ΕΛΛΑΔΑ
ΚΟΙΝΟΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΣΤΗΡΙΞΗΣ
2008
Ανάπτυξη παντού. Ανάπτυξη για όλους.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΤΑΜΕΙΟ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

ΠΑΙΔΕΙΑ ΜΠΡΟΣΤΑ
2ο Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΠΡΟΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

Μάθημα: Αριθμητική Ανάλυση II

ΑΑII: 6η-7η Εβδομαδα - 28 Μαρτιου 2005

ΘΕΩΡΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ

1. Γενική Φιλοσοφία: Η έννοια της προσέγγισης είναι θεμελιακή στην **Αριθμητική Ανάλυση** και **η προσέγγιση** δεν νοείται μόνο **για αριθμητικές ποσότητες** (π.χ. ρίζες εξισώσεων και λύσεις γραμμικού συστηματος) αλλά **και για συναρτήσεις**.

2. Βασικό Εργαλείο: Το βασικό εργαλείο είναι **οι ακολουθίες συναρτήσεων**, που σιωπηλά ήδη τις έχουμε χρησιμοποιήσει, ως ακολουθίες πρωτοβάθμιων ή δευτεροβάθμιων πολυωνύμων - ευθειών ή παραβολών - στην διαδικασία εύρεσης ριζών (Μέθοδος Χορδής και Μέθοδος Muller).

Φυσικά, η ιδέα μπορεί να επεκταθεί με:

(α) Χρήση **ακολουθιών πολυωνύμων ανώτερου βαθμού**

(β) Με ακολουθίες **τριγωνομετρικών** συναρτήσεων (**κυκλικά** φαινόμενα)

(γ) Με ακολουθίες **εκθετικών** συναρτήσεων (**εκρηκτικά** φαινόμενα)

(δ) Με χρήση **ρητών** συναρτήσεων, κλπ.

3. Πρακτικό Αποτέλεσμα: Αυτή η χρήση των προσεγγιστικών συναρτήσεων είναι αποτέλεσμα της ανάγκης που έχουμε για συγκεκριμένες συναρτήσεις σε συγκεκριμένα ερωτήματα. Π.χ. πολλές φορές έχουμε την ανάγκη για υπολογισμό κάποιου **ορισμένου ολοκληρώματος** που, ως γνωστόν, αφού η **πράξη της ολοκλήρωσης δεν είναι κλειστή στο σύνολο των στοιχειωδών συναρτήσεων**, το ολοκλήρωμα αυτό μπορεί να μην υπολογίζεται.

Αυτή η αδυναμία, όμως, είναι δυνατόν να ξεπερασθεί με χρήση προσεγγιστικών πολυωνύμων και έτσι να μπορέσουμε να υπολογίσουμε την τιμή του ολοκληρώματος με όση ακρίβεια επιθυμούμε. **Το πρακτικό αποτέλεσμα** είναι να μπορούμε να δίδουμε απαντήσεις με χρήση των προσεγγιστικών συναρτήσεων σε ερωτήματα και θέματα που προηγούμενα δηλώναμε αδυναμία.

Μια άλλη περίπτωση είναι εκείνη **των παρατηρήσεων ενός ορισμένου φαινομένου**, όπου η γνώση της συνάρτησης που διέπει το φαινόμενο είναι αυτή του συνόλου παρατηρήσεων:

$$\{\mathbf{x_k}, \varphi(\mathbf{x_k}),\ \mathbf{k} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{n}\}$$

οπότε εάν θέλαμε **το ρυθμό μεταβολής**, δηλαδή την $\varphi'(x)$ σε κάποιο σημείο του διαστήματος παρατηρήσεων $(\mathbf{x_0}, \mathbf{x_n})$ πάλι, με χρήση κάποιας προσεγγιστικής συνάρτησης, θα μπροούσαμε και πάλι να δώσουμε απάντηση στο ερώτημα αυτό.

Κοντολογής, υπάρχει μια πλειάδα περιπτώσεων που η χρήση προσεγγιστικών συναρτήσεων μας είναι πολύτιμη.

Τέλος, η παρουσία και οι δυνατότητες των σημερινών Η.Υ. μας επιβοηθούν αφάνταστα, όπως θα δούμε παρακάτω, με **τη χρήση βιβλιοθηκών των πακέτων εφαρμογών**.

4. Πολυωνυμικές Προσεγγιστικές Συναρτήσεις

Η χρήση πολυωνυμικών συναρτήσεων παρουσιάζει ένα ιδιαίτερο ρόλο, αφού το πολυώνυμο ως συνάρτηση εύκολα μπορεί να ολοκληρωθεί, να βρεθεί η παράγωγός του, αλλά έχουμε κι ένα βέλτιστο τρόπο για να υπολογίζουμε την τιμή του για τιμές της ανεξαρτήτου μεταβλητής του. Εκτός αυτού, υπάρχει κι ένας σημαντικός **θεωρητικός λόγος**, **το θεώρημα του Weierstrass**, με το οποίο εξασφαλίζεται η ύπαρξη πολυωνύμων κατάλληλου βαθμού που να προσεγγίζουν μια συνεχή συνάρτηση σ᾽ ένα κλειστό διάστημα με επιθυμητή ακρίβεια.

