Εργασία για το
4ο Πανελλήνιο Συνέδριο και 9ο Θερινό Σχολείο
Πολυπλοκότητας και Χαοτικής Δυναμικής
Μη Γραμμικών Συστημάτων
Πάτρα, 22 Ιουλίου – 2 Αυγούστου 1996

ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ ΜΕΤΡΑ
ΜΕΣΩ ΤΟΥ ΤΕΛΕΣΤΟΥ FROBENIUS–PERRON

ΜΩΥΣΗΣ Α. ΜΠΟΥΝΤΟΥΡΙΔΗΣ

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης
671 00 Ξάνθη

mboudour@duth.gr
http://www.duth.gr/~mboudour/

Περιεχόμενα

1. Τελεστές Markov

Αρχίζουμε με τον βασικό ορισμό του *μέτρου* και του *χώρου μέτρου*. Έστω X ένα μη-κενό σύνολο και $\mathcal{A}$ μια *σ-άλγεβρα* του X, δηλαδή, μια συλλογή υποσυνόλων του X που περιλαμβάνει όλο το X και είναι κλειστή σε συμπληρώματα και σε αριθμήσιμες ενώσεις. Μια απεικόνιση $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ ονομάζεται **μέτρο** (στο X) αν:

(i) $\mu(\varnothing) = 0$ και

(ii) για κάθε $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \dots$, που είναι ανά δυο ξένα,

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i).$$

Επιπλέον, τότε, κάθε σύνολο στη σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ ονομάζεται **μετρήσιμο** και η τριάδα $(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται **χώρος μέτρου**.

Στην περίπτωση που το X είναι το διάστημα $[0, 1]$ του $\mathbb{R}$, όπως στα δυναμικά συστήματα που θα μας απασχολήσουν πιο κάτω, ή γενικότερα το X είναι ένας τοπολογικός χώρος, τα μετρήσιμα σύνολα είναι τα **σύνολα Borel**. Η συλλογή των συνόλων Borel αποτελεί τη μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει όλα τα ανοικτά και κλειστά σύνολα και όλα τα ανοικτά, κλειστά, ημι–ανοικτά, ημι–κλειστά *διαστήματα*, φραγμένα ή μη–φραγμένα. Στη σ-άλγεβρα Borel ορίζεται το **μέτρο Lebesgue**, που θα συμβολίζεται με λ, και περιοριζόμενο σε διάστημα δίνει το μήκος του.

Μια συνάρτηση $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **μετρήσιμη** αν η αντίστροφη συνάρτηση φ^{-1} απεικονίζει σύνολα Borel του $\mathbb{R}$ σε μετρήσιμα σύνολα του X.

Ο γραμμικός χώρος $L^1 = L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ ορίζεται ως ο χώρος όλων των (κλάσεων ισοδυναμίας) συναρτήσεων $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ που είναι μετρήσιμες και έχουν την $|\varphi|$ ολοκληρώσιμη στον X. Έτσι, ο χώρος $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα:

$$\|\varphi\|_1 = \int_X |\varphi| \, d\mu.$$

Ορισμός 1.1. Ένας γραμμικός τελεστής $P\colon L^1 \to L^1$ ονομάζεται **τελεστής Markov** αν, για κάθε $f \in L^1$, ισχύουν

(i) $f \geq 0 \Rightarrow Pf \geq 0$,

(ii) $\|Pf\|_1 = \|f\|_1$, για $f \geq 0$.

Ορισμός 1.2. Μια συνάρτηση $f\colon X \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **πυκνότητα** αν είναι $f \in L^1,\ f \geq 0$ και $\|f\|_1 = 1$.

Μερικές φορές, θα συμβολίζουμε με D το *σύνολο των πυκνοτήτων* (γραμμικός υπόχωρος του L^1):

$$D = \{f \in L^1 \colon f \geq 0,\ \|f\|_1 = \int_X f \, d\mu = 1\}.$$

Μπορεί κανείς να δει αμέσως τα εξής ([LM94]):

(i) *Ένας γραμμικός τελεστής είναι Markov αν και μόνον αν απεικονίζει πυκνότητες σε πυκνότητες.*

(ii) *Αν P τελεστής Markov, τότε, για κάθε $f \in L^1$,*

$$\|Pf\|_1 \leq \|f\|_1.$$

2. Τελεστές Frobenius-Perron

Ορισμός 2.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου.

- Ο χώρος $(X, \mathcal{A}, \mu)$ (αντίστοιχα, το μέτρο μ) ονομάζεται **σ–πεπερασμένος** χώρος μέτρου (αντίστοιχα, σ–πεπερασμένο μέτρο) αν υπάρχει μια ακολουθία $\{A_n\}$, $A_n \in \mathcal{A}$, $\mu(A_n) < \infty$, για κάθε n, τέτοια ώστε $X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$.
- Ο χώρος $(X, \mathcal{A}, \mu)$ (αντίστοιχα, το μέτρο μ) ονομάζεται **πεπερασμένος** χώρος μέτρου (αντίστοιχα, πεπερασμένο μέτρο) αν $\mu(X) < \infty$. Στην ειδική περίπτωση που $\mu(X) = 1$, ο χώρος $(X, \mathcal{A}, \mu)$ (αντίστοιχα, το μέτρο μ) ονομάζεται χώρος μέτρου **πιθανότητας** (αντίστοιχα, μέτρο πιθανότητας) .

Στη συνέχεια, *οι χώροι μέτρου, που θα θεωρούμε, πάντα θα υποτίθενται ότι είναι σ–πεπερασμένοι, εκτός αν ρητά δηλώνεται κάτι άλλο.*

Θεώρημα 2.1. (Radon–Nikodym) *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και ν ένα δεύτερο μέτρο στην σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$. Αν το ν είναι πεπερασμένο και $\mu(A) = 0$, για $A \in \mathcal{A}$, συνεπάγεται ότι $\nu(A) = 0$ (οπότε το μέτρο ν ονομάζεται* **απολύτως συνεχές** *ως προς το μέτρο μ ή, αλλιώς,* **μ–συνεχές** *μέτρο), τότε υπάρχει μοναδική μη–αρνητική $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ τέτοια ώστε*

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu, \quad \text{για } A \in \mathcal{A}.$$

Η f ονομάζεται παράγωγος **Radon–Nikodym** *του μέτρου ν ως προς το μέτρο μ και συμβολίζεται*

$$f = \frac{d\nu}{d\mu}.$$

Στη συνέχεια ακολουθούν οι ορισμοί κάποιων βασικών κατηγοριών απεικονίσεων που συναντώνται στην Θεωρία Μέτρου και στην θεωρία των Μετρήσιμων Δυναμικών Συστημάτων.

Ορισμός 2.2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $S : X \to X$ μια απεικόνιση.

