Εργασία για το
11ο Θερινό Σχολείο - Πανελλήνιο Συνέδριο
**ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ:**
**ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΧΑΟΣ**
Λιβαδειά, 13-25 Ιουλίου 1998

# ΕΡΓΟΔΙΚΟΤΗΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

*ΜΩΥΣΗΣ Α. ΜΠΟΥΝΤΟΥΡΙΔΗΣ*

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης
671 00 Ξάνθη

mboudour@duth.gr
http://www.duth.gr/˜mboudour/

## Περιεχόμενα



## 1.1. Δυναμικά Συστήματα

Έστω $X$ ένα μη-κενό σύνολο και $G$ μια ημι–ομάδα ή ομάδα. Γενικώς, ένα **δυναμικό σύστημα** είναι ένα ζευγάρι $(X, \mathcal{T}_G)$ του συνόλου $X$ και μιας *μονο–παραμετρικής οικογένειας* $\mathcal{T}_G = \{\phi^g\}_{g\in G}$ *απεικονίσεων* $\phi^g : X \to X$, η οποία αποτελεί μια **δράση** της $G$ στο $X$. Λέγοντας ότι η $\mathcal{T}_G$ είναι μια *δράση*, εννοούμε ότι ικανοποιείται η σχέση

$$\phi^{g_1+g_2}(x) = \phi^{g_1} \circ \phi^{g_2}(x), \text{ για κάθε } g_1, g_2 \in G \text{ και } x \in X,$$

όπου με "+" έχουμε συμβολίσει την πράξη στην $G$.

Για το δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{T}_G)$, το σύνολο $X$ αποτελεί τον **χώρο φάσεων** (ή **καταστάσεων**) του δυναμικού συστήματος και στην ημι–ομάδα ή ομάδα $G$ παίρνει τιμές ο **χρόνος**, με την πάροδο του οποίου εξελίσσεται το δυναμικό σύστημα αυτό.

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η ιδιότητα της δράσης συνεπάγεται:

$$\phi^0 = \mathrm{id}_X \text{ (όταν } G \text{ μονοειδές ή ομάδα)} ,$$

$$\phi^{-g} = (\phi^g)^{-1}, \text{ για } g \in G \text{ (μόνο όταν } G \text{ ομάδα)} ,$$

όπου έχουμε συμβολίσει με “0” το *ουδέτερο στοιχείο* της $G$ (που φυσικά πάντα υπάρχει, αν η $G$ είναι ομάδα ή *μονοειδές*, δηλαδή, ημι–ομάδα με ουδέτερο στοιχείο), με $\mathrm{id}_X : X \to X$ την *ταυτοτική* απεικόνιση στο $X$ ($\mathrm{id}_X(x) = x$, για κάθε $x \in X$) και με $(\phi^g)^{-1} : X \to X$ την *αντίστροφη* απεικόνιση της $\phi^g$.

Έτσι, αποδίδοντας το 0 του $G$ (ομάδα ή μονοειδές) με την *αρχή του χρόνου*, η τιμή $\phi^g(x)$ παριστά την *φάση* (ή *κατάσταση*) του συστήματος στο *χρόνο* $g \in G$, όταν *αρχικά* το σύστημα βρίσκεται στο $x \in X$. Καθώς ο χρόνος $g$ μεταβάλλεται, όλες οι φάσεις που παίρνει το σύστημα, όταν αρχικά βρίσκεται στο $x$, σχηματίζουν το σύνολο $\{\phi^g(x) : g \in G\}$ του $X$, το οποίο ονομάζεται **τροχιά**, που ξεκινά από το $x$.

Στην φύση, οι τιμές που παίρνει ο χρόνος μπορούν να είναι είτε *συνεχείς*, δηλαδή, να ανήκουν στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, ή *διακριτές*, δηλαδή, να ανήκουν στο σύνολο των ακεραίων αριθμών $\mathbb{Z}$. Έτσι, συνήθως σε ένα δυναμικό σύστημα, η ημι–ομάδα $G$ μπορεί να είναι είτε το σύνολο των μη-αρνητικών πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}^+$ ή το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ και η ομάδα $G$ μπορεί να είναι είτε το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ ή το σύνολο των ακεραίων αριθμών $\mathbb{Z}$. Όταν $G = \mathbb{R}^+$ ή $\mathbb{R}$, το δυναμικό σύστημα που αντιστοιχεί στην δράση αυτή ονομάζεται **δυναμικό σύστημα συνεχούς χρόνου**, ενώ, όταν $G = \mathbb{N}$ ή $\mathbb{Z}$, ονομάζεται **δυναμικό σύστημα διακριτού χρόνου**.*

Συνήθως, σε ένα δυναμικό σύστημα συνεχούς χρόνου, η δράση $\{\phi^g\}_{g\in G}$ ονομάζεται **ημι–ροή**, όταν $G = \mathbb{R}^+$, και **ροή**, όταν $G = \mathbb{R}$. Κατά αναλογία, σε ένα δυναμικό σύστημα διακριτού χρόνου, η δράση $\{\phi^g\}_{g\in G}$ μπορεί να ονομασθεί **ημι–διαδοχή**, όταν $G = \mathbb{N}$, και **διαδοχή**, όταν $G = \mathbb{Z}$.

Ειδικότερα για ένα δυναμικό σύστημα διακριτού χρόνου η ιδιότητα της δράσης γράφεται:

$$\phi^{n+m}(x) = \phi^n(x) \circ \phi^m(x), \text{ για κάθε } n, m \in \mathbb{N} \text{ ή } \mathbb{Z} \text{ και } x \in X.$$

Η σχέση αυτή συνεπάγεται τώρα (πέραν των $\phi^0 = \mathrm{id}_X$ και $\phi^{-n} = (\phi^n)^{-1}$, για $n \in \mathbb{Z}$) ότι, για κάθε ακέραιο $n > 0$,

$$\phi^n = \underbrace{\phi \circ \ldots \circ \phi}_{n \text{ φορές}} ,$$

όπου

$$\phi = \phi^1.$$

(Προσοχή: *οι εκθέτες στις απεικονίσεις θα συμβολίζουν συνθέσεις και όχι δυνάμεις.*)

Αλλά και αντιστρόφως, δοθέντων του (μη-κενού) συνόλου $X$ και της απεικόνισης $T : X \to X$, ορίζεται, για κάθε ακέραιο $n > 0$, η **$n$-οστή επανάληψη** της $T$ σαν η σύνθεση της $T$ με τον

*Πέρα όμως από τις δράσεις του $\mathbb{N}$ ή του $\mathbb{Z}$, έχουν μεγάλο ενδιαφέρον και τα δυναμικά συστήματα που προκύπτουν από την δράση **πλεγμάτων**, όπως το $\mathbb{N}^d$ ή το $\mathbb{Z}^d$ (για ακέραιο $d > 1$).

