Εργασία για το
5ο Πανελλήνιο Συνέδριο και 10ο Θερινό Σχολείο
Πολυπλοκότητας και Χαοτικής Δυναμικής
Μη Γραμμικών Συστημάτων
Θεσσαλονίκη, 14-25 Ιουλίου 1997

ΕΚΘΕΤΕΣ LYAPUNOV, ΕΝΤΡΟΠΙΑ ΚΑΙ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ

ΜΩΥΣΗΣ Α. ΜΠΟΥΝΤΟΥΡΙΔΗΣ

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης
671 00 Ξάνθη

mboudour@duth.gr
http://www.duth.gr/˜mboudour/

Περιεχόμενα

1. Αναλλοίωτα και Εργοδικά Μέτρα

1.i. Αναλλοίωτα Μέτρα

Θεωρούμε τον *χώρο μέτρου* $(X, \mathcal{A}, \mu)$, όπου X είναι ένα σύνολο, $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X (που ονομάζονται *μετρήσιμα σύνολα*) και $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ ένα *μέτρο* στον X. (Συνήθως, υποθέτουμε ότι το μ είναι ένα *μέτρο πιθανότητας*, δηλαδή, $\mu(X) = 1$.) Επιπλέον, έστω η απεικόνιση $T\colon X \to X$ στον χώρο μέτρου X, η οποία υποτίθεται ότι είναι *μετρήσιμη* (δηλαδή, τέτοια ώστε $T^{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$).

Ορισμός 1.1. Το μέτρο μ ονομάζεται **αναλλοίωτο** για την T (και η T ονομάζεται **μετρο–διατηρητική** ως προς το μ) αν $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$, για κάθε $A \in \mathcal{A}$.

Ισοδύναμα, συμβολίζοντας με $\mathcal{M}(X)$ το σύνολο όλων των μέτρων στον X, το μέτρο μ είναι αναλλοίωτο για την T αν και μόνον αν $T^*(\mu) = \mu$, όπου η απεικόνιση $T^*: \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(X)$ ορίζεται ως $T^*(\mu)(A) = \mu(T^{-1}(A))$, για κάθε $A \in \mathcal{A}$.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{M}(X, T)$ το σύνολο όλων των αναλλοίωτων μέτρων στον X για την $T\colon X \to X$.

Λήμμα 1.1. (Χαρακτηρισμός αναλλοίωτων μέτρων.) *Ισχύει ότι $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$ αν και μόνον αν $\int_X f \circ T\, d\mu = \int_X f\, d\mu$, για κάθε $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.*

Απόδειξη. Συμβολίζοντας με χ_A την *χαρακτηριστική συνάρτηση* ενός $A \in \mathcal{A}$, έχουμε προφανώς $\chi_A \circ T = \chi_{T^{-1}(A)}$. Έτσι, αν $\int f \circ T\, d\mu = \int f\, d\mu$, για κάθε $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, θέτοντας $f = \chi_A$ για αυθαίρετο $A \in \mathcal{A}$, έχουμε $\mu(A) = \int \chi_A\, d\mu = \int \chi_A \circ T\, d\mu = \int \chi_{T^{-1}(A)}\, d\mu = \mu(T^{-1}(A))$, δηλαδή, $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$. Από την άλλη μεριά, αν $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$, τότε $\int \chi_A\, d\mu = \mu(A) = \mu(T^{-1}(A)) = \int \chi_{T^{-1}(A)}\, d\mu = \int \chi_A \circ T\, d\mu$, για κάθε $A \in \mathcal{A}$, οπότε προσεγγίζοντας οποιαδήποτε συνάρτηση $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ (στη νόρμα του L^1) με πεπερασμένους συνδυασμούς τέτοιων χαρακτηριστικών συναρτήσεων, απορρέει η ζητούμενη σχέση. □

Παράδειγμα 1.1. Έστω $S^1 = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ ο μοναδιαίος κύκλος, που μπορεί να θεωρηθεί σαν το μοναδιαίο διάστημα $[0, 1)$, όταν ταυτισθεί με τον χώρο πηλίκο $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, των πραγματικών αριθμών 'mod 1.' Το σύνολο αυτό αποκτά την δομή ενός χώρου μέτρου εφοδιασμένο με τη συνήθη σ-άλγεβρα Borel. Ορίζουμε την απεικόνιση της *περιστροφής* του κύκλου $T\colon [0, 1) \to [0, 1)$ με τη σχέση $T(x) = x + a \pmod 1$, όπου $a \in \mathbb{R}$. (Ισοδύναμα, στον S^1, η απεικόνιση της περιστροφής ορίζεται σαν $T(e^{2\pi i\theta}) = e^{2\pi i(\theta+a)}$.) Προφανώς το συνήθες μέτρο Lebesgue στον κύκλο είναι αναλλοίωτο για την απεικόνιση αυτή της περιστροφής. □

Παράδειγμα 1.2. Έστω $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ ο δισδιάστατος τόρος, που μπορεί να θεωρηθεί σαν το μοναδιαίο τετράγωνο $[0, 1) \times [0, 1)$, όταν ταυτισθεί με τον χώρο πηλίκο $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Το σύνολο αυτό αποκτά την δομή ενός χώρου μέτρου εφοδιασμένο με τη συνήθη σ-άλγεβρα Borel. Ορίζουμε την απεικόνιση της *μεταφοράς* ή *περιστροφής* στις συντεταγμένες του τόρου $T\colon [0, 1) \times [0, 1) \to [0, 1) \times [0, 1)$ με τη σχέση $T(x_1, x_2) = (x_1 + a_1, x_2 + a_2) \pmod 1$, όπου $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Προφανώς το συνήθες μέτρο Lebesgue–Haar στον τόρο είναι αναλλοίωτο για την απεικόνιση αυτή της μεταφοράς. □

Παράδειγμα 1.3. Έστω ο *r-αδικός μετασχηματισμός* $T : [0, 1) \to [0, 1)$, που ορίζεται ως $T(x) = rx \pmod 1$, όπου $r > 1$ ακέραιος. Το $[0, 1)$ θεωρείται εφοδιασμένο με τη συνήθη σ-άλγεβρα Borel. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός T^{-1} απεικονίζει τα διαστήματα $[a, b) \subset [0, 1)$ ως εξής

$$T^{-1}([a,b)) = \bigcup_{j=0}^{r-1} \left[\frac{a+j}{r}, \frac{b+j}{r}\right).$$

Έτσι, αν $\mathcal{L}$ είναι το μέτρο Lebesgue στο $[0,1)$, επειδή

$$\mathcal{L}(T^{-1}([a,b))) = \sum_{j=0}^{r-1} \left|\frac{b+j}{r} - \frac{a+j}{r}\right| = b - a = \mathcal{L}([a,b)),$$

το μέτρο Lebesgue είναι αναλλοίωτο για τον r-αδικό μετασχηματισμό. $\square$

Παράδειγμα 1.4. Έστω η *απεικόνιση του Gauss* $T\colon (0,1) \to (0,1)$, που ορίζεται ως $T(x) = 1/x \pmod 1$, όπου το $(0,1)$ θεωρείται εφοδιασμένο με τη συνήθη σ-άλγεβρα Borel. Η απεικόνιση του Gauss έχει αναλλοίωτο μέτρο το ονομαζόμενο *μέτρο του Gauss*:

$$\mu(A) = \frac{1}{\log 2} \int_A \frac{1}{1+x}\, dx, \ A \in \mathcal{A},$$

που είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue. Επιπλέον, μπορεί να αποδειχθεί ότι το μέτρο του Gauss είναι το μοναδικό αναλλοίωτο μέτρο για την απεικόνιση του Gauss (δείτε [Mañé87]). $\square$

Θεώρημα 1.1. (**Το Θεώρημα της Επαναφοράς του Poincaré**.) *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου πιθανότητας και $T : X \to X$ μια μετρήσιμη απεικόνιση, για την οποία το $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ είναι ένα αναλλοίωτο μέτρο. Για κάθε σύνολο $A \in \mathcal{A}$, σχεδόν όλα τα σημεία του A επιστρέφουν στο A άπειρες φορές, δηλαδή, το σύνολο $A_0 = \{x \in A : T^n(x) \in A$, για άπειρο πλήθος $n \geq 0\}$ είναι μετρήσιμο και $\mu(A) = \mu(A_0)$.*

Απόδειξη. Έστω $C_n = \{x \in A\colon T^j(x) \notin A$, για κάθε $j \geq n\}$. Προφανώς, $A_0 = A \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n$ και το θεώρημα θα έχει αποδειχθεί, αν δείξουμε ότι $C_n \in \mathcal{A}$ και $\mu(C_n) = 0$, για κάθε $n \geq 1$. Καθώς $C_n = A \setminus \bigcup_{j \geq n} T^{-1}(A)$, πράγματι, $C_n \in \mathcal{A}$ και, επιπλέον, $C_n \subset \bigcup_{j\geq 0} T^{-j}(A) \setminus \bigcup_{j \geq n} T^{-j}(A)$, από όπου παίρνουμε $\mu(C_n) \leq \mu\left(\bigcup_{j\geq 0} T^{-j}(A)\right) - \mu\left(\bigcup_{j\geq n} T^{-j}(A)\right)$. Αλλά επειδή $\bigcup_{j\geq n} T^{-j}(A) = T^{-n}\left(\bigcup_{j\geq 0} T^{-j}(A)\right)$, έχουμε $\mu\left(\bigcup_{j\geq n} T^{-j}(A)\right) = \mu\left(T^{-n}\left(\bigcup_{j\geq 0} T^{-j}(A)\right)\right)$, που συνεπάγεται ότι $\mu(C_n) = 0$. $\square$

Υπάρχει μια τοπολογική εκδοχή του θεωρήματος της επαναφοράς, για την οποία χρειαζόμαστε την έννοια του 'ω-οριακού συνόλου' ενός σημείου κάτω από μια απεικόνιση. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $T : X \to X$ μια απεικόνιση. Ορίζουμε το *ω-οριακό σύνολο* ενός σημείου $x \in X$ σαν το σύνολο των σημείων $y \in X$, για τα οποία κάθε γειτονιά U του y έχει $T^n(x) \in U$ για άπειρο πλήθος θετικών n. Όταν το X είναι ένας μετρικός χώρος με μετρική d, αυτό ισοδυναμεί με τη συνθήκη $\liminf_{n\to+\infty} d(T^n(x), y) = 0$. Το ω-οριακό σύνολο του x συμβολίζεται ως $\omega(x)$. Ειδικότερα, ένα σημείο $x \in X$ ονομάζεται (*θετικά*) *επαναφερόμενο* αν $x \in \omega(x)$.