- Η S ονομάζεται **μετρήσιμη** απεικόνιση (ως προς το μέτρο μ) αν, για κάθε $A \in \mathcal{A}$, $S^{-1}(A) \in \mathcal{A}$.
- Η S ονομάζεται **μη–ιδιόμορφη** απεικόνιση (ως προς το μέτρο μ) αν είναι μετρήσιμη και αν, για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = 0$, να είναι $\mu(S^{-1}(A)) = 0$.
- Η S ονομάζεται **μετρο–διατηρητική** απεικόνιση (ως προς το μέτρο μ) αν είναι μετρήσιμη και αν, για κάθε $A \in \mathcal{A}$, να ισχύει $\mu(A) = \mu(S^{-1}(A))$. Όταν η S είναι μετρο–διατηρητική ως προς το μέτρο μ, το μ ονομάζεται **αναλλοίωτο μέτρο** για την S. (Προφανώς, μια μετρο–διατηρητική απεικόνιση είναι μη–ιδιόμορφη.)

Ορισμός 2.3. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $S : X \to X$ μια απεικόνιση. Αν η S είναι μη–ιδιόμορφη, τότε, για κάθε (μη–αρνητική) $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, το ολοκλήρωμα

$$\int_{S^{-1}(A)} f \, d\mu \quad (A \in \mathcal{A})$$

ορίζει ένα μέτρο απολύτως συνεχές ως προς το μ. Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα Radon–Nikodym, υπάρχει ένας μοναδικός γραμμικός τελεστής $P = P_S : L^1 \to L^1$, που ονομάζεται **τελεστής Frobenius–Perron**, τέτοιος ώστε

$$Pf = \frac{d}{d\mu} \int_{S^{-1}(\bullet)} f \, d\mu,$$

δηλαδή, για κάθε $A \in \mathcal{A}$,

$$\int_A Pf \, d\mu = \int_{S^{-1}(A)} f \, d\mu.$$

Προφανώς, ο τελεστής Frobenius–Perron είναι τελεστής Markov.

3. Τελεστές Koopman

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Ο γραμμικός χώρος $L^\infty = L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ ορίζεται ως ο χώρος όλων των (κλάσεων ισοδυναμίας) συναρτήσεων $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$, που είναι μετρήσιμες και, για κάθε μια από τις οποίες, υπάρχει σταθερά $K > 0$ τέτοια ώστε $|\varphi(x)| \leq K$, σχεδόν για κάθε $x \in X$. Έτσι, ο χώρος $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα:

$$\|\varphi\|_\infty = \inf\{K > 0\colon |\varphi(x)| \leq K, \ \sigma.\pi. \ \sigma\tau o\nu \ X\}.$$

Ορισμός 3.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $S : X \to X$ μια απεικόνιση. Αν η S είναι μη–ιδιόμορφη, τότε η σχέση

$$Uf(x) = f(S(x)), \ f \in L^\infty,$$

ορίζει έναν τελεστή $U = U_S\colon L^\infty \to L^\infty$, που ονομάζεται **τελεστής Koopman** (για την S) και είναι γραμμικός και φραγμένος στον L^∞, δηλαδή, για κάθε $f \in L^\infty$,

$$\|Uf\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι ο L^1 είναι ο δυικός χώρος του L^∞, όπου η σχέση της δυικότητας συμβολίζεται με το εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)$, που ορίζεται ως

$$(f, g) = \int_X fg \, d\mu, \ f \in L^1, \ g \in L^\infty,$$

έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα που συσχετίζει τους τελεστές Frobenius–Perronκαι Koopman.

Θεώρημα 3.1. *Ο τελεστής Koopman είναι ο συζυγής του τελεστού Frobenius–Perron, δηλαδή, για κάθε $f \in L^1$ και $g \in L^\infty$,*

$$(Pf, g) = (f, Ug) \ .$$

Απόδειξη. Το βασικό στάδιο είναι να αποδειχθεί η σχέση της δυικότητας για $g = \chi_A$, την *χαρακτηριστική συνάρτηση* ενός $A \in \mathcal{A}$. Επειδή, τότε,

$$Ug = U\chi_A = \chi_A \circ S = \chi_{S^{-1}(A)},$$

έχουμε

$$(f, Ug) = \int_X f \, Ug \, d\mu = \int_X f \, \chi_{S^{-1}(A)} \, d\mu = \int_{S^{-1}(A)} f \, d\mu =$$

$$= \int_A Pf \, d\mu = \int_X Pf \, \chi_A \, d\mu = \int_A Pf \, g \, d\mu = (Pf, g). \ \square$$

4. Χαρακτηρισμός Μετρο–Διατηρητικότητας

Θεώρημα 4.1. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Δοθείσης $f \in L^1$, $f \geq 0$, θεωρούμε το μέτρο μ_f, που ορίζεται ως*

$$\mu_f(A) = \int_A f \, d\mu, \ A \in \mathcal{A}.$$

Έστω $S \colon X \to X$ μια μη–ιδιόμορφη απεικόνιση και $P = P_S$ ο τελεστής Frobenius–Perron για την S. Τότε, αφενός το μέτρο μ_f είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο μ και αφετέρου το μέτρο μ_f είναι αναλλοίωτο για την S, δηλαδή, η S είναι μετρο–διατηρητική ως προς το μ_f, αν και μόνον αν η f είναι σταθερό σημείο του P.

Απόδειξη. Όταν το μ_f είναι αναλλοίωτο, τότε, για κάθε $A \in \mathcal{A}$, $\mu_f(A) = \mu_f(S^{-1}(A))$, δηλαδή,

$$\int_A f \, d\mu = \int_{S^{-1}(A)} f \, d\mu = \int_A Pf \, d\mu,$$

και άρα $Pf = f$.

Αντιστρόφως, όταν $Pf = f$, τότε, για κάθε $A \in \mathcal{A}$,

$$\int_{S^{-1}(A)} f \, d\mu = \int_A Pf \, d\mu = \int_A f \, d\mu,$$

δηλαδή, $\mu_f(S^{-1}(A)) = \mu_f(A)$. $\square$

Πόρισμα 4.1. *Το μέτρο μ είναι αναλλοίωτο για την S αν και μόνον αν η $f_* \equiv 1$ είναι σταθερό σημείο του τελεστού Frobenius–Perron P.*

Παράδειγμα 4.1. Έστω ο *r-αδικός μετασχηματισμός* $S \colon [0,1] \to [0,1]$, που ορίζεται ως

$$S(x) = rx \ (mod\ 1),$$

όπου $r > 1$ ακέραιος. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός S^{-1} απεικονίζει τα διαστήματα $[0,x] \subset [0,1]$ ως εξής

$$S^{-1}([0,x]) = \bigcup_{j=0}^{r-1} [\frac{j}{r}, \frac{j}{r} + \frac{x}{r}].$$

Έστω λ το μέτρο Lebesgue στο $[0,1]$. Επειδή $\lambda(S^{-1}([0,x])) = \lambda([0,x])$ $(= x)$, ο r-αδικός μετασχηματισμός S είναι μια μετρο–διατηρητική απεικόνιση ως προς λ.