εαυτό της $n$ φορές, $T^n = T \circ \ldots \circ T$ ($n$ φορές). Τότε η $n$-οστή επανάληψη της $T$ (μαζί με την $T^0 = \mathrm{id}_X$) γίνεται η δράση του $\mathbb{N}$ στο $X$, δηλαδή, με αυτή την έννοια, η απεικόνιση $T \colon X \to X$ παράγει ένα δυναμικό σύστημα διακριτού χρόνου $(X, \mathcal{T}_{\mathbb{N}}), \mathcal{T}_{\mathbb{N}} = \{T^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, στο οποίο το $\mathbb{N}$ δρα πάνω στον χώρο φάσεων $X$. Αν, επιπλέον, η απεικόνιση $T \colon X \to X$ είναι *αντιστρεπτή*, δηλαδή, αν υπάρχει η *αντίστροφη* απεικόνιση $T^{-1} : X \to X$, η $n$-οστή επανάληψη της $T$ (μαζί με τις $T^{-n} = (T^n)^{-1}$ και $T^0 = \mathrm{id}_X$) γίνεται η δράση του $\mathbb{Z}$ στο $X$, δηλαδή, με αυτή την έννοια, η απεικόνιση $T \colon X \to X$ παράγει ένα δυναμικό σύστημα διακριτού χρόνου $(X, \mathcal{T}_{\mathbb{Z}}), \mathcal{T}_{\mathbb{Z}} = \{T^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, στο οποίο το $\mathbb{Z}$ δρα πάνω στον χώρο φάσεων $X$.

Επομένως, με την προηγούμενη έννοια, κάθε δυναμικό σύστημα διακριτού χρόνου $(X, \mathcal{T}_{\mathbb{N}})$ ή $(X, \mathcal{T}_{\mathbb{Z}})$, στο οποίο το $\mathbb{N}$ ή το $\mathbb{Z}$ δρα πάνω στον χώρο φάσεων $X$, μπορεί ισοδύναμα να ορισθεί σαν το ζευγάρι $(X, T)$ ενός (μη-κενού) συνόλου $X$ και μιας απεικόνισης $T \colon X \to X$ (που ενδέχεται να είναι αντιστρεπτή).

Στο βιβλίο αυτό πρόκειται να μελετήσουμε *μόνο* τα δυναμικά συστήματα διακριτού χρόνου. Για αυτό, από εδώ και ύστερα σε όλο το βιβλίο, λέγοντας "**δυναμικό σύστημα**" θα εννοούμε "δυναμικό σύστημα **διακριτού χρόνου**." Επιπλέον, σύμφωνα με την προηγούμενη διευκρίνιση, θα δηλώνουμε ένα δυναμικό σύστημα με το ζευγάρι $(X, T)$ ενός συνόλου $X$ και μιας απεικόνισης $T \colon X \to X$.

Μέχρι τώρα έχουμε θεωρήσει ένα γενικό, *συνολο–θεωρητικό*, δυναμικό σύστημα $(X, T)$ ενός συνόλου $X$ και μιας απεικόνισης $T : X \to X$ (που ενδέχεται να είναι αντιστρεπτή). Για να μπορέσουμε να μελετήσουμε πληρέστερα την δυναμική ενός τέτοιου συστήματος, χρειάζεται να έχουμε περισσότερες πληροφορίες για το σύνολο $X$ και την απεικόνιση $T$ στο $X$. Στην Θεωρία των Δυναμικών Συστημάτων υπάρχουν οι εξής τρεις γενικές κατηγορίες συστημάτων:

(i) Τα **Τοπολογικά Δυναμικά Συστήματα**, που παράγονται από τις επαναλήψεις μιας *συνεχούς*[†] απεικόνισης $T$ σε έναν *τοπολογικό χώρο* $X$.

(ii) Τα **Μετρήσιμα Δυναμικά Συστήματα**, που παράγονται από τις επαναλήψεις μιας *μετρήσιμης* απεικόνισης $T$ σε έναν *χώρο μέτρου*, συνήθως *χώρο μέτρου πιθανότητας*, $X$.

(iii) Τα **Διαφορίσιμα** ή **Ομαλά Δυναμικά Συστήματα**, που παράγονται από τις επαναλήψεις μιας *διαφορίσιμης* απεικόνισης $T$ σε έναν *γραμμικό χώρο*, ή γενικότερα σε μια *πολλαπλότητα*, $X$.

Παρότι η κατανόηση της δυναμικής συμπεριφοράς μεμονωμένων σημείων (ή, καλύτερα, των τροχιών που ξεκινούν από αυτά τα σημεία) αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα ζητήματα της θεωρίας των δυναμικών συστημάτων, ο κύριος σκοπός μας στο βιβλίο αυτό είναι να καταλάβουμε πώς συμπεριφέρονται ολόκληρα σύνολα τέτοιων σημείων, τα οποία κατανέμονται στον χώρο φάσεων με κάποια πιθανότητα. Με άλλα λόγια, ο σκοπός μας είναι να μελετήσουμε την δυναμική στον χώρο φάσεων *πιθανοκρατικά*, δηλαδή, από τη σκοπιά της Θεωρίας Μέτρου. Επομένως, στο βιβλίο αυτό θα εστιάσουμε κατεξοχήν την προσοχή μας στην ανάλυση των Μετρήσιμων Δυναμικών Συστημάτων. Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι θα αγνοηθούν οι άλλες δυο κατηγορίες δυναμικών συστημάτων. Δοθέντος ότι η συνηθέστερη τοπολογική δομή συντηρεί κάποια δομή μέτρου, σε όλα τα κεφάλαια από το τρίτο και έπειτα, θα μας απασχολήσει το θέμα των σχέσεων τοπολογίας και μέτρου. Επιπλέον, στο κεφάλαιο για τους Εκθέτες Lyapunov (και στα άλλα σχετικά επόμενα κεφάλαια) θα εξετάσουμε την διαπλοκή διαφορισιμότητας και μέτρου.

[†]Όχι πάντα συνεχής. Π.χ., όπως θα δούμε, από το δεύτερο κεφάλαιο και έπειτα, μεγάλο ενδιαφέρον έχουν οι απεικονίσεις διαστημάτων που είναι μόνο *κατά τμήματα συνεχείς*, δηλαδή, ασυνεχείς σε πεπερασμένο ή αριθμήσιμο πλήθος σημείων.

Συνεπώς, είναι εντελώς απαραίτητο για την πιθανοκρατική ανάλυση της δυναμικής να γνωρίζουμε τις βασικές έννοιες και τα θεμελιώδη αποτελέσματα των Τοπολογικών Δυναμικών Συστημάτων (που άλλωστε αποτελούν την βάση και των Διαφορισίμων Δυναμικών Συστημάτων). Τις έννοιες και τα αποτελέσματα αυτά θα εξετάσουμε στις παραγράφους του κεφαλαίου αυτού, που ακολουθούν την επομένη επίσης γενική παράγραφο.

## 1.2. Αναλλοίωτα Μέτρα

Θεωρούμε τον *χώρο μέτρου* $(X, \mathcal{A}, \mu)$, όπου $X$ είναι ένα σύνολο, $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $X$ (που ονομάζονται *μετρήσιμα σύνολα*) και $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ ένα *μέτρο* στον $X$. (Συνήθως, υποθέτουμε ότι το $\mu$ είναι ένα *μέτρο πιθανότητας*, δηλαδή, $\mu(X) = 1$.) Επιπλέον, έστω η απεικόνιση $T : X \to X$ στον χώρο μέτρου $X$, η οποία υποτίθεται ότι είναι *μετρήσιμη* (δηλαδή, τέτοια ώστε $T^{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$).

