ΕΛΛΑΔΑ
ΚΟΙΝΟΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΣΤΗΡΙΞΗΣ
2008
Ανάπτυξη παντού. Ανάπτυξη για όλους.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΤΑΜΕΙΟ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

ΠΑΙΔΕΙΑ ΜΠΡΟΣΤΑ
2ο Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

Πρόγραμμα Αναμόρφωσης Προπτυχιακών Σπουδών

Τμήματος Μαθηματικών

Πανεπιστημιο Πατρων

Μάθημα: Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών

2η Εβδομαδα - Τεταρτη 14/10/2005

Κυκλώματα πράξεων - Στοιχειώδης μονάδα αριθμητικής

10. Κυκλώματα πράξεων - Στοιχειώδης μονάδα αριθμητικής

(α) Πρόσθεση δύο δυαδικών ψηφίων $y_1 + y_2$

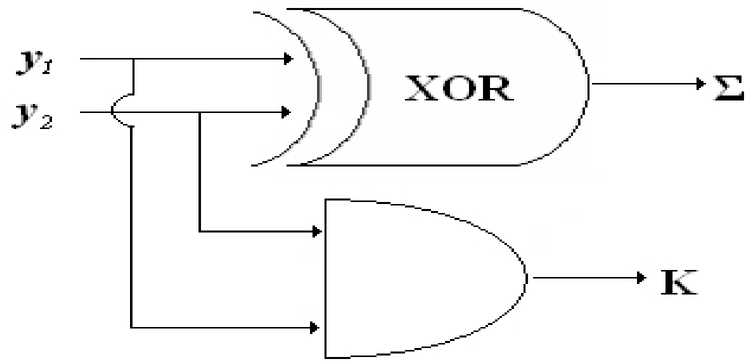
Η **βασική αριθμητική πράξη** που εκτελείται σ᾽ έναν Η.Υ. **είναι η πρόσθεση** 2 δυαδικών αριθμών, που προφανώς εδράζεται στην πρόσθεση δύο δυαδικών ψηφίων, που ευθύς αμέσως θα εξετάσουμε με λεπτομέρεια. Κατ᾽ αρχήν, όλες οι δυνατές περιπτώσεις που μπορούν να εμφανιστούν αποδίδονται από τον παρακάτω πίνακα 9 μαζί με τα αντίστοιχα εξαγόμενά τους, σε **προκύπτοντα ψηφία άθροισης** και **κρατουμένου**:

Πίνακας 9. Πίνακας άθροισης 2 δυαδικών ψηφίων

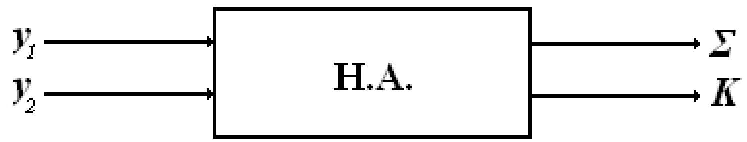
y_1	y_2	Ψηφίο αθροίσματος **Σ**	Ψηφίο κρατουμένου **K**
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Από τον παραπάνω πίνακα καθίσταται σαφές ότι το **μεν ψηφίο άθροισης** συμπεριφέρεται ως το **εξαγόμενο του συγκριτή** (αποτέλεσμα 0 όταν τα αθροιζόμενα ψηφία είναι ίδια, αποτέλεσμα 1 όταν είναι διαφορετικά), ενώ το ψηφίο του κρατουμένου συμπεριφέρεται ως το εξαγόμενο της διάταξης AND. Κατά συνέπεια η διάταξη που υλοποιεί την άθροιση 2 δυαδικών ψηφίων, αποδίδεται από το παρακάτω σχήμα 16:

Σχήμα 16. Διάταξη Ημιαθροιστή



η δε συμβολική του παράσταση είναι:



και ονομάζεται **ημιαθροιστής** (Half-adder).

(β) **Αφαίρεση δύο δυαδικών ψηφίων** $y_1 - y_2$

Με παρόμοιο τρόπο αντιμετωπίζεται η περίπτωση της αφαίρεσης 2 δυαδικών ψηφίων. Δημιουργούμε, κατ᾽ αρχήν, τον αντίστοιχο πίνακα (αληθείας) όλων των δυνατών περιπτώσεων, του πίνακα 10:

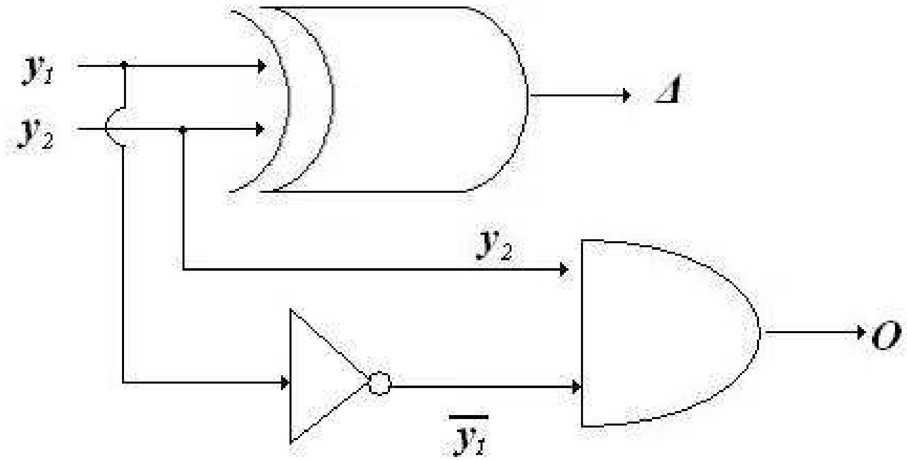
Πίνακας 10. Πίνακας αφαίρεσης 2 δυαδικών ψηφίων $y_1 - y_2$

y_1	y_2	Ψηφίο Διαφοράς **Δ**	Ψηφίο Δανεισμού-Οφειλομένου **O**
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0