Ο τελεστής Frobenius–Perron $P = P_S$ ορίζεται από τη σχέση

$$\int_0^x Pf(u) \, du = \int_{S^{-1}([0,x])} f(u) \, du \quad (f \in L^1)$$

ή

$$Pf(x) = \frac{d}{dx} \int_{S^{-1}([0,x])} f(u) \, du = \frac{d}{dx} \sum_{j=0}^{r-1} \int_{j/r}^{j/r + x/r} f(u) \, du =$$

$$= \frac{1}{r}\sum_{j=0}^{r-1} f(\frac{j}{r}+\frac{x}{r}).$$

Έτσι,

$$P(1) = \frac{1}{r}\sum_{j=0}^{r-1} 1 = 1,$$

δηλαδή, $f_* = 1$ είναι σταθερό σημείο του P και το μέτρο Lebesgue λ είναι αναλλοίωτο για τον r-αδικό μετασχηματισμό S. $\square$

Παράδειγμα 4.2. Θεωρούμε τη *λογιστική απεικόνιση* για σταθερά ίση με 4, δηλαδή, την απεικόνιση $S\colon [0,1] \to [0,1]$, που ορίζεται ως

$$S(x) = 4x(1-x)\ .$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός S^{-1} απεικονίζει τα διαστήματα $[0,x] \subset [0,1]$ ως εξής

$$S^{-1}([0,x]) = [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x}] \cup [\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-x}, 1]\ .$$

Προφανώς, το μέτρο Lebesgue λ στο $[0,1]$ **δεν** είναι αναλλοίωτο για την S, δηλαδή, αυτή η λογιστική απεικόνιση δεν είναι μετρο–διατηρητική ως προς λ.

Ο τελεστής Frobenius–Perron $P = P_S$ ορίζεται από τη σχέση

$$\int_0^x Pf(u)\,du = \int_{S^{-1}([0,x])} f(u)\,du \quad (f \in L^1)$$

ή

$$Pf(x) = \frac{d}{dx}\int_{S^{-1}([0,x])} f(u)\,du =$$

$$= \frac{d}{dx}\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-x}} f(u)\,du + \frac{d}{dx}\int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-x}}^1 f(u)\,du =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{1-x}}\,[f(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x}) + f(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-x})]\ .$$

Για να βρούμε το σταθερό σημείο του τελεστού Frobenius–Perron P, αρχίζοντας με $f(x) \equiv 1$, υπολογίζουμε την ακολουθία $\{P^n f(x)\}$ και βρίσκουμε ότι το όριο $f_*(x) = \lim_{n\to\infty} P^n f(x)$, δηλαδή, η συνάρτηση

$$f_*(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\ ,$$

είναι το ζητούμενο σταθερό σημείο του P ($Pf_* = f_*$). Επομένως, το μέτρο

$$\mu_{f_*}(A) = \int_A \frac{dx}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\ ,\ \textit{για}\ A \in \mathcal{A}\ ,$$

ή, για $x \in [0,1]$,

$$\mu_{f_*}([0,x]) = \int_0^x \frac{du}{\pi\sqrt{u(1-u)}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arcsin(1-2x)$$

είναι αναλλοίωτο για αυτή τη λογιστική απεικόνιση S. $\square$

5. Επεκτατικές Κατά Τμήματα Μονότονες Απεικονίσεις

Η βασική κατηγορία των απεικονίσεων σε ένα διάστημα, για την οποία μπορεί να αποδειχθεί η ύπαρξη αναλλοιώτου μέτρου μέσω του τελεστού Frobenius–Perron, δίνεται στον ορισμό που ακολουθεί.

Ορισμός 5.1. Μια απεικόνιση $S : [0,1] \to [0,1]$ ονομάζεται **κατά τμήματα μονότονη απεικόνιση** C^2 αν υπάρχει ένας διαμερισμός $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_r = 1$ του $[0,1]$ τέτοιος ώστε, για κάθε $i = 1, \ldots, r$, ο περιορισμός της S στο διάστημα (a_{i-1}, a_i) είναι μια συνάρτηση C^2 και υπάρχει μια πεπερασμένη πραγματική σταθερά c τέτοια ώστε, για κάθε $x \neq a_i, i = 0, \ldots, r$,

$$\frac{|S''(x)|}{|S'(x)|^2} \leq c.$$

Επιπλέον, μια κατά τμήματα μονότονη απεικόνιση C^2 ονομάζεται **επεκτατική** αν υπάρχει μια σταθερά $\lambda > 1$ τέτοια ώστε, για κάθε $x \neq a_i, i = 0, \ldots, r$,

$$|S'(x)| \geq \lambda.$$

Δοθείσης λοιπόν μιας επεκτατικής κατά τμήματα μονότονης απεικόνισης $S : [0,1] \to [0,1]$ και θεωρώντας ότι το $[0,1]$ είναι εφοδιασμένο με το μέτρο Lebesgue, θα βρούμε την έκφραση για τον αντίστοιχο τελεστή Frobenius–Perron $P = P_S$. Για το σκοπό αυτό, πρώτα, συμβολίζουμε με S_i τον περιορισμό της S στο διάστημα (a_{i-i}, a_i) (για $i = 1, \ldots, r$) και με J_i την εικόνα του (a_{i-i}, a_i) κάτω από την S_i, δηλαδή, $J_i = S_i((a_{i-i}, a_i))$ (για $i = 1, \ldots, r$). Αμέσως βλέπουμε ότι, για κάθε $x \in [0,1]$,

$$S^{-1}([0,x]) = \bigcup_{i=1}^{r} I_i(x),$$

όπου κάθε ένα από τα διαστήματα $I_i, i = 1, \ldots, r$, είναι ενός από τους εξής τρεις τύπους:

- $(a_{i-1}, S_i^{-1}(x))$, όταν $x \in J_i$ και $S_i' > 0$,
- $(S_i^{-1}(x), a_{i-1})$, όταν $x \in J_i$ και $S_i' < 0$,
- $\varnothing$ ή (a_{i-i}, a_i), όταν $x \notin J_i$.

Έτσι, επειδή από τον ορισμό του τελεστού Frobenius–Perron έχουμε, για κάθε $f \in L^1$,

$$Pf(x) = \frac{d}{dx} \int_{S^{-1}([0,x])} f(t)\, dt = \sum_{i=1}^{r} \frac{d}{dx} \int_{I_i(x)} f(t)\, dt,$$

προκύπτει ο εξής τύπος για τον τελεστή Frobenius–Perron $P = P_S$ της επεκτατικής κατά τμήματα μονότονης απεικόνισης S, για $f \in L^1, x \in [0,1]$,

$$Pf(x) = \sum_{i=1}^{r} f(S_i^{-1}(x)) \sigma_i(x) \chi_{J_i}(x),$$

όπου

$$\sigma_i = |(S_i^{-1})'| \quad (i = 1, \ldots, r)$$

και χ_{J_i} η χαρακτηριστική συνάρτηση του διαστήματος J_i $(i = 1, \ldots, r)$.