Πιο συγκεκριμένα:

Θεώρημα 1 (Θεώρημα Weierstrass) *Δίδεται η συνεχής συνάρτηση:*

$$\varphi(x) \mid [a, \beta].$$

Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ *υπάρχει ένα* $\nu = \nu(\varepsilon)$ *και ένα πολυώνυμο* $P_\nu(x)$, ν*-οστού βαθμού, τέτοιο ώστε να ισχύει:*

$$|\varphi(x) - P_\nu(x)| < \varepsilon, \qquad \forall x \in [a, \beta].$$

5. Παραδείγματα:

α. Γραμμική προσέγγιση: Η προσεγγίζουσα συνάρτηση είναι:

$$P_1(x) = Ax + B, \tag{1}$$

και αρκούν δύο σημεία του επιπέδου (x_0, y_0) και (x_1, y_1) για να προσδιοριστούν τα A και B από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} y_0 &= Ax_0 + B \\ y_1 &= Ax_1 + B, \end{aligned}$$

που εύκολα δίδουν για το A και B τις τιμές:

$$A = \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0} \qquad \text{και} \qquad B = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

που όταν αντικατασταθούν στην (1), η $P_1(x)$ γράφεται:

$$P_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot y_1 + \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot y_0. \tag{2}$$

Παρατηρήσεις:

(i) *Οι συντελεστές των συναρτησιακών τιμών (ονομάζονται και* ***συναρτήσεις βάρους****)*

$$\Lambda_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \ \Lambda_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

έχουν την χαρακτηριστική ιδιότητα:

$$\Lambda_0(x) + \Lambda_1(x) = 1. \tag{3}$$

(ii) *Οι παράγωγοι των συναρτήσεων βάρους (παραγωγίζοντας την 3) είναι:*

$$\Lambda_0'(x) + \Lambda_1'(x) = 0. \tag{4}$$

β. Δευτεροβάθμια προσέγγιση: η προσεγγίζουσα συνάρτηση είναι:

$$P_2(x) = Ax^2 + Bx + \Gamma$$

και προφανώς αρκούν τρία (3) διακεκριμένα σημεία του επιπέδου από τα οποία διέρχεται: (x_0, y_0), (x_1, y_1) και (x_2, y_2), για τον μονοσήμαντο ορισμό της, από τις σχέσεις:

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} Ax_0^2 + Bx_0 + \Gamma &=& y_0 \\ Ax_1^2 + Bx_1 + \Gamma &=& y_1 \\ Ax_2^2 + Bx_2 + \Gamma &=& y_2. \end{array} \right.$$

Το σύστημα (5) έχει πάντοτε λύση, η δε αντικατάσταση των τιμών των A, B και Γ στο $P_2(x)$ τελικά δίδουν:

(6)

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2.$$

Παρατήρηση: *Εύκολα μπορούμε να επιβεβαιώσουμε για τις συναρτήσεις βάρους:*

$$\begin{aligned}
\Lambda_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)},\\
\Lambda_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)},\\
\Lambda_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)},
\end{aligned}$$

τις ιδιότητες (3) *και* (4) *της πρωτοβάθμιας περίπτωσης:*

$$\begin{aligned}
\Lambda_0(x)+\Lambda_1(x)+\Lambda_2(x) &= 1\\
\Lambda_0'(x)+\Lambda_1'(x)+\Lambda_2'(x) &= 0.
\end{aligned}$$

6. Γενικευμένη Έκφραση Lagrange για το $\mathrm{P}_\nu(\mathrm{x})$

O Lagrange απέδειξε ότι το πολυώνυμο ν-οστού βαθμού που διέρχεται από $(\nu+1)$ διακεκριμένα σημεία:

$$\{(x_k, y_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots, \nu\} \tag{7}$$

δίδεται από την έκφραση:

$$P_\nu^{(\nu)}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_\nu)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_\nu)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_\nu)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_\nu)}y_1 + \cdots + \frac{(x-x_1)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{\nu-1})}{(x_\nu-x_0)(x_\nu-x_1)(x_\nu-x_2)\cdots(x_\nu-x_{\nu-1})}y_\nu. \tag{8}$$

Παρατηρήσεις:

1. Στην (8) *είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι οι συναρτήσεις βάρους:* $\Lambda_1^{(\nu)}(x), \Lambda_1^{(\nu)}(x), \ldots, \Lambda_\nu^{(\nu)}(x)$, *ικανοποιούν τις δύο προαναφερθείσες ιδιότητ- ες* (3) *και* (4)*:*

$$\sum_{k=0}^{\nu} \Lambda_k^{(\nu)}(x) = 1, \ \sum_{k=0}^{\nu} \Lambda_k^{(\nu)'}(x) = 0.$$

2. Για τις συναρτήσεις βάρους μπορούμε να αποδείξουμε και τις ακόλου- θες σχέσεις για $\mu = 1, 2, \ldots, \nu$*:*

$$\sum_{k=0}^{\nu} (x_k - x)^\mu \cdot \Lambda_k^{(\nu)}(x) = 0. \tag{9}$$

Παραδείγματα: (Εφαρμογής της (9) **στα** P_1 **και** P_2 **πολυώνυμα:)**

(i) Για τις συναρτήσεις βάρους $\Lambda_1(x)$ *και* $\Lambda_2(x)$ *του* $P_1(x)$ *η* (9) *γράφεται:*

$$
\begin{aligned}
(x_0 - x) \cdot \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + (x_1 - x) \cdot \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} &= \\
\frac{(x_0 - x)(x_1 - x)}{x_1 - x_0} - \frac{(x - x_1)(x - x_0)}{x_1 - x_0} &= 0.
\end{aligned}
$$

(ii) Για τις συναρτήσεις $\Lambda_0(x)$, $\Lambda_1(x)$ *και* $\Lambda_2(x)$ *του* $P_2(x)$ *η* (9) *δίδει:*

$$
\begin{aligned}
(x_0 - x) \cdot \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + (x_1 - x) \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + (x_2 - x) \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} &= \\
(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \left\{ -\frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_1 - x_2)} - \frac{1}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)} \right\} &= 0.
\end{aligned}
$$

7. Θεώρημα Μονοσήμαντου του $\mathrm{P}_\nu(\mathrm{x})$

Θεώρημα 2 *Δίδονται τα $\nu+1$ διακεκριμένα σημεία του επιπέδου:*

$$(x_k, y_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots, \nu.$$

Υπάρχει ένα και μόνο ένα πολυώνυμο το πολύ ν-οστού βαθμού που λαμβάνει στα σημεία x_k τις τιμές y_k.

