαναγκασμένη ταλάντωση, στο κέντρο της μεμβράνης τυχαίου σχήματος, του παραδείγματος *6.4.2.* για διάφορες τιμές του λ και k, w_{st} = μέγιστη βύθιση σε κάθε περίπτωση



Σχ. 6.12. Χρονική εξέλιξη του λόγου απόκρισης $\bar{N}_x = N_x(0,0,t)/(N_x)_{st}$ για εξαναγκασμένη ταλάντωση, στο κέντρο της μεμβράνης τυχαίου σχήματος, του παραδείγματος *6.4.2.* για διάφορες τιμές του λ και k, $(N_x)_{st}$= τιμή της N_x σε κάθε περίπτωση



Σχ. 6.13. Χρονική εξέλιξη του λόγου απόκρισης $\bar{N}_y = N_y(0,0,t)/(N_y)_{st}$ για εξαναγκασμένη ταλάντωση, στο κέντρο της μεμβράνης τυχαίου σχήματος, του παραδείγματος *6.4.2.* για διάφορες τιμές του λ και k, $(N_y)_{st}$= τιμή της N_y σε κάθε περίπτωση

6.5. Συμπεράσματα

Στη διπλωματική αυτή εργασία παρουσιάστηκε μία καθαρά συνοριακή μέθοδος για την στατική και δυναμική ανάλυση ανισότροπων και μη ομογενών επίπεδων μεμβρανών που υπόκεινται σε μεγάλες παραμορφώσεις. Η μέθοδος βασίζεται στην έννοια της αναλογικής εξισώσεως. Σύμφωνα με την παρούσα ανάλυση και τα αριθμητικά αποτελέσματα των παραδειγμάτων, εξάγονται τα παρακάτω συμπεράσματα

- ✓ Η μέθοδος ως καθαρά συνοριακή έχει όλα τα πλεονεκτήματα της ΒΕΜ, π.χ. η διακριτοποίηση και η ολοκλήρωση περιορίζονται μόνο στο σύνορο, η ετοιμασία των δεδομένων είναι εύκολη αφού αποφεύγεται η πεδιακή διακριτοποίηση.

- ✓ Η αριθμητική υλοποίηση της μεθόδου επιτρέπει το ίδιο πρόγραμμα Η/Υ να χρησιμοποιείται για την επίλυση μη γραμμικών (ή γραμμικών) στατικών και δυναμικών προβλημάτων 2ας τάξεως με μικρές αλλαγές.

- ✓ Οι μετατοπίσεις και οι μεμβρανικές δυνάμεις υπολογίζονται σε οποιοδήποτε σημείο του χωρίου χρησιμοποιώντας τις ολοκληρωτικές τους εκφράσεις ως μαθηματικές σχέσεις.

- ✓ Ακριβή αποτελέσματα λαμβάνονται για τις μετατοπίσεις καθώς και για τις μεμβρανικές δυνάμεις, με λίγα κομβικά σημεία στο χωρίο.

- ✓ Η Μέθοδος της Αναλογικής Εξισώσεως καθιστά τη ΒΕΜ μία αριθμητική μέθοδο ικάνη για την επίλυση δύσκολων μη γραμμικών προβλημάτων της επιστήμης του μηχανικού.

A

Παράρτημα

Α.1. Εισαγωγή

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζονται βασικά στοιχεία της άμεσης Μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων (ΒΕΜ) που χρησιμοποιούνται στην ανάπτυξη της παρούσας εργασίας και θεωρούνται απραίτητα για τους μη εξοικειωμένους με τη μέθοδο. Για λεπτομερή ανάπτυξη της μεθόδου ο αναγνώστης παραπέμπεται στο σύγγραμα (Κατσικαδέλης, 2000).

Α.2. Η άμεση ΒΕΜ για την εξίσωση Laplace

Έστω ότι ζητούμε τη λύση της εξισώσεως Laplace

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{στο} \quad \Omega \tag{A.1}$$

με μικτές συνοριακές συνθήκες (βλ. Σχ. Α.1)

$$u = \tilde{u} \qquad \text{στο} \quad \Gamma_1 \tag{A.2a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \tilde{u}_n \quad \text{στο} \quad \Gamma_2 \tag{A.2b}$$

Η συνθήκη (Α.2a) αναφέρεται στη βιβλιογραφία και ως **ουσιώδης** ή **κινηματική** ενώ η (Α.2b) ως **φυσική**.