Θεώρημα 1.2. *Έστω X ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου Borel πιθανότητας και $T\colon X \to X$ μια μετρήσιμη απεικόνιση, για την οποία το $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ είναι ένα αναλλοίωτο μέτρο. Τότε $\mu(\{x : x \notin \omega(x)\}) = 0$, ή, με άλλα λόγια, σχεδόν κάθε σημείο είναι επαναφερόμενο.*

Απόδειξη. Έστω $\{U_n\}_{n\geq 0}$ μια βάση ανοικτών συνόλων τέτοιων ώστε $\lim_{n\to+\infty}\operatorname{diam}(U_n)=0$ και $\bigcup_{n\geq m} U_n = X$, για κάθε $m \geq 0$. Έστω $\tilde{U}_n = \{x\in U_n : T^j(x)\in U_n$, για άπειρο πλήθος τιμών του $j>0\}$. Από το προηγούμενο θεώρημα, $\mu(U_n\setminus\tilde{U}_n)=0$. Θέτουμε $\tilde{X}=\bigcap_{m=0}^{+\infty}\bigcup_{n\geq m}\tilde{U}_n$. Έπεται ότι $\mu(X\setminus\tilde{X}) = \mu\left(\bigcup_{m=0}^{+\infty}\left(X\setminus\bigcup_{n\geq m}\tilde{U}_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{m=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{n\geq m}U_n\setminus\bigcup_{n\geq m}\tilde{U}_n\right)\right)\leq \mu\left(\bigcup_{m=0}^{+\infty}\bigcup_{n\geq m}(U_n\setminus\tilde{U}_n)\right)=0$. Επομένως, το μόνο που μένει να δείξουμε είναι ότι $x\in\tilde{X}$ συνεπάγεται $x\in\omega(x)$. Έστω $r>0$ και διαλέγουμε m έτσι ώστε $\operatorname{diam}(U_n)\leq r/3$, όταν $n\geq m$. Αφού $x\in\tilde{X}$, έχουμε $x\in\bigcup_{n\geq m}\tilde{U}_n$. Άρα, υπάρχει $n\geq m$ τέτοιο ώστε $x\in\tilde{U}_n$. Επειδή $\operatorname{diam}(U_n)\leq r/3$, έπεται ότι $U_n\subset B_r(x)$ ($B_r(x)$ είναι η ανοικτή μπάλλα ακτίνας r με κέντρο x), που συνεπάγεται ότι $T^j(x)\in B_r(x)$, αν $T^j(x)\in U_n$. Αλλά, αφού $x\in\tilde{U}_n$, $T^j(x)\in U_n$, για άπειρο πλήθος τιμών του j, και, συνεπώς, $x\in\omega(x)$. □

1.ii. Αναλλοίωτα Μέτρα Συνεχών Απεικονίσεων

Υποθέτουμε τώρα, στην παράγραφο αυτή, ότι το X είναι ένας συμπαγής μετρικός χώρος και ότι η $T\colon X\to X$ είναι μια συνεχής απεικόνιση.

Επιπλέον, επισυνάπτουμε στο X τη σ-άλγεβρα Borel μαζί με κάποια μέτρα Borel, που υποτίθενται ότι είναι μέτρα πιθανότητας. Όπως πιο πριν, συμβολίζουμε με $\mathcal{M}(X)$ το σύνολο όλων των μέτρων Borel πιθανότητας στον X.

Ακόμη, συμβολίζουμε με $C(X)$ το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων $f: X\to\mathbb{R}$. Υπενθυμίζουμε ότι στην περίπτωση αυτή (το X συμπαγής μετρικός χώρος), το $C(X)$ γίνεται ένας νορμικός γραμμικός χώρος εφοδιασμένος με την νόρμα $\|f\|_0=\sup_{x\in X}|f(x)|$.

Θεώρημα 1.3. *Έστω $\mu,\nu\in\mathcal{M}(X)$. Αν $\int_X f\,d\mu=\int_X f\,d\nu$, για κάθε $f\in C(X)$, τότε $\mu=\nu$.*

Θεώρημα 1.4. (**Το Θεώρημα της Αναπαράστασης του Riesz**.) *Έστω $F\in C(X)^*$ ένα θετικό συνεχές γραμμικό συναρτησιακό στον $C(X)$, δηλαδή, μια συνεχής γραμμική απεικόνιση $F\colon C(X)\to\mathbb{R}$. Αν $F(f)\geq 0$, όταν $f\in C(X)$, $f\geq 0$, και $F(\chi_X)=1$, τότε υπάρχει μοναδικό $\mu\in\mathcal{M}(X)$ τέτοιο ώστε $\int_X f\,d\mu=F(f)$, για κάθε $f\in C(X)$.*

(Δείτε [Walters82] για την απόδειξη του Θεωρήματος 1.3 και [Rudin74] για μια απόδειξη του Θεωρήματος 1.4 της Αναπαράστασης του Riesz.)

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ορίζεται μια απεικόνιση από το $\mathcal{M}(X)$ στο $\{F\in C(X)^*\colon F(f)\geq 0$, αν $f\geq 0$, και $F(\chi_X)=1\}$, που δίνεται ως $\mu\mapsto\int_X\cdot\,d\mu=F_\mu(\cdot)$. Η απεικόνιση αυτή είναι επί (από το Θεώρημα 1.4 της Αναπαράστασης του Riesz) και ένα–προς–ένα (από το Θεώρημα 1.3). Επιπλέον, η απεικόνιση αυτή είναι ομοπαραλληλική (δηλαδή, $F_{p\mu+(1-p)\nu}=pF_\mu+(1-p)F_\nu$, για $p\in[0,1]$, $\mu,\nu\in\mathcal{M}(X)$), οπότε το $\mathcal{M}(X)$ ταυτίζεται με ένα χυρτό σύνολο της μοναδιαίας μπάλλας στο $C(X)^*$. Για το λόγο αυτό, μπορεί το $\mathcal{M}(X)$ να εφοδιασθεί με μια τοπολογία που απορρέει από την ασθενή* τοπολογία στο $C(X)^*$.

Ορισμός 1.2. Η *ασθενής* τοπολογία* στο $\mathcal{M}(X)$ είναι η μικρότερη τοπολογία που κάνει συνεχείς όλες τις απεικονίσεις $\mu\mapsto\int_X f\,d\mu$ ($f\in C(X)$). Μια βάση αυτής της τοπολογίας δίνεται από τις συλλογές όλων των συνόλων της μορφής

$$U_\mu(f_1,\ldots,f_k;\varepsilon)=\left\{\nu\in\mathcal{M}(X)\colon\left|\int_X f_i\,d\nu-\int_X f_i\,d\mu\right|<\varepsilon, 1\leq i\leq k\right\},$$

όπου $\mu\in\mathcal{M}(X), k\geq 1, f_i\in C(X)$ και $\varepsilon>0$.

Ο επόμενος χαρακτηρισμός της σύγκλισης μέτρων στο $\mathcal{M}(X)$ αποδεικνύεται στο βιβλίο του [Mañé87].

Πρόταση 1.1. *Δοθέντος ότι το X είναι ένας συμπαγής μετρικός χώρος, υπάρχει μια ακολουθία $\{f_j\}_{j=1,\dots,\infty}$ συναρτήσεων του $C(X)$, που αποτελεί ένα σύνολο πυκνό στη μοναδιαία μπάλλα $\{f \in C(X)\colon \|f\|_0 \le 1\}$. Έτσι, ορίζεται η εξής μετρική στο $\mathcal{M}(X)$:*

$$d(\mu,\nu) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left| \int_X f_j \, d\mu - \int_X f_j \, d\nu \right|.$$

Έστω η ακολουθία $\mu_n \in \mathcal{M}(X)$. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) *$\mu_n \to \mu$ στην ασθενή* τοπολογία του $\mathcal{M}(X)$.*

(ii) $\lim_{n\to\infty} d(\mu_n,\mu) = 0$.

(iii) $\lim_{n\to\infty} \int_X f\,d\mu_n = \int_X f\,d\mu$, *για κάθε $f \in C(X)$.*

Θεώρημα 1.5. *Έστω X ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $T : X \to X$ μια συνεχής απεικόνιση. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:*

(i) *Το $\mathcal{M}(X)$ είναι ένας συμπαγής μετρικός χώρος (για την ασθενή* τοπολογία).*

(ii) *Η απεικόνιση $T^*\colon \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(X)$ είναι συνεχής και ομοπαραλληλική.*

(iii) (**Krylov & Bogolioubov**.) *Το $\mathcal{M}(X,T)$ είναι μη–κενό.*

(iv) *Το $\mathcal{M}(X,T)$ είναι συμπαγές και κυρτό σύνολο του $\mathcal{M}(X)$.*

Απόδειξη. Στο βιβλίο του [Walters82] αποδεικνύονται όλοι οι ισχυρισμοί του θεωρήματος αυτού. Εδώ θα αποδείξουμε μόνο το (iii), δηλαδή, την μη–κενότητα του $\mathcal{M}(X,T)$. Παίρνουμε ένα οποιοδήποτε $\mu \in \mathcal{M}(X)$ και θεωρούμε την ακολουθία $\mu_n \in \mathcal{M}(X)$ που ορίζεται ως

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \mu \circ T^{-j} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} (T^*)^j\,(\mu).$$

(Παραπάνω και στη συνέχεια, οι *εκθέτες* στις απεικονίσεις συμβολίζουν επαναλήψεις, δηλαδή, *συνθέσεις* απεικονίσεων.) Λόγω της κυρτότητας του $\mathcal{M}(X)$, $\mu_n \in \mathcal{M}(X)$, για κάθε $n \ge 1$, και λόγω της συμπαγότητας του $\mathcal{M}(X)$, υπάρχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $\{\mu_{n_j}\}$ με όριο $\tilde{\mu} = \lim_{j\to\infty} \mu_{n_j}$. Επειδή

$$T^*(\tilde{\mu}) = \lim_{j\to\infty} T^*(\mu_{n_j}) = \lim_{j\to\infty}\left(\mu_{n_j} - \frac{\mu - (T^*)^{n_j+1}(\mu)}{n_j}\right) = \lim_{j\to\infty} \mu_{n_j} = \tilde{\mu},$$

το $\tilde{\mu}$ είναι αναλλοίωτο. Η απόδειξη αυτή δεν είναι τίποτε άλλο παρά μια απλή εκδοχή του *Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Schauder*. □

Παρατήρηση 1.1. Όταν το X είναι ένας συμπαγής μετρικός χώρος και η $T : X \to X$ μια συνεχής απεικόνιση, βελτιώνεται το Λήμμα 1.1 του χαρακτηρισμού των αναλλοίωτων μέτρων ως εξής: $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ *αν και μόνον αν* $\int_X f\circ T\,d\mu = \int_X f\,d\mu$, *για κάθε* $f \in C(X)$.

Παρατήρηση 1.2. Στην περίπτωση που η απεικόνιση $T\colon X \to X$ έχει ένα *περιοδικό* σημείο x περιόδου n (δηλαδή, τέτοιο ώστε $T^n(x) = x$), τότε βρίσκουμε αμέσως ένα αναλλοίωτο μέτρο. Αυτό είναι το

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{T^j(x)},$$

όπου δ_y είναι το *μέτρο Dirac* στο σημείο $y \in X$ (δηλαδή, $\delta_y(A) = 1$, όταν $y \in A$, και $\delta_y(A) = 0$, όταν $y \notin A$.)

Το παράδειγμα που ακολουθεί δείχνει ότι αν χαθεί η συνέχεια της T, τότε μπορεί να *μην* υπάρχει αναλλοίωτο μέτρο.

Παράδειγμα 1.5. Θεωρούμε την απεικόνιση $T\colon [0,1] \to [0,1]$ που ορίζεται ως

$$T(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Θα δείξουμε ότι αυτή η απεικόνιση δεν έχει κανένα αναλλοίωτο μέτρο. Η αντίστροφη απεικόνιση είναι

$$T^{-1}(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & x = 1, \\ \{\varnothing\}, & \text{αλλοιώς}. \end{cases}$$

Ας υποθέσουμε ότι η T είχε ένα αναλλοίωτο μέτρο μ. Τότε $\mu(\{0\}) = \mu(T^{-1}(\{0\})) = \mu(\varnothing) = 0$ και $\mu(\{1\}) = \mu(T^{-1}(\{1\})) = \mu(\{0\}) = 0$. Επομένως, $\mu((0,1/2)) = \mu(T^{-1}(0,1/2)) = 1$ και, επαγωγικά, $\mu((0,\frac{1}{2^n})) = 1$, για κάθε $n \geq 1$. Έστω $A = (0,\frac{1}{2^n})$. Τότε $\lim_{n\to\infty}\mu(A_n) = 1$ και $lim_{n\to\infty}\mu(A_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\varnothing) = 0$, που είναι κάτι άτοπο. $\square$

1.iii. Εργοδικά Μέτρα

Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ ένας χώρος μέτρου πιθανότητας και $T\colon X \to X$ μια απεικόνιση.