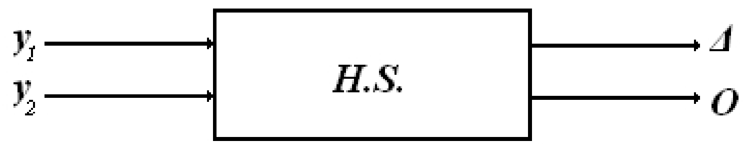
Μια ματιά στον πίνακα αφαίρεσης καθιστά προφανές ότι το ψηφίο διαφοράς έχει παρόμοια συμπεριφορά όπως και το ψηφίο του αθροίσματος (άρα θα αποτελεί την έξοδο ενός συγκριτή), ενώ το ψηφίο του Οφειλομένου αποτελεί την έξοδο της AND για **το συμπλήρωμα της εισόδου** y_1 **και το** y_2.

Έτσι, η σχηματική διάταξη της αφαίρεσης 2 δυαδικών ψηφίων, που καλείται και **ημιαφαιρετής** (Half-subtractor) είναι η ακόλουθη του σχήματος 16:

Σχήμα 16. Διάταξη Ημιαφαιρετή



με την ακόλουθη συμβολική παράσταση:



(γ) **Πρόσθεση τριών δυαδικών ψηφίων y_1, y_2 και k**

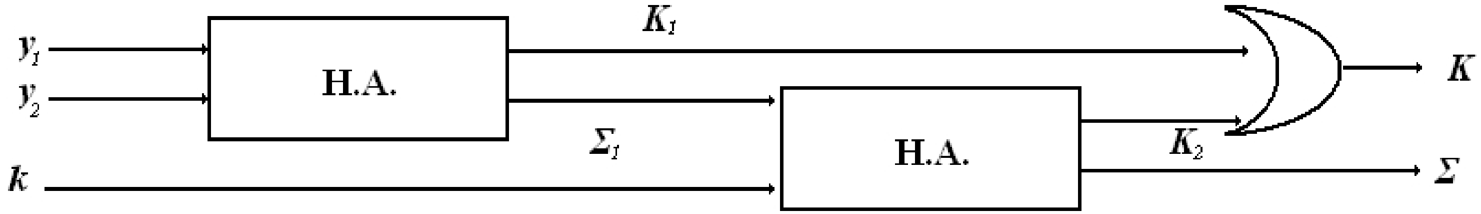
Η άθροιση δύο δυαδικών ψηφίων καλύπτει μόνο τα ψηφία των μονάδων στην περίπτωση της άθροισης 2 δυαδικών αριθμών. Για την όλη κάλυψη της διαδικασίας απαιτείται και η διάταξη της άθροισης 3 δυαδικών ψηφίων, των y_1 και y_2 (τα αντίστοιχα ψηφία των δύο προσθετέων) καθώς και του ψηφίου k (του κρατουμένου), που προέκυψε από το προηγούμενο βήμα της όλης διαδικασίας. Η μεθοδολογία παραμένει η ίδια· δηλαδή δημιουργούμε τον πίνακα όλων των δυνατών περιπτώσεων, που αποδίδεται από τον παρακάτω πίνακα 11, μαζί με τα αντίστοιχα αποτελέσματα:

Πίνακας 11. Πίνακας άθροισης 3 δυαδικών ψηφίων

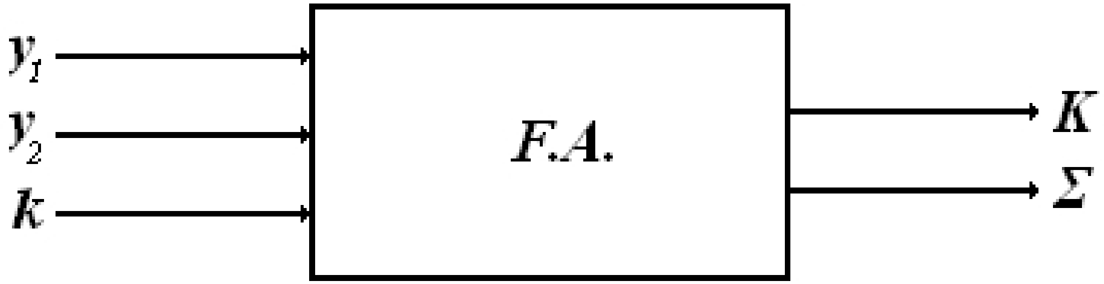
y_1	y_2	k	**Σ**	**Κ**
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Στη συνέχεια δημιουργούμε την παρακάτω διάταξη του σχήματος 17, που αποδίδει την διάταξη της άθροισης των 3 δυαδικών ψηφίων, που καλείται **Πλήρης Αθροιστής** (Full Adder):