Μια ιδιόμορφη μερική λύση της εξισώσεως

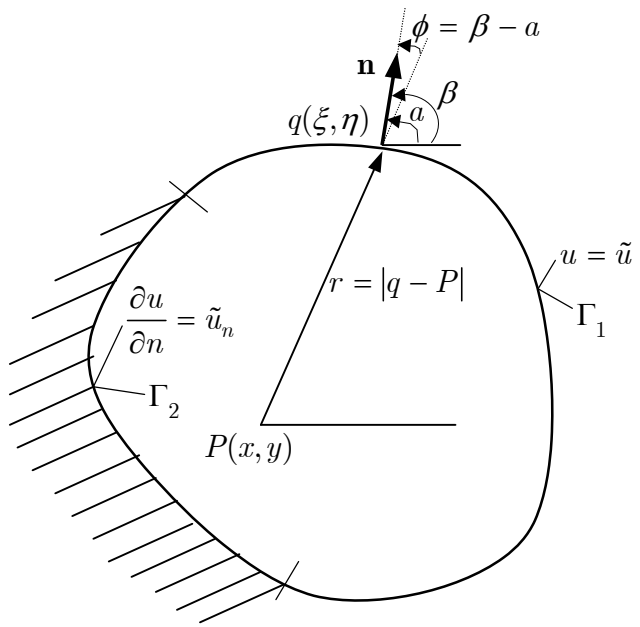
$$\nabla^2 v = \delta(Q - P) \tag{A.3}$$

ονομάζεται **θεμελιώδης** λύση της εξισώσεως (Α.1) και δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$v = \frac{1}{2\pi} \ln r \tag{A.4}$$

όπου

$$r = |Q - P| = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} \tag{A.5}$$



Σχ. Α.1 Χωρίο Ω με μικτές συνοριακές συνθήκες

Εφαρμόζοντας την εξίσωση Green

$$\int_\Omega (v\nabla^2 u - u\nabla^2 v)d\Omega = \int_\Gamma (v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n})d\Gamma \tag{A.6}$$

για τις συναρτήσεις u και v που ικανοποιούν, αντιστοίχως, τις εξισώσεις (Α.1) και (Α.3) και θεωρώντας ως πηγή το σημείο P έχουμε

$$-\int_\Omega u(Q)\delta(Q-P)d\Omega_Q = \int_\Gamma [v(q,P)\frac{\partial u(q)}{\partial n_q} - u(q)\frac{\partial v(q,P)}{\partial n_q})ds_q \tag{A.7}$$

με $P, Q \in \Omega$, $q \in \Gamma$. Έαν παραλείψουμε τους δείκτες και τα σημεία χάριν απλότητας των εκφράσεων η εξίσωση (Α.7) γράφεται

$$u(P) = -\int_\Gamma (v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n})ds \tag{A.8}$$

όπου οι συναρτήσεις v και $\frac{\partial v}{\partial n}$ είναι γνωστές και δίδονται, η μεν πρώτη από την εξίσωση (Α.4), και η δεύτερη ως

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{1}{2\pi r}\cos\phi \tag{A.9}$$

με $r = |q - P|$ και ϕ γωνία $(r, \mathbf{n})$ (Βλ. Σχ. Α.1)

Επομένως η σχέση (Α.8) μας δίδει τη λύση της εξισώσεως (Α.1) συναρτήσει των τιμών της και της καθέτου παραγώγου της πάνω στο σύνορο. Η σχέση (Α.8) ονομάζεται **ολοκληρωτική παράσταση** της λύσεως. Από τις συνοριακές συνθήκες (Α.2a) και (Α.2b) είναι φανερό ότι σ' ένα σημείο $q : \{\xi, \eta\}$ του συνόρου Γ δίδεται μόνο ένα από τα μεγέθη u ή $\frac{\partial u}{\partial n}$. Συνεπώς δεν είναι δυνατό να προσδιορίσουμε τη λύση από την ολοκληρωτική παράσταση (Α.8). Για τον λόγο αυτό θα υπολογίσουμε τα συνοριακά μεγέθη που δε δίνονται από τις συνοριακές συνθήκες, διατυπώνοντας τη σχέση (Α.8) και για τα σημεία του συνόρου, εργαζόμενοι όπως παρουσιάζεται στο (Κατσικαδέλης, 2000).

