ΕΛΛΑΔΑ
ΚΟΙΝΟΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΣΤΗΡΙΞΗΣ
2008
Ανάπτυξη παντού. Ανάπτυξη για όλους.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΤΑΜΕΙΟ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

ΠΑΙΔΕΙΑ ΜΠΡΟΣΤΑ
2ο Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

# Πρόγραμμα Αναμόρφωσης Προπτυχιακών Σπουδών

Τμήματος Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Πατρών

## Μάθημα: Αριθμητική Ανάλυση ΙΙ

## ΑΑΙΙ: 9η Εβδομαδα - 19 Απριλιου 2005

## Συναρτήσεις Splines - Piecewise Polynomials (Cubic Splines)

### 1. Το πρόβλημα

Μας δίδονται τα δεδομένα:

$$\{x_k, f(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots, N\},$$

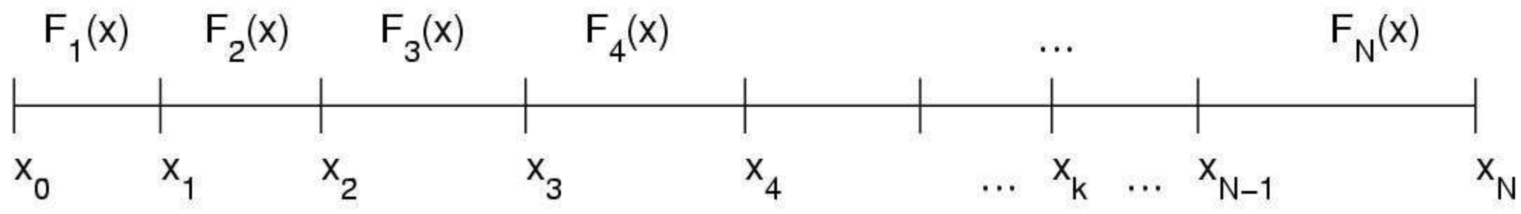
**Μας ζητείται** προσδιορίσουμε μία **κατά τμήματα συνεχή συνάρτηση** (πολυώνυμο), έτσι ώστε σε κάθε υποδιάστημα $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, μήκους $h_{k-1}$, **να ορίζεται ένα πολυώνυμο 3ου βαθμού**, $F_k(x)$, τέτοιο ώστε ικανοποιεί τις συνθήκες:

(1) $$F_k(x_i) = f(x_i),\ i = 0, 1, 2, \ldots, N$$

και

(2) $$F'_k(x_k-) = F'_{k+1}(x_k+),\ F''_k(x_k-) = F''_{k+1}(x_k+),\ k = 1, 2, \ldots, N-1,$$

Καθώς και **δύο επί πλέον συνθήκες που θα ορισθούν αργότερα στο σύνορο του πεδίου ορισμού**. Δηλαδή, η προσεγγίζουσα συνάρτηση θα έχει την μορφή:




με:

$$F(X) = \begin{array}{ll} F_1(x), & x_0 \leq x \leq x_1 \\ F_2(x), & x_1 \leq x \leq x_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ F_N(x), & x_{N-1} \leq x \leq x_N \end{array}$$

*και* $F_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, N$ ***πολυώνυμα το πολύ τρίτου βαθμού***

που είναι προφανώς συνεχής συνάρτηση με **συνεχείς πρώτες και δεύτερες** παραγώγους.

## 2. Κατασκευή

Η κατασκευή τους γίνεται ως εξής:

Για τυχαίο υποδιάστημα $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, η δεύτερη παράγωγος $F''(x)$ φυσικά θα είναι γραμμική, με τιμές δευτέρων παραγώγων, έστω τις:

$$M_{k-1} = F''_{k-1}(x_{k-1}-) = F''_k(x_{k-1}+), \quad k = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Άρα στο διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$, θα έχει ακραίες τιμές $M_{k-1}$ και $M_k$, οπότε προφανώς θα δίδεται από το γνωστό πρωτοβάθμιο πολυώνυμο $P_1(x)$, που διέρχεται από τα σημεία $(x_{k-1}, M_{k-1})$ και $(x_k, M_k)$:

$$F''(x) = M_{k-1}\frac{x_k - x}{x_k - x_{k-1}} + M_k\frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}. \tag{3}$$

Εάν ολοκληρώσουμε την (3), εύκολα λαμβάνουμε:

$$\int F''(x)dx = \int M_k - 1 \cdot \frac{x_k - x}{x_k - x_{k-1}}dx + \int M_k\frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}dx,$$

ή

$$(4) \qquad F_k'(x) = -M_{k-1} \cdot \frac{(x_k - x)^2}{2h_k} + M_k \cdot \frac{(x - x_{k-1})^2}{2h_k} + c_1,$$

με $c_1$ τη σταθερά ολοκλήρωσης.