Με την βοήθεια της παραπάνω έκφρασης του τελεστού Frobenius–Perron, αποδεικνύεται το ακόλουθο αποτέλεσμα (λεπτομερής απόδειξη στην [LY73]).

Θεώρημα 5.1. (Lasota & Yorke) *Έστω $S\colon [0,1] \to [0,1]$ μια επεκτατική κατά τμήματα μονότονη απεικόνιση C^2 και $P = P_S$ ο αντίστοιχος τελεστής Frobenius–Perron. Τότε υπάρχει μια συνάρτηση $f_* \in L^1$, που είναι σταθερό σημείο του P ($Pf_* = f_*$), δηλαδή, υπάρχει ένα μέτρο $\mu_{f_*}(A) = \int_A f_* \, d\lambda \quad (A \in \mathcal{A})$, που είναι αναλλοίωτο για την S και απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue λ στο $[0,1]$.*

Για την απόδειξη του Θεωρήματος των Lasota & Yorke χρειάζεται να χρησιμοποιηθεί η έννοια της *ολικής μεταβολής* μιας πραγματικής συνάρτησης.

Ορισμός 5.2. Έστω $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ και έστω $\mathcal{P}$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$ ως:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Ορίζουμε τη **μεταβολή** της φ στο $[a,b]$ **ως προς τον διαμερισμό** $\mathcal{P}$ σαν

$$V_a^b(\varphi, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})|$$

και την (**ολική**) **μεταβολή** της φ στο διάστημα $[a,b]$ σαν

$$V_a^b(\varphi) = \sup\{V_a^b(\varphi, \mathcal{P})\colon \mathcal{P} \text{ διαμερισμός του } [a,b]\}.$$

Αν $V_a^b(\varphi) < +\infty$, η συνάρτηση φ ονομάζεται **φραγμένης μεταβολής** στο διάστημα $[a,b]$.

Παρατήρηση 5.1. Προφανώς, αν μια συνάρτηση είναι μονότονη, τότε είναι φραγμένης μεταβολής κι, αν είναι φραγμένης μεταβολής, τότε είναι ολοκληρώσιμη.

Συμβολίζουμε με $L^1([0,1])$ το χώρο L^1 για το σύνολο $X = [0,1]$ εφοδιασμένο με τη σ-άλγεβρα των συνόλων Borel και το μέτρο Lebesgue λ.

Λήμμα 5.1. (Ανισότητα του Yorke) *Αν η συνάρτηση φ είναι φραγμένης μεταβολής στο $[0,1] \supset [a,b]$, τότε*

$$V_0^1(\varphi \chi_{[a,b]}) \leq 2V_a^b(\varphi) + \frac{2}{b-a} \int_a^b |\varphi(x)| \, dx.$$

Με την βοήθεια κάποιων στοιχειωδών ιδιοτήτων της ολικής μεταβολής και της ανισότητας του Yorke μπορεί να αποδειχθεί η παρακάτω πρόταση, που αποτελεί το βασικό στάδιο στην απόδειξη του Θεωρήματος των Lasota & Yorke.

Πρόταση 5.1. *Υπάρχουν δυο θετικές σταθερές K, L τέτοιες ώστε, για κάθε $f \in L^1([0,1])$,*

$$V_0^1(Pf) \leq K V_0^1(f) + L\|f\|_1.$$

Από την πρόταση αυτή έπεται ότι υπάρχει μια θετική σταθερά M, που είναι ανεξάρτητη της f, τέτοια ώστε:

$$\limsup_{n \to \infty} V_0^1(P^n f) \leq M\|f\|_1.$$

Χρησιμοποιώντας τότε τον γνωστό χαρακτηρισμό της *ασθενούς προσυμπαγότητας* ότι ένα σύνολο $F \subset L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι ασθενώς προσυμπαγές αν και μόνον αν υπάρχει $g \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, $g \geq 0$, τέτοια ώστε, για κάθε $f \in F$, να ισχύει $|f(x)| \leq g(x)$, σχεδόν για κάθε $x \in X$ (δείτε το βιβλίο των Dunford & Schwartz [DS57]), καταλήγουμε ότι η ακολουθία των επαναλήψεων του τελεστού Frobenius–Perron $\{P^n f\}$ είναι ένα ασθενώς προσυμπαγές σύνολο στον $L^1([0,1])$.

(Υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο $F \subset L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ ονομάζεται *ασθενώς προσυμπαγές* αν κάθε ακολουθία $\{f_n\}$ του F περιέχει μια ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία $\{f_{n_k}\}$, δηλαδή, τέτοια ώστε να υπάρχει $f_0 \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ έτσι ώστε, για κάθε $g \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$, η αριθμητική ακολουθία (f_{n_k}, g) να συγκλίνει στο (f_0, g).)

Τότε, η απόδειξη του Θεωρήματος των Lasota & Yorke ολοκληρώνεται με την χρησιμοποίηση του παρακάτω θεωρήματος σταθερού σημείου (δειτε [DS57]).

Θεώρημα 5.2. (Το Εργοδικό Θεώρημα Kakutani–Yoshida) *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $P\colon L^1 \to L^1$ τελεστής Markov. Αν, για κάθε $f \in L^1$, η ακολουθία $\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P^k f\}$ (του μέσου όρου των επαναλήψεων του P) είναι ένα ασθενώς προσυμπαγές σύνολο του L^1, τότε υπάρχει μια συνάρτηση $f_* \in L^1$, που είναι σταθερό σημείο του P ($Pf_* = f_*$) και τέτοια ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k f = f_*$$

ισχυρώς στον L^1.

6. Χαρακτηρισμός Εργοδικότητας

Ορισμός 6.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου (όχι υποχρεωτικά σ–πεπερασμένος) και $S\colon X \to X$ μια μετρο–διατηρητική απεικόνιση (ως προς το αναλλοίωτο μέτρο μ). Η S ονομάζεται **εργοδική απεικόνιση** ως προς το μ (και το αναλλοίωτο μέτρο μ ονομάζεται **εργοδικό μέτρο** για την S) αν κάθε σύνολο A που είναι μετρήσιμο ($A \in \mathcal{A}$) και αναλλοίωτο για την S (δηλαδή, $S^{-1}(A) = A$) είναι τέτοιο ώστε είτε $\mu(A) = 0$ ή $\mu(X \setminus A) = 0$.

Έτσι, όταν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου πιθανότητας, η μετρο–διατηρητική απεικόνιση $S\colon X \to X$ είναι εργοδική αν κάθε αναλλοίωτο μετρήσιμο σύνολο A έχει $\mu(A) = 0$ ή $\mu(A) = 1$.