**Ορισμός 1.2.1.** Το μέτρο $\mu$ ονομάζεται **αναλλοίωτο** για την $T$ (και η $T$ ονομάζεται **μετρο–διατηρητική** ως προς το $\mu$) αν $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$, για κάθε $A \in \mathcal{A}$.

Ισοδύναμα, συμβολίζοντας με $\mathcal{M}(X)$ το σύνολο όλων των μέτρων στον $X$, το μέτρο $\mu$ είναι αναλλοίωτο για την $T$ αν και μόνον αν $T^*(\mu) = \mu$, όπου η απεικόνιση $T^* : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(X)$ ορίζεται ως $T^*(\mu)(A) = \mu(T^{-1}(A))$, για κάθε $A \in \mathcal{A}$.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{M}(X, T)$ το σύνολο όλων των αναλλοίωτων μέτρων στον $X$ για την $T : X \to X$.

**Λήμμα 1.2.1.** (Χαρακτηρισμός αναλλοίωτων μέτρων.) *Ισχύει ότι $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$ αν και μόνον αν $\int_X f \circ T \, d\mu = \int_X f \, d\mu$, για κάθε $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.*

**Απόδειξη.** Συμβολίζοντας με $\chi_A$ την *χαρακτηριστική συνάρτηση* ενός $A \in \mathcal{A}$, έχουμε προφανώς $\chi_A \circ T = \chi_{T^{-1}(A)}$. Έτσι, αν $\int f \circ T \, d\mu = \int f \, d\mu$, για κάθε $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, θέτοντας $f = \chi_A$ για αυθαίρετο $A \in \mathcal{A}$, έχουμε $\mu(A) = \int \chi_A \, d\mu = \int \chi_A \circ T \, d\mu = \int \chi_{T^{-1}(A)} \, d\mu = \mu(T^{-1}(A))$, δηλαδή, $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$. Από την άλλη μεριά, αν $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$, τότε $\int \chi_A \, d\mu = \mu(A) = \mu(T^{-1}(A)) = \int \chi_{T^{-1}(A)} \, d\mu = \int \chi_A \circ T \, d\mu$, για κάθε $A \in \mathcal{A}$, οπότε προσεγγίζοντας οποιαδήποτε συνάρτηση $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ (στη νόρμα του $L^1$) με πεπερασμένους συνδυασμούς τέτοιων χαρακτηριστικών συναρτήσεων, απορρέει η ζητούμενη σχέση. □

**Παράδειγμα 1.2.1.** Έστω $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$ ο μοναδιαίος κύκλος, που μπορεί να θεωρηθεί σαν το μοναδιαίο διάστημα $[0, 1)$, όταν ταυτισθεί με τον χώρο πηλίκο $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, των πραγματικών αριθμών 'mod 1.' Το σύνολο αυτό αποκτά την δομή ενός χώρου μέτρου εφοδιασμένο με τη συνήθη σ-άλγεβρα Borel. Ορίζουμε την απεικόνιση της *περιστροφής* του κύκλου $T\colon [0, 1) \to [0, 1)$ με τη σχέση $T(x) = x + a \pmod 1$, όπου $a \in \mathbb{R}$. (Ισοδύναμα, στον $S^1$, η απεικόνιση της περιστροφής ορίζεται σαν $T(e^{2\pi i\theta}) = e^{2\pi i(\theta + a)}$.) Προφανώς το συνήθες μέτρο Lebesgue στον κύκλο είναι αναλλοίωτο για την απεικόνιση αυτή της περιστροφής. □

**Παράδειγμα 1.2.2.** Έστω $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ ο δισδιάστατος τόρος, που μπορεί να θεωρηθεί σαν το μοναδιαίο τετράγωνο $[0, 1) \times [0, 1)$, όταν ταυτισθεί με τον χώρο πηλίκο $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Το σύνολο αυτό αποκτά την δομή ενός χώρου μέτρου εφοδιασμένο με τη συνήθη σ-άλγεβρα Borel. Ορίζουμε την απεικόνιση της *μεταφοράς* ή *περιστροφής* στις συντεταγμένες του τόρου $T : [0, 1) \times [0, 1) \to [0, 1) \times [0, 1)$ με τη σχέση $T(x_1, x_2) = (x_1 + a_1, x_2 + a_2) \pmod 1$, όπου $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Προφανώς το συνήθες μέτρο Lebesgue–Haar στον τόρο είναι αναλλοίωτο για την απεικόνιση αυτή της μεταφοράς. □

**Παράδειγμα 1.2.3.** Έστω ο *$r$-αδικός μετασχηματισμός* $T : [0,1) \to [0,1)$, που ορίζεται ως $T(x) = rx \pmod 1$, όπου $r > 1$ ακέραιος. Το $[0,1)$ θεωρείται εφοδιασμένο με τη συνήθη σ-άλγεβρα Borel. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός $T^{-1}$ απεικονίζει τα διαστήματα $[a,b) \subset [0,1)$ ως εξής

$$T^{-1}([a,b)) = \bigcup_{j=0}^{r-1} \left[\frac{a+j}{r}, \frac{b+j}{r}\right).$$

Έτσι, αν $\mathcal{L}$ είναι το μέτρο Lebesgue στο $[0,1)$, επειδή

$$\mathcal{L}(T^{-1}([a,b))) = \sum_{j=0}^{r-1} \left|\frac{b+j}{r} - \frac{a+j}{r}\right| = b - a = \mathcal{L}([a,b)),$$

το μέτρο Lebesgue είναι αναλλοίωτο για τον $r$-αδικό μετασχηματισμό. $\square$

**Παράδειγμα 1.2.4.** Έστω η *απεικόνιση του Gauss* $T\colon (0,1) \to (0,1)$, που ορίζεται ως $T(x) = 1/x \pmod 1$, όπου το $(0,1)$ θεωρείται εφοδιασμένο με τη συνήθη σ-άλγεβρα Borel. Η απεικόνιση του Gauss έχει αναλλοίωτο μέτρο το ονομαζόμενο *μέτρο του Gauss*:

$$\mu(A) = \frac{1}{\log 2} \int_A \frac{1}{1+x}\, dx,\ A \in \mathcal{A},$$

που είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue. Επιπλέον, μπορεί να αποδειχθεί ότι το μέτρο του Gauss είναι το μοναδικό αναλλοίωτο μέτρο για την απεικόνιση του Gauss (δείτε [Ma né87]). $\square$

**Θεώρημα 1.2.1.** (**Το Θεώρημα της Επαναφοράς του Poincaré**.) *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου πιθανότητας και $T : X \to X$ μια μετρήσιμη απεικόνιση, για την οποία το $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ είναι ένα αναλλοίωτο μέτρο. Για κάθε σύνολο $A \in \mathcal{A}$, σχεδόν όλα τα σημεία του $A$ επιστρέφουν στο $A$ άπειρες φορές, δηλαδή, το σύνολο $A_0 = \{x \in A : T^n(x) \in A,$ για άπειρο πλήθος $n \geq 0\}$ είναι μετρήσιμο και $\mu(A) = \mu(A_0)$.*