Νέα ολοκλήρωση της (4) μας δίδει παρομοίως την $F_k(x)$:

$$(5) \qquad F_k(x) = M_{k-1} \cdot \frac{(x_k - x)^3}{6h_k} + M_k \cdot \frac{(x - x_{k-1})^3}{6h_k} + c_1 x + c_2,$$

με $c_2$ τη νέα σταθερά ολοκλήρωσης.

Στη (5), οι σταθερές της ολοκλήρωσης $c_1$ και $c_2$ θα προσδιορισθούν από τις συνθήκες (1): $F_k(x_{k-1}) = f(x_{k-1})$ και $F_k(x_k) = f(x_k)$. Έτσι, λαμβάνουμε τις σχέσεις, από την (5), για $x = x_{k-1}$ και $x = x_k$:

$$f(x_{k-1}) = F_k(x_{k-1}) = M_{k-1}\frac{h_k^3}{6h_k} + M_k\frac{0}{6h_k} + c_1 x + c_2, \tag{6}$$

$$f(x_k) = F_k(x_k) = M_{k-1}\frac{0}{6h_k} + M_k\frac{h_k^3}{6h_k} + c_1 x_k + c_2. \tag{7}$$

Από το σύστημα των (6) και (7), εύκολα έχουμε από την λύση του ως προς $c_1$ και $c_2$:

$$c_1 = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1}) - (M_k - M_{k-1})(\frac{h_k^2}{6})}{h_k}, \tag{8}$$

$$c_2 = \frac{x_k f(x_{k-1}) - x_{k-1} f(x_k) - (x_k M_{k-1} - x_{k-1} M_k)(\frac{h_k^2}{6})}{h_k}. \tag{9}$$

Λόγω των (8) και (9), η (5) γίνεται όταν αντικαταστήσουμε τα $c_1$ και

$c_2$:

$$F_k(x) = M_{k-1}\left\{\frac{(x_k - x)[(x_k - x)^2 - h_k^2]}{6h_k}\right\} + M_k\left\{\frac{(x - x_{k-1})[(x - x_{k-1})^2 - h_k^2]}{6h_k}\right\} + \\ + \frac{1}{h_k} f(x_{k-1}) \cdot (x_k - x) + \frac{1}{h_k} f(x_k) \cdot (x - x_{k-1}). \tag{10}$$

Προφανώς, εάν γνωρίζαμε τις τιμές των $M_k$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$, τότε η (10) θα μας προσδιόριζε πλήρως τις ζητούμενες εκφράσεσι των εμπλεκόμενων τριτοβάθμιων πολυωνύμων.

Πράγμα που μπορούμε να επιτύχουμε εάν κάνουμε χρήση της πρώτης των συνθηκών (2): $F_k'(x_k-) = F_{k+1}'(x_k+)$ (**συνέχεια των πρώτων παραγώγων**), για τις οποίες λαμβάνουμε, με παραγώγιση της (10):

$$F_k'(x) = M_{k-1}\left[\frac{h_k^2 - 3(x_k - x)^2}{6h_k}\right] + M_k\left[\frac{(3(x - x_{k-1})^2 - h_k^2]}{6h_k}\right] + \frac{1}{h_k}[f_k - f_{k-1}].$$

Άρα:

$$\begin{aligned}F'_k(x_k-) =& M_{k-1}\frac{h_k}{6} + \frac{h_k}{3}M_k + \frac{1}{h_k}[f(x_k) - f(x_{k-1})] = F'_{k+1}(x_k+) = \\ &= -\frac{h_{k+1}}{3}M_k - \frac{h_{k+1}}{6}M_{k+1} + \frac{1}{h_{k+1}}[f(x_{k+1}) - f(x_k)],\end{aligned}$$

ή, μετά τον χωρισμό γνωστών και αγνώστων:

$$\begin{aligned}&\frac{h_k}{6}M_{k-1} + \frac{h_k + h_{k+1}}{3}M_k + \frac{h_{k+1}}{6}M_{k+1} = \\ &= \frac{1}{h_{k+1}}[f(x_{k+1}) - f(x_k)] - \frac{1}{h_k}[f(x_k) - f(x_{k-1})],\ k = 1, 2, \ldots, N-1\end{aligned} \tag{11}$$

Οι **σχέσεις** (11) **συνιστούν ένα γραμμικό σύστημα** $N-1$ εξισώσεων με $N+1$ αγνώστους: $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_N$· **δυνάμεθα να ορίσουμε δύο εξ αυτών κατά βούληση**, π.χ. τις $M_0$ και $M_N$ (συνοριακές), οπότε το λαμβανόμενο τριδιαγώνιο σύστημα έχει πάντοτε λύση, αφού ο πίνακας των συντελεστώτων αγνώστων είναι αυστηρώς διαγωνίως υπερτερών.