Τελικά καταλήγουμε στη **συνοριακή ολοκληρωτική παράσταση** της λύσεως

$$\frac{a}{2\pi}u(p) = -\int_{\Gamma}(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n})ds \tag{A.10}$$

η οποία αποτελεί σχέση συμβιβαστού μεταξύ των συνοριακών τιμών της u και $\frac{\partial u}{\partial n}$. Τούτο σημαίνει ότι σε κάθε σημείο του συνόρου μόνο μία από τις ποσότητες u και $\frac{\partial u}{\partial n}$ μπορεί να καθορίζεται.

Για σημεία p, στα οποία το σύνορο είναι λείο, είναι $a = \pi$ και η (Α.10) γίνεται

$$\frac{1}{2}u(p) = -\int_{\Gamma}(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n})ds \tag{A.11}$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (Α.8) και (Α.10) παρατηρούμε ότι όταν το σημείο $P \in \Omega$ τείνει σ' ένα σημείο $p \in \Gamma$, η συνάρτηση u είναι ασυνεχής και παρουσιάζει ένα πήδημα ίσο με $(1 - \frac{a}{2\pi})$ ή $\frac{1}{2}$ κατά περίπτωση (Α.10) ή (Α.11).

Για σημεία P που βρίσκονται στο εξωτερικό του χωρίου Ω, η ταυτότητα Green (Α.6), όταν εφαρμόζεται για συναρτήσεις u και v προφανώς δίνει

$$0 = -\int_{\Gamma} (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) ds \tag{A.12}$$

Οι σχέσεις (Α.8), (Α.11) και (Α.12) γράφονται υπό την γενική μορφή

$$\varepsilon(P) u = -\int_{\Gamma} (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) ds \tag{A.13}$$

όπου $\varepsilon(P)$ είναι συντελεστής εξαρτώμενος από το σημείο P και λαμβάνει τις τιμές

$\varepsilon(P) = 1$ όταν το P είναι στο εσωτερικό του Ω

$\varepsilon(P) = 1/2$ όταν το $P \equiv p$ είναι πάνω στο σύνορο Γ

$\varepsilon(P) = 0$ όταν το P είναι στο εξωτερικό του Ω

Α.3. Παράγωγοι της r

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται οι παράγωγοι της ακτίνας (Α.5) (Κατσικαδέλης, 2000), οι οποίες διευκολύνουν τις παραγωγίσεις των πυρήνων των ολοκληρωτικών εξισώσεων.

Από το Σχήμα Α.1 έχουμε

$$\cos a = \frac{\xi - x}{r} \tag{A.14}$$

$$\sin a = \frac{\eta - y}{r} \tag{A.15}$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (Α.5) λαμβάνουμε

$$r_x = -r_\xi = -\frac{\xi - x}{r} = -\cos a \tag{A.16}$$

$$r_y = -r_\eta = -\frac{\eta - y}{r} = -\sin a \tag{A.17}$$

$$\begin{aligned} r_n &= r_\xi \cos\beta + r_\eta \sin\beta \\ &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ &= \cos(\beta - \alpha) \\ &= \cos\phi \end{aligned} \tag{A.18}$$

$$\begin{aligned} r_t &= -r_\xi \sin\beta + r_\eta \cos\beta \\ &= -\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \\ &= -\sin(\beta - \alpha) \\ &= -\sin\phi \end{aligned} \tag{A.19}$$

$$\begin{aligned} r_{xx} &= -\left(\frac{\xi - x}{r}\right)_x \\ &= -\frac{(\xi - x)_x r - (\xi - x) r_x}{r^2} \\ &= \frac{(\eta - y)^2}{r^3} \\ &= \frac{r_y^2}{r} \end{aligned} \tag{A.20}$$