**Απόδειξη.** Έστω $C_n = \{x \in A\colon T^j(x) \notin A,$ για κάθε $j \geq n\}$. Προφανώς, $A_0 = A \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n$ και το θεώρημα θα έχει αποδειχθεί, αν δείξουμε ότι $C_n \in \mathcal{A}$ και $\mu(C_n) = 0$, για κάθε $n \geq 1$. Καθώς $C_n = A \setminus \bigcup_{j \geq n} T^{-1}(A)$, πράγματι, $C_n \in \mathcal{A}$ και, επιπλέον, $C_n \subset \bigcup_{j\geq 0} T^{-j}(A) \setminus \bigcup_{j \geq n} T^{-j}(A)$, από όπου παίρνουμε $\mu(C_n) \leq \mu\left(\bigcup_{j\geq 0} T^{-j}(A)\right) - \mu\left(\bigcup_{j\geq n} T^{-j}(A)\right)$. Αλλά επειδή $\bigcup_{j\geq n} T^{-j}(A) = T^{-n}\left(\bigcup_{j\geq 0} T^{-j}(A)\right)$, έχουμε $\mu\left(\bigcup_{j\geq n} T^{-j}(A)\right) = \mu\left(T^{-n}\left(\bigcup_{j\geq 0} T^{-j}(A)\right)\right)$, που συνεπάγεται ότι $\mu(C_n) = 0$. $\square$

Υπάρχει μια τοπολογική εκδοχή του θεωρήματος της επαναφοράς, για την οποία χρειαζόμαστε την έννοια του 'ω-οριακού συνόλου' ενός σημείου κάτω από μια απεικόνιση. Έστω $X$ ένας τοπολογικός χώρος και $T\colon X \to X$ μια απεικόνιση. Ορίζουμε το *ω-οριακό σύνολο* ενός σημείου $x \in X$ σαν το σύνολο των σημείων $y \in X$, για τα οποία κάθε γειτονιά $U$ του $y$ έχει $T^n(x) \in U$ για άπειρο πλήθος θετικών $n$. Όταν το $X$ είναι ένας μετρικός χώρος με μετρική $d$, αυτό ισοδυναμεί με τη συνθήκη $\liminf_{n\to+\infty} d(T^n(x), y) = 0$. Το ω-οριακό σύνολο του $x$ συμβολίζεται ως $\omega(x)$. Ειδικότερα, ένα σημείο $x \in X$ ονομάζεται (θετικά) *επαναφερόμενο* αν $x \in \omega(x)$.

**Θεώρημα 1.2.2.** *Έστω $X$ ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου Borel πιθανότητας και $T : X \to X$ μια μετρήσιμη απεικόνιση, για την οποία το $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$ είναι ένα αναλλοίωτο μέτρο. Τότε $\mu(\{x : x \notin \omega(x)\}) = 0$, ή, με άλλα λόγια, σχεδόν κάθε σημείο είναι επαναφερόμενο.*

**Απόδειξη.** Έστω $\{U_n\}_{n\geq 0}$ μια βάση ανοικτών συνόλων τέτοιων ώστε $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{diam}(U_n) = 0$ και $\bigcup_{n\geq m} U_n = X$, για κάθε $m \geq 0$. Έστω $\tilde{U}_n = \{x \in U_n : T^j(x) \in U_n$, για άπειρο πλήθος τιμών του $j > 0\}$. Από το προηγούμενο θεώρημα, $\mu(U_n \setminus \tilde{U}_n) = 0$. Θέτουμε $\tilde{X} = \bigcap_{m=0}^{+\infty} \bigcup_{n\geq m} \tilde{U}_n$. Έπεται ότι $\mu(X \setminus \tilde{X}) = \mu\left(\bigcup_{m=0}^{+\infty}\left(X \setminus \bigcup_{n\geq m} \tilde{U}_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{m=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{n\geq m} U_n \setminus \bigcup_{n\geq m} \tilde{U}_n\right)\right) \leq \mu\left(\bigcup_{m=0}^{+\infty} \bigcup_{n\geq m}(U_n \setminus \tilde{U}_n)\right) = 0$. Επομένως, το μόνο που μένει να δείξουμε είναι ότι $x \in \tilde{X}$ συνεπάγεται $x \in \omega(x)$. Έστω $r > 0$ και διαλέγουμε $m$ έτσι ώστε $\mathrm{diam}(U_n) \leq r/3$, όταν $n \geq m$. Αφού $x \in \tilde{X}$, έχουμε $x \in \bigcup_{n\geq m} \tilde{U}_n$. Άρα, υπάρχει $n \geq m$ τέτοιο ώστε $x \in \tilde{U}_n$. Επειδή $\mathrm{diam}(U_n) \leq r/3$, έπεται ότι $U_n \subset B_r(x)$ ($B_r(x)$ είναι η ανοικτή μπάλλα ακτίνας $r$ με κέντρο $x$), που συνεπάγεται ότι $T^j(x) \in B_r(x)$, αν $T^j(x) \in U_n$. Αλλά, αφού $x \in \tilde{U}_n$, $T^j(x) \in U_n$, για άπειρο πλήθος τιμών του $j$, και, συνεπώς, $x \in \omega(x)$. □

## 1.3. Αναλλοίωτα Μέτρα Συνεχών Απεικονίσεων

Υποθέτουμε τώρα, στην παράγραφο αυτή, ότι το $X$ είναι ένας συμπαγής μετρικός χώρος και ότι η $T : X \to X$ είναι μια συνεχής απεικόνιση.

Επιπλέον, επισυνάπτουμε στο $X$ τη σ-άλγεβρα Borel μαζί με κάποια μέτρα Borel, που υποτίθενται ότι είναι μέτρα πιθανότητας. Όπως πιο πριν, συμβολίζουμε με $\mathcal{M}(X)$ το σύνολο όλων των μέτρων Borel πιθανότητας στον $X$.

Ακόμη, συμβολίζουμε με $C(X)$ το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{R}$. Υπενθυμίζουμε ότι στην περίπτωση αυτή (το $X$ συμπαγής μετρικός χώρος), το $C(X)$ γίνεται ένας νορμικός γραμμικός χώρος εφοδιασμένος με την νόρμα $\|f\|_0 = \sup_{x\in X} |f(x)|$.

**Θεώρημα 1.3.1.** *Έστω $\mu, \nu \in \mathcal{M}(X)$. Αν $\int_X f\,d\mu = \int_X f\,d\nu$, για κάθε $f \in C(X)$, τότε $\mu = \nu$.*

**Θεώρημα 1.3.2.** (**Το Θεώρημα της Αναπαράστασης του Riesz.**) *Έστω $F \in C(X)^*$ ένα θετικό συνεχές γραμμικό συναρτησιακό στον $C(X)$, δηλαδή, μια συνεχής γραμμική απεικόνιση $F : C(X) \to \mathbb{R}$. Αν $F(f) \geq 0$, όταν $f \in C(X)$, $f \geq 0$, και $F(\chi_X) = 1$, τότε υπάρχει μοναδικό $\mu \in \mathcal{M}(X)$ τέτοιο ώστε $\int_X f\,d\mu = F(f)$, για κάθε $f \in C(X)$.*

(Δείτε [Walters82] για την απόδειξη του Θεωρήματος 1.3 και [Rudin74] για μια απόδειξη του Θεωρήματος 1.4 της Αναπαράστασης του Riesz.)

