

Αριθμητική Ανάλυση II - Εργαστηριακή Άσκηση 7ης Εβδομάδος  
Ερμιτιανή Προσέγγιση (Hermitian Approximation)

Φαινόμενο Runge

Τρίτη, 06 Απριλίου 2005

---

**Εργαστήριο 13ο:**

(α) Θεωρία: Ως γνωστόν, το πολυώνυμο βαθμού  $2\nu + 1$  που διέρχεται από  $\nu + 1$  σημεία

$$\{x_k, \varphi(x_k), k = 0, 1, 2, \dots, \nu\}$$

και έχει σ' αυτά δοσμένες παραγώγους  $\{\varphi'(x_k), k = 0, 1, 2, \dots, \nu\}$  δίδεται από την έκφραση :

$$(1) \quad P_{2\nu+1}(x) = \sum_{k=0}^{\nu} \{M_k(x)\varphi(x_k) + N_k(x)\varphi'(x_k)\},$$

με

$$M_k(x) = \left[1 - 2\Lambda_k^{(\nu)'}(x_k) \cdot (x - x_k)\right] \left[\Lambda_k^{(\nu)}(x)\right]^2$$

και

$$N_k(x) = (x - x_k) \left[\Lambda_k^{(\nu)}(x)\right]^2.$$

Δείξτε ότι ισχύουν:  $M_k(x_\lambda) = \delta_{k\lambda}$ ,  $N_k(x_\lambda) = 0$ ,  $M_k'(x_\lambda) = 0$  και  $N_k'(x_\lambda) = \delta_{k\lambda}$ , όπου:

$$\delta_{k\lambda} = \begin{cases} 1, & \text{όταν } k = \lambda \\ 0, & \text{όταν } k \neq \lambda \end{cases} \quad (\text{Ο συμβολισμός του Kronecker})$$

Στη συνέχεια, δείξτε ότι το σφάλμα της Ερμιτιανής προσέγγισης είναι:

$$\varphi(x) - P_{2\nu+1}(x) = \frac{[(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_\nu)]^2}{(2\nu + 2)!} \varphi^{(2\nu+2)}(\xi_x), \quad \text{με } x_0 < \xi_x < x_\nu$$

Τέλος, δείξτε τη μοναδικότητα του πολυωνύμου  $P_{2\nu+1}(x)$ .

(β) Εφαρμογή: Η άσκηση 7, σελ. 208, του βιβλίου σας με χρήση της (1).

**Εργαστήριο 14ο:(Φαινόμενο Runge)**

Να υποθέσετε ότι «παρατηρείτε» τη συνάρτηση (προσεγγιζόμενη):

$$\varphi(x) = \frac{1}{1 + x^2} \quad | \quad [0, 1],$$

με σημεία παρατηρήσεων:  $x_k = k/20$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, 20$ . Στη συνέχεια, εύρατε το προσεγγιστικό πολυώνυμο  $P_\lambda(x)$  με  $\lambda = 5, 10, 15$  και  $20$  για τα  $\lambda + 1$  ισαπέχοντα σημεία, έτσι ώστε:

$$P_\lambda\left(\frac{k}{\lambda}\right) = \varphi\left(\frac{k}{\lambda}\right), \quad k = 0, 1, \dots, \lambda,$$

και εκτυπώσατε τον πίνακα τιμών των συναρτήσεων:

$$|\varphi(x) - P_\lambda(x)|, \quad \lambda = 5, 10, 15, 20$$

για  $x = 0., 0.1, 0.02, 0.5, 0.95$ . Τι παρατηρείτε για τις μέγιστες αποκλίσεις - (διαφορές) που εμφανίζονται.