Προφανώς, όταν η S είναι εργοδική στον $(X, \mathcal{A}, \mu)$, τότε ο χώρος X δεν μπορεί να αναλυθεί σε δυο αναλλοίωτα μέρη που είναι μετρήσιμα και έχουν θετικό μέτρο το καθένα. Με άλλα λόγια, στην περίπτωση της εργοδικότητας, όλα τα μη-τεριμμένα αναλλοίωτα μετρήσιμα σύνολα έχουν μηδενικό μέτρο.

Στη μελέτη της εργοδικότητας μέσω του τελεστού Frobenius–Perron χρησιμοποιείται το εξής βοηθητικό αποτέλεσμα (που αποδεικνύεται στο βιβλίο [LM94]):

Πρόταση 6.1. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $S\colon X \to X$ μια μη–ιδιόμορφη απεικόνιση και $P = P_S$ ο τελεστής Frobenius–Perron για την S. Τότε:*

(i) *για κάθε $A \in \mathcal{A}, f \in L^1$,*

$$Pf(x) = 0,\ \text{για } x \in A \Leftrightarrow f(x) = 0,\ \text{για } x \in S^{-1}(A),$$

(ii) *ισχύει*

$$\operatorname{supp} f \subset S^{-1}(\operatorname{supp} Pf).$$

Στην προηγούμενη πρόταση, το *στήριγμα* της f ορίζεται σαν:

$$\operatorname{supp} f = \{x \in X : f(x) \neq 0\}.$$

Ειδικότερα, ο έλεγχος της εργοδικότητας μέσω του τελεστού Frobenius–Perron γίνεται με το παρακάτω αποτέλεσμα.

Θεώρημα 6.1. *Έστω* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *χώρος μέτρου,* $S : X \to X$ *μια μη–ιδιόμορφη απεικόνιση και* $P = P_S$ *ο τελεστής Frobenius–Perron για την* S.

(i) *Αν η* S *είναι εργοδική ως προς το* μ, *τότε υπάρχει μοναδική πυκνότητα που είναι σταθερό σημείο του* P *και είναι η* $f_* \equiv 1$.

(ii) *Αν υπάρχει μοναδική πυκνότητα* f_* *τέτοια ώστε* $f_* > 0$, *σχεδόν παντού στον* X, *που είναι σταθερό σημείο του* P, *τότε η* S *είναι εργοδική ως προς το αναλλοίωτο μέτρο*

$$\mu_{f_*}(A) = \int_A f_* \, d\mu \quad (A \in \mathcal{A}).$$

Απόδειξη. (i) Έστω S εργοδική και $f_1, f_2 \in D$ (πυκνότητες), $f_1 \neq f_2$, σταθερά σημεία του P. Ορίζουμε:

$$g = f_1 - f_2,$$

οπότε

$$Pg = g, \; Pg^+ = g^+, \; Pg^- = g^-,$$

όπου

$$g^+ = \max\{0, g\}, \; g^- = \min\{0, -g\}.$$

Έστω

$$A = \operatorname{supp} g^+, \; B = \operatorname{supp} g^-.$$

Προφανώς, τουλάχιστον ένα από τα A, B έχει θετικό μέτρο. Ας υποθέσουμε $\mu(A) > 0$. Η προηγούμενη βοηθητική πρόταση συνεπάγεται $A \subset S^{-1}(A)$ και επαγωγικά προκύπτει, για κάθε φυσικό αριθμό n,

$$A \subset S^{-1}(A) \subset S^{-2}(A) \subset \cdots \subset S^{-n}(A).$$

Ορίζουμε:

$$\overline{A} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} S^{-n}(A).$$

Προφανώς, έχουμε $\overline{A} \in \mathcal{A}$, $\mu(\overline{A}) > 0$ και αμέσως βλέπουμε ότι το $\overline{A}$ είναι αναλλοίωτο ($S^{-1}(\overline{A}) = \overline{A}$). Αυτά όμως αντιφάσκουν την εργοδικότητα της S και, άρα, θα πρέπει $g = 0$.

(ii) Έστω $f_* \in D, f_* > 0$, σ. π. στον X, το μοναδικό σταθερό σημείο του P. Υποθέτουμε ότι η S *δεν* είναι εργοδική. Επομένως, θα υπάρχει αναλλοίωτο σύνολο $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$. Γράφουμε $B = X \setminus A$, οπότε και το σύνολο $B \in \mathcal{A}$ είναι αναλλοίωτο και έχει $\mu(B) > 0$. Επιπλέον, $X = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$, και, έτσι, μπορούμε να γράψουμε

$$f_* = \chi_A f_* + \chi_B f_*.$$

Επειδή $P f_* = f_*$, παίρνουμε

$$\chi_A f_* + \chi_B f_* = P(\chi_A f_*) + P(\chi_B f_*).$$

Όταν $x \in A = S^{-1}(A)$, τότε $\chi_B f_* = 0$ και η προηγούμενη βοηθητική Πρόταση συνεπάγεται ότι $\chi_B f_* = 0$, δηλαδή,

$$\chi_A f_* = P(\chi_A f_*).$$

Παρομοίως,

$$\chi_B f_* = P(\chi_B f_*).$$

Διαιρώντας με τις αντίστοιχες νόρμες (που είναι μη–μηδενικές, διότι $f_* > 0$ σ. π.), βρίσκουμε ότι οι συναρτήσεις

$$f_1 = \frac{\chi_A f_*}{\|\chi_A f_*\|_1},\ f_2 = \frac{\chi_B f_*}{\|\chi_B f_*\|_1}$$

είναι σταθερά σημεία του P, αλλά $f_1 \neq f_2$, κάτι άτοπο και, άρα, η S είναι εργοδική. □

Το προηγούμενο αποτέλεσμα δηλώνει ότι η μοναδικότητα του σταθερού σημείου του τελεστού Frobenius–Perron αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για την εργοδικότητα της απεικόνισης. Όπως όμως θα δούμε στο επόμενο αποτέλεσμα, μια άλλη τέτοια συνθήκη δίνεται και από τη σύγκλιση του μέσου όρου των επαναλήψεων του τελεστού Frobenius–Perron που δρουν σε πυκνότητες.

Θεώρημα 6.2. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου πιθανότητας, $S : X \to X$ μια μετρο–διατηρητική απεικόνιση και $P = P_S$ ο τελεστής Frobenius–Perron για την S. Τότε η S είναι εργοδική αν και μόνον αν*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k f = 1,\ \text{για κάθε } f \in D.$$

Απόδειξη. Όταν η S είναι εργοδική, σύμφωνα με το Θεώρημα 6.1, η $f_* \equiv 1$ είναι η μοναδική πυκνότητα που είναι σταθερό σημείο του P. Πρώτα, υποθέτουμε ότι η $f \in D$ είναι φραγμένη, $f \le c$. Τότε $P^n f \le cP^n 1 = c$ και, άρα, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P^k f \le c$. Συνεπώς, η ακολουθία $\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P^k f\}$ είναι ασθενώς προσυμπαγής στον L^1, οπότε το Εργοδικό Θεώρημα Kakutani–Yoshida συνεπάγεται ότι υπάρχει σταθερό σημείο του P, που όμως λόγω της μοναδικότητας θα πρέπει να είναι το $f_* \equiv 1$, έτσι ώστε $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P^k f = 1$. Όταν η f δεν είναι φραγμένη, ακολουθούμε τις τυπικές τροποποιήσεις (δείτε σελ. 93-94 του βιβλίου των Lasota & Mackey [LM94]).