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ορίζεται μια απεικόνιση από το $\mathcal{M}(X)$ στο $\{F \in C(X)^* : F(f) \geq 0$, αν $f \geq 0$, και $F(\chi_X) = 1\}$, που δίνεται ως $\mu \mapsto \int_X \cdot\, d\mu = F_\mu(\cdot)$. Η απεικόνιση αυτή είναι επί (από το Θεώρημα 1.4 της Αναπαράστασης του Riesz) και ένα–προς–ένα (από το Θεώρημα 1.3). Επιπλέον, η απεικόνιση αυτή είναι ομοπαραλληλική (δηλαδή, $F_{p\mu+(1-p)\nu} = pF_\mu + (1-p)F_\nu$, για $p \in [0, 1]$, $\mu, \nu \in \mathcal{M}(X)$), οπότε το $\mathcal{M}(X)$ ταυτίζεται με ένα κυρτό σύνολο της μοναδιαίας μπάλλας στο $C(X)^*$. Για το λόγο αυτό, μπορεί το $\mathcal{M}(X)$ να εφοδιασθεί με μια τοπολογία που απορρέει από την ασθενή$^*$ τοπολογία στο $C(X)^*$.

**Ορισμός 1.3.1.** Η *ασθενής$^*$ τοπολογία* στο $\mathcal{M}(X)$ είναι η μικρότερη τοπολογία που κάνει συνεχείς όλες τις απεικονίσεις $\mu \mapsto \int_X f\,d\mu$ ($f \in C(X)$). Μια βάση αυτής της τοπολογίας δίνεται από τις συλλογές όλων των συνόλων της μορφής

$$U_\mu(f_1, \ldots , f_k; \varepsilon) = \left\{ \nu \in \mathcal{M}(X) \colon \left| \int_X f_i \, d\nu - \int_X f_i \, d\mu \right| < \varepsilon, 1 \le i \le k \right\},$$

όπου $\mu \in \mathcal{M}(X), k \geq 1, f_i \in C(X)$ και $\varepsilon > 0$.

Ο επόμενος χαρακτηρισμός της σύγκλισης μέτρων στο $\mathcal{M}(X)$ αποδεικνύεται στο βιβλίο του [Ma né87].

**Πρόταση 1.3.1.** *Δοθέντος ότι το $X$ είναι ένας συμπαγής μετρικός χώρος, υπάρχει μια ακολουθία $\{f_j\}_{j=1,\ldots,\infty}$ συναρτήσεων του $C(X)$, που αποτελεί ένα σύνολο πυκνό στη μοναδιαία μπάλλα $\{f \in C(X) \colon \|f\|_0 \leq 1\}$. Έτσι, ορίζεται η εξής μετρική στο $\mathcal{M}(X)$:*

$$d(\mu, \nu) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left| \int_X f_j \, d\mu - \int_X f_j \, d\nu \right|.$$

*Έστω η ακολουθία $\mu_n \in \mathcal{M}(X)$. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

*(i)* $\mu_n \to \mu$ *στην ασθενή$^*$ τοπολογία του* $\mathcal{M}(X)$.

*(ii)* $\lim_{n\to\infty} d(\mu_n, \mu) = 0$.

*(iii)* $\lim_{n\to\infty} \int_X f \, d\mu_n = \int_X f \, d\mu$*, για κάθε* $f \in C(X)$.

**Θεώρημα 1.3.3.** *Έστω $X$ ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $T \colon X \to X$ μια συνεχής απεικόνιση. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:*

*(i) Το $\mathcal{M}(X)$ είναι ένας συμπαγής μετρικός χώρος (για την ασθενή$^*$ τοπολογία).*

*(ii) Η απεικόνιση $T^* \colon \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(X)$ είναι συνεχής και ομοπαραλληλική.*

*(iii) (**Krylov & Bogolioubov**.) Το $\mathcal{M}(X,T)$ είναι μη–κενό.*

*(iv) Το $\mathcal{M}(X,T)$ είναι συμπαγές και κυρτό σύνολο του $\mathcal{M}(X)$.*

**Απόδειξη.** Στο βιβλίο του [Walters82] αποδεικνύονται όλοι οι ισχυρισμοί του θεωρήματος αυτού. Εδώ θα αποδείξουμε μόνο το (iii), δηλαδή, την μη–κενότητα του $\mathcal{M}(X,T)$. Παίρνουμε ένα οποιοδήποτε $\mu \in \mathcal{M}(X)$ και θεωρούμε την ακολουθία $\mu_n \in \mathcal{M}(X)$ που ορίζεται ως

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu \circ T^{-j} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (T^*)^j \, (\mu).$$

(Παραπάνω και στη συνέχεια, οι *εκθέτες* στις απεικονίσεις συμβολίζουν επαναλήψεις, δηλαδή, *συνθέσεις* απεικονίσεων.) Λόγω της κυρτότητας του $\mathcal{M}(X)$, $\mu_n \in \mathcal{M}(X)$, για κάθε $n \geq 1$, και λόγω της συμπαγότητας του $\mathcal{M}(X)$, υπάρχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $\{\mu_{n_j}\}$ με όριο $\tilde{\mu} = \lim_{j\to\infty} \mu_{n_j}$. Επειδή

$$T^*(\tilde{\mu}) = \lim_{j\to\infty} T^*(\mu_{n_j}) = \lim_{j\to\infty} \left( \mu_{n_j} - \frac{\mu - (T^*)^{n_j+1}(\mu)}{n_j} \right) = \lim_{j\to\infty} \mu_{n_j} = \tilde{\mu},$$

το $\tilde{\mu}$ είναι αναλλοίωτο. Η απόδειξη αυτή δεν είναι τίποτε άλλο παρά μια απλή εκδοχή του *Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Schauder*. $\square$

**Παρατήρηση 1.3.1.** Όταν το $X$ είναι ένας συμπαγής μετρικός χώρος και η $T: X \to X$ μια συνεχής απεικόνιση, βελτιώνεται το Λήμμα 1.1 του χαρακτηρισμού των αναλλοίωτων μέτρων ως εξής: $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ *αν και μόνον αν* $\int_X f \circ T\, d\mu = \int_X f\, d\mu$, *για κάθε* $f \in C(X)$.

**Παρατήρηση 1.3.2.** Στην περίπτωση που η απεικόνιση $T: X \to X$ έχει ένα *περιοδικό* σημείο $x$ περιόδου $n$ (δηλαδή, τέτοιο ώστε $T^n(x) = x$), τότε βρίσκουμε αμέσως ένα αναλλοίωτο μέτρο. Αυτό είναι το

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{T^j(x)},$$

όπου $\delta_y$ είναι το *μέτρο Dirac* στο σημείο $y \in X$ (δηλαδή, $\delta_y(A) = 1$, όταν $y \in A$, και $\delta_y(A) = 0$, όταν $y \notin A$.)

Το παράδειγμα που ακολουθεί δείχνει ότι αν χαθεί η συνέχεια της $T$, τότε μπορεί να *μην* υπάρχει αναλλοίωτο μέτρο.