Πιο συγκεκριμένα έχουμε το ακόλουθο τριδιαγώνιο σύστημα:

(12)

$$\begin{bmatrix} \frac{h_1+h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{h_2}{6} & \frac{h_3+h_2}{3} & \frac{h_3}{6} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \frac{h_3}{6} & \frac{h_3+h_4}{3} & \frac{h_4}{6} & \cdots & 0 & 0 \\ & & \frac{h_4}{6} & \frac{h_4+h_5}{3} & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \cdots & \frac{h_{N-2}+h_{N-1}}{3} & \frac{h_{N-1}}{6} \\ & & & & & \frac{h_{N-1}}{6} & \frac{h_{N-1}+h_N}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ \vdots \\ M_{N-2} \\ M_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f_2-f_1}{h_2} - \frac{f_1-f_0}{h_1} - \frac{M_0 h_1}{6} \\ \frac{f_3-f_2}{h_3} - \frac{f_2-f_1}{h_2} \\ \frac{f_4-f_3}{h_4} - \frac{f_3-f_2}{h_3} \\ \frac{f_5-f_4}{h_5} - \frac{f_4-f_3}{h_4} \\ \vdots \\ \frac{f_{N-1}-f_{N-2}}{h_{N-1}} - \frac{f_{N-2}-f_{N-1}}{h_{N-2}} \\ \frac{f_N-f_{N-1}}{h_N} - \frac{f_{N-1}-f_{N-2}}{h_{N-1}} - \frac{M_N h_N}{6} \end{bmatrix}$$

Για ισαπέχοντα σημεία $h_0 = h_1 = \cdots = h_N = h$ και $M_0 = M_N = 0$, το

(12) γράφεται:

$$
\begin{bmatrix}
4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
1 & 4 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 & & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 1 & 4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & \cdots & 4 & 1 & 0 \\
 & & & & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ \vdots \\ M_{N-4} \\ M_{N-3} \\ M_{N-2} \\ M_{N-1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
f_2 - 2f_1 + f_0 \\
f_3 - 2f_2 + f_1 \\
f_4 - 2f_3 + f_2 \\
f_5 - 2f_4 + f_3 \\
f_6 - 2f_5 + f_4 \\
f_7 - 2f_6 + f_5 \\
\vdots \\
f_{N-3} - 2f_{N-4} + f_{N-5} \\
f_{N-2} - 2f_{N-3} + f_{N-4} \\
f_{N-1} - 2f_{N-2} + f_{N-3} \\
f_N - 2f_{N-1} + f_{N-2}
\end{bmatrix}
\cdot \frac{6}{h^2} \tag{13}
$$

## 3. Παράδειγμα

Έστω $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \mid 0 \le x \le 1$ και ας θεωρήσουμε τα 6 σημεία $x_0$ $, x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$, $x_4 = 0.8$, και $x_5 = 1.0$, και τις συνοριακές συνθήκες: $M_0 = M_5 = 0$ (προφανώς έχουν υποτεθεί οι συνθήκες ταύτισης (1): $F(x_k) = f(x) \mid x = x_k, k = 0, 1, \ldots, 5$). Το σύστημα (13) μας παρέχει τις τιμές των $M_1$, $M_2$, $M_3$, και $M_4$ που είναι:

$M_1 = -2.165813$, $M_2 = -0.487940$, $M_3 = 0.021771$, και $M_4 = 0.586379$,

ενώ από τις εκφράσεις (10) θα έχουμε τις τιμές της $F(x) \mid 0 \leq x \leq 1$ για $x \in [0, 1]$.

Έτσι, μπορούμε να πινακοποιήσουμε τις τιμές της κυβικής spline που έχουμε κατασκευάσει στο σύνολο, π.χ., $x_k = 0.0, 1.0, 0.02$, οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