Απόδειξη: *Προφανώς ένα τέλειο πολυώνυμο είναι το P_ν της σχέσεως* (8). *Έστω ότι υπάρχει και ένα άλλο $Q_\nu(x)$: $Q_\nu(x_k) = y_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, \nu$. Σχηματίζω την διαφορά τους:*

(10) $$\Delta(x) = P_\nu(x) - Q_\nu(x).$$

Προφανώς το $\Delta(x)$ είναι πολυώνυμο το πολύ ν-οστού βαθμού και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\Delta(x) = P_\nu(x_k) - Q_\nu(x_k) = y_k - y_k = 0, \; k = 0, 1, 2, \ldots, \nu,$$

δηλαδή τα $\nu + 1$ σημεία x_k είναι ρίζες του $\Delta(x)$, που ως πολυώνυμο το πολύ ν-οστού βαθμού, μπορεί να έχει το πολύ ν ρίζες, άλλως είναι το εκ ταυτότητως μηδενικό πολυώνυμο, όπως είναι στην προκειμένη περίπτωση, δηλαδή:

$$\Delta(x) \equiv 0 \longrightarrow P_\nu(x) - Q_\nu(x) \equiv 0 \longrightarrow P_\nu(x) \equiv Q_\nu(x),$$

πράγμα που αποδεικνύει ***το μονοσήμαντο*** *του προσεγγιστικού πολυωνύμου (Interpolating polynomial), που ονομάζεται και* ***παρεμβολικό πολυώνυμο****.* ■

8. Δυσκαμψία της Μορφής Lagrange - Μορφή Newton

Η μορφή (8) του προσεγγιστικού πολυωνύμου είναι ένα ενδιαφέρον εργαλείο θεωρητικής έρευνας, έχει όμως μια πρακτική «δυσκαμψία», όταν κανείς εργαζόμενος σε εφαρμοσμένα θέματα έχει την ανάγκη να μειώνει ή να αυξάνει το πλήθος των παρατηρήσεων· ακόμη για την προσθαφαίρεση και μιας και μόνο παρατήρησης, **όλοι οι συντελεστές** του πολυωνύμου Lagrange **μεταβάλλονται**, πράγμα ανεπιθύμητο για τις εφαρμογές. Αυτή την αδυναμία της μορφής Lagrange, την ξεπερνάει η μορφή Newton, η οποία είναι πλήρως «**ευέλικτη**» και τίποτε δεν μεταβάλλεται από τον προηγούμενο κόπο μας σε αντίστοιχη περίπτωση, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Η μορφή Newton για τα ίδια σημεία παρατηρήσεων (7) δίδεται από το ακόλουθο πολυώνυμο ν-οστού βαθμού:

(11)
$$P_\nu^{(N)}(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) +$$
$$+ \cdots + a_{\nu-1}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{\nu-2}) + a_\nu(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{\nu-2})(x-x_{\nu-1}),$$

όπου οι συντελεστές $a_0, a_1, \ldots, a_{\nu-1}, a_\nu$ εύκολα υπολογίζονται από τη λύση του κάτω τριγωνικού συστήματος:

$$P_\nu^{(N)}(x_k) = y_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \nu$$

που αναλυτικά γράφεται, όπως εύκολα διαπιστώνεται:

$$(12)\quad \left\{ \begin{array}{lcl} P_\nu^{(N)}(x_0) & = & y_0 = a_0 \\ P_\nu^{(N)}(x_1) & = & y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0) \\ P_\nu^{(N)}(x_2) & = & y_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ \vdots & & \\ P_\nu^{(N)}(x_\nu) & = & y_\nu = a_0 + a_1(x_\nu - x_0) + \cdots + a_\nu(x_\nu - x_0)(x_\nu - x_1)\cdots(x_n u - x_{\nu-1}). \end{array} \right.$$

Η λύση του κάτω τριγωνικού συστήματος (10) αποδίδεται εύγλωττα με χρήση των «**διηρημένων διαφορών**»:

$$a_k = y\left[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k\right],$$

που ως γνωστού αναλύεται στην:

(13) $$a_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{y_i}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{k} (x_i - x_j)},$$

Παραδείγματα:

1. Για την πρωτοβάθμια μορφή Newton θα έχουμε:

(14) $$P_1^{(N)}(x) = y[x_0] + y[x_0, x_1](x - x_0)$$

με:

(15) $$\left\{ \begin{array}{rcl} y[x_0] & = & y_0 \\ y[x_0, x_1] & = & \frac{y_0}{x_0 - x_1} + \frac{y_1}{x_1 - x_0}. \end{array} \right.$$

Η αντικατάσταση των (15) στην (14) και εκτέλεση των πράξεων μας δίδει την (2). 2. Για τη δευτεροβάθμια περίπτωση θα έχουμε

$$(16) \qquad P_2^{(N)}(x) = y[x_0] + y[x_0,x_1](x-x_0) + y[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

με:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y[x_0] &=& y_0 \\ y[x_0,x_1] &=& \frac{y_0}{x_0-x_1} + \frac{y_1}{x_1-x_0} \\ y[x_0,x_1,x_2] &=& \frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}. \end{array} \right.$$

Η αντικατάσταση των (17) στην (16) δίδει:

$$P_2^{(N)}(x) = y_0 + \left(\frac{y_0}{x_0-x_1} + \frac{y_1}{x_1-x_0}\right)(x-x_0) +$$

$$+ \left\{\frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\right\}(x-x_0)(x-x_1),$$

που με αναγωγή των ομοίων όρων γράφεται:

$$
\begin{aligned}
P_2^{(N)}(x) &= \left\{1+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\right\}y_0+ \\
&\quad+\left\{\frac{x-x_0}{x_1-x_0}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\right\}y_2+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}= \\
&= \frac{(x_0-x_1)(x_0-x_2)+(x-x_0)(x_0-x_2)+(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+ \\
&\quad+\frac{(x_1-x_2)(x-x_0)+(x-x_0)(x-x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2,
\end{aligned}
$$

Τέλος, οι πράξεις στους αριθμητές των 2 πρώτων όρων δίδουν:

$$
P_\nu^{(N)}(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2,
$$

που είναι ακριβώς η (6) της μορφής Lagrange, πράγμα που επαληθεύει την μοναδικότητα του πεδίου.

9. Παρατηρήσεις

α. Από την μορφή του πολυωνύμου Newton (9), είναι σαφές, ότι η πρόσθεση ενός επί πλέον σημείου παρατηρήσεων $(x_{\nu+1}, y_{\nu+1})$ εκείνο το οποίο θα απαιτήσει είναι η πρόσθεση ενός επί πλέον όρου στην μορφή (9) του:

$$a_{\nu+1}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{\nu-1})(x-x_\nu),$$

ενώ όλοι οι προηγούμενοι όροι θα παραμείνουν οι ίδιοι, **χωρίς καμία αλλαγή**.

Όμοια η αφαίρεση ενός σημείου παρατηρήσεων, π.χ. του (x_ν, y_ν) από τα σημεία (7), εκείνο το οποίο θα προκαλέσει στην (9) είναι η παράληψη του τελευταίου όρου του $P_\nu^{(N)}(x)$, δηλαδή του:

$$a_\nu(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{\nu-1}),$$

και το υπόλοιπο θα είναι ακριβώς το επιθυμητό πολυώνυμο $(\nu-1)$ βαθμού.

β. Η πρακτική εφαρμογή του πολυωνύμου Newton διευκολύνεται με την παραγωγή ενός κατάλληλου πίνακα, που προκύπτει εάν κάνουμε χρήση του αναγωγικού τύπου που ισχύει για τις διηρημένες διαφορές και βάσει οποίου η διηρημένη διαφορά ν-οστής τάξεως εκφράζεται με την βοήθεια των διηρημένων διαφορών $(\nu-1)$ τάξεως (να αποδειχθεί):

$$y[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\nu] = \frac{y[x_1, x_2, \ldots, x_\nu] - y[x_0, x_1, \ldots, x_{\nu-1}]}{x_\nu - x_0}. \tag{18}$$

γ. Το παρακάτω παράδειγμα χρήσης πινάκων διηρημένων διαφορών για πολυώνυμα μέχρι και τετάρτου βαθμού είναι βοηθητικό για την εν γένει σύλληψη.

Κατ᾽ αρχή ας εφαρμόσουμε τον (18) για τον υπολογισμό των πρώτων και δεύτερων Δ.Δ.·

έτσι έχουμε:

$$\varphi[x_0, x_1] = \frac{\varphi(x_1)-\varphi(x_0)}{x_1-x_0}$$ [η κλίση της $\varphi(x)$ στο διάστημα (x_0, x_1)]

$$\varphi[x_1, x_2] = \frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$\varphi[x_0, x_1, x_2] = \frac{\varphi[x_1,x_2]-\varphi[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$

$$\varphi[x_1, x_2, x_3] = \frac{\varphi[x_2,x_3]-\varphi[x_1,x_2]}{x_3-x_1},$$

και εύκολα συμπεραίνουμε ότι κάθε Δ.Δ. είναι συνάρτηση μόνο των 2 προηγούμενων, που την περιέχουν, και έτσι ο παρακάτω πίνακας είναι εύκολο να συνταχθεί:

Πίνακας Δ.Δ. για 5 σημεία προσέγγισης (μέχρι 4ου βαθμού)

x_k	$\varphi(x_k)$	1η Δ.Δ.	2η Δ.Δ.	3η Δ.Δ.	4η Δ.Δ.
x_0	$\underline{\varphi(x_0) = \varphi[x_0]}$				
		$\underline{\varphi[x_0, x_1]}$			
x_1	$\varphi(x_1)$		$\underline{\varphi[x_0, x_1, x_2]}$		
		$\varphi[x_1, x_2]$		$\underline{\varphi[x_0, x_1, x_2, x_3]}$	
x_2	$\varphi(x_2)$		$\varphi[x_1, x_2, x_3]$		$\underline{\varphi[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]}$
		$\varphi[x_2, x_3]$		$\varphi[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
x_3	$\varphi(x_3)$		$\varphi[x_2, x_3, x_4]$		
		$\varphi[x_1, x_2]$			
x_4	$\varphi(x_4)$				

Τέλος, **οι συντελεστές των πολυωνύμων Newton είναι ακριβώς τα στοιχεία της πρώτης διαγωνίου που κατέρχεται** και έχουν υποσημειωθεί.

