Αριθμητική Ανάλυση ΙΙ
Τρίτη, 22 Φεβρουαρίου 2005

Ασκήσεις
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

1. Να βρεθεί ένα διάστημα που να περιέχει την θετική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x^2 - 2x - 1 = 0$. Στην συνέχεια να γίνει χρήση της μεθόδου της διχοτόμησης (Μ.Δ.) για να βρεθεί η ρίζα αυτή με 2 δεκαδικά ψηφία (δ.ψ.). Τέλος να προσδιοριστεί ο αριθμός των επαναλήψεων της Μ.Δ. για να βρεθεί η ρίζα με 6 δ.ψ.

2. Η αλγεβρική εξίσωση $x^3 - 2x - 3 = 0$ έχει προφανώς μιά πραγματική ρίζα (γιατί;)· να βρεθεί ένα διάστημα που να την περιέχει. Στην συνέχεια να προσδιοριστεί ο αριθμός των επαναλήψεων της Μ.Δ. για να βρεθεί η ρίζα με 6 δ.ψ. Τέλος με εφαρμογή της ίδιας μεθόδου να βρεθεί η ρίζα με 2 δ.ψ.

3. Για μιά εξίσωση $f(x) = 0$, | $[a, b]$ η μέθοδος της διχοτόμησης μπορεί να αξιοποιηθεί εφόσον $f(a) \cdot f(b) < 0$, οπότε ένα περιττό πλήθος ριζών εξασφαλίζεται μέσα στο (a, b). Να υποτεθεί ότι πράγματι υπάρχουν πολλές ρίζες μέσα στο (a, b) και ότι εφαρμόζουμε την Μ,Δ. για να, προσδιορίσουμε μία από αυτές. Ποια θα είναι αυτή που η Μ.Δ. θα επιλέξει·

4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f_1(x) = \frac{1}{3x-1}$ και $f_2(x) = \begin{cases} 2 & x \geq 0.2 \\ -2 & x < 0.2 \end{cases}$ που είναι ορισμένες στο διάστημα $[0, 1]$. Να διαπιστωθεί ότι και οι δύο συναρτήσεις αλλάζουν πρόσημο στα άκρα του διαστήματος. Στην συνέχεια να γίνει εφαρμογή της Μ.Δ. και να βρεθεί το σημείο στο οποίο ν μέθοδος συγκλίνει· είναι αυτό ρίζα των συναρτήσεων;

5. Δίνεται ν εξίσωση $(x - 1.333)^3 = 0$ που προφανώς ν ρίζα της βρίσκεται στο διάστημα $[l, 2]$. Με χρήση της μεθόδου της Εσφαλμένης Θέσης (Ε.Θ.) να βρεθεί η ρίζα αυτή με 4 δ.ψ. Είναι αυτό δυνατό· Πώς εξηγείται το φαινόμενο·

6. Προσδιορίστε το πλήθος και το είδος των ριζών της εξίσωσης:

$$xe^x - 2 = 0,$$

και στην συνέχεια δώστε ένα επαναληπτικό σχήμα για την αριθμητική επίλυση της. Τέλος διερευνήστε την σύγκλιση του επαναληπτικού σχήματος που επιλέξατε.

7. Για τις εξισώσεις: $2xe^{2x} - 1 = 0$, $2sinx + x - 1 = 0$, $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} + cosx - 1 = 0$, να προσδιοριστεί το πλήθος και το είδος των ριζών τους και, να δοθεί κατάλληλη αριθμητική διαδικασία για τον προσδιορισμό της απολύτως μικρότερης ρίζας τους.

8. Στην πρώτη εξίσωση της προηγούμενης άσκησης να βρεθεί το πλήθος των επαναλήψεων της Μ.Δ. που απαιτούνται για την εκτίμηση μιας ρίζας με σφάλμα όχι μεγαλύτερο του $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$. Τέλος, να γραφεί πρόγραμμα FORTRAN που να καλεί την S/R BISECT για την υλοποίηση της ρίζας αυτής.

9. Στην τελευταία εξίσωση της άσκησης 7 να γίνει χρήση της μεθόδου της Ε.Θ. για να βρεθεί μ'ενα πρόγραμμα FORTRAN και την βοήθεια της S/R MODRF μία προσέγγιση της ρίζας έτσι ώστε να ισχύει: $\left|\frac{1}{2}e^{2x_n} + sinx_n\right| < \frac{1}{2}10^{-5}$

10. Να βρεθεί το πλήθος και το είδος των ριζών της υπερβατικής εξίσωσης $e^x + 10x - l = 0$. Στην συνέχεια για τον αριθμητικό υπολογισμό της ρίζας της να γίνει χρήση των μεθόδων Μ.Δ., Ε.Θ., Χορδής (Χ.), Newton-Raphson N.P.), Γενικής Επαναληπτικής (Γ.Ε.) με ακρίβεια 5 δ.ψ. Τέλος με χρήση των υπορουτινών που δίνονται στο προηγούμενο κεφάλαιο να βρεθεί η ρίζα μ' όλες τις παραπάνω μεθόδους και με την ακρίβεια του υπολογιστικού συστήματος (Υ.Γ.) που διαθέτετε.

11. Με χρήση της μεθόδου N.P. μπορούμε να βρούμε τον αντίστροφο ενός αριθμού A χωρίς την χρήση διαίρεσης. Για το σκοπό αυτό παίρνουμε την εξίσωση $A - \frac{1}{x} = 0$, που ο αντίστροφος είναι η ρίζα της, και εφαρμόζουμε σ' αυτή την μέθοδο N.P. Να βρεθεί το επαναληπτικό σχήμα που δημιουργείται και να διερευνηθεί η σύγκλιση του.

