Α.Ε.Μ.Δ.Ε. - Εργαστηριακή Άσκηση 6ης Εβδομάδος

Τετάρτη, 29 Μαρτίου 2006

Εργαστήριο 11ο:

α. Για το Neumann πρόβλημα:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad | \quad T \equiv \{(x,y) : 0 \le x, y \le 1\}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial n} = a\,(x,y) \quad | \quad \partial T,$$

της εφαρμογής προσδιορίσατε τους πίνακες H και V που παρουσιάζονται στο διακριτό ανάλογο με $h = \frac{1}{2}$ και δείξτε ότι πληρούν την ιδιότητα της αντιμεταθέσεως $(H \cdot V = V \cdot H)$ όπως, επίσης, ότι οι ιδιοτιμές της είναι:

$$0, 0, 0, 2, 2, 2, 4, 4 \quad \text{και} \quad 4.$$

β. Για το Robbin πρόβλημα στο μοναδιαίο τετράγωνο:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Big| T \equiv \{(x,y) : 0 \le x, y \le 1\}, \tag{1}$$

και τις συνοδεύουσες συνθήκες

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial x} - \kappa_1 u = a_0(y), & x = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_1 u = a_1(y), & x = 1 \end{array}\right| \quad 0 \le y \le 1 \\ \\ \left.\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial y} - \kappa_2 u = \beta_0(y), & y = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda_2 u = \beta_1(y), & y = 1 \end{array}\right| \quad 0 \le x \le 1 \end{cases} \tag{2}$$

και για $n = \frac{1}{2}$, επαληθεύσατε τις εξισώσεις του γραμμικού συστήματος (προσοχή στην ενσωμάτωση των συνοριακών συνθηκών):

$$\begin{bmatrix} 2n(\kappa_1+\kappa_2)+4 & -2 & & -2 & & & & \\ -1 & 2n\kappa_1+4 & -1 & & -2 & & & \\ & -2 & 2n(\kappa_1+\lambda_1)+4 & & & -2 & & \\ -1 & & & 2n\kappa_1+4 & -2 & & -1 & \\ & -1 & & -1 & 4 & -1 & & -1 \\ & & -1 & & -2 & 2n\lambda_1+2 & & & -1 \\ & & & -2 & & & 2n(\kappa_1+\lambda_2)+4 & -2 & \\ & & & & -2 & & -1 & 2n\lambda_2+4 & -1 \\ & & & & & -2 & & -2 & 2n(\lambda_1+\lambda_2)+4 \end{bmatrix} \bar{u} = 2n \begin{bmatrix} -a_{00}-\beta_{00} \\ -\beta_{01} \\ a_{10}-\beta_{02} \\ -a_{01} \\ 0 \\ a_{11} \\ \beta_{10}-a_{02} \\ \beta_{11} \\ \beta_{12}+a_{12} \end{bmatrix}$$

γ. Προσδιορίσατε τους πίνακες H_1 και V_1 και δείξτε ότι πληρούν την αντιμεταθετική ιδιότητα. Τέλος εύρατε τις ιδιοτιμές των πινάκων H_1 και V_1.

Εργαστήριο 12ο:

Εύρατε κατάλληλο διαγώνιο πίνακα P έτσι ώστε ο μετασχηματισμός

$$P^{-1} \cdot D_1 \cdot P, \tag{3}$$

να δώσει ένα συμμετρικό πίνακα.

Υπόδειξη: Λάβατε:

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

και επαληθεύσατε ότι ο (3) είναι συμμετρικός και δώστε την έκφραση αυτού.