Παράδειγμα: *Ως παράδειγμα ας κατασκευάσουμε το πολυώνυμο* $P_4^{(N)}(x)$ *για τα σημεία παρατηρήσεων:*

$$\{(-4,1245),(-1,33),(0,5),(2,5), \quad \textit{και} \quad (5,1335)\}$$

Ο παρακάτω πίνακας των Δ.Δ. είναι εύκολα κατασκευάσιμος με τους διαδοχικούς υπολογισμούς των διαφόρων τάξεων Δ.Δ.:

x_k	y_k	1η Δ.Δ.	2η Δ.Δ.	3η Δ.Δ.	4η Δ.Δ.
-4	$\mathbf{1245}$				
		$\frac{33-1245}{-1-(-4)} = \underline{\mathbf{-404}}$			
-1	33		$\frac{-28-(-404)}{0-(-4)} = \underline{\mathbf{94}}$		
		$\frac{5-33}{0-(-1)} = \underline{-28}$		$\frac{10-94}{2-(-4)} = \underline{\mathbf{-14}}$	
0	5		$\frac{2-(-28)}{2-(-1)} = \underline{10}$		$\frac{13-(-14)}{5-(-4)} = \underline{\mathbf{3}}$
		$\frac{9-5}{2-0} = \underline{2}$		$\frac{88-10}{5-(-1)} = \underline{13}$	
2	9		$\frac{442-2}{5-0} = \underline{88}$		
		$\frac{1335-9}{5-2} = \underline{442}$			
5	1335				

Έτσι, με χρήση των στοιχείων της πρώτης κατερχόμενης διαγωνίου θα έχουμε το πολυώνυμο:

$$P_4^{(N)}(x) =$$
$$= 1245 - 404(x+4) + 94(x+4)(x+1) - 14(x+4)(x+1)x + 3(x+4)(x+1)x(x-2) =$$
$$= 3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 14x + 5.$$

δ. Ο προηγούμενος πίνακας των διηρημένων διαφορών παρά την απλότητα του παρουσιάζει μια δυσκολία και αυτή είναι η διαίρεση που εμπεριέχει σε κάθε υπολογισμό της Δ.Δ., πράγμα που δεν είναι επιθυμητό. Επιπρόσθετα, πολλές φορές, **οι παρατηρήσεις των φαινομένων γίνονται σε τακτά χρονικά διαστήματα**, πράγμα που υποδηλώνει ότι οι συντεταγμένες x_k παρουσιάζουν την αξιοσημείωτη ιδιότητα **οι διαδοχικές παρατηρήσεις να ισαπέχουν**, δηλαδή να ισχύει: $x_k = x_0 + kn$, όπου n είναι μια σταθερή ποσότητα. Το ενδιαφέρον είναι ότι σ' αυτές τις περιπτώσεις μπορεί κανείς να αποδείξει **δύο χαρακτηριστικές ισότητες** που απλοποιούν τους υπολογισμούς προσδιορισμού του παρεμβολικού πολυωνύμου.

Οι ισότητες αυτές είναι:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \prod_{k=0}^{\nu-1} (x - x_k) \right\} \cdot \varphi[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\nu] = \left(\begin{array}{c} \xi \\ \nu \end{array} \right) \Delta^\nu \varphi_0, \\ \left\{ \prod_{k=\nu}^{\nu-\mu+1} (x - x_k) \right\} \cdot \varphi[x_\nu, x_{\nu-1}, \ldots, x_{\nu-\mu+1}] = (-1)^\mu \left(\begin{array}{c} -\xi \\ \nu \end{array} \right) \nabla^\mu \varphi_\nu, \end{array} \right.$$

με $x = x_0 + \xi n$.

Με την βοήθεια των προηγούμενων ισοτήτων, η μορφή Newton παίρνει τις ακόλουθες μορφές με **εμπρόσθιες** και **οπίσθιες** διαφορές (για ενδεδειγμένες προσεγγίσεις στην **αρχή** και το **τέλος** του πεδίου ορισμού):

(19) $P_\nu(x) = P_\nu(x_0 + \xi n) = \varphi_0 + \left(\begin{array}{c} \xi \\ 1 \end{array} \right) \Delta \varphi_0 + \left(\begin{array}{c} \xi \\ 2 \end{array} \right) \Delta^2 \varphi_0 + \cdots + + \left(\begin{array}{c} \xi \\ n \end{array} \right) \Delta^n \varphi_0,$ με $\xi > 0$,

και

(20)

$P_\nu(x) = P_\nu(x_\nu + \xi n) = \varphi_n - \left(\begin{array}{c} -\xi \\ 1 \end{array} \right) \nabla \varphi_n + \left(\begin{array}{c} -\xi \\ 2 \end{array} \right) \nabla^2 \varphi_n - \cdots + (-1)^\nu \left(\begin{array}{c} -\xi \\ \nu \end{array} \right) \nabla^\nu \varphi_n$ με $\xi < 0$.

Οι παραπάνω τύποι φέρουν το όνομα **των Newton-Gregory** και απλοποιούν την μορφή του παρεμβολικού πολυωνύμου **στην περίπτωση όπου οι παρατηρήσεις είναι ισαπέχουσες**, επειδή δε εμπεριέχουν **εμπρόσθιες** και **οπίσθιες** διαφορές με την γνωστή απλή δομή τους, είναι σαφώς απλούστερες στην εφαρμογή από την μορφή (9).