12. Για την εύρεση της τετραγωνικής ρίζας ενός θετικού αριθμού A, αρκεί να θεωρήσουμε την αντίστοιχη εξίσωση $x^2 - A = 0$ και να εφαρμόσουμε σ' αυτή την Γ.Ε. μέθοδο με κάποια αναδιάταξη της εξίσωσης. Έτσι μπορούμε να υποθέσουμε την επαναληπτική σχέση: $x_{n+1} = \frac{A}{x_n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ και x_0 αυθαίρετος θετικός αριθμός. Δείξτε ότι η παραπάνω επαναληπτική σχέση δεν δημιουργεί συγκλίνουσα ακολουθία. Επιπλέον δείξτε ότι η εφαρμογή της διαδικασίας Aitken σ' αυτή την καθιστά συγκλίνουσα. Τι παρατηρείτε;

13. Για την εύρεση της τετραγωνικής ρίζας ενός αριθμού $A > 0$ χρησιμοποιούμε το σχήμα N.R.: $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right)$. Δείξτε ότι οι όροι του παραπάνω σχήματος πληρούν την σχέση:

$$\left(\frac{x_n - \sqrt{A}}{x_n + sqrtA}\right) = \left(\frac{x_0 - \sqrt{A}}{x_0 + sqrtA}\right)^{2n}$$

που, κατά συνέπεια, εξασφαλίζει την σύγκλιση του σχήματος για κάθε αρχική εκκίνηση $x_0 > 0$.

14. Το 1225 ο Fibonacci βρήκε την πραγματική ρίζα της ομώνυμης εξίσωσης $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ με 9 δ.ψ. χωρίς να γνωρίζει κανένας τον τρόπο.

Να βρεθεί ένα διάστημα που να περιέχει την ρίζα αυτή και στη συνέχεια με χρήση της μεθόδου MULLER και, της ομώνυμης υπορουτίνας να βρεθούν όλε- ς οι ρίζες της εξίσωσης με ακρίβεια 9 δ.ψ. Η πραγματική ρίζα πρέπει να είναι ίση με αυτή που δίνεται στη σελίδα 26.

15. Να βρεθούν όλες οι ρίζες της εξίσωσης $x^3 - 3.23x^2 + 1.2x - 3.876 = 0$ με 5 δ.ψ. και χρήση της μεθόδου N.R.

16. Να δοθούν όλα τα επαναληπτικά σχήματα για την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης $x^3 + 2x^2 - 10x - 10$. Ποιο κατά την γνώμη σας είναι το ενδεδειγμένο για την εύρεση όλων των ριζών της εξίσωσης, που να βρεθούν με ακρίβεια 5 δ.ψ.

17. Στο πολυώνυμο $6x^4 - 53x^3 + 18x^2 - 2x + 3$ να βρεθούν οι τιμές του για $x = 3, 5, 1 + 2i, 1 - 2i$.

18. Στην §12 του Κεφαλαίου Α δόθηκε ο τύπος $P^{(k)}(x_1) = k!P_k(x_1)$ που ισχύει μεταξύ των τιμών ενός πολυώνυμου $P(x)$ και των $P^{(k)}(x)$, για πραγματικές τιμές του x. Να βρεθεί παρόμοιος τύπος για μιγαδικές τιμές του x.

19. Στο πολυώνυμο $x^5 - 3x^3 + 2x^2 - x + 5$ να βρεθούν οι τιμές του, μαζί με την πρώτη και δεύτερη παράγωγό του για $x = 2 - i, 2 + i, -3 + 2i, -3 - 2i$.

20. Δίνεται, η συνάρτηση $f(x)$ που υποτίθεται αναλυτική στο διάστημα ορισμού της $[a, b]$. Να βρεθεί για την αντίστοιχη εξίσωση $f(x) = 0$ ο επεκτεταμένος τύπος Newton-Raphson με αποκοπή του αναπτύγματος Ταψλορ της $f(x)$ μετά τον όρον τρίτης τάξης.

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1. Δίδονται οι τετραγωνικοί πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \;\; \text{και} \;\; \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Δείξτε ότι ισχύουν οι σχέσεις $AB \neq BA$, $A(BC) = (AB)C$ και $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

2. Δείξτε ότι ο πίνακας: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ δεν έχει αντίστροφο.

3. Η αποτελεσματικότητα μιας μεθόδου μπορεί να εκτιμηθεί με το πλήθος των πράξεων που απαιτεί για να βρεθεί το αποτέλεσμα. Δείξτε ότι η απαλοιφή Gauss για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος n εξισώσεων με ισάριθμους άγνωστους απαιτεί $\frac{n(n-1)}{2}$ διαιρέσεις, $\frac{(n^3-n)}{3}$ πολλαπλασιασμούς και $\frac{n^3-n)}{3}$

προσθέσεις. Τέλος δείξτε ότι η οπίσθια αντικατάσταση απαιτεί n διαιρέσεις, $\frac{n(n-1)}{2}$ πολλαπλασιασμούς και $\frac{n(n-1)}{2}$ προσθέσεις.

4. Σε μερικούς Ηλεκτρονικούς Υπολογιστές (Η.Υ.) οι διαιρέσεις θέλουν περισσότερο χρόνο από τον πολλαπλασιασμό. Στην περίπτωση αυτή πώς θα τροποποιούσατε την απαλοιφή Gauss για μια ταχύτερη επεξεργασία.

5. Να βρεθεί το πλήθος των προσθέσεων, πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων που απαιτούνται στην διαδικασία της απαλοιφής Gauss για την παραγωγή του άνω τριγωνικού πίνακα U.