Ορισμός 1.3. Ένα αναλλοίωτο μέτρο $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ ονομάζεται **εργοδικό** για την T αν κάθε σύνολο $A \in \mathcal{A}$, που είναι *αναλλοίωτο* ως προς την T (δηλαδή, $T^{-1}(A) = A$), έχει μέτρο είτε $\mu(A) = 0$ ή $\mu(A) = 1$. (Επιπλέον, στην περίπτωση αυτή, η T ονομάζεται *εργοδική* απεικόνιση ως προς το μ.)

Ο ορισμός αυτός λέει ότι, για να είναι ένα αναλλοίωτο μέτρο μ εργοδικό, τα μόνα αναλλοίωτα μετρήσιμα σύνολα που μπορούν να υπάρξουν είναι μόνο εκείνα με 'μέγεθος' ίσο προς όλο το σύνολο X ή τα μηδενο–σύνολα.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{E}(X,T)$ το σύνολο όλων των εργοδικών αναλλοιώτων μέτρων για την $T\colon X \to X$.

Λήμμα 1.2. (Χαρακτηρισμός εργοδικών μέτρων.) *Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) $\mu \in \mathcal{E}(X,T)$.

(ii) *Αν f μετρήσιμη στον X και $f \circ T = f$ σ.π., τότε η f είναι σταθερά σ.π. (ως προς μ) στο X.*

Απόδειξη. (ii) $\Rightarrow$ (i). Έστω A μετρήσιμο σύνολο αναλλοίωτο για την T. Θεωρούμε την χαρακτηριστική συνάρτηση χ_A του A. Καθώς το A είναι αναλλοίωτο για την T, $\chi_A \circ T = \chi_{T^{-1}(A)} = \chi_A$, οπότε η (ii) συνεπάγεται ότι η χ_A είναι σταθερά σ.π. (ως προς μ). Επειδή οι τιμές της χαρακτηριστικής συνάρτησης είναι είτε 1 ή 0, παίρνουμε είτε $\mu(A) = 0$ ή $\mu(A) = 1$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια μετρήσιμη συνάρτηση f, η οποία *δεν* είναι σταθερά σ.π. Τότε θα μπορούσαμε να βρούμε έναν πραγματικό αριθμό c τέτοιον ώστε το σύνολο $A = \{x \in X : f(x) \geq c\}$ να έχει μέτρο $0 < \mu(A) < 1$. Όμως η συνθήκη $f \circ T = f$ συνεπάγεται ότι $T^{-1}(A) = A$, που είναι άτοπο. $\square$

Παράδειγμα 1.6. Έστω $T : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ η απεικόνιση της περιστροφής του κύκλου $T(x) = x + a \pmod 1$ με $a \in R$, για την οποία το μέτρο Lebesgue είναι αναλλοίωτο. Αν $a \in \mathbb{Q}$, όλα τα σημεία του κύκλου είναι περιοδικά (με την ίδια περίοδο) και η περιστροφή του κύκλου *δεν* είναι εργοδική για το μέτρο Lebesgue. Αν $a \notin \mathbb{Q}$, τότε το μέτρο Lebesgue είναι εργοδικό για την απεικόνιση της περιστροφής του κύκλου. (Δείτε [Mañé87] για τις λεπτομέρειες.) $\square$

Παράδειγμα 1.7. Έστω $T : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ η απεικόνιση της μεταφοράς (ή περιστροφής των συντεταγμένων του τόρου) $T(x_1, x_2) = (x_1 + a_1, x_2 + a_2) \pmod 1$ με $(a_1, a_2) \in R^2$, για την οποία το μέτρο Lebesgue–Haar είναι αναλλοίωτο. Αν $\frac{a_1}{a_2} \notin \mathbb{Q}$, τότε το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue–Haar $\mathcal{L}$ είναι το μοναδικό αναλλοίωτο μέτρο για την απεικόνιση T της αυτής περιστροφής του τόρου, οπότε $\mathcal{M}(X,T) = \mathcal{E}(X,T) = \{\mathcal{L}\}$. (Δείτε [Mañé87] για τις λεπτομέρειες.) Αν $\frac{a_1}{a_2} \in \mathbb{Q}$, τότε τα $\mathcal{M}(X,T)$ και $\mathcal{E}(X,T)$ είναι και τα δυο απειροσύνολα και $\mathcal{M}(X,T) \neq \mathcal{E}(X,T)$. $\square$

Έχουμε ήδη δει ότι το σύνολο $\mathcal{M}(X,T)$ των αναλλοιώτων μέτρων είναι κυρτό υποσύνολο του συνόλου $\mathcal{M}(X)$ όλων των μέτρων. Στη συνέχεια θα ταυτίσουμε το σύνολο $\mathcal{E}(X,T)$ των εργοδικών μέτρων με ένα συγκεκριμένο υποσύνολο του $\mathcal{M}(X,T)$ και θα προσδιορίσουμε αναλυτικότερα τη σχέση αναλλοιώτων και εργοδικών μέτρων.

Για το σκοπό αυτό, χρειαζόμαστε τον ορισμό των 'ακραίων σημείων' ενός κυρτού συνόλου C. Ένα $x \in C$ ονομάζεται *ακραίο σημείο* του C αν δεν μπορεί να γραφεί σαν κυρτός συνδυασμός δυο διαφορετικών σημείων του C, δηλαδή, αν $x = \lambda y + (1-\lambda)z$, για $y, z \in C, y \neq z, 0 \leq \lambda \leq 1$, να συνεπάγεται ότι $\lambda = 0$ ή $\lambda = 1$. Συμβολίζουμε με $\mathrm{Ext}(C)$ το σύνολο των ακραίων σημείων του κυρτού συνόλου C. Είναι εύκολο να δούμε ότι αν $C \neq \varnothing$, τότε $\mathrm{Ext}(C) \neq \varnothing$.

Θεώρημα 1.6. *Τα ακραία σημεία του $\mathcal{M}(X,T)$ είναι ακριβώς τα εργοδικά μέτρα, δηλαδή, $\mathrm{Ext}(\mathcal{M}(X,T)) = \mathcal{E}(X,T)$. Επιπλέον, δοθέντος οποιουδήποτε αναλλοιώτου μέτρου $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$, υπάρχει ένα μέτρο πιθανότητας $\tau_\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{M}(X,T))$ τέτοιο ώστε:*

(i) $\tau_\mu(\mathcal{E}(X,T)) = 1$.

(ii) $\int_X f\,d\mu = \int_{\mathcal{E}(X,T)} \left(\int_X f\,d\mu'\right) d\tau_\mu(\mu')$, *για κάθε $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Με άλλα λόγια, το αναλλοίωτο μέτρο μ είναι ένας κυρτός συνδυασμός των εργοδικών αναλλοιώτων μέτρων μ' που κατανέμονται με το τ_μ.*

Η απόδειξη του πρώτου μέρους του αποτελέσματος αυτού είναι απλή (δείτε [Mañé87]). Το δεύτερο μέρος συνήθως αποδεικνύεται μέσω του Θεωρήματος του Choquet αλλά υπάρχει μια εναλλακτική απόδειξη στο βιβλίο του [Pollicott93] (που στηρίζεται σε ιδέες του [Mañé87]).

Όπως ήδη έχουμε δει, $\mathcal{M}(X,T) \neq \varnothing$, για συνεχείς απεικονίσεις T σε συμπαγείς μετρικούς χώρους X. Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη ότι τα (μη-κενά) κυρτά σύνολα πάντα έχουν ακραία σημεία, προκύπτει το εξής αποτέλεσμα στην περίπτωση αυτή.

Πόρισμα 1.1. (Ύπαρξη Εργοδικών Μέτρων για Συνεχείς Απεικονίσεις.) *Έστω X ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $T : X \to X$ μια συνεχής απεικόνιση. Τότε πάντοτε υπάρχει τουλάχιστον ένα εργοδικό μέτρο για την T, δηλαδή, $\mathcal{E}(X,T) \neq \varnothing$.*

1.iv. Το Εργοδικό Θεώρημα του Birkhoff

Τα εργοδικά μέτρα έχουν πολύ καλές ιδιότητες επαναφοράς, όπως φαίνεται από το επόμενο αποτέλεσμα, που αποτελεί το δεύτερο σημαντικό θεώρημα της εργοδικής θεωρίας (μετά το θεώρημα επαναφοράς του Poincaré).

Θεώρημα 1.7. (**Το Εργοδικό Θεώρημα του Birkhoff.**) *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου πιθανότητας και $T\colon X \to X$ μια μετρήσιμη απεικόνιση, για την οποία το $\mu \in \mathcal{E}(X, T)$ είναι ένα εργοδικό μέτρο. Τότε, για κάθε $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, ισχύει*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)) = \int_X f \, d\mu,$$

για σχεδόν (ως προς το μ) όλα τα σημεία $x \in X$.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι το σύνολο $\{T^n(x)\}_{n=0,1,2,\dots}$ παριστά την *τροχιά* της T που ξεκινά από το σημείο $x \in X$, έχουμε μια ενδιαφέρουσα ερμηνεία του θεωρήματος αυτού. Πράγματι, το εργοδικό θεώρημα του Birkhoff μας λέει ότι, δοθείσης μιας (ολοκληρώσιμης) συνάρτησης f, η μέση τιμή της f πάνω στην τροχιά από το x, για σχεδόν (ως προς το μέτρο μ) όλα τα $x \in X$, ισούται με την χωρική μέση τιμή της f (που είναι το ολοκλήρωμα ως προς το μέτρο μ της f σε όλο τον χώρο X), εφόσον το μέτρο μ είναι εργοδικό.

Για $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$, θέτοντας $f = \chi_A$, προκύπτει η παρακάτω σημαντική συνέπεια του εργοδικού θεωρήματος του Birkhoff.

Πόρισμα 1.2. *Δοθέντος ενός συνόλου $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$, ισχύει ότι, για σχεδόν (ως προς το μ) όλα τα σημεία $x \in X$,*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\#\{0 \leq j \leq n-1 \colon T^j(x) \in A\}}{n} = \mu(A),$$

δηλαδή, η αναλογία του χρόνου που δαπανά η τροχιά του σημείου x για να βρίσκεται μέσα στο A είναι $\mu(A)$.

Η απόδειξη του εργοδικού θεωρήματος του Birkhoff μπορεί να βρεθεί σε βιβλία της εργοδικής θεωρίας, όπως τα βιβλία των [Walters82], [Mañé87] και [Pollicott93].

Κάποιες Εφαρμογές του Εργοδικού Θεωρήματος του Birkhoff:

(Ι) Σχεδόν για όλα τα $0 \leq x \leq 1$ (ως προς το μέτρο Lebesgue), ο μέσος αριθμός των μηδενικών στην δεκαδική ανάλυση $x = 0.x_1x_2x_3\cdots$ είναι $1/10$ (τέτοιοι αριθμοί ονομάζονται *κανονικοί αριθμοί*). Πράγματι, θεωρούμε την απεικόνιση $T\colon [0,1) \to [0,1), T(x) = 10x \pmod 1$, και παρατηρούμε ότι το μέτρο Lebesgue είναι αναλλοίωτο και εργοδικό για αυτή την απεικόνιση. Θέτοντας $A = [0, 1/10)$, είναι εύκολο να δούμε ότι $x_j = 0$ αν και μόνον αν $T^j(x) \in A$. Επομένως, ο προηγούμενος ισχυρισμός απορρέει από το πόρισμα του εργοδικού θεωρήματος του Birkhoff.