Ομοίως

$$r_{yy} = \frac{r_x^2}{r} \tag{A.21}$$

$$r_{xy} = -\frac{r_x r_y}{r} \tag{A.22}$$

$$r_{nx} = \frac{r_t r_y}{r} \tag{A.23}$$

$$r_{ny} = -\frac{r_t r_x}{r} \tag{A.24}$$

$$r_{tx} = -\frac{r_y r_n}{r} \tag{A.25}$$

$$r_{ty} = \frac{r_x r_n}{r} \tag{A.26}$$

Α.4. Υπολογισμός των παραγώγων της πεδιακής συνάρτησης στο εσωτερικό

Οι παράγωγοι της συνάρτησης u στο εσωτερικό Ω μπορούν να υπολογισθούν με απ' ευθείας παραγώγιση της σχέσεως (Α.12) με $\varepsilon(P)=1$. Λόγω της συνέχειας της θεμελιώδους λύσεως και των παραγώγων της, η παράγωγος περνάει μέσα στο ολοκλήρωμα και λαμβάνοντας υπόψη ότι οι συναρτήσεις $u, \frac{\partial u}{\partial n}$ λαμβάνουν δεδομένες τιμές στο σύνορο έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\int_{\Gamma} (\frac{\partial v}{\partial x} u,_n - u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial n}) ds \tag{A.27a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\int_{\Gamma} (\frac{\partial v}{\partial y} u,_n - u \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial n}) ds \tag{A.27b}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\int_{\Gamma} (\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} u,_n - u \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial n}) ds \tag{A.27c}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\int_{\Gamma} (\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} u,_n - u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y \partial n}) ds \tag{A.27d}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\int_{\Gamma} (\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} u,_n - u \frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial n}) ds \tag{A.27e}$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (Α.16) εώς (Α.26) οι παράγωγοι της θεμελιώδους λύσεως, που εμφανίζονται στους πυρήνες των ολοκληρωμάτων (Α.27), γίνονται

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \frac{r_x}{r} \tag{A.28}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2\pi} \frac{r_y}{r} \tag{A.29}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{r_y^2 - r_x^2}{r^2} \tag{A.30}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{A.31}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{\pi}\frac{r_x r_y}{r^2} \tag{A.32}$$

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial n} = -\frac{1}{\pi}\frac{(r_y^2 - r_x^2) r_n + 2 r_x r_y r_t}{r^3} \tag{A.33}$$

$$\frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial n} = -\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial n} \tag{A.34}$$

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y \partial n} = -\frac{1}{\pi}\frac{(r_y^2 - r_x^2) r_t - 2 r_x r_y r_n}{r^3} \tag{A.35}$$

B

Παράρτημα

Β.1. Εισαγωγή

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζονται τα είδη των βασικών συναρτήσεων ακτινικής μορφής (RBF) που χρησιμοποιούνται για την προσέγγιση των ιδεατών φορτίων, στο εσωτερικό του χωρίου, στην Μέθοδο της Αναλογικής Εξισώσεως. Ειδικότερη μνεία γίνεται στα Multiquadrics (Goldberg et al., 1996) που είναι και οι συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται στην εργασία αυτή.

Β.2. Γενικά

Η ακρίβεια της Μεθόδου της Αναλογικής Εξισώσεως βασίζεται σε ένα πολύ μεγάλο βαθμό στη δυνατότητα των συναρτήσεων f_j να προσεγγίσουν τα ιδεατά φορτία. Παραδοσιακά, οι δοκιμαστικές συναρτήσεις,

$$f_j = 1 + r \qquad j = 1,2,...M \tag{B.1}$$

όπου

$$r = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} \qquad j = 1,2,...M \tag{B.2}$$

και x_j, y_j οι συντεταγμένες των M εσωτερικών κομβικών σημείων μέσα στο Ω, έχουν χρησιμοποιηθεί ευρύτερα χωρίς καποιό προφανή λόγο για την επιλογή τους. Πρόσφατα, διάφοροι ερευνητές μελέτησαν σοβαρά την επιλογή δοκιμαστικών συναρτήσεων, για να βελτιώσουν την ακρίβεια των αποτελεσμάτων.

Οι Goldberg and Chen (1994) πρότειναν ότι η θεωρία των Radial Basis Function (RBF) παρέχει την μαθηματική βάση για την επιλογή των δοκιμαστικών συναρτήσεων. Οι εργασίες των Goldberg (1995), Chen (1996) και Karur and Ramachandran (1995) επιβεβαίωσε ότι η επιλογή των Thin Plate Splines (TPS)

$$f_j = r^2 \ln r \qquad j = 1,2,...M \tag{B.3}$$

βελτιώνει την ακρίβεια των αποτελεσμάτων.