**Πίνακας τιμών της $f(x)$, της $F(x)$ και $F_k(x) - f(x)$**

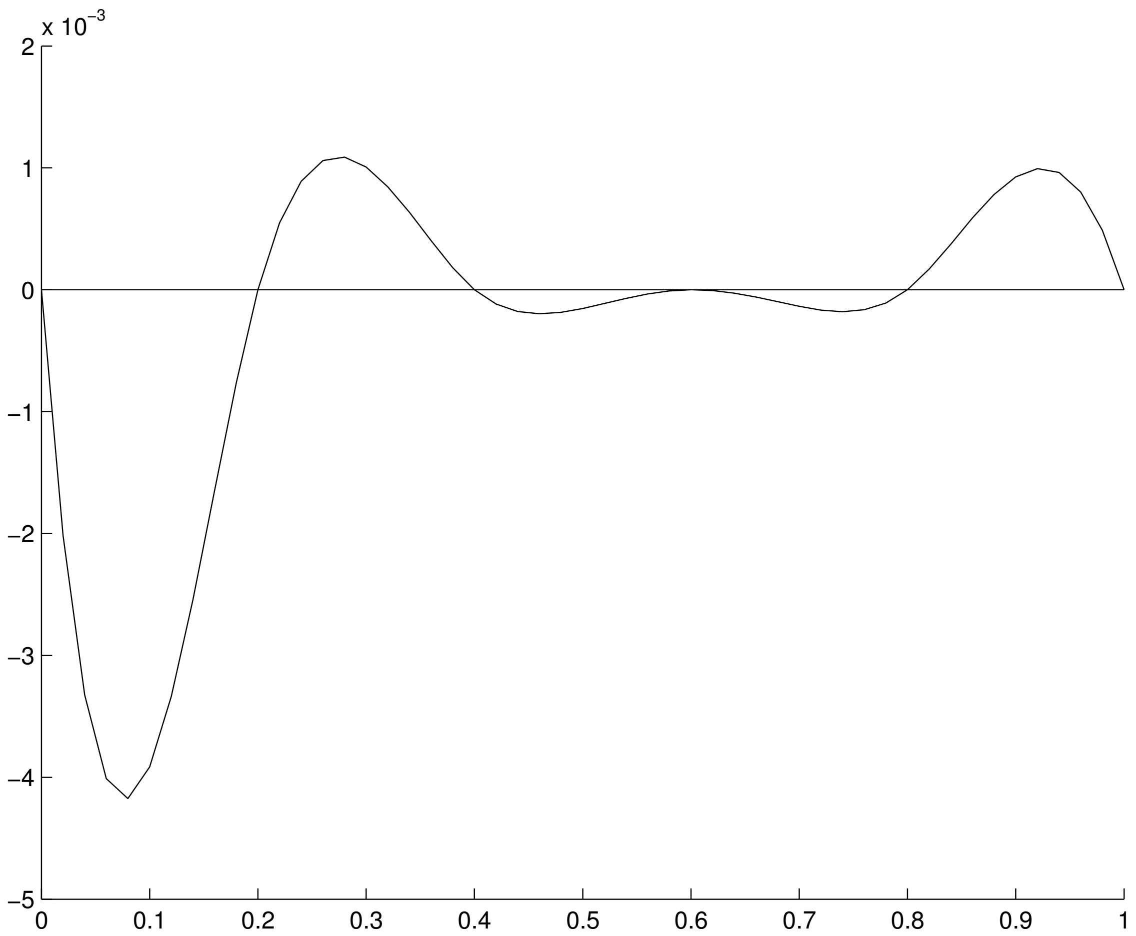
| $x$ | $k$ | $F_k(x)$ | $f(x)$ | $F_k(x) - f(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 1 | 1.000000 | 1.000000 | 0.000000 |
| 0.02 | 1 | 0.997583 | 0.999600 | -0.002017 |
| 0.04 | 1 | 0.995080 | 0.998043 | -0.0033323 |
| 0.06 | 1 | 0.992403 | 0.996413 | -0.004010 |
| 0.08 | 1 | 0.989467 | 0.993641 | -0.004174 |
| 0.10 | 1 | 0.986184 | 0.990099 | -0.003915 |
| 0.12 | 1 | 0.982468 | 0.985804 | -0.003337 |
| 0.14 | 1 | 0.978232 | 0.980777 | -0.002545 |
| 0.16 | 1 | 0.973389 | 0.975039 | -0.001650 |
| 0.18 | 1 | 0.967854 | 0.968617 | -0.000763 |
| 0.20 | 1,2 | 0.961538 | 0.961538 | 0.000000 |
| 0.22 | 2 | 0.954383 | 0.953834 | 0.000548 |
| 0.24 | 2 | 0.946427 | 0.945537 | 0.000890 |
| 0.26 | 2 | 0.937740 | 0.936680 | 0.001060 |
| 0.28 | 2 | 0.928388 | 0.927300 | 0.001088 |
| 0.30 | 2 | 0.918438 | 0.917431 | 0.001007 |
| 0.32 | 2 | 0.907957 | 0.907112 | 0.000846 |
| 0.34 | 2 | 0.897013 | 0.896379 | 0.000634 |
| 0.36 | 2 | 0.885672 | 0.885269 | 0.000403 |
| 0.38 | 2 | 0.874002 | 0.873820 | 0.000181 |
| 0.40 | 2,3 | 0.862069 | 0.862069 | 0.000000 |
| 0.42 | 3 | 0.849933 | 0.850051 | -0.000118 |
| 0.44 | 3 | 0.837623 | 0.837802 | -0.000179 |
| 0.46 | 3 | 0.825158 | 0.825355 | -0.000197 |
| 0.48 | 3 | 0.812559 | 0.812744 | -0.000184 |
| 0.50 | 3 | 0.799847 | 0.800000 | -0.000153 |