(ΙΙ) Υποθέτουμε ότι το $0 < x < 1$ έχει ανάλυση συνεχούς κλάσματος της μορφής

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}\,,$$

όπου $a_1, a_2, a_3, \dots \geq 1$. Για το συνεχές κλάσμα αυτό, ορίζεται η ακολουθία p_n/q_n ως

$$\frac{p_n}{q_n} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} \quad ,$$

και αυτή η ακολουθία ρητών αριθμών έχει όριο $\lim_{n\to\infty} p_n/q_n = x$. Ισχυριζόμαστε ότι, σχεδόν για όλα τα x (ως προς το μέτρο Lebesgue), ικανοποιούνται οι παρακάτω σχέσεις:

(i) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} (a_1 \cdots a_n)^{1/n} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{k^2+2k}\right)^{\log k/\log 2}$ και

(ii) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{\log q_n}{n} = \frac{\pi}{12 \log 2}$.

Για να δείξουμε αυτές τις σχέσεις, θεωρούμε την απεικόνιση του Gauss $T\colon (0,1) \to (0,1), T(x) = 1/x \pmod 1$, για την οποία το μέτρο του Gauss είναι εργοδικό (ως το μοναδικό αναλλοίωτο μέτρο). Παρατηρούμε ότι $a_j = k$ αν και μόνον αν $T^j(x) \in [1/(k+1), 1/k)$. Έστω $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση που ορίζεται θέτοντας $f(x) = \log k$, όταν $x \in [1/(k+1), 1/k)$. Από το εργοδικό θεώρημα του Birkhoff έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \log a_j &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)) = \\
= \frac{1}{\log 2} \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}\, dx &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\log k}{\log 2} \log\left(1 + \frac{1}{k^2+2k}\right).
\end{aligned}$$

Υψώνοντας στο e τη σχέση αυτή προκύπτει η (i). Παρόμοια δείχνεται η (ii).

2. Εκθέτες Lyapunov

Στα προηγούμενα εξετάζαμε αναλλοίωτα και εργοδικά μέτρα για γενικές μετρήσιμες απεικονίσεις σε γενικούς χώρους μέτρου. Τώρα θα μελετήσουμε την ειδική περίπτωση μιας απεικόνισης f που είναι ένας διαφομορφισμός τάξης C^1 πάνω σε μια συμπαγή πολλαπλότητα. Αφού τώρα θα έχουμε μια διαφορίσιμη απεικόνιση f, είναι φυσικό να περιμένουμε να ισχύουν εργοδικά θεωρήματα, στα οποία η ολοκληρώσιμη συνάρτηση είναι μια έκφραση που περιέχει παραγώγους $D_x f$.

Με τον τρόπο αυτό, θα οδηγηθούμε στην εισαγωγή κάποιων αριθμητικών σταθερών, που ονομάζονται 'εκθέτες Lyapunov,' οι οποίοι μετρούν την ευαίσθητη εξάρτηση της μελλοντικής εξέλιξης των επαναλήψεων της απεικόνισης από μικρές αλλαγές στις αρχικές συνθήκες.

Πιο συγκεκριμένα, θα ασχοληθούμε τώρα με μια διαφορίσιμη απεικόνιση $f\colon M \to M$ πάνω σε μια συμπαγή πολλαπλότητα (τάξης C^∞) M. Για κάθε $x \in M$, συμβολίζουμε με T_xM τον διανυσματικό χώρο όλων των διανυσμάτων που εφάπτονται της M στο σημείο x. Στην *εφαπτόμενη δέσμη* $TM = \bigcup_{x\in M} T_xM$ μπορεί να δοθεί μια φυσική δομή πολλαπλότητας (κι αυτή τάξης C^∞). Αν η $f\colon M \to M$ είναι διαφορίσιμη τάξης C^r $(r \geq 1)$, δηλαδή, ένας *διαφομορφισμός* ταξης C^r, τότε η *εφαπτόμενή της απεικόνιση* $Tf : TM \to TM$ είναι μια διαφορίσιμη, τάξης C^{r-1}, απεικόνιση και, για κάθε $x \in M$, ορίζεται η *παράγωγος* της f σαν μια γραμμική απεικόνιση $D_xf = Tf|_{T_xM} \colon T_xM \to T_{f(x)}M$.

Όταν η M είναι *πολλαπλότητα του Riemann*, η εφαπτόμενη δέσμη TM έχει μια μετρική του Riemann, δηλαδή, για κάθε $x \in M$, υπάρχει ένα εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)_x$ στον T_xM, που εξαρτάται ομαλά από το x. Κάθε μετρική του Riemann της M προσδιορίζει μια νόρμα $\|\cdot\|_x$ στον T_xM και όλες οι μετρικές του Riemann της M είναι ισοδύναμες μεταξύ τους.

Ο σκοπός της θεωρίας των δυναμικών συστημάτων είναι να γίνει κατανοητή η συμπεριφορά των επαναλήψεων της f, δηλαδή, των συνθέσεων $f^n = f \circ \cdots \circ f$ (n φορές), καθώς το n πάει ασυμπτωτικά στο άπειρο. Για το σκοπό, αυτό χρειάζεται να μελετήσει κανείς την διαστολή και συστολή που προκαλεί η f, που γεωμετρικά περιγράφονται, σε πρώτη προσέγγιση, από την Tf^n. Με άλλα λόγια, πρέπει να καταλάβει κανείς πώς η νόρμα $\|D_xf^n\|$ μεταβάλλεται ασυμπτωτικά ως προς n. Και όπως θα δούμε λίγο πιο κάτω, η απάντηση δίνεται από τους 'εκθέτες Lyapunov' που ορίζονται σαν κατάλληλα ασυμπτωτικά όρια αυτής της νόρμας.

Από τον κανόνα της αλυσίδας, $D_xf^n = D_{f^{n-1}(x)}f \cdots D_{f(x)}f \cdot D_xf$, οπότε

$$\|D_xf^n\| \leq \prod_{j=0}^{n-1} \|D_{f^j(x)}f\|.$$

Αν συνέβαινε η τελευταία ανισότητα να ήταν ισότητα, τότε, θέτοντας $f(x) = \log\|D_xf\|$, θα είχαμε ότι $\frac{1}{n}\log\|D_xf^n\| = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x))$ και, έτσι, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιούσαμε το εργοδικό θεώρημα του Birkhoff, αν ξέραμε ότι η $\|D_xf\|$ ήταν φραγμένη από κάτω (ώστε η f να ήταν ολοκληρώσιμη). Επομένως, τα προβλήματα στην χρήση αυτού του εργοδικού θεωρήματος είναι ότι αφενός δεν ισχύει ισότητα για το $\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x))$ και αφετέρου οι συναρτήσεις $\log\|D_xf\|$ μπορεί να μην είναι ολοκληρώσιμες και ακόμη μπορεί να παίρνουν την τιμή $-\infty$. Θέτοντας όμως $f_n(x) = \log\|D_xf^n\|$, τότε αφενός ισχύει κάποια συνθήκη υπαθροιστικότητας και αφετέρου η $f_n^+ = \max\{0, f_n\}$ γίνεται ολοκληρώσιμη (επειδή η f_n είναι φραγμένη από πάνω). Οι παρατηρήσεις αυτές οδήγησαν στο ονομαζόμενο 'υπαθροιστικό' εργοδικό θεώρημα του Kingman, που θα δούμε στη συνέχεια.

2.i. Το Υπαθροιστικό Εργοδικό Θεώρημα

Αρχίζουμε με ένα αποτέλεσμα που δίνει πληροφορίες για την αύξηση των νορμών $\|D_xf^n\|$, καθώς $n \to +\infty$.

Πρόταση 2.1. *Έστω $f\colon M \to M$ ένας διαφομορφισμός C^1 μιας συμπαγούς πολλαπλότητας Riemann M, για τον οποίον το $\mu \in \mathcal{E}(M,f)$ είναι ένα εργοδικό μέτρο. Τότε υπάρχει ένα $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\|D_xf^n\| = \lambda$, για σχεδόν (ως προς μ) όλα τα $x \in M$.*

Παρατήρηση 2.1. Η νόρμα $\|D_xf^n\|$ της γραμμικής απεικόνισης $D_xf^n\colon T_xM \to T_{f^n(x)}M$ εξαρτάται προφανώς από τις νόρμες των $T_xM, T_{f^n(x)}M$, οι οποίες με τη σειρά τους εξαρτώνται από τη μετρική του Riemann που επιλέγεται για την πολλαπλότητα M. Αν όμως διαλέγαμε μια άλλη μετρική του Riemann για την M, θα παίρναμε το ίδιο ακριβώς όριο για το λ, επειδή όλες αυτές οι μετρικές είναι ισοδύναμες μεταξύ τους, αφού τότε θα προστίθετο μια σταθερά στο $\log\|D_xf^n\|$, της οποίας η συνεισφορά στο $\frac{1}{n}\log\|D_xf^n\|$ θα εξαφανιζόταν, καθώς $n \to +\infty$.

Το προηγούμενο αποτέλεσμα δεν είναι παρά ένα απλό πόρισμα του παρακάτω γενικού εργοδικού θεωρήματος.

Θεώρημα 2.1. (**Το Υπαθροιστικό Εργοδικό Θεώρημα του Kingman.**) *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου πιθανότητας και $T\colon X \to X$ μια μετρήσιμη απεικόνιση, για την οποία* *το $\mu \in \mathcal{E}(X,T)$ είναι ένα εργοδικό μέτρο. Έστω $\{f_n\}_{n=1,\ldots,+\infty} \subset L^1(X,\mathcal{A},\mu)$ μια ακολουθία συναρτήσεων που είναι τέτοιες ώστε, για κάθε $n,k \geq 1$,*

$$f_{n+k}(x) \leq f_n(x) + f_k(T^n(x)),$$

σχεδόν για όλα τα $x \in X$ (ως προς μ). (Η σχέση αυτή ονομάζεται 'υπαθροιστική συνθήκη.') Τότε

(i) *υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ τέτοιο ώστε $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} f_n(x) = \lambda$, σχεδόν για όλα τα $x \in X$,*

(ii) *το λ δίνεται ως $\lambda = \inf_{n\geq 1}\{\frac{1}{n}\int_X f_n\, d\mu\}$.*

Το υπαθροιστικό εργοδικό θεώρημα αρχικά διατυπώθηκε και αποδείχθηκε από τον Kingman (δείτε [Kingman73]). Στο βιβλίο του [Pollicott93] δίνεται η πιο πρόσφατη αλλά και πιο σύντομη απόδειξη των Katznelson και Weiss ([KW82]).

Απόδειξη της Πρότασης 2.1 από το Υπαθροιστικό Εργοδικό Θεώρημα. Παίρνουμε $X = M$ και $f_n(x) = \log\|D_x f^n\|$. Παρατηρούμε ότι, επειδή η $D_x f^n$ είναι φραγμένη, αφού η M είναι συμπαγής και η $x \mapsto D_x f^n$ συνεχής, έπεται ότι η f_n είναι ολοκληρώσιμη (για κάθε $n \geq 1$). Από τον κανόνα της αλυσίδας, έχουμε $\|D_x f^{n+k}\| = \|D_{f^n(x)} f^k \cdot D_x f^n\| \leq \|D_{f^n(x)} f^k\| \|D_x f^n\|$. Παίρνοντας λογάριθμους, βρίσκουμε ότι ισχύει η υπαθροιστική συνθήκη, οπότε το υπαθροιστικό εργοδικό θεώρημα συνεπάγεται την επιθυμητή ύπαρξη του λ.