**Παράδειγμα 1.3.1.** Θεωρούμε την απεικόνιση $T\colon [0,1] \to [0,1]$ που ορίζεται ως

$$T(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Θα δείξουμε ότι αυτή η απεικόνιση δεν έχει κανένα αναλλοίωτο μέτρο. Η αντίστροφη απεικόνιση είναι

$$T^{-1}(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & x = 1, \\ \{\varnothing\}, & \text{αλλοιώς.} \end{cases}$$

Ας υποθέσουμε ότι η $T$ είχε ένα αναλλοίωτο μέτρο $\mu$. Τότε $\mu(\{0\}) = \mu(T^{-1}(\{0\})) = \mu(\varnothing) = 0$ και $\mu(\{1\}) = \mu(T^{-1}(\{1\})) = \mu(\{0\}) = 0$. Επομένως, $\mu((0,1/2)) = \mu(T^{-1}(0,1/2)) = 1$ και, επαγωγικά, $\mu((0, \frac{1}{2^n})) = 1$, για κάθε $n \geq 1$. Έστω $A = (0, \frac{1}{2^n})$. Τότε $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 1$ και $lim_{n\to\infty}\mu(A_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\varnothing) = 0$, που είναι κάτι άτοπο. $\square$

## 1.4. Εργοδικά Μέτρα

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου πιθανότητας και $T\colon X \to X$ μια απεικόνιση.

**Ορισμός 1.4.1.** Ένα αναλλοίωτο μέτρο $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ ονομάζεται **εργοδικό** για την $T$ αν κάθε σύνολο $A \in \mathcal{A}$, που είναι *αναλλοίωτο* ως προς την $T$ (δηλαδή, $T^{-1}(A) = A$), έχει μέτρο είτε $\mu(A) = 0$ ή $\mu(A) = 1$. (Επιπλέον, στην περίπτωση αυτή, η $T$ ονομάζεται *εργοδική* απεικόνιση ως προς το $\mu$.)

Ο ορισμός αυτός λέει ότι, για να είναι ένα αναλλοίωτο μέτρο $\mu$ εργοδικό, τα μόνα αναλλοίωτα μετρήσιμα σύνολα που μπορούν να υπάρξουν είναι μόνο εκείνα με 'μέγεθος' ίσο προς όλο το σύνολο $X$ ή τα μηδενο–σύνολα.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{E}(X,T)$ το σύνολο όλων των εργοδικών αναλλοιώτων μέτρων για την $T\colon X \to X$.

**Λήμμα 1.4.2.** (Χαρακτηρισμός εργοδικών μέτρων.) *Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

*(i)* $\mu \in \mathcal{E}(X,T)$.

*(ii) Αν $f$ μετρήσιμη στον $X$ και $f \circ T = f$ ς.π., τότε η $f$ είναι σταθερά ς.π. (ως προς $\mu$) στο $X$.*

**Απόδειξη.** (ii) $\Rightarrow$ (i). Έστω $A$ μετρήσιμο σύνολο αναλλοίωτο για την $T$. Θεωρούμε την χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi_A$ του $A$. Καθώς το $A$ είναι αναλλοίωτο για την $T$, $\chi_A \circ T = \chi_{T^{-1}(A)} = \chi_A$, οπότε η (ii) συνεπάγεται ότι η $\chi_A$ είναι σταθερά ς.π. (ως προς $\mu$). Επειδή οι τιμές της χαρακτηριστικής συνάρτησης είναι είτε 1 ή 0, παίρνουμε είτε $\mu(A) = 0$ ή $\mu(A) = 1$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια μετρήσιμη συνάρτηση $f$, η οποία *δεν* είναι σταθερά ς.π. Τότε θα μπορούσαμε να βρούμε έναν πραγματικό αριθμό $c$ τέτοιον ώστε το σύνολο $A = \{x \in X : f(x) \geq c\}$ να έχει μέτρο $0 < \mu(A) < 1$. Όμως η συνθήκη $f \circ T = f$ συνεπάγεται ότι $T^{-1}(A) = A$, που είναι άτοπο. $\square$

**Παράδειγμα 1.4.1.** Έστω $T\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ η απεικόνιση της περιστροφής του κύκλου $T(x) = x + a \pmod 1$ με $a \in R$, για την οποία το μέτρο Lebesgue είναι αναλλοίωτο. Αν $a \in \mathbb{Q}$, όλα τα σημεία του κύκλου είναι περιοδικά (με την ίδια περίοδο) και η περιστροφή του κύκλου *δεν* είναι εργοδική για το μέτρο Lebesgue. Αν $a \notin \mathbb{Q}$, τότε το μέτρο Lebesgue είναι εργοδικό για την απεικόνιση της περιστροφής του κύκλου. (Δείτε [Ma né87] για τις λεπτομέρειες.) $\square$

**Παράδειγμα 1.4.2.** Έστω $T : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ η απεικόνιση της μεταφοράς (ή περιστροφής των συντεταγμένων του τόρου) $T(x_1, x_2) = (x_1 + a_1, x_2 + a_2) \pmod 1$ με $(a_1, a_2) \in R^2$, για την οποία το μέτρο Lebesgue–Haar είναι αναλλοίωτο. Αν $\frac{a_1}{a_2} \notin \mathbb{Q}$, τότε το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue–Haar $\mathcal{L}$ είναι το μοναδικό αναλλοίωτο μέτρο για την απεικόνιση $T$ της αυτής περιστροφής του τόρου, οπότε $\mathcal{M}(X,T) = \mathcal{E}(X,T) = \{\mathcal{L}\}$. (Δείτε [Ma né87] για τις λεπτομέρειες.) Αν $\frac{a_1}{a_2} \in \mathbb{Q}$, τότε τα $\mathcal{M}(X,T)$ και $\mathcal{E}(X,T)$ είναι και τα δυο απειροσύνολα και $\mathcal{M}(X,T) \neq \mathcal{E}(X,T)$. $\square$

Έχουμε ήδη δει ότι το σύνολο $\mathcal{M}(X,T)$ των αναλλοιώτων μέτρων είναι κυρτό υποσύνολο του συνόλου $\mathcal{M}(X)$ όλων των μέτρων. Στη συνέχεια θα ταυτίσουμε το σύνολο $\mathcal{E}(X,T)$ των εργοδικών μέτρων με ένα συγκεκριμένο υποσύνολο του $\mathcal{M}(X,T)$ και θα προσδιορίσουμε αναλυτικότερα τη σχέση αναλλοιώτων και εργοδικών μέτρων.

Για το σκοπό αυτό, χρειαζόμαστε τον ορισμό των 'ακραίων σημείων' ενός κυρτού συνόλου $C$. Ένα $x \in C$ ονομάζεται *ακραίο σημείο* του $C$ αν δεν μπορεί να γραφεί σαν κυρτός συνδυασμός δυο διαφορετικών σημείων του $C$, δηλαδή, αν $x = \lambda y + (1-\lambda)z$, για $y, z \in C, y \neq z, 0 \leq \lambda \leq 1$, να συνεπάγεται ότι $\lambda = 0$ ή $\lambda = 1$. Συμβολίζουμε με $\mathrm{Ext}(C)$ το σύνολο των ακραίων σημείων του κυρτού συνόλου $C$. Είναι εύκολο να δούμε ότι αν $C \neq \varnothing$, τότε $\mathrm{Ext}(C) \neq \varnothing$.

**Θεώρημα 1.4.1.** *Τα ακραία σημεία του $\mathcal{M}(X,T)$ είναι ακριβώς τα εργοδικά μέτρα, δηλαδή,* $\mathrm{Ext}(\mathcal{M}(X,T)) = \mathcal{E}(X,T)$. *Επιπλέον, δοθέντος οποιουδήποτε αναλλοιώτου μέτρου $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$, υπάρχει ένα μέτρο πιθανότητας $\tau_\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{M}(X,T))$ τέτοιο ώστε:*

*(i)* $\tau_\mu(\mathcal{E}(X,T)) = 1$.