Σχήμα 17. Διάταξη Πλήρη Αθροιστή



με την ακόλουθη συμβολική παράσταση:



(δ) **Αφαίρεση τριών δυαδικών ψηφίων** $y_1 - y_2 - O$

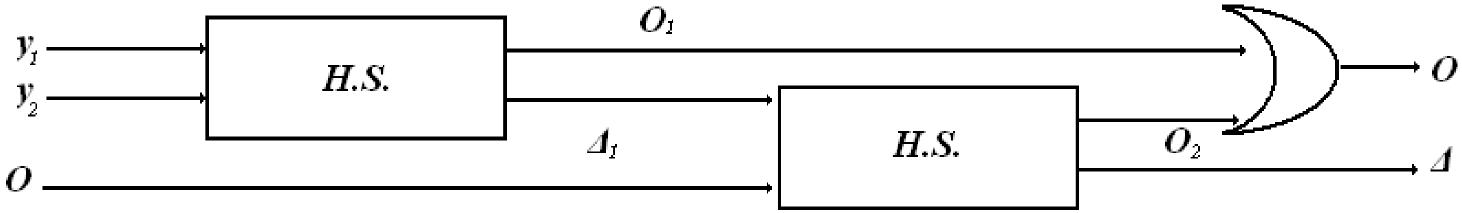
Με την ίδια λογική της άθροισης, υπάρχει ανάγκη κατά την υλοποίηση της διαδικασίας της αφαίρεσης 2 δυαδικών αριθμών, να διαθέτουμε την ίδια διαδικασία της αφαίρεσης 3 δυαδικών ψηφίων, για την κάλυψη των επόμενων ψηφίων, των μονάδων. Προς τούτο δημιουργούμε τον πίνακα 12 όλων των δυνατών περιπτώσεων (πίνακας αληθείας), που είναι:

Πίνακας 12. Πίνακας αφαίρεσης 3 δυαδικών ψηφίων $y_1 - y_2 - O$

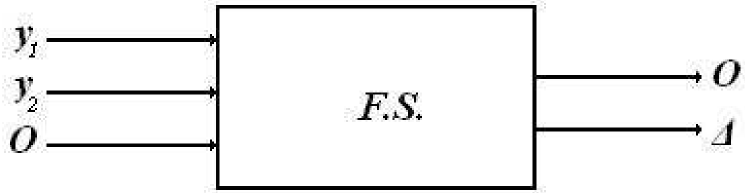
y_1	y_2	O	**Δ**	**Οφ**
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

και στη συνέχεια δημιουργούμε την παρακάτω διάταξη του σχήματος 18 που υλοποιεί την αφαίρεση των $y_1 - y_2 - O$, που ονομάζεται **Πλήρης Αφαιρετής** (Full Subtractor):

Σχήμα 18. Πλήρης Αφαιρετής



με την ακόλουθη συμβολική παράσταση:

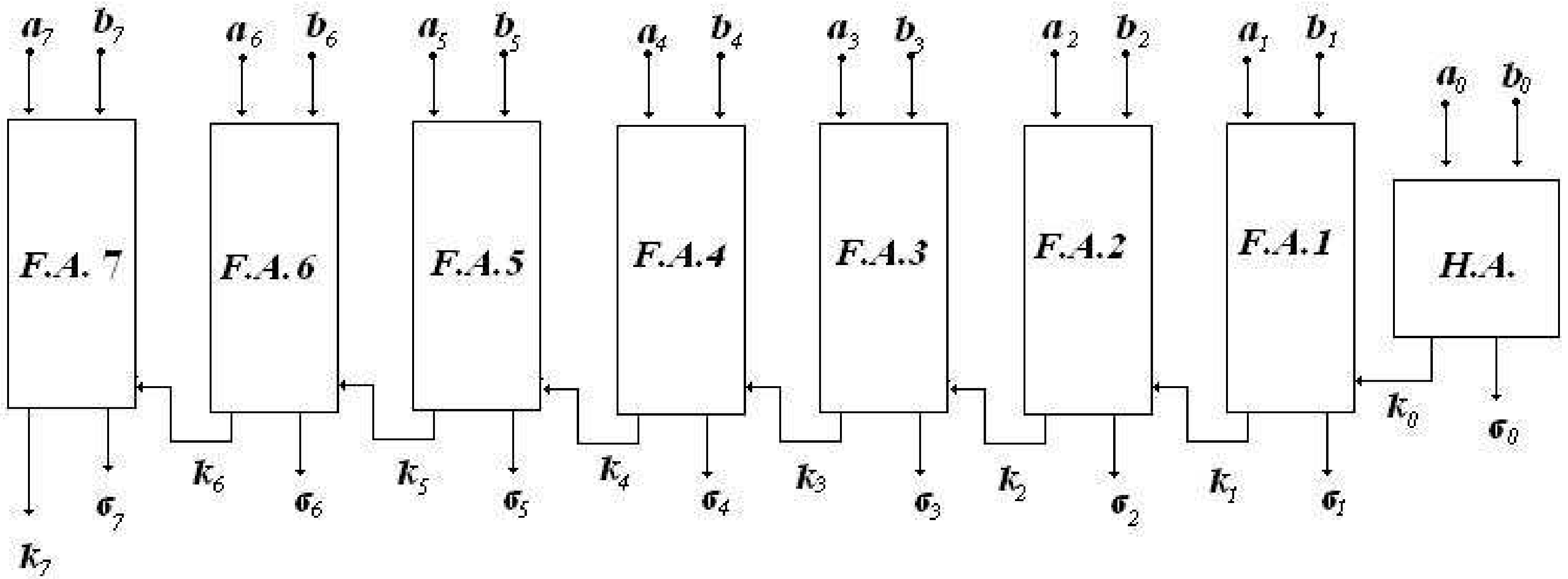


(ε) Αθροιστής δύο δυαδικών αριθμών

Με τη βοήθεια **του ημιαθροιστή** και του **πλήρη αθροιστή** είναι εύκολο πλέον να σχεδιαστεί **αθροιστής δύο δυαδικών αριθμών**, που στα επόμενα θα υποτεθεί ότι οι δυαδικοί αριθμοί έχουν το πολύ μήκος ενός byte (8 δυαδικών ψηφίων).

Κατά τα γνωστά ο **αλγόριθμος** της άθροισης συμπεριλαμβάνει ένα πρώτο βήμα με την άθροιση των **2 ψηφίων των μονάδων** (των 2 αριθμών) και στη συνέχεια διαδοχική άθροιση τριών ψηφίων, 2 των αντίστοιχων ψηφίων των 2 αριθμών και το τρίτο το ψηφίο του κρατουμένου, από το προηγούμενο βήμα, που θα είναι είτε 1, εάν όντως υπάρχει κρατούμενο, είτε 0, εάν δεν υπάρχει. Έτσι, λοιπόν ο σχεδιασμός του αθροιστή θα περιέχει, **ένα ημιαθροιστή**, για τα ψηφία των μονάδων, και ένα αριθμών πλήρων αθροιστών, για τα υπόλοιπα ψηφία (7 τον αριθμό στην προκειμένη περίπτωση), οπότε θα έχει την ακόλουθη μορφή του σχήματος 19:

Σχήμα 19. Αθροιστής 2 bytes των $a_7\ a_6\ a_5\ a_4\ a_3\ a_2\ a_1\ a_0$ και $b_7\ b_6\ b_5\ b_4\ b_3\ b_2\ b_1\ b_0$



Προφανώς το αποτέλεσμα της άθροισης των δυαδικών αριθμών $a_7\ a_6\ a_5\ a_4\ a_3\ a_2\ a_1\ a_0$ και $b_7\ b_6\ b_5\ b_4\ b_3\ b_2\ b_1\ b_0$ θα είναι, γενικά, ο εννεαψήφιος αριθμός:

$$k_7\ \sigma_7\ \sigma_6\ \sigma_5\ \sigma_4\ \sigma_3\ \sigma_2\ \sigma_1\ \sigma_0.$$

Παρατήρηση: Στο προηγούμενο σχήμα, χάριν ομοιομορφίας των δομικών υλικών του αθροιστή, θα μπορούσαμε στην θέση του ημιαθροιστή να κάνουμε χρήση ενός πλήρη αθροιστή, θέτοντας στη μία του είσοδο πάντοτε το μηδέν, οπότε τότε το όλο κύκλωμα του αθροιστή θα αποτελείται μόνο από πλήρεις αθροιστές.

(στ) **Διάταξη προσθαφαίρεσης 2 δυαδικών αριθμών (Two complement Adder/Subtractor)**

Για την περίπτωση της αφαίρεσης 2 δυαδικών αριθμών, αντί να έχουμε ένα άλλο κύκλωμα που θα εκτελεί την αφαίρεση δύο δυαδικών αριθμών, μπορούμε να αξιοποιήσουμε τον προηγούμενο αθροιστή για να επιτύχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα, επιτυγχάνοντας έτσι και την σχετική οικονομία στο κόστος του συστήματος. Προς τούτο ας δούμε τη διαδικασία της αφαίρεσης με χρήση **του συμπληρώματος ενός δυαδικού αριθμού ως προς το 2** (την βάση του δυαδικού συστήματος).

Ο κανόνας της αφαίρεσης προβλέπει τη συμπλήρωση (αντιστροφή) των ψηφίων του αφαιρετέου (από 1 γίνονται 0 και από 0 γίνονται 1), την **άθροιση** τους με τα ψηφία του μειωτέου και τη μεταφορά του τελικού κρατουμένου (**που διαγράφεται από κρατούμενο**) στο άθροισμα για **το τελικό αποτέλεσμα**.