Αντίστροφα, αν, για κάθε $f \in D$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P^k f = 1$, τότε $f_* \equiv 1$, για $Pf_* = f_*$. Δηλαδή, η $f_* \equiv 1$ είναι η μοναδική πυκνότητα που είναι σταθερό σημείο του P, οπότε, πάλι σύμφωνα με το Θεώρημα 6.1, η S είναι εργοδική. □

Για τους αντίστοιχους χαρακτηρισμούς της εργοδικότητας μέσω του τελεστού Koopman, χρειάζεται το παρακάτω αποτέλεσμα (π.χ., δείτε το βιβλίο του [Walters82]).

Θεώρημα 6.3. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου (όχι υποχρεωτικά σ–πεπερασμένος) και $S : X \to X$ μια μετρο–διατηρητική απεικόνιση. Η S είναι εργοδική αν και μόνον αν, για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f(S(x)) = f(x)$, (σχεδόν) για κάθε $x \in X$, συνεπάγεται ότι η f είναι σταθερά σχεδόν παντού.*

Τότε τα Θεωρήματα 6.1 και 6.2 δίνουν τους εξής χαρακτηρισμούς της εργοδικότητας μέσω του τελεστού Koopman.

Πόρισμα 6.1. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $S : X \to X$ μια μετρο–διατηρητική απεικόνιση και $U = U_S$ ο τελεστής Koopman για την S. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *η S είναι εργοδική,*

(ii) *όλα τα σταθερά σημεία του U είναι σταθερές συναρτήσεις,*

(iii) *για κάθε $f \in L^1, g \in L^\infty$,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f, U^k g) = (f, 1)(1, g).$$

Αναφορικά τώρα με την εργοδικότητα των επεκτατικών κατά τμήματα μονότονων απεικονίσεων διαστήματος ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα των Li & Yorke, του οποίου η απόδειξη υπάρχει στην εργασία τους [LiY78].

Θεώρημα 6.4. (Li & Yorke) *Έστω $S : [0,1] \to [0,1]$ μια επεκτατική κατά τμήματα μονότονη απεικόνιση C^2 και $P = P_S$ ο αντίστοιχος τελεστής Frobenius–Perron. Τότε υπάρχουν:*

- *θετικός ακέραιος m,*
- *σύνολα $L_1, \dots, L_m \subset [0,1]$,*
- *συναρτήσεις $f_1, \dots, f_m$, που είναι σταθερά σημεία του P,*

τέτοια ώστε (για $i, j = 1, \dots, m$):

(i) *κάθε L_i είναι ένωση πεπερασμένου πλήθους διαστημάτων,*

(ii) *όταν $i \neq j$, το $L_i \cap L_j$ περιέχει το πολύ πεπερασμένο πλήθος σημείων,*

(iii) *κάθε L_i περιέχει στο εσωτερικό του τουλάχιστον ένα σημείο ασυνέχειας των S και S' και, άρα,*
$$m \leq \#\{\textit{σημείων ασυνέχειας των } S \textit{ και } s'\},$$

(iv) *$f_i(x) = 0$, για $x \notin L_i$, $f_i > 0$ σ.π. στο L_i, $\int_{L_i} f_i(x)\,dx = 1$,*

(v) *αν g είναι σταθερό σημείο του P, που ικανοποιεί την (iv), τότε $g = f_k$ σ.π. στο $[0,1]$, για κάποιο $k = 1, \dots, m$,*

(vi) *κάθε σταθερό σημείο f του P μπορεί να γραφεί σαν*
$$f = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k f_k,$$
για κατάλληλες σταθερές $\alpha_k, k = 1, \dots, m$.

Πόρισμα 6.2. *Αν η $S\colon [0,1] \to [0,1]$ είναι μια επεκτατική σε δυο τμήματα μονότονη απεικόνιση C^2, τότε η S είναι εργοδική (για κάποιο αναλλοίωτο μέτρο).*

7. Χαρακτηρισμός Ανάμειξης και Ακρίβειας

Ορισμός 7.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου πιθανότητας και $S\colon X \to X$ μια μετρο–διατηρητική απεικόνιση. Η S ονομάζεται **αναμεμειγμένη απεικόνιση** (ως προς το αναλλοίωτο μέτρο μ) αν, για κάθε $A, B \in \mathcal{A}$,
$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \cap S^{-n}(B)) = \mu(A)\mu(B).$$

Παρατήρηση 7.1. Προφανώς, $x \in A \cap S^{-n}(B)$ αν και μόνον αν $x \in A$ και $S^n(x) \in B$. Έτσι, όταν η S είναι αναμεμειγμένη, για κάθε $A, B \in \mathcal{A}$, η "πιθανότητα" να βρίσκεται το x στο A και το $S^n(x)$ στο B, εξαρτάται μόνο (καθώς $n \to \infty$) από το μέγεθος των A και B. Αυτό σημαίνει ότι η τροχιά μπορεί να πάει οπουδήποτε ξεκινώντας από οπουδήποτε και, άρα, έχουμε *ανάμειξη* με αυτή την έννοια.

Εύκολα μπορεί να δειχθεί το εξής (δείτε [Walters82]):

Πρόταση 7.1. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου πιθανότητας και $S\colon X \to X$ μια μετρο–διατηρητική απεικόνιση. Αν η S είναι αναμεμειγμένη, τότε είναι εργοδική.*

Το επόμενο αποτέλεσμα δίνει τον χαρακτηρισμό της ανάμειξης μέσω των τελεστών Frobenius–Perron και Koopman.

Θεώρημα 7.1. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $S : X \to X$ μια μετρο–διατηρητική απεικόνιση, $P = P_S$ ο τελεστής Frobenius–Perron για την S και $U = U_S$ ο τελεστής Koopman για την S. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *η S είναι αναμεμειγμένη,*

(ii) *για κάθε $f \in D$, η ακολουθία $\{P^n f\}$ συγκλίνει ασθενώς στο 1,*

(iii) *για κάθε $f \in L^1, g \in L^\infty$,*

$$\lim_{n\to\infty} (P^n f, g) = (f, 1)(1, g),$$

(iv) *για κάθε $f \in L^1, g \in L^\infty$,*

$$\lim_{n\to\infty} (f, U^n g) = (f, 1)(1, g).$$

Απόδειξη. Ουσιαστικά το μόνο που χρειάζεται να δειχθεί είναι το ότι (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Κι αυτό μάλιστα αρκεί να αποδειχθεί για χαρακτηριστικές συναρτήσεις, γιατί στη συνέχεια κάποια τυπικά επιχειρήματα για συγκλίσεις στους L^1 και L^∞ ολοκληρώνουν την απόδειξη (δείτε σελ. 73-74 του βιβλίου των Lasota & Mackey [LM94]).