*(ii)* $\int_X f\,d\mu = \int_{\mathcal{E}(X,T)} \left(\int_X f\,d\mu'\right) d\tau_\mu(\mu')$, *για κάθε $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Με άλλα λόγια, το αναλλοίωτο μέτρο $\mu$ είναι ένας κυρτός συνδυασμός των εργοδικών αναλλοιώτων μέτρων $\mu'$ που κατανέμονται με το $\tau_\mu$.*

Η απόδειξη του πρώτου μέρους του αποτελέσματος αυτού είναι απλή (δείτε [Ma né87]). Το δεύτερο μέρος συνήθως αποδεικνύεται μέσω του Θεωρήματος του Choquet αλλά υπάρχει μια εναλλακτική απόδειξη στο βιβλίο του [Pollicott93] (που στηρίζεται σε ιδέες του [Ma né87]).

Όπως ήδη έχουμε δει, $\mathcal{M}(X,T) \neq \varnothing$, για συνεχείς απεικονίσεις $T$ σε συμπαγείς μετρικούς χώρους $X$. Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη ότι τα (μη-κενά) κυρτά σύνολα πάντα έχουν ακραία σημεία, προκύπτει το εξής αποτέλεσμα στην περίπτωση αυτή.

**Πόρισμα 1.4.1.** (Ύπαρξη Εργοδικών Μέτρων για Συνεχείς Απεικονίσεις.) *Έστω $X$ ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $T\colon X \to X$ μια συνεχής απεικόνιση. Τότε πάντοτε υπάρχει τουλάχιστον ένα εργοδικό μέτρο για την $T$, δηλαδή, $\mathcal{E}(X,T) \neq \varnothing$.*

## 1.5. Το Εργοδικό Θεώρημα του Birkhoff

Τα εργοδικά μέτρα έχουν πολύ καλές ιδιότητες επαναφοράς, όπως φαίνεται από το επόμενο αποτέλεσμα, που αποτελεί το δεύτερο σημαντικό θεώρημα της εργοδικής θεωρίας (μετά το θεώρημα επαναφοράς του Poincaré).

**Θεώρημα 1.5.1.** (**Το Εργοδικό Θεώρημα του Birkhoff.**) *Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ ένας χώρος μέτρου πιθανότητας και $T\colon X \to X$ μια μετρήσιμη απεικόνιση, για την οποία το $\mu \in \mathcal{E}(X,T)$ είναι ένα εργοδικό μέτρο. Τότε, για κάθε $f \in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$, ισχύει*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)) = \int_X f\,d\mu,$$

*για σχεδόν (ως προς το $\mu$) όλα τα σημεία $x \in X$.*

Λαμβάνοντας υπόψη ότι το σύνολο $\{T^n(x)\}_{n=0,1,2,\ldots}$ παριστά την *τροχιά* της $T$ που ξεκινά από το σημείο $x \in X$, έχουμε μια ενδιαφέρουσα ερμηνεία του θεωρήματος αυτού. Πράγματι, το εργοδικό θεώρημα του Birkhoff μας λέει ότι, δοθείσης μιας (ολοκληρώσιμης) συνάρτησης $f$, η μέση τιμή της $f$ πάνω στην τροχιά από το $x$, για σχεδόν (ως προς το μέτρο $\mu$) όλα τα $x \in X$, ισούται με την χωρική μέση τιμή της $f$ (που είναι το ολοκλήρωμα ως προς το μέτρο $\mu$ της $f$ σε όλο τον χώρο $X$), εφόσον το μέτρο $\mu$ είναι εργοδικό.

Για $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$, θέτοντας $f = \chi_A$, προκύπτει η παρακάτω σημαντική συνέπεια του εργοδικού θεωρήματος του Birkhoff.

**Πόρισμα 1.5.1.** *Δοθέντος ενός συνόλου $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$, ισχύει ότι, για σχεδόν (ως προς το $\mu$) όλα τα σημεία $x \in X$,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\#\{0 \le j \le n-1\colon T^j(x) \in A\}}{n} = \mu(A),$$

*δηλαδή, η αναλογία του χρόνου που δαπανά η τροχιά του σημείου $x$ για να βρίσκεται μέσα στο $A$ είναι $\mu(A)$.*

Η απόδειξη του εργοδικού θεωρήματος του Birkhoff μπορεί να βρεθεί σε βιβλία της εργοδικής θεωρίας, όπως τα βιβλία των [Walters82], [Ma né87] και [Pollicott93].

**Κάποιες Εφαρμογές του Εργοδικού Θεωρήματος του Birkhoff:**

(I) Σχεδόν για όλα τα $0 \le x \le 1$ (ως προς το μέτρο Lebesgue), ο μέσος αριθμός των μηδενικών στην δεκαδική ανάλυση $x = 0.x_1x_2x_3\cdots$ είναι $1/10$ (τέτοιοι αριθμοί ονομάζονται *κανονικοί αριθμοί*). Πράγματι, θεωρούμε την απεικόνιση $T\colon [0,1) \to [0,1), T(x) = 10x \pmod 1$, και παρατηρούμε ότι το μέτρο Lebesgue είναι αναλλοίωτο και εργοδικό για αυτή την απεικόνιση. Θέτοντας $A = [0, 1/10)$, είναι εύκολο να δούμε ότι $x_j = 0$ αν και μόνον αν $T^j(x) \in A$. Επομένως, ο προηγούμενος ισχυρισμός απορρέει από το πόρισμα του εργοδικού θεωρήματος του Birkhoff.

(II) Υποθέτουμε ότι το $0 < x < 1$ έχει ανάλυση συνεχούς κλάσματος της μορφής

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}} \ ,$$

όπου $a_1, a_2, a_3, \dots \geq 1$. Για το συνεχές κλάσμα αυτό, ορίζεται η ακολουθία $p_n/q_n$ ως

$$\frac{p_n}{q_n} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} \ ,$$

και αυτή η ακολουθία ρητών αριθμών έχει όριο $\lim_{n\to\infty} p_n/q_n = x$. Ισχυριζόμαστε ότι, σχεδόν για όλα τα $x$ (ως προς το μέτρο Lebesgue), ικανοποιούνται οι παρακάτω σχέσεις:

(i) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} (a_1 \cdots a_n)^{1/n} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{k^2+2k}\right)^{\log k/\log 2}$ και

(ii) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{\log q_n}{n} = \frac{\pi}{12 \log 2}$.

Για να δείξουμε αυτές τις σχέσεις, θεωρούμε την απεικόνιση του Gauss $T\colon (0,1) \to (0,1), T(x) = 1/x \pmod 1$, για την οποία το μέτρο του Gauss είναι εργοδικό (ως το μοναδικό αναλλοίωτο μέτρο). Παρατηρούμε ότι $a_j = k$ αν και μόνον αν $T^j(x) \in [1/(k+1), 1/k)$. Έστω $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση που ορίζεται θέτοντας $f(x) = \log k$, όταν $x \in [1/(k+1), 1/k)$. Από το εργοδικό θεώρημα του Birkhoff έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \log a_j &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)) = \\ = \frac{1}{\log 2} \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}\, dx &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\log k}{\log 2} \log\left(1 + \frac{1}{k^2+2k}\right). \end{aligned}$$

Υψώνοντας στο $e$ τη σχέση αυτή προκύπτει η (i). Παρόμοια δείχνεται η (ii).