10. Τελεστές Διαφορών

Σε μια συνεχή συνάρτηση $\varphi(x)|\mathbb{R}$ και για κάποιο $n \in \mathbb{R}$, έχουμε τους ακόλουθους ορισμούς:

α. Η **προς τα εμπρός διαφορά της** $\varphi(\mathrm{x})$ **στο** x, ορίζεται από την:

$$\Delta\varphi(x) = \varphi(x+n) - \varphi(x). \tag{21}$$

β. Η **προς τα πίσω διαφορά της** $\varphi(\mathrm{x})$ **στο** x, ορίζεται από την:

$$\nabla\varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(x-n). \tag{22}$$

γ. Η **κεντρική διαφορά της** $\varphi(\mathrm{x})$ **στο** x, ορίζεται από την:

$$\delta\varphi(x) = \varphi(x+\frac{n}{2}) - \varphi(x-\frac{n}{2}). \tag{23}$$

Οι τύποι (21), (22) και (23) γενικεύονται για διαφορές δευτέρας, τρίτης κλπ., τάξεως με επανειλλημένες εφαρμογές των παραπάνω τύπων. Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Delta^2}\varphi(\mathbf{x}) &= \Delta(\Delta\varphi(x)) = \Delta(\varphi(x+n)-\varphi(x)) = \underline{\varphi(\mathbf{x+2n}) - \mathbf{2}\varphi(\mathbf{x+n}) + \varphi(\mathbf{x})} \\
\nabla^{\mathbf{2}}\varphi(\mathbf{x}) &= \nabla(\nabla\varphi(x)) = \nabla(\varphi(x)-\varphi(x-n)) = \underline{\varphi(\mathbf{x}) - \mathbf{2}\varphi(\mathbf{x-n}) + \varphi(\mathbf{x-2n})} \\
\delta^{\mathbf{2}}\varphi(\mathbf{x}) &= \delta(\delta\varphi(x)) = \delta(\varphi(x+\tfrac{n}{2})-\varphi(x-\tfrac{n}{2})) = \underline{\varphi(\mathbf{x+n}) - \mathbf{2}\varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x-n})}
\end{aligned}$$

και γενικότερα για τα σημεία $x_k = x_0 + kn$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ με $\varphi_k = \varphi(x_k)$:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\Delta^k \varphi_\mu &= \sum_{\lambda=0}^{k} (-1)^\lambda \binom{k}{\lambda} \varphi_{\mu+k-\lambda}, \\
\nabla^k \varphi_\mu &= \sum_{\lambda=0}^{k} (-1)^\lambda \binom{k}{\lambda} \varphi_{\mu-\lambda}, \\
\delta^{2k} \varphi_\mu &= \sum_{\lambda=0}^{2k} (-1)^\lambda \binom{2k}{\lambda} \varphi_{\mu+k-\lambda}.
\end{aligned}
\right.
\tag{24}
$$

Παραδείγματα: *Τα ακόλουθα σημεία* $\{(0,5),(1,3),(2,7),(3,23),(4,57)\}$ *έχουν ληφθεί από την πολυωνυμική συνάρτηση:* $\varphi(x) = x^3 - 3x + 5$, *και μ᾽ αυτά σαν βάση ας δημιουργήσουμε τους τρεις πίνακες των αντίστοιχων διαφορών.*

α. Πίνακας των εμπρός διαφορών (Δ):

x_k	y_k	1η Διαφορά	2η Διαφορά	3η Διαφορά	4η Διαφορά
0	5				
		$\Delta\varphi_0 = -2$			
1	3		$\Delta^2\varphi_0 = 6$		
		$\Delta\varphi_1 = 4$		$\Delta^3\varphi_0 = 6$	
2	7		$\Delta^2\varphi_1 = 12$		$\Delta^4\varphi_0 = 0$
		$\Delta\varphi_2 = 16$		$\Delta^2\varphi_1 = 6$	
3	23		$\Delta^2\varphi_2 = 18$		
		$\Delta\varphi_3 = 34$			
4	57				

β. Πίνακας των πρός τα πίσω διαφορών (∇):

x_k	y_k	1η Διαφορά	2η Διαφορά	3η Διαφορά	4η Διαφορά
0	5				
		$\nabla\varphi_1 = -2$			
1	3		$\nabla^2\varphi_2 = 6$		
		$\nabla\varphi_2 = 4$		$\nabla^3\varphi_3 = 6$	
2	7		$\nabla^2\varphi_3 = 12$		$\nabla^4\varphi_4 = 0$
		$\nabla\varphi_3 = 16$		$\nabla^2\varphi_4 = 6$	
3	23		$\nabla^2\varphi_4 = 18$		
		$\nabla\varphi_4 = 34$			
4	57				

γ. Πίνακας κεντρικών διαφορών (δ):

x_k	y_k	1η Διαφορά	2η Διαφορά	3η Διαφορά	4η Διαφορά
0	5				
		$\delta\varphi_{\frac{1}{2}} = -2$			
1	3		$\delta^2\varphi_1 = 6$		
		$\delta\varphi_{\frac{3}{2}} = 4$		$\delta^3\varphi_{\frac{3}{2}} = 6$	
2	7		$\delta^2\varphi_2 = 12$		$\delta^4\varphi_2 = 0$
		$\delta\varphi_{\frac{5}{2}} = 16$		$\delta^2\varphi_{\frac{5}{2}} = 6$	
3	23		$\delta^2\varphi_3 = 18$		
		$\delta\varphi_{\frac{7}{2}} = 34$			
4	57				

Παρατηρήσεις:

(i) ***Αριθμητικά, οι τρεις πίνακες συμπίπτουν*** *(κατά συνέπεια υπάρχει ένας και μόνο πίνακας διαφορών) στα στοιχεία δε αυτού του κοινού πίνακα δίδουμε διάφορες ονομασίες ανάλογα με την κατεύθυνση.*

(ii) ***Οι διαφορές συμπεριφέρονται όμοια με τις παραγώγους***· έτσι οι τρίτες διαφορές των τιμών ενός τριτοβάθμιου πολυωνύμου ήταν σταθερές ενώ η τέταρτη διαφορά ήταν μηδενική, όπως αναμένετο.