Τα τελευταία χρόνια, η θεωρία των RBF έχει υποβληθεί σε εντατική έρευνα και εξελίχθηκε σε μία πετυχημένη τεχνική για την παρεμβολή συναρτήσεων. Το 1982, ο Franke δημοσίευσε μία εργασία, στην οποία υπολόγιζε όλες τις μεθόδους παρεμβολής σε ένα σύνολο αριθμητικών δεδομένων. Ανάμεσα στις μεθόδους που έλεγξε, τα Multiquadrics (MQ) του Hardy

$$f_j = \sqrt{r^2 + c^2} \qquad j = 1,2,...M \tag{B.4}$$

όπου c αυθαίρετη σταθερά κατάλληλα επιλεγόμενη, ήταν τα καλύτερα από πλευράς ακριβείας, ακολουθούμενα από τα TPS του Duchon. Κατά τη διάρκεια της τελευταίας δεκαετίας, τα MQ και τα TPS συνέχισαν να χρησιμοποιούνται από την επιστημονική κοινότητα.

Έστω και αν τα TPS θεωρούνται οι βέλτιστες δοκιμαστικές συναρτήσεις για την παρεμβολή συναρτήσεων, συγκλίνουν μόνο γραμμικά. Εξαιτίας αυτού, στην εργασία αυτή χρησιμοποιείται η αριθμητική υλοποίηση των MQ, τα οποία συγλίνουν εκθετικά (Madych and Nelson, 1992).

Β.3. Υπολογισμός των συναρτήσεων $\hat{u}_j$

Εφόσον γίνει οι επιλογή των προσεγγιστικών συναρτήσεων, που στην προκειμένη περίπτωση είναι τα MQ (B.4), το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός των συναρτήσεων $\hat{u}_j$ (βλ. §3.2.) από την επίλυση της εξισώσεως Poisson (3.8)

$$\nabla^2 \hat{u}_j = f_j \qquad j = 1,2,...M$$

σε πολικές συντεταγμένες. Ήτοι

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial \hat{u}_j}{\partial r}) = \sqrt{r^2 + c^2} \qquad j = 1,2,...M \tag{B.5}$$

Η ολοκλήρωση της εξίσωσης (B.5) δίδει

$$\hat{u}_j = -\frac{c^3}{3}\ell n(c\sqrt{r^2+c^2}+c^2)+\frac{1}{9}(r^2+4c^2)\sqrt{r^2+c^2} \tag{B.6}$$

Β.4. Υπολογισμός των παραγώγων των συναρτήσεων $\hat{u}_j$

Οι παράγωγοι των συναρτήσεων $\hat{u}_j$ υπολογίζονται με απ' ευθείας παραγώγιση της σχέσεως (Β.6). Έτσι έχουμε

$$\hat{u}_{x,j} = \frac{1}{3\sqrt{r^2+c^2}}(r^2+2c^2-\frac{c^3}{\sqrt{r^2+c^2}+c})(x-x_j) \tag{B.7}$$

$$\hat{u}_{x,j} = \frac{1}{3\sqrt{r^2+c^2}}(r^2+2c^2-\frac{c^3}{\sqrt{r^2+c^2}+c})(y-y_j) \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned}\hat{u}_{xx,j} = \frac{1}{3(r^2+c^2)^{3/2}}[r^2+c^3\frac{2\sqrt{r^2+c^2}+c}{(\sqrt{r^2+c^2}+c)^2}](x-x_j)+\\ \frac{1}{3\sqrt{r^2+c^2}}(r^2+2c^2-\frac{c^3}{\sqrt{r^2+c^2}+c})\end{aligned} \tag{B.9}$$

$$\hat{u}_{xy,j} = \frac{1}{3(r^2+c^2)^{3/2}}[r^2+c^3\frac{2\sqrt{r^2+c^2}+c}{(\sqrt{r^2+c^2}+c)^2}](x-x_j)(y-y_j) \tag{B.10}$$

$$\begin{aligned}\hat{u}_{yy,j} = \frac{1}{3(r^2+c^2)^{3/2}}[r^2+c^3\frac{2\sqrt{r^2+c^2}+c}{(\sqrt{r^2+c^2}+c)^2}](y-y_j)+\\ \frac{1}{3\sqrt{r^2+c^2}}(r^2+2c^2-\frac{c^3}{\sqrt{r^2+c^2}+c})\end{aligned} \tag{B.11}$$

Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{r\to 0}\hat{u}_{x,j} = 0 \tag{B.12}$$

$$\lim_{r \to 0} \hat{u}_{y,j} = 0 \tag{B.13}$$

$$\lim_{r \to 0} \hat{u}_{xx,j} = \frac{c}{2} \tag{B.14}$$

$$\lim_{r \to 0} \hat{u}_{xy,j} = 0 \tag{B.15}$$

$$\lim_{r \to 0} \hat{u}_{yy,j} = \frac{c}{2} \tag{B.16}$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Chen, C.S.: *The Method of Fundamental Solutions for Non-Linear Thermal Explosions*, Commun. Num. Meth. Engng, **11**, (1996), 675-681.

Dahlquist, G. and Björck, A.: *Numerical Methods*, Prentice-Hall, Englewood Cliff, New Jersey, (1974).

Föppl, A. and Föppl, L.: *Drang und Zwang*, **1**, R.Oldenburg, Munich, (1920).

Franke, R.: *Scattered Data Interpolation: Tests of Some Methods*, Math. Comput., **48**, (1982), 181-200.

Goldberg, M.A.: *The Numerical Evaluation of Particular Solutions in the BEM-A Review*, Boundary Element Communications, **6**, (1995), 99-106.

Goldberg, M.A. and Chen, C.S.: *The Theory of Radial Basis Functions Applied to the BEM for Inhomogeneous Partial Differential Equations*, Boundary Element Communications, **5**, (1994), 57-61.

Goldberg M.A., Chen, C.S. and Karur, S.P.: *Improved Multiquadric Approximation for Partial Differential Equations*, Engineering Analysis with Boundary Elements, **18**, (1996), 9-17.

Hencky, H.: *Ueber den Spannungszustand in kreisrunden Platten mit verschwinddener Biegefestigkeit*, Z. Math. Physik, **63**, (1915), 311-317.

Hencky, H.: *Die Berechnung Dünner Platten mit verschwindener Biegefestight*, ZAMM, **1**, (1921), 423-424.

Ivovich, V.A. and Pokrovski, L.N.: *Dynamic Analysis of Suspended Roof Systems*, Chapter 6, A.A. BALKEMA, Rotterdam, (1991).

Kandilas, C.B. and Katsikadelis J.T.: *An Efficient Method for Solving Finite Elasticity Problems*, Proc. of International Symposium: Dynamics of Continua, Bad Honnef, Germany, 164-174, (1996).

Kao, R. and Perrone, N.: *Large Deflections of Axisymmetric Circular Membranes*, International Journal of Solids and Structures, **7**, (1971), 1601-1612.

Kao, R. and Perrone, N.: *Large Deflections of Flat Arbitrary Membranes*, Computers and Structures, **2**, (1972), 535-546.

Karur, S.R. and Ramachandran, P.A.: *Augmented Thin Plate Splines Approximation in DRM*, Boundary Element Communications, **6**, (1995), 55-58.

Katsikadelis, J.T.: *The Analog Equation Method-A Powerful BEM-Based Solution Technique for Solving Linear and Nonlinear Engineering Problems*, in: Boundary Element Method XVI, Brebbia C.A. (editor), CLM Publications, Southampton, 167-182, (1994a).

Katsikadelis, J.T.: *New Time Integration Schemes for Linear and Nonlinear Dynamics Based on the Analog Equation Method*, Collection of Papers, Dedicated to Prof. P.S. Theocaris, A.N. Kounadis (editor), Athens-Greece, 80-100, (1994b).

Katsikadelis, J.T.: *Dynamic Analysis of Nonlinear Membranes by the Analog Equation Method*, in: Advances in Computational Engineering and Sciences, S. Atluri and F. Brust (eds), Tech Sciences Press, **II**, Los-Angeles-USA, 1281-1286, (2000).

Katsikadelis, J.T. and Apolopoulos N.A.: *Finite Deformation Analysis of Cables by the Analog Equation Method*, in: Steel Structure-EUROSTEEL'95, A.N. Kounadis (editor), A.A. Balkema, Rotterdam, 355-360, (1995).

Katsikadelis, J.T. and Nerantzaki, M.S.: *Non Linear Structural Problems by the Analog Equation Method*, Proc. of the 2nd National Congress on Computational Mechanics, Ioannina-Greece, 841-850, (1996).