# Αναφορές


[AKM65] Adler, R.L., A.G. Konheim, and M.H. McAndrew. Topological entropy. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **114** (1965), 309-319.

[ALM93] Alsedà, Lluís, Jaume Llibre, and Michal Misiurewicz. *Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One.* World Scientific, Singapore, 1993.

[BBCDS92] Banks, J., J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, and P. Stacey. On Devaney's definition of chaos. *Amer. Math. Month.*, **99** (1992), 332-334.

[Bowen70] Bowen, Rufus. Topological Entropy and Axiom A. In *Global Analysis, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vol. 14, pp. 23-41. American Mathematical Society, Providence (RI), 1970.

[Bowen71] Bowen, Rufus. Entropy for group endomorhisms and homogeneous spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **153** (1971), 401-414.

[BK83] Brin, M., and A. Katok. On local entropy. *Lect. Notes Math.*, **1007** (1983), 30-38.

[Brudno83] Brudno, A.A. Entropy and the complexity of trajectories of a dynamical system. *Transl. Moscow Math. Soc.*, **44** (1983), 127-151.

[Devaney89] Devaney, Robert L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.* Addison–Wesley, Redwood City, CA, 1989.

[Dinaburg70] Dinaburg, E.I. The relation between topological entropy and metric entropy. *Soviet Math.*, **11** (1970), 13-16.

[DS57] Dunford, N., and J.T. Schwartz. *Linear Operators. Part I: General Theory.* Wiley, New York, 1957.

[Guckenheimer79] Guckenheimer, John. Sensitive dependence to initial conditions for one dimensional maps. *Commun. Math. Phys.*, **70** (1979), 133-160.

[HK90] Hofbauer, Franz, and Gerhard Keller. Quadratic maps without asymptotic measure. *Commun. Math. Phys.*, **127** (1990), 319-317.

[Johnson87] Johnson, Stewart D. Singular measures without restrictive intervals. *Commun. Math. Phys.*, **110** (1987), 185-190.

[Katok80] Katok, Anatole. Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorhisms. *Publ. Math. I.H.E.S.*, **51** (1980), 137-173.

[KH95] Katok, Anatole, and Boris Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems.* Cambridge University Press, Cambridge (UK), 1995.

[S.Katok80] Katok, Svetlana R. The estimation from above for the topological entropy of a diffeomorphism. *Lect. Notes Math.*, **819** (1980), 258-264.

[KW82] Katznelson, Y., and B. Weiss. A simple proof of some ergodic theorems. *Israel J. Math.*, **42** (1982), 291-296.

[Keller90] Keller, Gerhard. Exponents, attractors and Hopf decompositions for interval maps. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **10** (1990), 717-744.

[Keller95] Keller, Gerhard. Lyapunov exponents and complexity for interval maps. *Lect. Notes Math.*, **1486** (1995), 216-226.

[KR69] Keynes, H.B., and J.B. Robertson. Generators for topological entropy and expansiveness. *Math. Systems Theory.*, **3** (1969), 51-59.

[Kingman73] Kingman, J.F.C. Subadditive ergodic theory. *Ann. Probab.*, **1** (1973), 883-909.

[Kolmogorov65] Kolmogorov, A.N. Three approaches to the definition of the concept of the "ammount of information." *Problemy Peredachi Informatsii*, **1** (1965), 3-11. *Selected Transl. Math. Statist. and Probab.*, **7** (1968), 293-302.

[LM94] Lasota, Andrzej, and Michael C. Mackey. *Chaos, Fractals, and Noise. Stochastic Aspects of Dynamics.* Springer–Verlag, New York, 1994.

[LY73] Lasota, Andrzej, and James A. Yorke. On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **186** (1973), 481-488.

[Ledrappier81] Ledrappier, François. Some properties of absolutely continuous invariant measures on an interval. *Regod. Th. & Dynam. Sys.*, **1** (1981), 77-93.

[LiY78] Li, T.Y., and J.A. Yorke. Ergodic transformations from an interval into itself. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **235** (1978), 183-192.

[Lin71] Lin, M. Mixing for Markov operators. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete*, **19** (1971), 231-242.

[Ma˜né87] Ma˜né, Ricardo. *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics.* Springer–Verlag, Berlin, 1987.

[dMvS93] de Melo, Welington, and Sebastian van Strien. *One–Dimensional Dynamics.* Springer–Verlag, Berlin, 1993.

[MT77] Milnor, J., and W. Thurston. *On Iterated maps of the Interval: I, II* Πρινςετον πρεπριντ, 1977. *Lect. Notes Math.*, **1342** (1988), 465-563.

[Misiurewicz81] Misiurewicz, Michal. Absolutely continuous measures for certain maps of the interval. *Publ. Math. I.H.E.S.*, **53** (1981), 17-51.

[MS80] Misiurewicz, M., and W. Szlenk. Entropy of piecewise monotone mappings. *Studia Math.*, **67** (1980), 45-63.

[Oseledec68] Oseledec, V.I. A multiplicative ergodic theorem. Liapunov characteristic numbers for dynamical systems. *Trans. Moscow Math. Soc.*, **19** (1968), 197-221.

[PdM82] Palis, Jr., Jacob, and Welington de Melo. *Geometric Theory of Dynamical Systems.* Springer–Verlag, New York, 1982.

[Parry66] Parry, William. Symbolic dynamics and transformations of the unit interval. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **122** (1966), 368-378.

[Parry81] Parry, William. *Topics in Ergodic Theory.* Cambridge University Press, Cambridge UK, 1981.

[Pesin77] Pesin, Ya. B. Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory. *Russian Math. Surveys*, **32** (1977), 54-114.

[Pollicott93] Pollicott, Mark. *Lectures on Ergodic Theory and Pesin Theory on Compact Manifolds.* Cambridge University Press, Cambridge (UK), 1993.

[Przytycki80] Przytycki, Feliks. An upper estimation for topological entropy of diffeomorphisms. *Invent. Math.*, **59** (1980), 205-213.

[Reddy68] Reddy, W.L. Lifting expansive homeomorphisms to symbolic flows. *Math. Systems Theory*, **2** (1968), 91-92.

[Robinson95] Robinson, Clark. *Dynamical Systems. Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos.* CRC Press, Boca Raton (Fl.), 1995.

[Rohlin61] Rohlin, V.A. Exact endomorphisms of Lebesgue space. *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat.*, **25** (1961), 499-530. *Amer. Math. Soc. Trans.* (2) **39** (1964), 1-36.

[Rudin74] Rudin, Walter. *Real and Complex Analysis.* McGraw–Hill, New York, 1974.

[Ruelle78] Ruelle, David. An inequality for the entropy of differentiable maps. *Bol. Soc. Bras. Mat.*, **9** (1978), 83-87.

[Ruelle79] Ruelle, David. Ergodic theory of differentiable dynamical systems. *Publ. Math. I.H.E.S.*, **50** (1979), 275-320.

[Sinai89] Sinai, Ya. G. (Ed.). *Dynamical Systems II.* Springer–Verlag, Berlin, 1989.

[Walters82] Walters, Peter. *An Introduction to Ergodic Theory.* Springer–Verlag, New York, 1982.