Πράγματι, αν η S είναι αναμεμειγμένη, τότε, για κάθε $A, B \in \mathcal{A}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \cap S^{-n}(B)) = \mu(A)\mu(B),$$

ή γράφοντας την παραπάνω σχέση με ολοκληρώματα

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \chi_A(x)\chi_B(S^n(x))\, d\mu(x) = \int_X \chi_A\, d\mu \int_X \chi_B\, d\mu.$$

Μέσω του τελεστού Koopman η σχέση αυτή γράφεται:

$$\lim_{n\to\infty} (\chi_A, U^n \chi_B) = (\chi_A, 1)(1, \chi_B),$$

δηλαδή, μέσω του τελεστού Frobenius–Perron, που είναι ο συζυγής του τελεστού Koopman,

$$\lim_{n\to\infty} (P^n f, g) = (f, 1)(1, g),$$

όπου $f = \chi_A$ και $g = \chi_B$. Αλλά και αντιστρόφως αυτή η επιλογή των f και g στην (iii) συνεπάγεται ότι η S είναι αναμεμειγμένη. $\square$

Ορισμός 7.2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου πιθανότητας και $S\colon X \to X$ μια μετρο–διατηρητική απεικόνιση τέτοια ώστε $S(A) \in \mathcal{A}$, για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Η S ονομάζεται **ακριβής** (ως προς το αναλλοίωτο μέτρο μ) αν, για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(S^n(A)) = 1.$$

Παρατήρηση 7.2. Όπως θα δούμε παρακάτω στον χαρακτηρισμό της ακρίβειας μέσω του τελεστού Frobenius–Perron, κάθε ακριβής απεικόνιση είναι αναμεμειγμένη και, άρα, και εργοδική. Η απόδειξη του ότι η ακρίβεια συνεπάγεται ανάμειξη γίνεται μάλλον δύσκολα από τους αντίστοιχους ορισμούς.

Παρατήρηση 7.3. Μια αντιστρεπτή μετρο–διατηρητική απεικόνιση S δεν μπορεί να είναι ακριβής, αφού τότε $\mu(S(A)) = \mu(S^{-1}(S(A))) = \mu(A)$ και επαγωγικά $\mu(S^n(A)) = \mu(A)$, που δεν μπορεί να συγκλίνει στο 1, για κάθε $A \in \mathcal{A}$.

Ορισμός 7.3. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου πιθανότητας και $S : X \to X$ μια αντιστρεπτή απεικόνιση τέτοια ώστε και η T και η T^{-1} να είναι μετρο–διατηρητικές. Η S ονομάζεται **αυτομορφισμός του Kolmogorov** ή **Κ-αυτομορφισμός** αν υπάρχει μια σ-άλγεβρα $\mathcal{A}_o \subset \mathcal{A}$ τέτοια ώστε:

(i) $S^{-1}(\mathcal{A}_o) = \mathcal{A}_o$,

(ii) η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει την $\bigcup_{n=0}^{\infty} S^n(\mathcal{A}_o)$ είναι η $\mathcal{A}$,

(iii) $\bigcap_{n=0}^{\infty} S^{-n}(\mathcal{A}_o) = \{\varnothing, X\}$.

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 7.3, οι Κ-αυτομορφισμοί *δεν* είναι ακριβείς απεικονίσεις.

Το επόμενο αποτέλεσμα αποδεικνύεται στον [Walters82].

Θεώρημα 7.2. *Κάθε Κ-αυτομορφισμός είναι αναμεμειγμένη απεικόνιση (άρα, και εργοδική).*

Ορισμός 7.4. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ δυο χώροι μέτρων πιθανοτήτων και $S : X \to X, T : Y \to Y$ δυο μετρο–διατηρητικές απεικονίσεις. Η απεικόνιση S ονομάζεται **μετρο–θεωρητικός παράγοντας** της απεικόνισης T αν υπάρχουν:

- δυο σύνολα $M \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{B}$ με $\mu(M) = \nu(N) = 1$,
- και μια απεικόνιση $\varphi \colon M \to N$, που είναι επί και μετρο–διατηρητική,

έτσι ώστε να ισχύει σ.π. στον X

$$\varphi \circ T = S \circ \varphi,$$

δηλαδή, να αντιμετατίθεται σ.π. το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} M \subset X & \xrightarrow{T} & X \supset M \\ \varphi \big\downarrow & & \big\downarrow \varphi \\ N \subset Y & \xrightarrow[S]{} & Y \supset N \end{array}$$

(Αν, επιπλέον, η απεικόνιση φ είναι ένα–προς–ένα, οπότε αντιστρεπτή, και η αντίστροφη απεικόνιση φ^{-1} είναι κι αυτή μετρο–διατηρητική, τότε οι απεικονίσεις T, S ονομάζονται **μετρο–θεωρητικά συζυγείς**.)

Ο Rohlin στην εργασία του [Rohlin61] απέδειξε το εξής σημαντικό αποτέλεσμα:

Θεώρημα 7.3. (Rohlin) *Κάθε ακριβής απεικόνιση είναι μετρο–θεωρητικός παράγοντας ενός Κ-αυτομορφισμού.*

Ισχύει ο εξής χαρακτηρισμός της ακρίβειας μέσω της *ασυμπτωτικής ευστάθειας* του τελεστού Frobenius–Perron.

Θεώρημα 7.4. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου πιθανότητας, $S : X \to X$ μια μη–ιδιόμορφη απεικόνιση τέτοια ώστε $S(A) \in \mathcal{A}$, για κάθε $A \in \mathcal{A}$, και $P = P_S$ ο τελεστής Frobenius–Perron για την S.*

(i) *Αν το μ είναι αναλλοίωτο μέτρο για την S και η S είναι ακριβής ως προς το μ, τότε η πυκνότητα $f_* \equiv 1$ είναι το μοναδικό σταθερό σημείο του P τέτοιο ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} \|P^n f - 1\|_1 = 0, \ \text{για κάθε}\ f \in D.$$

(ii) *Αν υπάρχει μοναδική πυκνότητα $f_* \in D$, που είναι σταθερό σημείο του P και τέτοια ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} \|P^n f - f_*\|_1 = 0, \ \text{για κάθε}\ f \in D,$$

