

Αριθμητική Ανάλυση II Ιούλιος 2005

Θέμα 1ο: Δίδεται η ακολουθία:

$$(1) \quad x_{\nu+1} = \frac{(\lambda x_{\nu} + \eta \mu x_{\nu} + 1)}{1 + \lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

και ζητείται:

- (α) Να εξετασθεί η (1) ως προς τη σύγκλιση, με κατάλληλο προσδιορισμό της παραμέτρου λ .
- (β) Να εξετασθεί εάν το όριο της (1) είναι η **μόνη ρίζα** της εξίσωσης:

$$x + \eta \mu x = 1.$$

- (γ) Υπάρχει **βέλτιστη τιμή** του λ που να εξασφαλίζει **υψηλή ταχύτητα** σύγκλισης της (1); **Ποια είναι;**

Θέμα 2ο: Στο γραμμικό σύστημα:

$$\begin{array}{rcccccc} 2x_1 & - & x_2 & & & = & 2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ -x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ -x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ -x_4 & + & 2x_5 & - & x_6 & = & 0 \\ -x_5 & + & 2x_6 & - & x_7 & = & -1 \\ -x_6 & + & 2x_7 & & & = & 2 \end{array} .$$

Να αποδειχθεί:

- (α) Ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων είναι **θετικά ορισμένος**.
- (β) Να εφαρμοσθεί σ' αυτόν, η **ανάλυση Choleskii** για την εύρεση της λύσεώς του με **βέλτιστο τρόπο**.
- (γ) Εσείς, μόνοι σας, πώς θα λύνατε το σύστημα; **Δικαιολογήσατε** την απάντησή σας.

Θέμα 3ο:

- (α) Δώσατε τον ορισμό και την έκφραση του σφάλματος της **Ερμιτιανής Προσέγγισης** (Hermitian Approximation)
- (β) **Αποδείξατε** τον τύπο του σφάλματος που δώσατε.
- (γ) Τέλος, αποδείξατε το **μονοσήμαντο** του προσεγγιστικού πολυωνύμου **Hermite**.