Η περίπτωση $\lambda = -\infty$ δεν μπορεί να ισχύει τώρα. Πράγματι, επειδή

$$\|D_x f^n\| = \|\left(D_{f^n(x)} f^{-n}\right)^{-1}\| \geq \frac{1}{\|D_{f^n(x)}(f^{-1})^n\|} \geq \frac{1}{\|D_x f^{-1}\|},$$

έπεται ότι $\frac{1}{n}\log\|D_x f^n\| \geq \frac{1}{n}\log\|D_x f^{-1}\|^{-n} = -\log\|D_x f^{-1}\|$, για κάθε $n \geq 1$.Επομένως, η f_n είναι ομοιόμορφα φραγμένη από κάτω και το όριο λ πρέπει να είναι πεπερασμένο. (Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $\|L^{-1}\| \geq 1/\|L\|$, για κάθε αντιστρεπτό γραμμικό τελεστή L.) □

2.ii. Το Πολλαπλασιαστικό Εργοδικό Θεώρημα

Υποθέτουμε τώρα ότι έχουμε μια απεικόνιση f που είναι ένας διαφομορφισμός τάξης C^1 πάνω σε μια συμπαγή πολλαπλότητα M διάστασης d. Τότε, προφανώς οι εφαπτόμενοι χώροι T_xM είναι d-διάστατοι γραμμικοί χώροι και οι παράγωγοι $D_x f^n : T_xM \to T_{f^n(x)}M$ μπορούν να αναπαρασταθούν ως πίνακες $d \times d$ (ως προς οποιαδήποτε βάση των εφαπτόμενων χώρων). Η Πρόταση 2.1 μας δίνει κάποια γενική πληροφορία για τον ασυμπτωτικό ρυθμό αύξησης της νόρμας αυτών των πινάκων. Υπάρχουν όμως οξύτερες εκτιμήσεις, οι οποίες περιγράφονται στο αποτέλεσμα που ακολουθεί, όπου εισάγονται οι 'εκθέτες Lyapunov.'

Θεώρημα 2.2. (**Το Πολλαπλασιαστικό Εργοδικό Θεώρημα του Oseledec**.) *Έστω $f : M \to M$ ένας διαφομορφισμός C^1 μιας συμπαγούς πολλαπλότητας Riemann M διάστασης d, για τον οποίον το $\mu \in \mathcal{E}(M,f)$ είναι ένα εργοδικό μέτρο. Τότε υπάρχουν:*

(i) *k πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_k$, όπου $k \leq d$,*

(ii) *k θετικοί ακέραιοι $m_1, m_2, \ldots, m_k$ τέτοιοι ώστε $m_1 + \cdots + m_k = d$,*

(iii) *ένα σύνολο* $A \in \mathcal{A}$ *με* $f(A) \subset A$ *και* $\mu(A) = 1$ *τέτοιο ώστε, για κάθε* $x \in A$*, να υπάρχει η μετρήσιμη ανάλυση* $T_xM = E_x^1 \oplus E_x^2 \oplus \cdots \oplus E_x^k$ *με* $\dim E_x^j = m_j$, $D_x f(E_x^j) = E_{f(x)}^j$ *και τέτοια ώστε*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \|D_x f^n(u)\| = \lambda_j,$$

όταν $u \in E_x^j \setminus \{0\}, j = 1, \ldots, k$.

Επιπλέον, για κάθε $x \in A$*, υπάρχει ο πίνακας* $\lim_{n\to+\infty} \left((D_x f^n)^\dagger D_x f^n\right)^{1/2n} = \Lambda_x$ *και έχει ιδιοτιμές* $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_k}$ *με αντίστοιχες πολλαπλότητες* $m_1, \ldots, m_k$.

Οι αριθμοί $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *ονομάζονται* **εκθέτες Lyapunov** *του εργοδικού μέτρου* μ *με αντίστοιχες* **πολλαπλότητες** $m_1, \ldots, m_k$ *και με αντίστοιχους* **ιδιοχώρους** $E_x^1, \ldots, E_x^k$ *σε κάθε* $x \in A$.

Το θεώρημα του Oseledec ([Oseledec68]) αποδεικνύεται όχι με απλό τρόπο και υπάρχουν αρκετές διαφορετικές αποδείξεις του. Ο [Pollicott93] δίνει μια σχετικά απλή απόδειξη για την περίπτωση επιφανειών (δηλαδή, πολλαπλοτήτων διάστασης 2). Στους [Ruelle79] και [Walters82] μπορεί να βρεθεί η απόδειξη της γενικής περίπτωσης (δείτε επίσης τον [Mañé87]).

Παρατήρηση 2.2. (i) Λέγοντας 'μετρήσιμη ανάλυση' στο θεώρημα του Oseledec εννοούμε ότι η απεικόνιση $x \mapsto E_x^j$ είναι μετρήσιμη, για κάθε $j = 1, \ldots, k$.

(ii) Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι το λ της Πρότασης 2.1 δεν είναι άλλο παρά ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov λ_1.

(iii) Αντικαθιστώντας την f με την f^{-1}, οποιοδήποτε εργοδικό μέτρο για την f είναι επίσης εργοδικό μέτρο για την f^{-1}. Η διαφορά είναι ότι το $\mu \in \mathcal{E}(M, f)$ έχει τους εκθέτες Lyapunov $\lambda_1 > \cdots > \lambda_k$, ενώ το $\mu \in \mathcal{E}(M, f^{-1})$ έχει τους εκθέτες Lyapunov $-\lambda_k > \cdots > -\lambda_1$. Επομένως, μετά το μέρος (ii) αυτής της παρατήρησης, ο *μέγιστος* εκθέτης Lyapunov λ_1 και ο *ελάχιστος* εκθέτης Lyapunov λ_k δίνονται από τις σχέσεις (για σχεδόν – ως προς μ – όλα τα $x \in M$)

$$\lambda_1 = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \|D_x f^n\|,$$

$$\lambda_k = -\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \|D_x f^{-n}\|.$$

(iv) Έστω ότι για τον διαφομορφισμό $f : M \to M$ ο (κανονικοποιημένος) όγκος είναι ένα αναλλοίωτο και επίσης εργοδικό μέτρο. Επειδή ο f διατηρεί τους όγκους, έχει Ιακωβιανή ίση με 1, δηλαδή, $e^{\lambda_1} \cdots e^{\lambda_k} = 1$ ή $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 0$. Στην ειδική περίπτωση ενός τέτοιου διαφομορφισμού πάνω σε μια δισδιάστατη πολλαπλότητα M (δηλαδή, μια επιφάνεια) προκύπτει ότι $\lambda_1 = -\lambda_2$.

(v) Δοθείσης μιας επιφάνειας M και ενός σημείου $x \in M$ μπορούμε χωρίς δυσκολία να κατασκευάσουμε έναν διαφομορφισμό $f\colon M \to M$ έτσι ώστε $f(x) = x$ και η παράγωγος $D_x f$ να έχει ιδιοτιμές e^{λ_1} και e^{λ_2} (με $\lambda_1 > \lambda_2$). Παίρνοντας σαν εργοδικό μέτρο το μέτρο Dirac $\mu = \delta_x$, βλέπουμε ότι τα λ_1, λ_2 είναι οι εκθέτες Lyapunov για αυτό το μέτρο. Προφανώς, η κατασκευή αυτή μπορεί να επαναληφθεί για οποιοδήποτε άλλο σημείο $y \in M$ και για οποιοδήποτε άλλο ζευγάρι πραγματικών αριθμών που θα γίνουν δυο άλλοι εκθέτες Lyapunov. Αυτό δείχνει ότι οι εκθέτες Lyapunov *δεν είναι μοναδικοί* αλλά εξαρτώνται από το επιλεγόμενο εργοδικό μέτρο.

Παράδειγμα 2.1. Έστω ο δισδιάστατος τόρος $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ και η απεικόνιση $f\colon M \to M$ της μεταφοράς (ή περιστροφής στις συντεταγμένες του τόρου) $f\colon M \to M$, $f(x_1, x_2) = (x_1 + a_1, x_2 + a_2) \pmod 1$, όπου $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ και $\frac{a_1}{a_2} \notin \mathbb{Q}$, οπότε το (κανονικοποιημένο) μέτρο Lebesgue–Haar είναι εργοδικό. Επειδή, για κάθε $x \in M$, $D_x f = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, έχουμε $D_x f^n(u) = u$, για κάθε

$n \geq 1$ και για κάθε $u \in T_xM$. Επομένως, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\|D_x f^n(u)\| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\|u\| = 0$, για κάθε $u \in T_xM$, δηλαδή, οι εκθέτες Lyapunov είναι $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. □

Παράδειγμα 2.2. Πάλι στον δισδιάστατο τόρο $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ θεωρούμε την απεικόνιση $f\colon M \to M$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 + x_2) \pmod 1$, για την οποία πάλι το (κανονικοποιημένο) μέτρο Lebesgue–Haar είναι εργοδικό. Σε κάθε $x \in M$, έχουμε $D_x f = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ με ιδιοτιμές $(3 \pm \sqrt{5})/2$. Επομένως, οι εκθέτες Lyapunov είναι $\lambda_1 = \log(3+\sqrt{5})/2$ και $\lambda_2 = \log(3-\sqrt{5})/2$. Επιπλέον, η ανάλυση $T_xM = \mathbb{R}^2 = E_x^1 \oplus E_x^2$ δεν μεταβάλλεται με το x και οι E_x^1 και E_x^2 είναι οι 'μετατοπίσεις' των ιδιοχώρων της $D_x f$ στο $(0,0) + \mathbb{Z}^2$. □

Παράδειγμα 2.3. Θεωρούμε την απεικόνιση του **πετάλου του Smale**. Για την κατασκευή του πετάλου του Smale, αρχίζει κανείς με την γνωστή απεικόνιση που ορίζεται σε ένα ορθογώνιο R του $\mathbb{R}^2$, για να την επεκτείνει σε ένα διαφομορφισμό $f\colon M \to M$ που ορίζεται στην μοναδιαία σφαίρα S^2 του $\mathbb{R}^3$ (δείτε [PdM82]). Υποθέτουμε ότι η απεικόνιση f συστέλλει το ορθογώνιο (στο $R \cap f^{-1}(R)$) στην οριζόντια διεύθυνση κατά $\beta = 1/\alpha < 1/2$ και το διαστέλλει (στο $R \cap f(R)$) στην κατακόρυφη διεύθυνση κατά $\alpha > 2$.

Έστω $\Omega = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} f^{-n}(R)$ το *μη–περιπλανώμενο σύνολο* της f, δηλαδή, το σύνολο όλων των σημείων του R που παραμένουν στο R κάτω από όλες τις επαναλήψεις της f και προς τα μπρος και προς τα πίσω. Το σύνολο Ω είναι ομοιομορφικό με ένα σύνολο Cantor και η $f|\Omega$ είναι τοπολογικά ισοδύναμη με την απεικόνιση μετατόπισης στο $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ ([Robinson95]). Αν $\mu = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^{\mathbb{Z}}$ είναι το φυσικό μέτρο Bernoulli στο Ω (δηλαδή, τέτοιο ώστε κάθε συνιστώσα του $\bigcap_{n=-p}^{+q} f^{-n}(R)$ να έχει μέτρο $\left(\frac{1}{2}\right)^{p+q+1}$), τότε το μ είναι εργοδικό.