τότε η S είναι ακριβής ως προς το αναλλοίωτο μέτρο

$$\mu_{f_*}(A) = \int_A f_* \, d\mu \quad (A \in \mathcal{A}).$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη του (i) δείτε την εργασία του Lin ([Lin71]). Εδώ θα αποδείξουμε το (ii). Έστω λοιπόν $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$. Ορίζουμε:

$$f_A(x) = \frac{1}{\mu_{f_*}(A)} \chi_A(x).$$

Προφανώς, $f_A \in D$ και $\lim_{n\to\infty} \|P^n f_A - f_*\|_1 = 0$. Έτσι,

$$\mu_{f_*}(S^n(A)) = \int_{S^n(A)} f_* \, d\mu =$$

$$= \int_{S^n(A)} P^n f_A \, d\mu - \int_{S^n(A)} (P^n f_A - f_*) \, d\mu \geq$$

$$\geq \int_{S^n(A)} P^n f_A \, d\mu - r_n = \int_{S^{-n}(S^n(A))} f_A \, d\mu - r_n \geq$$

$$\geq \int_A f \, d\mu - r_n = 1 - r_n,$$

διότι $S^{-n}(S^n(A)) \supset A$. Οπότε, παίρνοντας το όριο $n \to \infty$, προκύπτει η συνθήκη της ακρίβειας $\lim_{n\to\infty} \mu_{f_*}(S^n(A)) = 1$. $\square$

Από το προηγούμενο θεώρημα απορρέει ο εξής ορισμός.

Ορισμός 7.5. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $P : L^1 \to L^1$ ένας τελεστής Markov. Η ακολουθία των επαναλήψεων $\{P^n\}$ ονομάζεται **ασυμπτωτικά ευσταθής** αν υπάρχει μοναδική πυκνότητα $f_* \in D$, που είναι σταθερό σημείο του P και τέτοια ώστε, για κάθε $f \in D$,

$$\lim_{n\to\infty} \|P^n f - f_*\|_1 = 0.$$

Για τη μελέτη της ασυμπτωτικής ευστάθειας των επαναλήψεων ενός τελεστού Markov, χρειάζονται οι παρακάτω ορισμοί.

Ορισμός 7.6. (i) Μια συνάρτηση $h \in L^1$ ονομάζεται **συνάρτηση κατωτέρου φραγμού** για τον τελεστή Markov $P \colon L^1 \to L^1$ αν

$$\lim_{n\to\infty} \|(P^n f - h)^-\|_1 = 0, \; \textit{για κάθε } f \in D.$$

(Υπενθυμίζουμε ότι $g^- = max\{0, -g\}$.)

(ii) Μια συνάρτηση κατωτέρου φραγμού $h \in L^1$ ονομάζεται **μη-τετριμμένη** αν $h \geq 0$ και $\|h\|_1 > 0$.

Το επόμενο αποτέλεσμα (που αποδεικνύεται στις σελ. 107-109 του βιβλίου των Lasota & Mackey [LM94]) παρέχει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ασυμπτωτικής ευστάθειας των επαναλήψεων ενός τελεστού Markov.

Θεώρημα 7.5. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $P : L^1 \to L^1$ ένας τελεστής Markov. Η ακολουθία των επαναλήψεων $\{P^n\}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής αν και μόνον αν υπάρχει μια μη-τετριμμένη συνάρτηση κατωτέρου φραγμού για τον P.*

Το προηγούμενο αποτέλεσμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για μια χρήσιμη εφαρμογή στην περίπτωση των επεκτατικών κατά τμήματα μονότονων απεικονίσεων. Έτσι, προκύπτει το θεώρημα που ακολουθεί (του οποίου η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο βιβλίο των Lasota & Mackey [LM94], σελ. 148-150).

Θεώρημα 7.6. *Έστω $S \colon [0,1] \to [0,1]$ μια επεκτατική κατά τμήματα μονότονη απεικόνιση C^2 και $P = P_S$ ο αντίστοιχος τελεστής Frobenius–Perron. Αν, για κάθε $i = 1, \ldots, r$,*

$$S_i \colon (a_{i-1}, a_i) \to (0,1) \; \textit{είναι απεικόνιση επί},$$

τότε η ακολουθία των επαναλήψεων $\{P^n\}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής, δηλαδή, η S είναι ακριβής (για κάποιο αναλλοίωτο μέτρο).

Παράδειγμα 7.1. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η r-αδική απεικόνιση είναι ακριβής, κάτι που άλλωστε μπορεί να επαληθευτεί και απευθείας από το γεγονός ότι η υπολογισθείσα στο Παράδειγμα 4.1 πυκνότητα ισορροπίας ικανοποιεί τη συνθήκη της ασυμπτωτικής ευστάθειας των επαναλήψεων του P.

Παράδειγμα 7.2. Αναφορικά τώρα με τη λογιστική απεικόνιση $S(x) = 4x(1-x)$ (για σταθερά ίση με 4), αυτή προφανώς *δεν* είναι επεκτατική κατά τμήματα μονότονη απεικόνιση. Όμως, χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση

$$g(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arcsin(1-2x)$$

με αντίστροφη συνάρτηση

$$g^{-1}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\pi x),$$

η απεικόνιση $T \colon [0,1] \to [0,1]$, που ορίζεται ως

$$T(x) = g \circ S \circ g^{-1}(x),$$

εύκολα βρίσκεται να είναι

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{για } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ 2(1-x), & \text{για } x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

που είναι γνωστή σαν *απεικόνιση τέντας*. Κατά το Θεώρημα 7.6, η ακολουθία των επαναλήψεων $\{P_T^n\}$ του τελεστού Frobenius–Perron της T είναι ασυμπτωτικά ευσταθής, δηλαδή, η απεικόνιση τέντας είναι ακριβής με μοναδική πυκνότητα την $f_* \equiv 1$, αφού το μέτρο Lebesgue λ είναι αναλλοίωτο για την T. Αλλά τότε, βλέπουμε αμέσως ότι το μέτρο $\lambda(g(A))$ είναι αναλλοίωτο για τη λογιστική απεικόνιση S και μάλιστα η S είναι ακριβής ως προς το μέτρο αυτό, το οποίο αντιστοιχεί στη μοναδική πυκνότητα ισορροπίας $f_*(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$.

Αναφορές

[DS57] Dunford, N., and J.T. Schwartz. *Linear Operators. Part I: General Theory.* Wiley, New York, 1957.

[LM94] Lasota, Andrzej, and Michael C. Mackey. *Chaos, Fractals, and Noise. Stochastic Aspects of Dynamics.* Springer–Verlag, New York, 1994.

[LY73] Lasota, Andrzej, and James A. Yorke. On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **186** (1973), 481-488.

[LiY78] Li, T.Y., and J.A. Yorke. Ergodic transformations from an interval into itself. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **235** (1978), 183-192.

[Lin71] Lin, M. Mixing for Markov operators. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete*, **19** (1971), 231-242.

[Rohlin61] Rohlin, V.A. Exact endomorphisms of Lebesgue space. *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat.*, **25** (1961), 499-530. *Amer. Math. Soc. Trans.* (2) **39** (1964), 1-36.

[Walters82] Walters, Peter. *An Introduction to Ergodic Theory.* Springer–Verlag, New York, 1982.