Παράδειγμα: Ας πάρουμε 2 τετραψήφιους (half-bytes) δυαδικούς αριθμούς τον 7 (0111) και τον 3 (0011)· για την αφαίρεσή τους, παίρνω το συμπλήρωμα του 3 που είναι ο 1100 και τον προσθέτω στον μειωτέο:

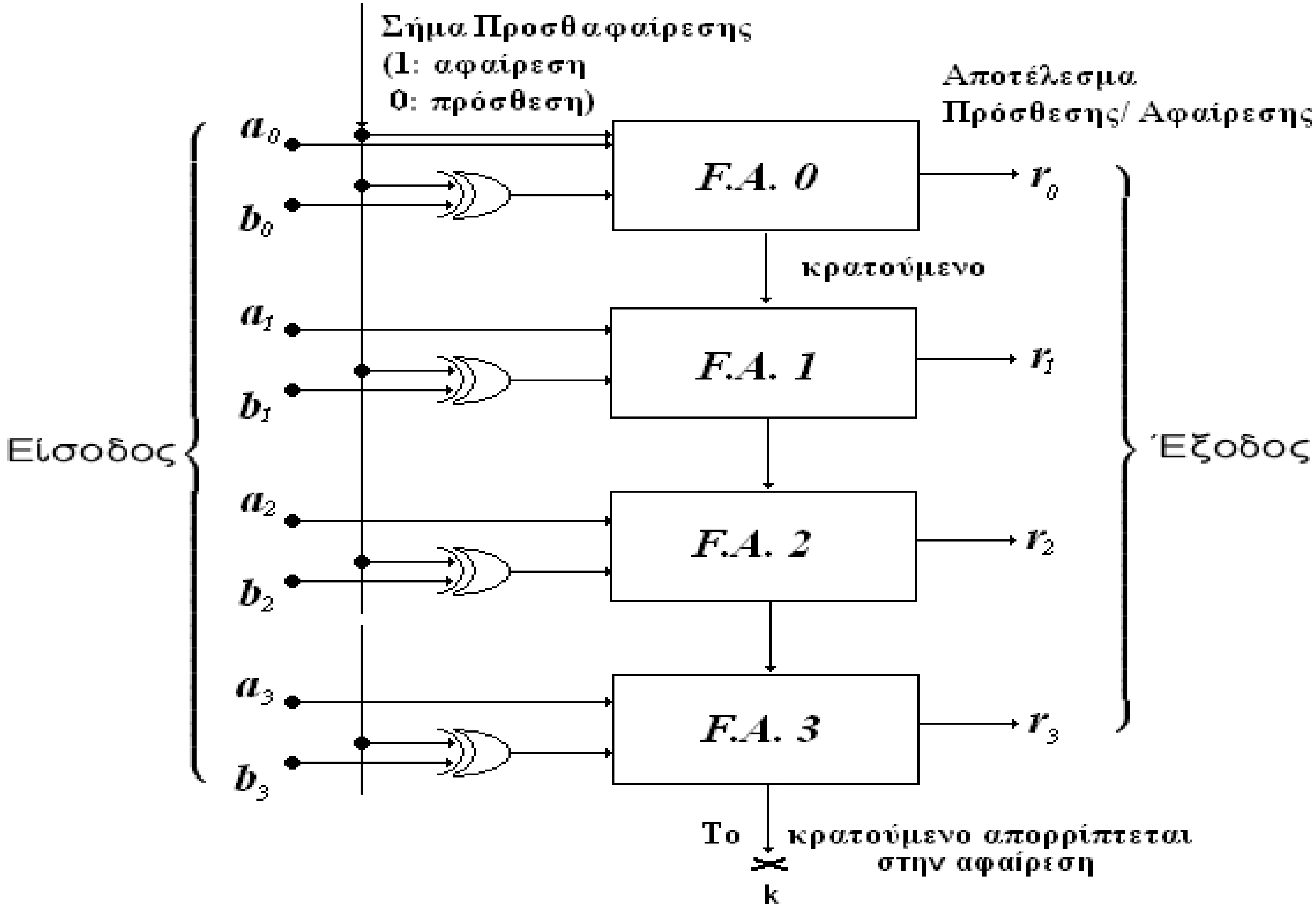
$$
\begin{array}{rcccccl}
 & & 0 & 1 & 1 & 1 & \text{(μειωτέο)} \\
 & & 1 & 1 & 0 & 0 & \text{(το συμπλήρωμα του αφαιρετέου)} \\ \hline
\text{Τελικό κρατούμενο} \leftarrow & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 1 & \\
 & \longrightarrow & & & & +1 & \\ \hline
 & & 0 & 1 & 0 & 0 & \rightarrow
\end{array}
$$

Αποτέλεσμα της αφαίρεσης είναι το 4.

Τα παραπάνω υλοποιούνται από την παρακάτω διάταξη του σχήματος 20.

Σχήμα 20. Διάταξη Προσθαφαίρεσης των

$$\begin{array}{r} a_3\ a_2\ a_1\ a_0 \\ \underline{\pm\ b_3\ b_2\ b_1\ b_0} \\ (\kappa)\, r_3\ r_2\ r_1\ r_0 \end{array}$$



Για την κατανόηση του σχήματος 20 θα ήταν χρήσιμο να δούμε τι συμβαίνει στον πίνακα αληθείας της πύλης XOR, όταν η μία είσοδός της είναι 0 ή 1 (που αποτελεί το σήμα προσθαφαίρεσης). Ο πίνακας είναι

XOR

A/B	0	1
0	0	1
1	1	0

Κατά συνέπεια, όταν μια είσοδος, έστω η A, είναι μηδέν (πρώτη γραμμή), τότε η XOR αποδίδει την άλλη είσοδο, δηλαδή τη B. Ενώ όταν είναι 1 (δεύτερη γραμμή) τότε αποδίδει τα συμπληρώματα της εισόδου B.