| $x$ | $k$ | $F_k(x)$ | $f(x)$ | $F_k(x) - f(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.52 | 3 | 0.787041 | 0.787154 | -0.000112 |
| 0.54 | 3 | 0.774163 | 0.774234 | -0.000071 |
| 0.56 | 3 | 0.761232 | 0.761267 | -0.000035 |
| 0.58 | 3 | 0.748269 | 0.748279 | -0.000010 |
| 0.60 | 3,4 | 0.735294 | 0.735294 | 0.000000 |
| 0.62 | 4 | 0.722328 | 0.722355 | -0.000006 |
| 0.64 | 4 | 0.709394 | 0.709421 | -0.000027 |
| 0.66 | 4 | 0.696514 | 0.696573 | -0.000059 |
| 0.68 | 4 | 0.683710 | 0.683807 | -0.000098 |
| 0.70 | 4 | 0.671005 | 0.671141 | -0.000136 |
| 0.72 | 4 | 0.658421 | 0.658588 | -0.000167 |
| 0.74 | 4 | 0.645982 | 0.646162 | -0.000180 |
| 0.76 | 4 | 0.633710 | 0.633874 | -0.000164 |
| 0.78 | 4 | 0.621627 | 0.621736 | -0.000109 |
| 0.80 | 4,5 | 0.609756 | 0.609756 | 0.000000 |
| 0.82 | 5 | 0.598112 | 0.597943 | 0.000169 |
| 0.84 | 5 | 0.586679 | 0.586304 | 0.000375 |
| 0.86 | 5 | 0.575434 | 0.574845 | 0.000589 |
| 0.88 | 5 | 0.564353 | 0.563571 | 0.000782 |
| 0.90 | 5 | 0.553412 | 0.552486 | 0.000926 |
| 0.92 | 5 | 0.542589 | 0.541594 | 0.000994 |
| 0.94 | 5 | 0.531860 | 0.530898 | 0.000961 |
| 0.96 | 5 | 0.521201 | 0.520400 | 0.000801 |
| 0.98 | 5 | 0.510589 | 0.510100 | 0.000489 |
| 1.00 | 5 | 0.500000 | 0.500000 | 0.000000 |

Παρακάτω στο σχήμα 1 δίδουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης σφάλματος $E(x)$:

$$E_k(x) = F_k(x) - f(x) = F_k(x) - \frac{1}{1+x^2}, \tag{14}$$

που από τον πίνακα είναι σαφές ότι οι τιμές είναι πολύ μικρές, γι᾽ αυτό και η γραφική παράσταση είναι υπό μεγέθυνση (στον πίνακα τιμών έχουν υπογραμισθεί τα δεδομένα των έξι συνθηκών ταύτισης):