(iii) Εύκολα αποδεικνύεται ότι ***οι τελεστές διαφορών ικανοποιούν τις σχέσεις*** (γινόμενο και πηλίκο):

$$\begin{aligned}
\Delta(\varphi_k \cdot y_k) &= \varphi_{k+1}\Delta y_k + \Delta\varphi_k \cdot y_k = y_{k+1}\Delta\varphi_k + \varphi_k \Delta y_k, \\
\Delta(\varphi_k \big/ y_k) &= (y_k \Delta\varphi_k - \varphi_k \Delta y_k) \Big/ \Big(y_{k+1} \cdot y_k\Big), \\
\Delta^k(ax^k) &= a \cdot k! n^k.
\end{aligned}$$

(iv) Επίσης εύκολα αποδεικνύεται ότι (με επαγωγή):

$$\begin{aligned}
\varphi[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\nu] &= \frac{\Delta^\nu \varphi_0}{\nu! n^\nu} \\
\varphi[x_\nu, x_{\nu-1}, \ldots, x_2, x_1, x_0] &= \frac{\nabla^\nu \varphi_\nu}{\nu! n^\nu}.
\end{aligned}$$

(v) Συμπληρωματικος τύπος παρεμβολικού πολυωνύμου στις μορφές (19) και (20) είναι ο ακόλουθος τύπος του Everett, Που είναι κατάλληλος για προσεγγίσεις στο κέντρο του πεδίου ενδιαφέροντος (x_0, x_ν), *όπου θα θεωρήσουμε ότι είναι τα σημεία* x_0 *και* x_1 *· ενώ το* $\mu = 1-\xi > 0$*:*

$$P_\nu(x) = P_\nu(x_0+\mu n) = \mu\varphi_1 + \frac{\mu(\mu^2-1)}{3!}\delta^2\varphi_1 + \cdots + \frac{\mu(\mu^2-1)(\mu^2-4)\cdots(\mu^2-\lambda^2)}{(2\lambda+1)!}\delta^{2\lambda}\varphi_1 + \xi\varphi_0 + \frac{\xi(\xi^2-1)}{3!}\delta^2\varphi_0 + \cdots + \frac{\xi(\xi^2-1)(\xi^2-4)\cdots(\xi^2-\lambda^2)}{(2\lambda+1)!}\delta^{2\lambda}\varphi_0. \quad (25)$$

Προφανώς το πλήθος των σημείων παρεμβολής πρέπει να είναι ένας άρτιος αριθμός, για να υπάρχει κεντρικό διάστημα (x_0, x_1).

11. Παράδειγμα

Στον παρακάτω πίνακα κεντρικών διαφορών, εύρατε στην μορφή του πολυωνύμου Everett (ως προς μ) για το **κεντρικό διάστημα (2,3)** του πεδίου ορισμού (ένα πολυώνυμο 5ου βαθμού):

x_k	y_k	δ	δ^2	δ^3	δ^4
0	0				
		-1			
1	-1		10		
		9		108	
2	$\boxed{8}$		$\boxed{118}$		$\boxed{216}$
		127		324	
3	$\boxed{135}$		$\boxed{442}$		$\boxed{336}$
		569		660	
4	704		1102		
		1671			
5	2375				

Το πολυώνυμο Everett στο κεντρικό διάστημα (2,3) γράφεται: $\{x_0 = 2, x_1 = 3\}$:

$$\begin{aligned} P_\nu(x) = &\mu\varphi_1 + \frac{\mu(\mu^2-1)}{3!}\delta^2\varphi_1 + \frac{\mu(\mu^2-1)(\mu^2-4)}{5!}\delta^4\varphi_1 + \\ &+ \xi\varphi_0 + \frac{\xi(\xi^2-1)}{3!}\delta^2\varphi_0 + \frac{\xi(\xi^2-1)(\xi^2-4)}{5!}\delta^4\varphi_0, \end{aligned}$$

με τις κυκλωμένες τιμές να είναι εκείνες που λαμβάνονται και αντικαθιστώντας το $\xi = 1 - \mu$, τελικά λαμβάνουμε:

$$P_\nu(x) = \mu^5 - \mu^4 - \mu^3 \mid \mu \in [2,3]$$

(βλέπετε και εφαρμογή βιβλίου στη σελίδα 177).

12. Υπολογισμοί Σφάλματος Παρεμβολικού Πολυωνύμου

Για το σφάλμα της προσέγγισης του παρεμβολικού πολυωνύμου ισχύει το παρακάτω θεώρημα 3:

Θεώρημα 3 *Δίδονται τα ακόλουθα* $\nu+1$ *σημεία παρεμβολής του* $[a,\beta]$: $[x_k,\varphi(x_k)]$, $k=0,1,2,\ldots,\nu$ *και υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι* $\nu+1$ *παράγωγοι που είναι συνεχείς. Τέλος, δίδεται ότι υπάρχει και η* $\varphi^{(\nu+1)}(x)|(a,\beta)$. *Τότε, για κάθε* $x\in[a,\beta]$ *υπάρχει ένα* $\xi_x\in(a,\beta)$ *τέτοιο ώστε να ισχύει:*

$$(26) \qquad \varphi(x)-P_\nu(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_\nu)}{(\nu+1)!}\cdot\varphi^{(\nu+1)}(\xi_x).$$