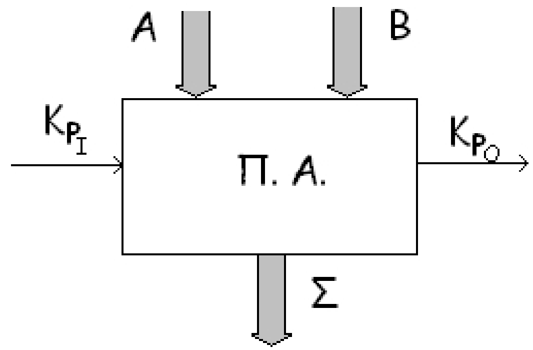
Επανερχόμενοι στο σχήμα 20, παρατηρούμε ότι ο αριθμός $a_0\ a_1\ a_2\ a_3$ εισάγεται στους 4 πλήρεις αθροιστές κανονικά-πάντοτε- ενώ ο αριθμός $b_0\ b_1\ b_2\ b_3$, εάν μεν το σήμα προσθαφαίρεσης είναι 0, δηλαδή **πρόσθεση είναι η πράξη που θα λάβει χώρα**, τότε ο αριθμός $b_0\ b_1\ b_2\ b_3$ **εισάγεται ως έχει**, αφού οι πύλες XOR ενεργούν ως απλοί διαβιβαστές του σήματος B.

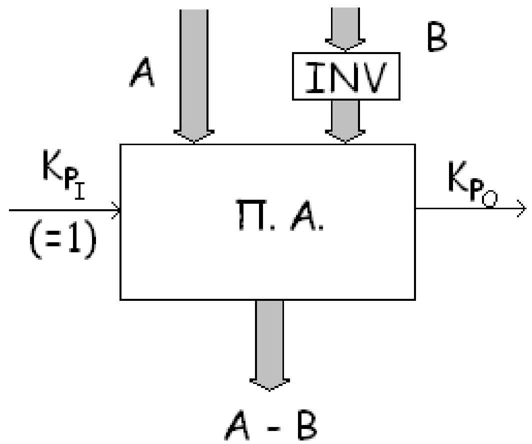
Εάν, δε, το σήμα προσθαφαίρεσης είναι 1-δηλαδή **αφαίρεση είναι η πράξη που θα λάβει χώρα**- τότε στον πλήρη αθροιστή Ο εισάγεται το τελικό κρατούμενο, απ᾽ αρχής, ενώ στους αθροιστές **εισάγονται τα συμπληρώματα των ψηφίων του Β**, όπως προβλέπει ο κανόνας της αφαίρεσης. Το τελικό κρατούμενο στον πλήρη αθροιστή 3 απορρίπτεται, αφού έχει ήδη ληφθεί υπόψη στον πλήρη αθροιστή Ο.

(ζ) Η μονάδα αριθμητικής (Arithmetic Unit)

Κάθε ψηφιακός Η.Υ. πρέπει να εκτελεί πράξεις (βασικά **πρόσθεση**, **συμπλήρωση** - για την υλοποίηση της αφαίρεσης - και **μετατοπίσεις** για την υλοποίηση του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης) και αυτές γίνονται στην μονάδα αριθμητικής. Για μεν την πρόσθεση και αφαίρεση θα επισημάνουμε την παράλληλη εκτέλεση των πράξεων που υλοποιούνται σε δύο λέξεις Α και Β του υπολογιστή, πράγμα που αποδίδεται από το παρακάτω σχήμα 21.

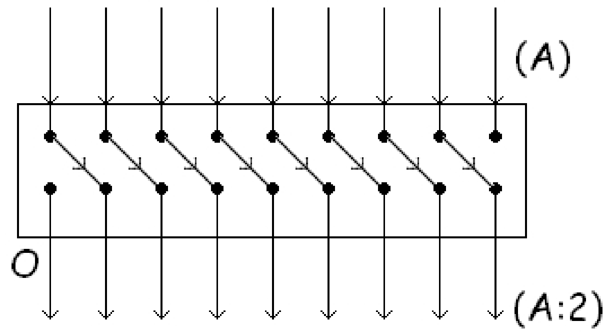
Σχήμα 21. Παράλληλος Αθροιστής



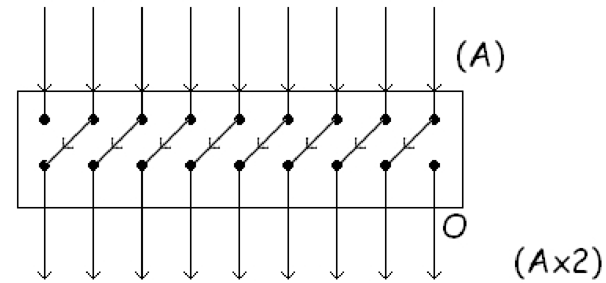


Για τις **δεξιές** και **αριστερές** μετατοπίσεις είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η μεν δεξιά μετατόπιση διαιρεί τον αριθμό διά δύο, ενώ η αριστερή μετατόπιση τον πολλαλασιάζει με το 2, όπως είναι σαφές από τα παρακάτω δύο σχήματα, όπου η είσοδος Α θεωρείται ότι είναι μήκους 1 byte.