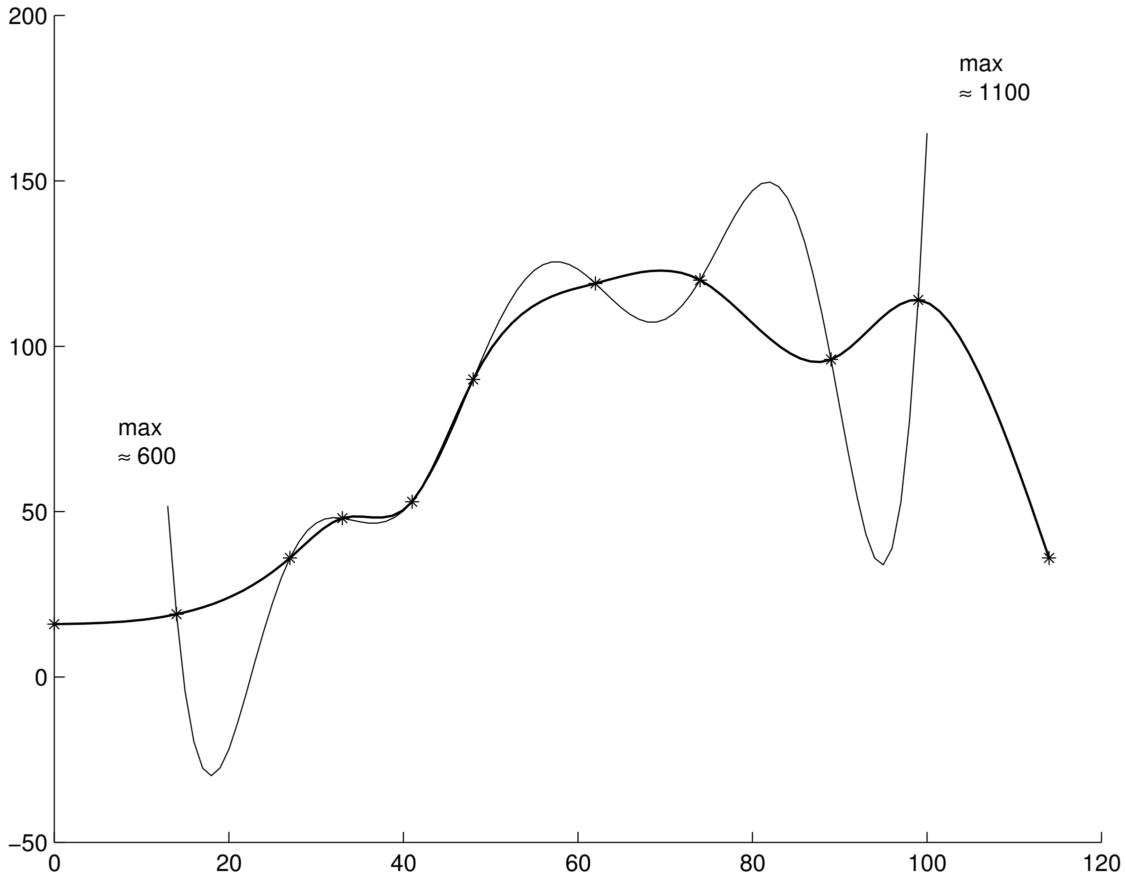

# 4. Επισημάνσεις

## (α) Ομαλοποίηση της προσέγγισης με τη βοήθεια των splines.

**Παράδειγμα:** Στα παρακάτω 11 σημεία προσέγγισης:

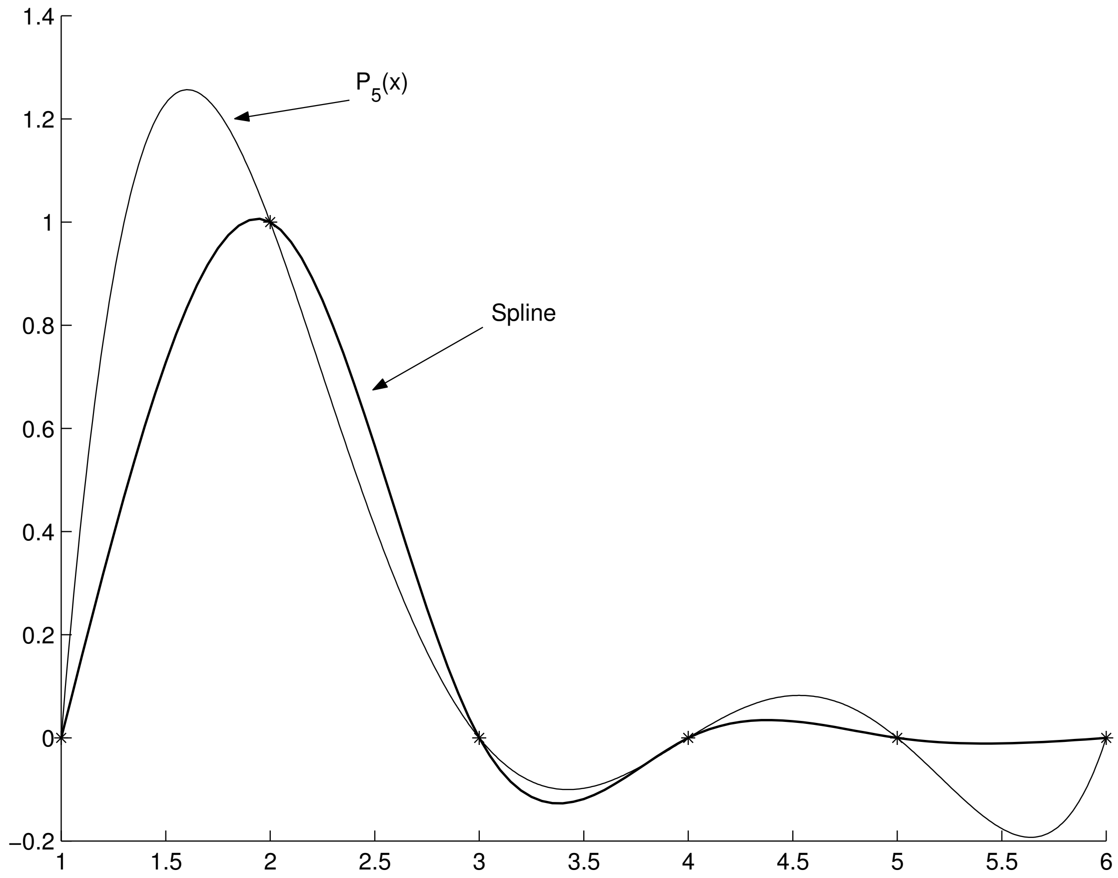
| $x_k$ | 0 | 14 | 27 | 33 | 41 | 48 | 62 | 74 | 89 | 99 | 114 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_k)$ | 16 | 19 | 36 | 48 | 53 | 90 | 119 | 120 | 96 | 114 | 36 |

έχει υπολογιστεί το $P_{10}(x)$ και με τη βοήθειά του έχει βρεθεί η γραφική παράσταση που δίδεται παρακάτω. Επίσης, έχει υπολογιστεί η cubic spline που διέρχεται από αυτά και πληρεί τις συνθήκες $f''(0) = M_0 = 0$ και $f''(114) = M_{114} = 0$ για την οποία ομοίως έχει δοθεί η γραφική παράσταση που αποδίδεται με τη διεκεκομένη γραμμή του σχήματος, η δε σύγκριση των δύο σαφώς αποδίδει την ομαλοποίηση της προσέγγισης, αφού έχουν αποκοπεί οι εξάρσεις του πολυωνύμου $P_{10}(x)$ με τα ακραία μέγιστα στην περιοχή του 600 και 1100.