Σε κάθε $x \in \Omega$, έχουμε $D_x f = \left[\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1/\alpha \end{smallmatrix}\right]$. Επομένως, οι εκθέτες Lyapunov είναι $\lambda_1 = -\log\alpha$ και $\lambda_2 = \log\alpha$ και η ανάλυση $T_xM = \mathbb{R}^2 = E_x^1 \oplus E_x^2$ αντιστοιχεί στην οριζόντια (συστελλόμενη) και την κατακόρυφη (διαστελλόμενη) διεύθυνση. □

2.iii. Εκθέτες Lyapunov Απεικονίσεων Διαστημάτων

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με μονοδιάστατα δυναμικά συστήματα που παράγονται από μια ειδική κατηγορία απεικονίσεων από το διάστημα $I = [0,1]$ στον εαυτό του: Μια απεικόνιση $f : I \to I$ ονομάζεται **κατά τμήματα μονότονη** αν υπάρχει ένας διαμερισμός $\{I_1, I_2, \dots, I_r\}$ του I σε ένα πεπερασμένο πλήθος διαστημάτων (ανά δυο ξένων μεταξύ τους) έτσι ώστε, για κάθε $j = 1, \dots, r$, ο περιορισμός $f|I_j\colon I_j \to I$ να είναι μια μονότονη και συνεχής απεικόνιση. Μια κατά τμήματα μονότονη απεικόνιση f ονομάζεται *κατά τμήματα* C^r αν κάθε περιορισμός $f|I_j$ είναι τάξης C^r και έχει φραγμένη παράγωγο τάξης r.

Ορισμός 2.1. Έστω $f\colon I \to I$ μια κατά τμήματα C^1 μονότονη απεικόνιση. Ο **εκθέτης Lyapunov** της f στο $x \in I$ ορίζεται ως

$$\lambda(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log|(f^n)'(x)| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log|f'(f^j(x))| \ ,$$

εφόσον το όριο αυτό υπάρχει.

Για να απαντήσουμε το ερώτημα της ύπαρξης του ορίου $\lambda(x)$, χρειάζεται να προσδώσουμε στο $I = [0,1]$ δομή χώρου μέτρου, εφοδιάζοντάς το με τη συνήθη σ-άλγεβρα Borel. Τότε, το εργοδικό θεώρημα του Birkhoff μας δίνει αμέσως την παρακάτω απάντηση.

Πρόταση 2.2. *Έστω $f\colon I \to I$ μια κατά τμήματα C^1 μονότονη απεικόνιση, για την οποία το $\mu \in \mathcal{E}(I,f)$ είναι ένα εργοδικό μέτρο. Τότε υπάρχει ένα $\lambda_\mu \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\lambda(x) = \lambda_\mu$, για σχεδόν (ως προς μ) όλα τα $x \in I$. Το λ_μ ονομάζεται* **εκθέτης Lyapunov** *του εργοδικού μέτρου μ και δίνεται ως*

$$\lambda_\mu = \int_I \log|f'|\, d\mu.$$

Στο σημείο αυτό, θα υπενθυμίσουμε ότι, όταν έχουμε δυο μέτρα μ και ν, ορισμένα στο ίδιο σύνολο X με την ίδια σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$, λέμε ότι το μ είναι **απολύτως συνεχές** ως προς το ν (και γράφουμε $\mu \ll \nu$), αν, για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\nu(A) = 0$, να έχουμε και $\mu(A) = 0$. Όταν τα μ και ν είναι μέτρα πιθανότητας, σύμφωνα με το *Θεώρημα Radon–Nikodym*, $\mu \ll \nu$ αν και μόνον αν υπάρχει μοναδική (σ.π.) συνάρτηση $\phi \in L^1(X, \mathcal{A}, \nu)$, $\phi \geq 0$, $\int_X \phi\, d\nu = 1$, που ονομάζεται *πυκνότητα* και είναι τέτοια ώστε $\mu(A) = \int_A \phi\, d\nu$, για κάθε $A \in \mathcal{A}$.

Παράδειγμα 2.4. Θεωρούμε τη *λογιστική απεικόνιση* $f : [0,1] \to [0,1]$ (για σταθερά ίση με 4) που δίνεται ως $f(x) = 4x(1-x)$. Μπορεί να βρεθεί (δείτε [LM94]) ότι η απεικόνιση αυτή έχει ένα εργοδικό αναλλοίωτο μέτρο μ, το οποίο είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue και αντιστοιχεί στην πυκνότητα $\phi(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$. Επομένως, ο εκθέτης Lyapunov $\lambda_\mu = \lambda$ για το εργοδικό μέτρο αυτής της λογιστικής απεικόνισης μπορεί να υπολογισθεί από το ολοκλήρωμα $\lambda = \displaystyle\int_0^1 \frac{\log|4-8x|}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\, dx$. Αντί όμως να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα αυτό, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι αυτή η λογιστική απεικόνιση f είναι ισοδύναμη μέσω του διαφομορφισμού $h : [0,1] \to [0,1], h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos(\pi x)$, με την *απεικόνιση της τέντας* $T(x) = 1 - 2|x - \frac{1}{2}|, x \in [0,1]$ (δείτε [LM94]). Παρατηρώντας τότε ότι αφενός το μέτρο Lebesgue στο $[0,1]$ είναι το μοναδικό αναλλοίωτο μέτρο για την απεικόνιση της τέντας και ότι δυο ισοδύναμες απεικονίσεις έχουν τους ίδιους εκθέτες Lyapunov, βρίσκουμε αμέσως ότι ο εκθέτης Lyapunov για το εργοδικό μέτρο αυτής της λογιστικής απεικόνισης είναι $\lambda = \log 2$. $\square$

Έστω ότι έχουμε δυο μέτρα μ και ν, ορισμένα στο ίδιο σύνολο με τα ίδια μετρήσιμα υποσύνολα, και έστω μια απεικόνιση στο σύνολο που ορίζονται τα μέτρα. Αν το μ ήταν εργοδικό για την απεικόνιση αυτή, θα ικανοποιόνταν η συνθήκη σύγκλισης του εργοδικού θεωρήματος του Birkhoff. Το ερώτημα τώρα είναι τί είδους μέτρο πρέπει να είναι το μ ώστε να ικανοποιεί μια ασθενή (σε σχέση με το μέτρο ν) συνθήκη σύγκλισης του εργοδικού θεωρήματος του Birkhoff; Η απάντηση δίνεται στον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 2.2. Έστω μ και ν δύο μέτρα ορισμένα στο ίδιο σύνολο X με την ίδια σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ και έστω μια απεικόνιση $T\colon X \to X$. Το μ ονομάζεται **μέτρο Bowen–Ruelle–Sinai** (ή συντομογραφικά **μέτρο B.R.S.**) ως προς το ν αν ισχύει μια από τις εξής δυο ισοδύναμες συνθήκες:

(i) Για κάθε $f \in C(X)$, έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)) = \int_X f\, d\mu,$$

για ένα σύνολο σημείων $x \in X$, που έχει θετικό μέτρο ν.

(ii) Ισχύει η σύγκλιση στην ασθενή* τοπολογία του $\mathcal{M}(X)$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{T^j(x)} = \mu,$$

για ένα σύνολο σημείων $x \in X$, που έχει θετικό μέτρο ν.

Προφανώς, αν το μέτρο μ είναι αφενός απολύτως συνεχές προς το ν και αφετέρου εργοδικό, τότε το μ είναι μέτρο B.R.S. ως προς το ν.

Στο Παράδειγμα 2.4 είδαμε μια συνεχή κατά τμήματα μονότονη απεικόνιση (τη λογιστική απεικόνιση για σταθερά ίση με 4), για την οποία το μέτρο Lebesgue δεν είναι αναλλοίωτο, αλλά η απεικόνιση αυτή έχει ένα εργοδικό μέτρο απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue (δηλαδή, έχει ένα μέτρο B.R.S. ως προς το μέτρο Lebesgue). Η απεικόνιση αυτή είναι μια πολύ ειδική περίπτωση των απεικονίσεων μιας γενικότερης κατηγορίας απεικονίσεων στο διάστημα, οι οποίες ορίζονται στη συνέχεια και για τις οποίες μπορούν κάτω από ορισμένες συνθήκες να ορισθούν μέτρα B.R.S..

Ορισμός 2.3. (i) Μια κατά τμήματα μονότονη απεικόνιση $f\colon I \to I$ ($I = [0,1]$) ονομάζεται **μονοτροπική** (**unimodal**) αν είναι συνεχής, κατά δυο τμήματα μονότονη (οπότε η f έχει μοναδικό *κρίσιμο σημείο* c στο εσωτερικό του I) και $f(\partial I) \subset \partial I$.

(ii) Μια μονοτροπική απεικόνιση $f : I \to I$ τάξης C^3 ονομάζεται **S-μονοτροπική** (**S-unimodal**) αν το κρίσιμο σημείο της c είναι μη–επίπεδο και η f έχει αρνητική παράγωγο του Schwarz στο I.

Λέμε ότι το κρίσιμο σημείο c της f είναι *μη–επίπεδο* αν υπάρχει ένας διαφομορφισμός $\phi\colon \mathbb{R} \to I$ τάξης C^2 με $\phi(0) = c$ έτσι ώστε $f \circ \phi$ να είναι ένα πολυώνυμο κοντά στην αρχή.

Η *παράγωγος του Schwarz* της f ορίζεται ως $Sf = \dfrac{f'''}{f'} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{f''}{f'}\right)^2$. Αν $Sf \leq 0$, τότε $Sf^n \leq 0$, για όλες τις επαναλήψεις f^n της f. Επιπλέον, $Sf \leq 0$ αν και μόνον αν η $\dfrac{1}{\sqrt{|f'|}}$ είναι κυρτή σε κάθε διάστημα μονοτονίας της f (δείτε [Misiurewicz81], όπου αποδεικνύεται και η ύπαρξη απολύτως συνεχών αναλλοιώτων μέτρων κάτω από ορισμένες συνθήκες).

Για τις S-μονοτροπικές απεικονίσεις υπάρχει το επόμενο σημαντικό αποτέλεσμα του Keller που συσχετίζει εκθέτες Lyapunov με μέτρα B.R.S..

Θεώρημα 2.3. (**Keller**.) *Έστω $f\colon I \to I$ μια S-μονοτροπική απεικόνιση. Τότε υπάρχει μια σταθερά $\lambda_f \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε, σχεδόν (ως προς το μέτρο Lebesgue) για όλα τα $x \in I$,*

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log |(f^n)'(x)| = \lambda_f,$$

και, αν $\lambda_f \neq 0$, υπάρχει ένα μέτρο B.R.S. (ως προς το μέτρο Lebesgue) και ο εκθέτης Lyapunov για το μέτρο αυτό είναι $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log |(f^n)'(x)| = \lambda_f$, σχεδόν (ως προς το μέτρο Lebesgue) για όλα τα $x \in I$. Πιο συγκεκριμένα:

(i) *$\lambda_f > 0$ αν και μόνον αν η f έχει ένα απολύτως συνεχές αναλλοίωτο μέτρο μ που είναι μέτρο B.R.S. (ως προς το μέτρο Lebesgue).*

(ii) *$\lambda_f < 0$ αν και μόνον αν η f έχει έναν ευσταθή περιοδικό ελκυστή που στηρίζει ένα μέτρο B.R.S. (ως προς το μέτρο Lebesgue).*

Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού μπορεί να βρεθεί στην εργασία του Keller ([Keller90]) ή στο βιβλίο των de Melo και van Strien ([dMvS93]).

Ας παρατηρήσουμε ότι το προηγούμενο αποτέλεσμα του Keller δεν περιλαμβάνει την περίπτωση $\lambda_f = 0$. Από την θεμελιώδους σημασίας δουλειά του Guckenheimer ([Guckenheimer79]) για την τοπολογική ταξινόμηση των S–μονοτροπικών απεικονίσεων, γνωρίζουμε ότι, εκτός του περιοδικού ελκυστή, η μόνη άλλη περίπτωση με $\lambda_f = 0$ είναι ο σωληνοειδής ελκυστής. Αλλά και πάλι, επειδή στην περίπτωση αυτή ο περιορισμός της f στον ελκυστή αποδεικνύεται ότι είναι τοπολογικά συζυγής με μια μη–αναγωγίσιμη περιστροφή πάνω σε μια συμπαγή ομάδα, υπάρχει μοναδικό αναλλοίωτο μέτρο που εύκολα διαπιστώνεται ότι είναι μέτρο B.R.S..