Απόδειξη: *(Για την απόδειξη βλέπε σελίδα 179 του βιβλίου σας),* ■

Παράδειγμα: *Ας υποθέσουμε ότι έχουμε γραμμική προσέγγιση σε δύο σημεία* x_0 *και* x_1 *και ας υποθέσουμε ότι η προσεγγιζόμενη συνάρτηση ικανοποιεί τη σχέση:*

$$|\varphi''(x)|\leq M, \quad \text{με} \quad M>0 \ \forall x\in(x_0,x_1).$$

Από την (26) εύκολα λαμβάνουμε το φράγμα προσέγγισης:

$$|\varphi(x) - P_1(x)| \leq \frac{M}{2} \max_{x\in(x_0,x_1)} |(x-x_0)(x-x_1)| . \tag{27}$$

Ως γνωστόν, όμως, ισχύει (να αποδειχθεί):

$$\max_{x\in(x_0,x_1)} |(x-x_0)(x-x_1)| = \frac{1}{4}(x_0-x_1)^2,$$

οπότε η (27) γίνεται τελικά:

$$|\varphi(x) - P_1(x)| \leq \frac{M}{8}(x_0-x_1)^2. \tag{28}$$

Η (28) έχει εφαρμογή στις διάφορες πινακοποιήσεις τριγωνομετρικών συναρτήσεων, όπως π.χ. της ***ημx****, της οποίας η δεύτερη παράγωγος φράσσεται απολύτως από την μονάδα, ενώ οι πίνακες συντάσσονται με βήμα 0.01, οπότε από την (28) εύκολα προκύπτει η τάξη της προσέγγισης:*

$$|\varphi(x) - P_1(x)| \leq 0.125 \cdot 10^{-4}, \tag{29}$$

δηλαδή περίπου ***5 δεκαδικά ψηφία****, ακρίβεια των πινάκων.*

Παρατήρηση: *Αποδεικνύεται ότι η έκφραση του σφάλματος της πολυωνυμικής προσέγγισης $E(x)$ δίδεται με τη βοήθεια των Δ.Δ. από τον ακόλουθο τύπο:*

$$E(x) = \varphi(x) - P_\nu(x) = \prod_{k=0}^{\nu} (x - x_k) \cdot \varphi[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\nu, x] \tag{30}$$

(Για την απόδειξη της (30) *βλέπε βιβλίο, σελ. 181).*

13. Ελαχιστοποίηση του Σφάλματος της Προσέγγισης

Ένα σημαντικό θέμα που συνδέεται με την εκτίμηση του σφάλματος του παρεμβολικού πολυωνύμου, είναι αυτό **της ελαχιστοποίησής** του, για την βέλτιστη προσέγγιση.

Από τον τύπο (26) είναι προφανές ότι η ελαχιστοποίηση μπορεί να επιτευχθεί με κατάλληλη επιλογή των σημείων προσέγγισης:

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\nu,$$

έτσι ώστε **να ελαχιστοποιήσουμε** την ποσότητα:

$$\max_{a \le x \le \beta} \left[\prod_{k=0}^{\nu} (x - x_k) \right], \tag{31}$$

πράγμα που θα ελαχιστοποιήσει και το απόλυτο σφάλμα της όλης προσέγγισης, όπως εύκολα φαίνεται στην (26).

Η ελαχιστοποίηση της (31) αποτελεί **το περίφημο κλασσικό πρόβλημα του ελαχιστομέγιστου (minimax problem)**, που η λύση του δόθηκε το 1894 από τον $Chebysev$, που απέδειξε ότι αυτό επιτυγχάνεται εάν ως σημεία παρατηρήσεων ληφθούν όχι ισαπέχοντα σημεία του διαστήματος $[a, \beta]$, αλλά τα εξής:

$$x_k = \frac{1}{2} \left\{ \beta + a - (\beta - a) \sigma\upsilon\nu \frac{(2k+1)\pi}{2(\nu+1)} \right\}, \; k = 0, 1, 2, \ldots, \nu \tag{32}$$

που συνδέεται άμεσα με **τις** $\nu+1$ **ρίζες του πολυωνύμου Chebysev** $\mathbf{T}_{\nu+1}(\mathbf{x})$, οπότε τότε θα έχουμε:

$$\text{(33)} \qquad \min_{x_k}\left\{\max_{a\le x\le\beta}|\varphi(x)-P_\nu(x)|\right\} \le \frac{2M}{(\nu+1)!}\left(\frac{\beta-a}{4}\right)^{\nu+1},$$

όπου M είναι το άνω φράγμα της $\varphi^{(\nu+1)}(x)|[a,\beta]$.

Σημείωση: *Τα πολυώνυμα Chebysev ορίζονται στο διάστημα* $[-1,1]$ *(τα δε 9 πρώτα δίδινται στο Παράρτημα Γ του βιβλιου σας, στη σελίδα 293), έχουν τη χαρακτηριστική ιδιότητα να ικανοποιούν την τριμελή αναδρομική σχέση για* $\nu=2,3,\ldots$

$$T_\nu(x)=2xT_{\nu-1}(x)-T_{\nu-2}(x) \quad \mu\varepsilon \quad T_0(x)=1,\ T_1(x)=x,$$

έχουν όλες τις ρίζες τους στο διάστημα [-1,1] και παρουσιάζουν την εξαιρετική ιδιότητα να ***έχουν ακρότατα*** ψ_{k} ***ένα επί πλέον του βαθμού των****, τα:*

$$\psi_k=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{k\pi}{\nu}\right), k=0,1,2,\ldots,\nu-1,\nu.$$