

A.E.M.Δ.E. - Εργαστηριακή Άσκηση 2ης Εβδομάδος  
Τρίτη, 07 Μαρτίου 2006

---

**Εργαστήριο 3ο:**(Υπολογιστικός Αλγόριθμος των 5 Σημείων)

Με χρήση του αναπτύγματος Taylor:

$$(1) \quad u(x, t + \kappa) = u(x, t) + \kappa \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\kappa^2}{2} \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\kappa^3}{6} \kappa \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \dots$$

καθώς και της σχέσεως διαφορικού τελεστή ( $D_x$ ) και τελεστή κεντρικής διαφοράς ( $\delta_x$ ), που γνωρίζουμε από το A.A.I:

$$(2) \quad D^2 = \frac{1}{h^2} \left( \delta_x^2 - \frac{1}{12} \delta_x^4 + \frac{1}{90} \delta_x^6 + \dots \right),$$

να παραχθεί ο παρακάτω τύπος των 5 σημείων, διατηρώντας μέχρι και τέταρτης τάξεως διαφορές (έχει τεθεί  $r = \frac{\kappa}{h^2}$ ):

$$u_i^{j+1} = \frac{2 - 5r + 6r^2}{2} u_i^j + \frac{2}{3} r (2 - 3r) (u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) - \frac{(1 - 6r)}{12} (u_{i+2}^j + u_{i-2}^j).$$

**Εργαστήριο 4ο:**

Στα διαφορικά συστήματα

(α)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad | \quad T \equiv \left\{ (x, t) : \begin{array}{l} 0 \leqq x \leqq 1 \\ t \geqq 0 \end{array} \right\}, \quad u = u(x, t),$$

με

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = -u \quad | \quad t \geqq 0 \quad και \quad u(x, 0) = 1, \quad | \quad 0 < x < 1$$

και

(β)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad | \quad T \quad (\text{όπως παραπάνω})$$

με την αρχική συνθήκη  $u(x, 0) = x^2 + 1 \quad | \quad -\infty < x < +\infty$ , με χρήση των αλγορίθμων των 3-σημείων για το (α) και των 5 σημείων για το (β) να υπολογισθεί η αριθμητική τους λύση στο επίπεδο  $t = 0.1$ , όταν  $h = 0.2$  και το κατάλληλο για την ευστάθεια της υπολογιζόμενης λύσεως.