(i) Δεξιά Μετατόπιση (Right Shifting)



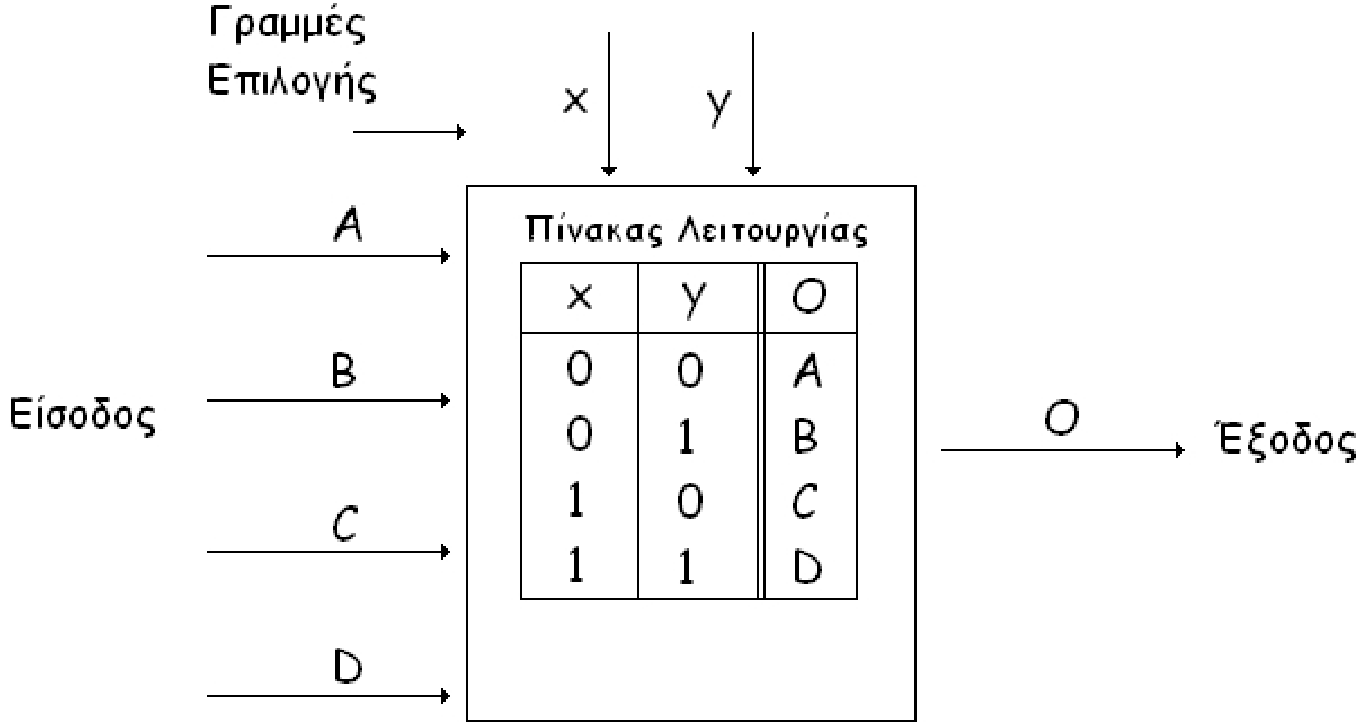
(ii) Αριστερή Μετατόπιση (Left Shifting)



Τέλος, η λειτουργία της αριθμητικής μονάδας απαιτεί την παρουσία ενός **επιλογέα δεδομένων**(multiplexer), που είναι μία διάταξη στην οποία καταλήγουν πολλές γραμμές δεδομένων και αυτή με κατάλληλο μηχανισμό, **των γραμμών επιλογής** (control lines), επιτρέπει την έξοδο μιάς και μόνο γραμμής (δηλαδή ο επιλογέα δεδομένων είναι ο «**τροχονόμος της αριθμητικής μονάδος**»).

Το παρακάτω σχήμα 22 αποδίδει την όλη κατάσταση, ο δε πίνακας λειτουργίας, που υπάρχει, περιγράφει την έξοδο που αποδίδεται σε κάθε κατάσταση των γραμμών επιλογής x και y (βλέπε σχήμα 22).