Εδώ πρέπει να επισημάνουμε ότι ο Johnson έχει βρει μια κατηγορία S–μονοτροπικών απεικονίσεων, οι οποίες *δεν* έχουν κανένα απολύτως συνεχές αναλλοίωτο μέτρο και ούτε κανέναν περιοδικό ή σωληνοειδή ελκυστή ([Johnson87]). Προφανώς, για τις απεικονίσεις αυτές θα πρέπει $\lambda_f = 0$. Επιπλέον, όπως έχει αποδειχθεί από τους Hofbauer και Keller ([HK90]), ακόμη και μέσα στην κατηγορία των τετραγωνικών απεικονίσεων (της μορφής της λογιστικής απεικόνισης $f_a(x) = ax(1-x)$) υπάρχουν απεικονίσεις *χωρίς* να έχουν κανένα μέτρο B.R.S..

3. Εντροπία

3.i. Μετρο–Θεωρητική Εντροπία κατά Kolmogorov–Sinai

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου πιθανότητας. Ένας **διαμερισμός** του X είναι μια συλλογή από μετρήσιμα υποσύνολα, ανά δυο ξένα μεταξύ τους, των οποίων η ένωση είναι το X. Οι διαμερισμοί θα συμβολίζονται με μικρά ελληνικά γράμματα, π.χ., $\xi, \eta, \ldots$ κοκ. Κυρίως, ενδιαφερόμαστε για μετρήσιμους διαμερισμούς: Ο διαμερισμός ξ ονομάζεται *μετρήσιμος* αν $\mu(A \cap B) = 0$, για $A, B \in \xi, A \neq B$, και $\mu(X \setminus \bigcup_{A \in \xi} A) = 0$. Επίσης, συνήθως ενδιαφερόμαστε για πεπερασμένους διαμερισμούς: Ο διαμερισμός ξ είναι *πεπερασμένος*, όταν ο πληθάριθμός του $\operatorname{card} \xi = k < +\infty$, οπότε $\xi = \{A_1, \ldots, A_k\}$.

Υπάρχει μια προφανής μερική διάταξη μεταξύ διαμερισμών: Δοθέντων δυο διαμερισμών ξ και η του $(X, \mathcal{A}, \mu)$, λέμε ότι ο η είναι μια *εκλέπτυνση* του ξ ή ότι ο ξ είναι *υποτακτικός* του η και γράφουμε $\xi \leq \eta$ αν, για κάθε $B \in \eta$, υπάρχει ένα $A \in \xi$ έτσι ώστε $B \subset A$. Μια προφανής εκλέπτυνση των διαμερισμών ξ και η είναι η **σύναψή** τους, που συμβολίζεται ως $\xi \vee \eta$ και ορίζεται σαν ο διαμερισμός $\xi \vee \eta = \{A \cap B \colon A \in \xi, B \in \eta\}$. Παρόμοια, ορίζεται η σύναψη των n διαμερισμών $\xi_1, \ldots, \xi_n$ και συμβολίζεται ως $\bigvee_{j=1}^{n} \xi_j = \xi_1 \vee \cdots \vee \xi_n$. Τέλος, λέμε ότι οι διαμερισμοί ξ και η είναι *ανεξάρτητοι* αν $\mu(A \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B)$, για κάθε $A \in \xi, B \in \eta$.

Ορισμός 3.1. Η **εντροπία του διαμερισμού** ξ για το μέτρο μ ορίζεται ως

$$H_\mu(\xi) = -\sum_{A \in \xi} \mu(A) \log \mu(A),$$

όπου συμφωνούμε να θεωρούμε $0 \log 0 = 0$ και επίσης μπορούμε να παραλείπουμε τον δείκτη μ από το $H_\mu(\xi)$, όταν είναι σαφές ότι αναφερόμαστε στο μέτρο μ. Όταν ο διαμερισμός ξ είναι αριθμήσιμα άπειρος, η εντροπία του μπορεί να είναι άπειρη.

Όπως εξηγείται στο βιβλίο [Walters82], η $H(\xi)$ είναι ένα μέτρο της αβεβαιότητας που απομακρύνεται (ή της πληροφορίας που κερδίζεται), όταν εκτελείται ένα πείραμα, του οποίου το σύνολο των αποτελεσμάτων είναι $\{A \colon A \in \xi\}$.

Ορισμός 3.2. Δοθέντος του διαμερισμού ξ και του $x \in X$ συμβολίζουμε με $C_\xi(x)$ το στοιχείο του ξ που περιέχει το x. Η συνάρτηση $I_\xi \colon X \to \mathbb{R}$,

$$I_\xi(x) = -\log \mu(C_\xi(x))$$

ονομάζεται **συνάρτηση πληροφορίας** του διαμερισμού ξ για το μέτρο μ. (Στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής δεν λαμβάνονται υπόψη τα x με $\mu(C_\xi(x)) = 0$.)

Από τους προηγούμενους ορισμούς έχουμε την εξής αναπαράσταση της εντροπίας του ξ:

$$H_\mu(\xi) = \int_X I_\xi \, d\mu.$$

Στον παρακάτω ορισμό χρησιμοποιούμε το *υπό συνθήκη μέτρο* (πιθανότητας) ως $\mu(A \mid B) = \mu(A \cap B)/\mu(B)$, για $A, B \in \mathcal{A}, \mu(B) > 0$.

Ορισμός 3.3. Έστω δυο διαμερισμοί ξ και η του $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Η **υπό συνθήκη εντροπία του διαμερισμού ξ ως προς τον διαμερισμό** η (για το μέτρο μ) ορίζεται ως

$$H(\xi \mid \eta) = -\sum_{B \in \eta} \mu(B) \sum_{A \in \xi} \mu(A \mid B) \log \mu(A \mid B).$$

Όπως λίγο πιο πριν, ορίζοντας τη **συνάρτηση υπό συνθήκη πληροφορίας**

$$I_{\xi,\eta}(x) = -\log \mu(C_\xi(x) \mid C_\eta(x)),$$

βρίσκουμε αμέσως μια δεύτερη έκφραση για την υπό συνθήκη εντροπία διαμερισμών

$$H(\xi \mid \eta) = \int_X I_{\xi,\eta} \, d\mu.$$

Η επόμενη πρόταση συνοψίζει τις βασικές ιδιότητες της εντροπίας και της υπό συνθήκη εντροπίας διαμερισμών.

Πρόταση 3.1. *Έστω οι διαμερισμοί ξ, η και ζ του $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Τότε:*

(i) $0 < -\log(\sup_{A \in \xi} \mu(A)) \leq H(\xi) \leq \log \operatorname{card} \xi$ *και, όταν ο ξ είναι πεπερασμένος, $H(\xi) = \log \operatorname{card} \xi$ αν και μόνον αν όλα τα μέλη του ξ έχουν το ίδιο μέτρο.*

(ii) $0 \leq H(\xi \mid \eta) \leq H(\xi)$. *$H(\xi \mid \eta) = H(\xi)$ αν και μόνον αν οι διαμερισμοί ξ και η είναι ανεξάρτητοι. $H(\xi \mid \eta) = 0$ αν και μόνον αν $\xi \leq \eta$. Αν $\zeta \geq \eta$, τότε $H(\xi \mid \zeta) \leq H(\xi \mid \eta)$.*

(iii) $H(\xi \vee \eta \mid \zeta) = H(\xi \mid \zeta) + H(\eta \mid \xi \vee \zeta)$. *Οπότε, για $\zeta = \{X\}$, παίρνουμε*

$$H(\xi \vee \eta) = H(\xi) + H(\eta \mid \xi).$$

(iv) $H(\xi \vee \eta \mid \zeta) \leq H(\xi \mid \zeta) + H(\eta \mid \zeta)$. *Οπότε, για $\zeta = \{X\}$, παίρνουμε*

$$H(\xi \vee \eta) \leq H(\xi) + H(\eta).$$

(v) $H(\xi \mid \eta) + H(\eta \mid \zeta) \geq H(\xi \mid \zeta)$.

(vi) *Αν το λ είναι ένα άλλο μέτρο στο X, τότε, για κάθε διαμερισμό ξ, που είναι μετρήσιμος και ως προς μ και ως προς λ και για κάθε $p \in [0, 1]$, έχουμε*

$$pH_\mu(\xi) + (1-p)H_\lambda(\xi) \leq H_{p\mu+(1-p)\lambda}(\xi).$$

Η απόδειξη της πρότασης αυτής είναι απλή και μπορεί να βρεθεί στο βιβλίο των Katok και Hasselblatt ([KH95]).

Έστω τώρα μια απεικόνιση $T \colon X \to X$ στο χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ που υποθέτουμε ότι είναι μ-μετρο–διατηρητική (δηλαδή, ότι το μ είναι αναλλοίωτο για την T). Προφανώς ισχύει:

Πρόταση 3.2. *Αν ξ είναι ένας μ-μετρήσιμος διαμερισμός του X, τότε και ο διαμερισμός $T^{-1}(\xi)$, που ορίζεται ως $T^{-1}(\xi) = \{T^{-1}(A) \colon A \in \xi\}$ είναι μετρήσιμος διαμερισμός του X και, επιπλέον,*

$$H(T^{-1}(\xi)) = H(\xi).$$

Πρόταση 3.3. *Αν ξ είναι ένας μ-μετρήσιμος διαμερισμός του χώρου μέτρου πιθανότητας $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $T : X \to X$ μια μια μ-μετρο–διατηρητική απεικόνιση, τότε το όριο $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}(\xi)\right)$ υπάρχει.*

Απόδειξη. Έστω $a_n = H\left(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}(\xi)\right) \geq 0$. Τότε, από το (iv) της Πρότασης 3.1 παίρνουμε

$$\begin{aligned} a_{n+p} &= H\left(\bigvee_{j=0}^{n+p-1} T^{-j}(\xi)\right) \\ &\leq H\left(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}(\xi)\right) + H\left(\bigvee_{j=n}^{n+p-1} T^{-j}(\xi)\right) \end{aligned}$$

και, επειδή από την Πρόταση 3.2, $H\left(\bigvee_{j=n}^{n+p-1} T^{-j}(\xi)\right) = H\left(\bigvee_{j=0}^{p-1} T^{-j}(\xi)\right)$, καταλήγουμε στο $a_{n+p} \leq a_n + a_p$. Άρα, αφού η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι υποαθροιστική, υπάρχει το ζητούμενο όριο. $\square$

Ορισμός 3.4. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου πιθανότητας, ξ ένας μ-μετρήσιμος διαμερισμός του X και $T \colon X \to X$ μια μ-μετρο–διατηρητική απεικόνιση. Τότε η **μετρική** (ή **μετρο–θεωρητική**) **εντροπία ως προς τον διαμερισμό** ξ **του** T**−αναλλοίωτου μέτρου** μ (ή **της** μ**−μετρο–διατηρητικής απεικόνισης** T) ορίζεται ως

$$h_\mu(T, \xi) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} H_\mu\left(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}(\xi)\right).$$

Μπορούμε να παραλείπουμε τον δείκτη μ από το $h_\mu(T, \xi)$, όταν είναι σαφές ότι αναφερόμαστε στο μέτρο μ.