Katsikadelis, J.T. and Nerantzaki, M.S.: *Solving Inverse Problems by Use of the AEM*, Proc. of International Symposium on Inverse Problems in Engineering Mechanics, M. Tanaka and G.S. Dulikravich (eds), Elsevier, Nagano-Japan, 593-602, (1998).

Katsikadelis, J.T. and Nerantzaki, M.S.: *The Boundary Element Method for Nonlinear Problems*, Engineering Analysis with Boundary Elements, **23**, (1999a), 365-373.

Katsikadelis, J.T. and Nerantzaki, M.S.: *Solving Equationless Problems from Boundary Only Data*, Proc. of European Conference on Computational Mechanics, Munich-Germany, 818, (1999b).

Katsikadelis, J.T. and Nerantzaki, M.S.: *The Analog Equation Method for Form Finding of Membranes by Minimal Surfaces*, Proc. of the 4th International Colloquium on Computation of Shell & Spatial Structures, Chania-Greece, 154, (2000a).

Katsikadelis, J.T. and Nerantzaki, M.S.: *The Ponding Problem on Membranes. An Analog Equation Solution*, in: Recent Advances in Applied Mechanics, Honorary Volume for Professor A.N. Kounadis, J.T Katsikadelis D.E. Beskos and E.E Gdoutos (eds), Athens-Greece, 194-205, (2000b).

Katsikadelis, J.T., Nerantzaki, M.S. and Kandilas, C.B.: *A BEM Approach to Nonlinear Vibrations of Plates*, in: Structural Dynamics-EURODYN'93, Moan et al. (eds), A.A. Balkema, Rotterdam, 659-671, (1993).

Katsikadelis, J.T., Nerantzaki, M.S. and Tsiatas, G.C.: *The Analog Equation Method for Large Deflection Analysis of Membranes. A boundary-only Solution*, Proc. of the 4th International Colloquium on Computation of Shell & Spatial Structures, Chania-Greece, 144, (2000).

Katsikadelis, J.T. and Sapountzakis, E.J.: *An Approach to the Vibration Problem of Homogeneous, Non-homogeneous and Composite Membranes Based on the Boundary Element Method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **26**, (1988), 2439-2455.

Lekhnitskii, S.G.: *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, San Francisco: Holden-Day Inc., (1963).

Leonard, J.W.: *Tension Structures*, Mc-Graw Hill, New York, (1988).

Madych, W.R. and Nelson S.A.: *Bounds on Multivariate Polynomials and Exponential Error Estimates for Multiquadric Interpolation*, J. Approxim. Theory, **70** (1), (1992), 94-114.

MSC/NASTRAN for Windows 4.0, The MacNeal-Schwendler Corporation, 815 Colorado Blvd, Los Angeles, CA 90041, USA.

Nerantzaki, M.S. and Katsikadelis, J.T.: *A Green's Function Method for Nonlinear Analysis of Plates*, Acta Mechanica, **75**, (1988), 211-225.

Neubert, M. and Sommer, A.: *Rectangular Shell Plating under Uniformly Distributed Hydrostatic Pressure*, N.A.C.A., Technical Memorandum, N.965, (1940).

Partridge, P.W., Brebbia, C.A. and Wrobel, L.C.: *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*, Computational Mechanics Publications, Southampton, (1992).

Scheid, F.: *Numerical Analysis*, Schaum's Outlines Series, Mc-Graw Hill, New York, (1988).

Storåkers, B.: *Small Deflections of Linear Elastic Circular Membranes under Lateral Pressure*, ASME, J. Appl. Mech., **50**, (1983a), 735-739.

Storåkers, B.: *Variation Principles and Bounds for the Approximate Analysis of Plane Membranes Under Lateral Pressure*, ASME, J. Appl. Mech., **50**, (1983b), 743-749.

Κατσικαδέλης, Ι.Θ.: *Δυναμική των Κατσκευών*, Αθήνα, (1998).

Κατσικαδέλης, Ι.Θ.: *Τα Συνοριακά Στοιχεία στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού*, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, (2000).

Νεραντζάκη, Μ.Σ.: *Μη Γραμμική Ανάλυση Πλακών με τη Μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων*, Διδακτορική Διατριβή, (1991).