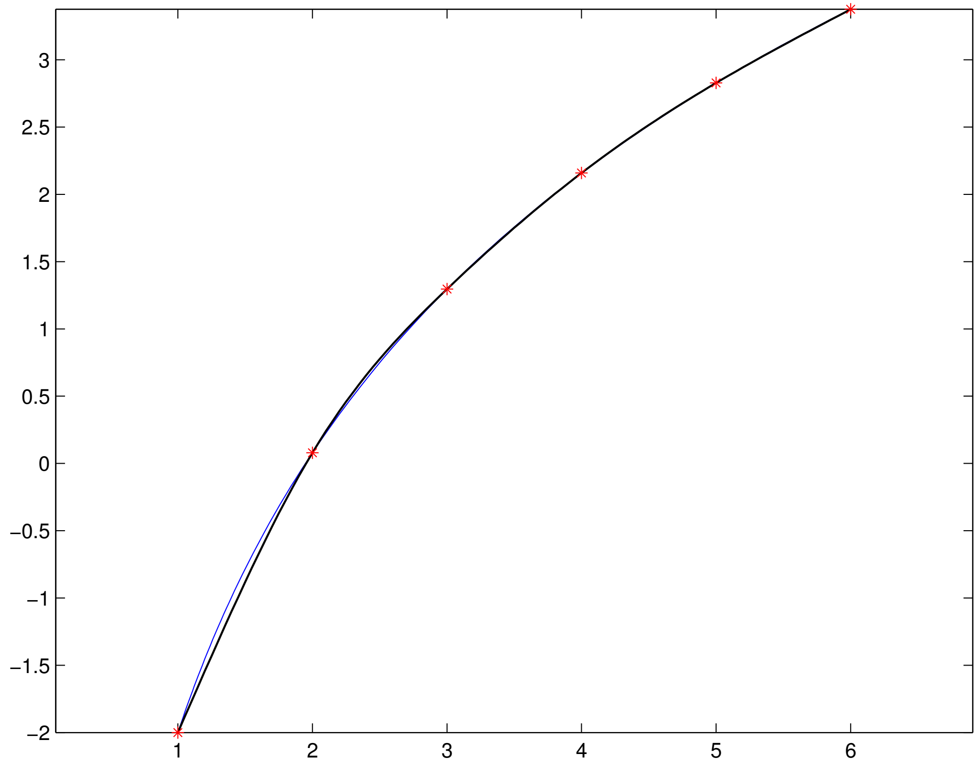

**(β) Χαλιναγώγηση των επιρροών των «δυστρόπων» (wild) παρατηρήσεων**

Στο σχήμα που ακολουθεί όλα τα σημεία των παρατηρήσεων βρίσκονται σε ευθεία πλην ενός δυστρόπου. Το παρεμβολικό πολυώνυμο που υπολογίζεται $P_5(x)$ απεικονίζεται από τη συνεχή γραμμή, η δε επιρροή του δυστρόπου σημείου μεταβιβάζεται σε όλα τα διαστήματα ως μια κυματοειδής μορφή. Στα ίδια σημεία παρατηρήσεων η χρήση της κυβικής spline με τις δεύτερες παραγώγους μηδέν στα άκρα αποδίδεται από την διεκεκομμένη γραμμή, απ᾽ όπου δε φαίνεται η σμίκρυνση του εύρους του κύματος, πράγμα που αποδίδει τη χαλιναγώγηση που προκαλεί η χρήση της spline.




**(γ) Περίπτωση ομαλής προσεγγιστικής συνάρτησης (χωρίς εξάρσεις)**

Στην περίπτωση αυτή η παρεμβολή με splines **δεν προσφέρει τίποτε το ουσιαστικό**, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί,




καθ᾽ όσον οι δύο καμπύλες σχεδόν ταυτίζονται

## Εργαστήρια

**Εργαστήριο 17ο:** Για το παράδειγμα φυλλαδίου εύρατε το $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ στα 6 σημεία $x_k = 0.0(0.2)1.0$ και δώσατε το διάγραμμα της συνάρτησης σφάλματος $E_1(x) = P_5(x) - f(x)$, και συγκρίνατε το με το διάγραμμα του σχήματος 1 ως προς την **ομαλότητα** (smoothness). Τέλος, εύρατε τις τιμές της παραγώγου της $F(x), F'(x)$ στα σημεία $x_k = k/5,\ k = 1, 2, 3$ και 4.