Σχήμα 22. Επιλογέας Δεδομένων (Multi-Plexer) 4 επιλογών

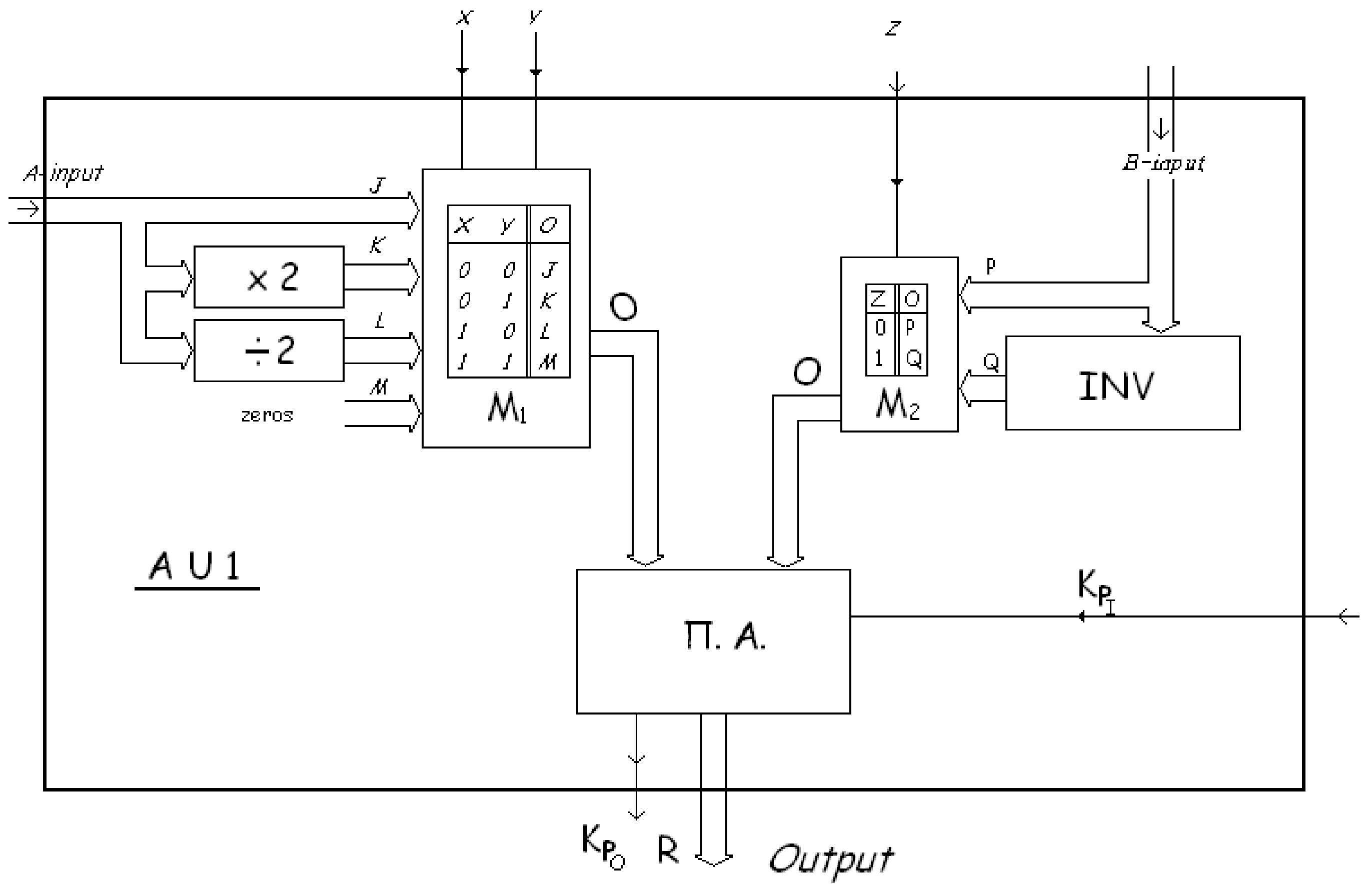


x	y	O
0	0	A
0	1	B
1	0	C
1	1	D

Μετά τις προηγούμενες διασαφηνίσεις, μπορούμε να δώσουμε τη βασική δομή **της μονάδας αριθμητικής AU1** του σχήματος 23:

Σχήμα 23. Μονάδα Αριθμητικής

(ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΜΟΝΑΔΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ)



που σαν κεντρικό της στοιχείο είναι ο παράλληλος αθροιστής (Π.Α.), ενώ οι δύο εισοδοί του A και B υφίστανται διάφορες επεξεργασίες με βάση τα σήματα ελέγχου X, Y και Z των δύο multiplexers που υπάρχουν που όλες αποδίδονται από τον πίνακα λειτουργίας (βλέπε πίνακα 13) της μονάδος που ακολουθεί:

Πίνακας 13. Πίνακας λειτουργίας της AU1

Σήματα Ελέγχου			Δεδομένα			Αποτελέσματα	
X	Υ	Z	K_{p_I}	A	B	Πραγματοποιούμενη Πράξη	K_{p_O}
0	0	0	0			$R = A + B$	
0	0	0	1			$R = A + B + 1$	
0	0	1	0			$R = A - B - 1$	
0	0	1	1			$R = A - B$	
0	1	0	0			$R = 2A + B$	
0	1	0	1			$R = 2A + B + 1$	
0	1	1	0			$R = 2A - B - 1$	
0	1	1	1			$R = 2A - B$	
1	0	0	0			$R = {}^1/_2 A + B$	
1	0	0	1			$R = {}^1/_2 A + B + 1$	
1	0	1	0			$R = {}^1/_2 A - B - 1$	
1	0	1	1			$R = {}^1/_2 A - B$	
1	1	0	0			$R = B$	
1	1	0	1			$R = B + 1$	
1	1	1	0			$R = -B - 1$	
1	1	1	1			$R = -B$	

Από τον πίνακα 13 είναι σαφές ότι δεκαέξι (16) διαφορετικές περιπτώσεις επεξεργασίας δεδομένων A, B και K_{P_I} είναι δυνατόν να δημιουργηθούν με αντίστοιχα αποτελέσματα που εμφανίζονται στην στήλη «πραγματοποιούμενη πράξη», πέραν δε αυτών των διεργασιών η $AU1$ δεν δύναται να πραγματοποιήσει οτιδήποτε άλλο.