

Αριθμητική Ανάλυση II - Εργαστηριακή Άσκηση 2ης Εβδομάδος  
Τάξη Σύγκλισης Επαναληπτικών Μεθόδων  
Τρίτη, 02 Μαρτίου 2005

---

**Εργαστήριο 3ο:**

(α) Για την εύρεση μιας ρίζας της εξίσωσης:

$$(1) \quad 3kx - k\lambda + \eta\mu(kx) - \sigma\upsilon\nu(\lambda x) = 0,$$

$k, \lambda$  παράμετροι που παρουσιάσθηκε στη μελέτη κάποιου φυσικού φαινομένου, εφαρμόζουμε την Γενική Επαναληπτική Μέθοδο, οπότε η (1) γράφεται:

$$(2) \quad x_{\nu+1} = \frac{1}{3k} \{k\lambda + \sigma\upsilon\nu(\lambda x) - \eta\mu(kx)\}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

Εάν οι παράμετροι  $k$  και  $\lambda$  ικανοποιούν την σχέση  $|\frac{\lambda}{k}| < 2$  δείξτε ότι η (2) συγκλίνει πάντοτε. Τέλος εύρατε την ρίζα της (1) με ακρίβεια χιλιοστού.

(β) Να ευρεθεί η εξίσωση της οποίας τις ρίζες μπορεί να προσδιορίσει η παρακάτω ακολουθία:

$$(3) \quad x_{\nu+1} = x_{\nu} (3 - 3ax_{\nu} + a^2x_{\nu}^2), \quad a \neq 0 \quad \text{παράμετρος.}$$

Στη συνέχεια να καθοριστεί η τάξη σύγκλισης της (3) σε κάθε μια από τις ρίζες που βρήκατε.

**Εργαστήριο 4ο:**

(α) Διερευνήσατε το είδος των ριζών της εξίσωσης (πραγματικές, θετικές, αρνητικές, μιγαδικές):

$$(4) \quad x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0.$$

Στη συνέχεια εντοπίστε διαστήματα εγκλεισμού των και εφαρμόσατε την μέθοδο N-R για τον υπολογισμό των με ακρίβεια 6 δεκ. ψηφίων. Παρατηρήσατε την ταχύτητα σύγκλισης της ακολουθίας για την αρνητική ρίζα και αντίστοιχα για την θετική ρίζα. Τέλος, όπου υπάρχει καθυστέρηση εφαρμόσατε την τροποποιημένη N-R και παρατηρήσατε την αποκατάσταση της ταχύτητας σύγκλισης.

(Υπόδειξη: Για την αρνητική ρίζα λάβατε  $x_0 = -4$ , ενώ για την θετική ρίζα λάβατε  $x_0 = 0$ , κλπ.)

(β) Με χρήση της παραγράφου (γ) του φυλλαδίου της 2ης εβδομάδας, να γίνει έλεγχος για την τάξη σύγκλισης της N-R σε πολλαπλή ρίζα μιας εξίσωσης π.χ. της  $\varphi(x) = 0$  με

$$(5) \quad \varphi(x) = (x - \rho)kf(x), \quad \text{οπότε } x^* = \rho.$$

(Υπόδειξη: Ορίσατε τη συνάρτηση  $\Phi(x)$  και υπολογίσατε την τιμή της  $\Phi'(x^*)$  και δείξτε ότι είναι διάφορος του μηδέν, άρα δεν συγκλίνει τετραγωνικά. Στη συνέχεια, λάβατε το τροποποιημένο N-R και εύρατε την έκφραση της  $\Phi_1(x)$  γι' αυτό. Τέλος, υπολογίσατε την τιμή  $\Phi_1'(x^*)$  και δείξτε ότι αυτή είναι μηδέν· άρα το τροποποιημένο N-R συγκλίνει τετραγωνικά. Τέλος, στην περίπτωση της N-R σε πολλαπλή ρίζα εύρατε σχέση μεταξύ των σφαλμάτων των διαδοχικών όρων της.)