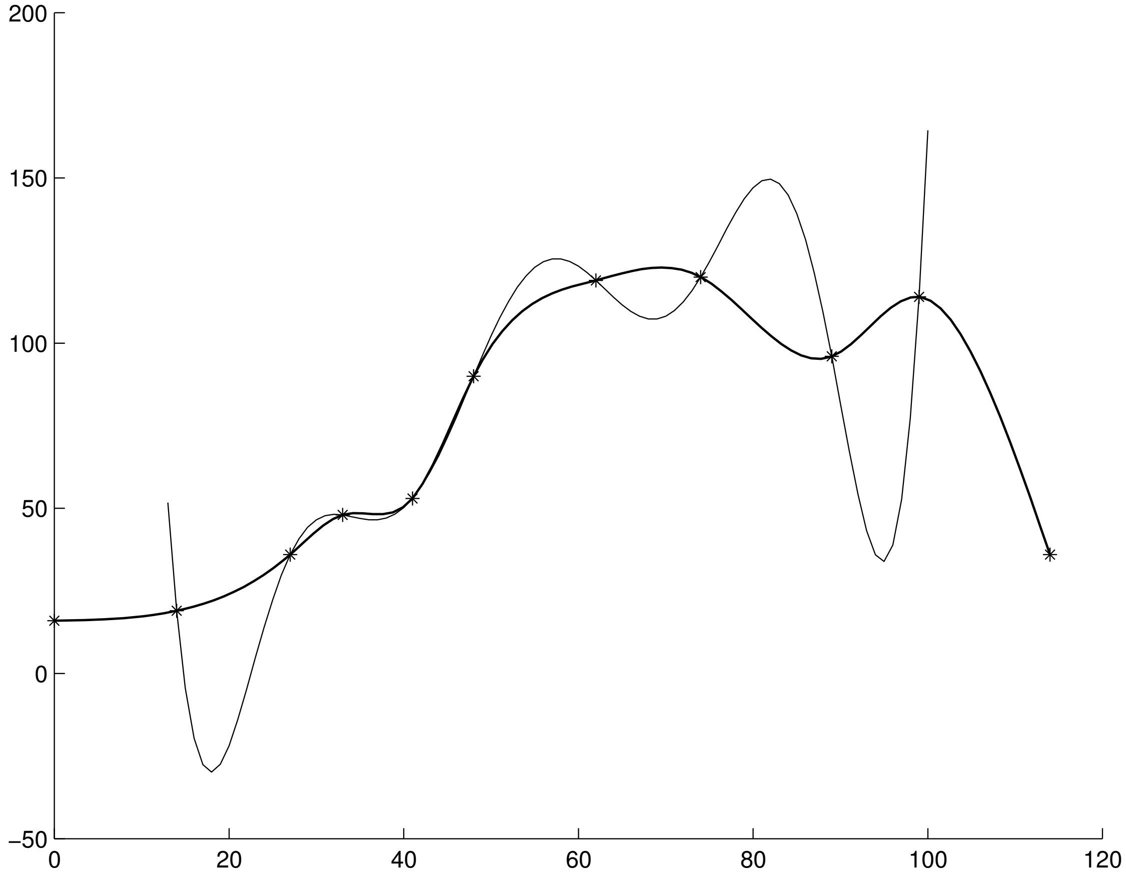
**Εργαστήριο 18ο:** Για το παράδειγμα του φυλλαδίου στο διάστημα [-5,5], θεωρήσατε την κυβική spline στα σημεία πάχους $h = 5/10$ και προσδιορίσατε το αντίστοιχο παρεμβολικό πολυώνυμο $P_{20}(x)$. Τέλος, δώσατε τα διαγράμματα των $f(x), F(x)$ και $P_{20}(x)$. Τι συμπέρασμα συνάγεται ως προς την ομαλότητα (smoothness) της προσέγγισης;

## Προαιρετική Άσκηση:

Στα παρακάτω 11 σημεία προσέγγισης:

| $x_k$ | 0 | 14 | 27 | 33 | 41 | 48 | 62 | 74 | 89 | 99 | 114 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_k)$ | 16 | 19 | 36 | 48 | 53 | 90 | 119 | 120 | 96 | 114 | 36 |

έχει υπολογιστεί το $P_{10}(x)$, μαζί με την γραφική του παράσταση. Επίσης, να υπολογιστεί η cubic spline που διέρχεται από αυτά και πληρεί τις συνθήκες $f''(0) = M_0 = 0$ και $f''(114) = M_{114} = 0$ για την οποία ομοίως να δοθεί η γραφική παράσταση (αποδίδεται με τη διεκεκομένη γραμμή του σχήματος αριστερά).



200
150
100
50
0
−50
0
20
40
60
80
100
120