Ορισμός 3.5. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου πιθανότητας και $T \colon X \to X$ μια μ-μετρο–διατηρητική απεικόνιση. Τότε η **μετρο–θεωρητική** (ή **μετρική**) **εντροπία του** T**−αναλλοίωτου μέτρου** μ (ή **της** μ**−μετρο–διατηρητικής απεικόνισης** T) **κατά Kolmogorov–Sinai** ορίζεται ως

$$h_\mu(T) = \sup\{h_\mu(T, \xi) \colon \xi \text{ διαμερισμός του } X \text{ με } H_\mu(\xi) < +\infty\}.$$

Πάλι μπορούμε να παραλείπουμε τον δείκτη μ από το $h_\mu(T)$, όταν είναι σαφές ότι αναφερόμαστε στο μέτρο μ.

Με άλλα λόγια, η εντροπία $h_\mu(T) \in [0, +\infty]$ εκφράζει ένα μέτρο του πόσο πολύ αβεβαιότητα (ή πόσο λίγη πληροφορία) για τη μελλοντική πρόβλεψη μας δίνει η γνώση της κατάστασης του συστήματος από το παρελθόν ως το παρόν. Έτσι, ένα σύστημα μηδενικής εντροπίας μπορεί να θεωρηθεί πλήρως αιτιοκρατικό, με την έννοια ότι η γνώση του παρελθόντος μπορεί να προσδιορίσει το μέλλον του.

Στο επόμενο αποτέλεσμα παρατίθενται κάποιες από τις βασικές ιδιότητες της εντροπίας. (Αποδείξεις στο [Walters82] ή και [KH95].)

Πρόταση 3.4. (i) $h_\mu(\mathrm{id}_X) = 0$, *όπου* id_X *είναι η ταυτοτική απεικόνιση στο* X.

(ii) $h_\mu(T^k) = kh_\mu(T)$, *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$. *Αν η* T *είναι αντιστρέψιμη, τότε* $h_\mu(T^{-1}) = h_\mu(T)$, *οπότε* $h_\mu(T^k) = |k|h_\mu(T)$, *για κάθε* $k \in \mathbb{Z}$.

(iii) *Αν* $\mu, \lambda \in \mathcal{M}(X,T)$ *και* $p \in [0,1]$, *τότε*

$$h_{p\mu+(1-p)\lambda}(T) \geq ph_\mu(T) + (1-p)h_\lambda(T).$$

Σύμφωνα με το θεώρημα που ακολουθεί, η εντροπία μένει αναλλοίωτη σε μετρο–θεωρητικές συζυγίες. Για να ορίσουμε τις συζυγίες αυτές, χρειάζεται πρώτα να επεκτείνουμε τους ορισμούς της μετρησιμότητας και της μετρο–διατηρητικότητας για απεικονίσεις μεταξύ διαφορετικών χώρων μέτρων. Έστω λοιπόν $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ και $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ δυο χώροι μέτρων πιθανότητας και $T : X_1 \to X_2$ μια απεικόνιση. Τότε, η T είναι *μετρήσιμη* αν $T^{-1}(\mathcal{A}_2) \subset \mathcal{A}_1$ και *μετρο–διατηρητική* αν είναι μετρήσιμη και $\mu_1(T^{-1}(A)) = \mu_2(A)$, για κάθε $A \in \mathcal{A}_2$. Ακόμη, υπενθυμίζουμε ότι, δοθέντος του χώρου μέτρου πιθανότητας $(X, \mathcal{A}, \mu)$, ένα $M \in \mathcal{A}$ με $\mu(M) > 0$ εφοδιασμένο με τη σ-άλγεβρα $M \cap \mathcal{A}$ και το μέτρο $\frac{1}{\mu(M)}(\mu|M)$ συγκροτεί ένα χώρο μέτρου πιθανότητας.

Ορισμός 3.6. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ δυο χώροι μέτρων πιθανοτήτων και $T : X \to X$, $S : Y \to Y$ δυο μετρο–διατηρητικές απεικονίσεις, για τα μέτρα μ και ν, αντιστοίχως. Η απεικόνιση S ονομάζεται **μετρο–θεωρητικός** (ή **μετρικός**) **παράγοντας** της απεικόνισης T αν υπάρχουν:

- δυο σύνολα $M \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{B}$ με $\mu(M) = \nu(N) = 1$,
- και μια απεικόνιση $\varphi : M \to N$, που είναι επί και μετρο–διατηρητική,

έτσι ώστε να ισχύει σ.π. (ως προς μ) στον X

$$\varphi \circ T = S \circ \varphi,$$

δηλαδή, να αντιμετατίθεται σ.π. το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} M \subset X & \xrightarrow{T} & X \supset M \\ \varphi\Big\downarrow & & \Big\downarrow\varphi \\ N \subset Y & \xrightarrow[S]{} & Y \supset N \end{array}$$

Αν, επιπλέον, η απεικόνιση φ είναι ένα–προς–ένα, οπότε αντιστρεπτή, και η αντίστροφη απεικόνιση φ^{-1} είναι κι αυτή μετρο–διατηρητική, τότε οι απεικονίσεις T, S ονομάζονται **μετρο–θεωρητικά** (ή **μετρικά**) **συζυγείς**.

Θεώρημα 3.1. *Έστω* $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *δυο χώροι μέτρων πιθανοτήτων και* $S : X \to X$, $T : Y \to Y$ *δυο μετρο–διατηρητικές απεικονίσεις, για τα μέτρα* μ *και* ν, *αντιστοίχως. Αν η* S *είναι μετρο–θεωρητικός παράγοντας της* T, *τότε* $h_\mu(S) \leq h_\nu(T)$. *Και άρα, αν οι* T, S *είναι μετρο–θεωρητικά συζυγείς, τότε* $h_\mu(T) = h_\nu(S)$.

Απόδειξη. Για οποιοδήποτε μετρήσιμο διαμερισμό η του N, το $\varphi^{-1}(\eta) = \{\varphi^{-1}(B) : B \in \eta\}$ είναι μετρήσιμος διαμερισμός του M και εξ ορισμού $H_\mu(\varphi^{-1}(\eta)) = H_\nu(\eta)$ και $h_\mu(T, \varphi^{-1}(\eta)) = h_\nu(S, \eta)$. Συνεπώς, $h_\mu(T) = \sup\{h_\mu(T, \xi) : H_\mu(\xi) < \infty\} \geq \sup\{h_\mu(T, \varphi^{-1}(\eta)) : H_\mu(\varphi^{-1}(\eta)) < \infty\} = \sup\{h_\nu(S, \eta) : H_\nu(\eta) < \infty\} = h_\nu(S)$. $\square$

Ερχόμαστε τώρα στο κρίσιμο θέμα του υπολογισμού της μετρικής εντροπίας κατά Kolmogorov–Sinai. Τα επόμενα δυο αποτελέσματα λένε ότι μπορούμε να αποφύγουμε να πάρουμε το supremum για όλους τους διαμερισμούς στον ορισμό αυτής της εντροπίας και να υπολογίσουμε την εντροπία είτε σαν την εντροπία ενός ορίου εντροπιών καταλλήλων διαμερισμών ή ακόμη σαν την εντροπία ενός κατάλληλα επιλεγμένου διαμερισμού.

Θεώρημα 3.2. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου πιθανότητας και $T : X \to X$ μια μ-μετρο–διατηρητική απεικόνιση. Αν $\{\xi_n\}_{n=1,2,...}$ είναι μια ακολουθία μετρήσιμων διαμερισμών του X με $H_\mu(\xi_n) < \infty$, για κάθε $n \geq 1$, που είναι τέτοια ώστε "$\xi_n \to \mathcal{A}$," καθώς $n \to +\infty$ (με την έννοια ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$ και $A \in \mathcal{A}$, υπάρχουν $m \geq 1$ και $B_1, ..., B_r \in \xi_m$ έτσι ώστε $\mu\left(A \triangle \bigcup_{j=1}^r B_j\right) < \varepsilon$), τότε $h_\mu(T, \xi_n) \to h_\mu(T)$, καθώς $n \to +\infty$.*

Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού περιέχεται στο βιβλίο του Parry ([Parry81]).

Θεώρημα 3.3. (**Kolmogorov–Sinai**.) *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου πιθανότητας και $T : X \to X$ μια μ-μετρο–διατηρητική απεικόνιση.*

(i) *Αν ξ είναι ένας μετρήσιμος διαμερισμός του X με $H_\mu(\xi) < \infty$ τέτοιος ώστε η σ-άλγεβρα που παράγεται από την $\bigvee_{n=0}^{+\infty} T^{-n}(\xi)$ να είναι η ίδια η $\mathcal{A}$ (οπότε ο διαμερισμός ξ ονομάζεται* **μονόπλευρος γεννήτορας** *για την T), τότε $h_\mu(T) = h_\mu(T, \xi)$.*

(ii) *Αν, επιπλέον, η T είναι αντιστρεπτή με την T^{-1} μ-μετρο–διατηρητική και ξ είναι ένας μετρήσιμος διαμερισμός του X με $H_\mu(\xi) < \infty$ τέτοιος ώστε η σ-άλγεβρα που παράγεται από την $\bigvee_{n=-\infty}^{+\infty} T^{n}(\xi)$ να είναι η ίδια η $\mathcal{A}$ (οπότε ο διαμερισμός ξ ονομάζεται* **δίπλευρος γεννήτορας** *για την T), τότε $h_\mu(T) = h_\mu(T, \xi)$.*

Η απόδειξη του θεωρήματος των Kolmogorov–Sinai υπάρχει στα βιβλία των [Parry81] και [Walters82].

Από τα παραπάνω βλέπουμε πως η εντροπία κατά Kolmogorov–Sinai είναι ένας δείκτης της ταχύτητας σύγκλισης του μέτρου κάποιων συνόλων. Τέτοιες όμως εκτιμήσεις συγκλίσεων είχαν αρχικά (1948) διευρευνηθεί στην κλασική θεωρία της πληροφορίας του Shannon. Το επόμενο αποτέλεσμα, που αποτελεί το *εργοδικό θεώρημα της θεωρίας της πληροφορίας*, διασαφηνίζει τη σχέση εντροπίας–πληροφορίας. (Δείτε την απόδειξή του στο βιβλίο του [Parry81], σελ. 39-41.)

Θεώρημα 3.4. (**Shannon–McMillan–Breiman**.) *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου πιθανότητας, $T : X \to X$ μια μ-εργοδική απεικόνιση και ξ ένας μετρήσιμος διαμερισμός του X με $H_\mu(\xi) < \infty$, ο οποίος υποτίθεται ότι είναι ένας μονόπλευρος γεννήτορας για την T. Για κάθε $x \in X$, συμβολίζουμε με $C_{\xi,n}(x)$ το στοιχείο του διαμερισμού $\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}(\xi)$ που περιέχει το x. Τότε*

$$\lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} \log \mu(C_{\xi,n}(x)) = h_\mu(T),$$

σχεδόν (ως προς μ) για όλα τα $x \in X$.

3.ii. Μετρο–Θεωρητική Εντροπία κατά Katok

Ερχόμαστε τώρα σε έναν δεύτερο ορισμό της εντροπίας που είναι ισοδύναμος με τον προηγούμενο αλλά έχει το πλεονέκτημα εύκολων υπολογισμών. Για το σκοπό αυτό, υποθέτουμε τώρα ότι το X είναι ένας συμπαγής μετρικός χώρος με μετρική $d(\cdot\,,\cdot)$ και ότι η $T : X \to X$ είναι ένας ομοιομορφισμός του X, δηλαδή, μια συνεχής αντιστρεπτή απεικόνιση με συνεχή αντίστροφη. Επιπλέον, έστω $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ ένα T-αναλλοίωτο μέτρο.

Τότε ορίζουμε τα εξής μεγέθη:

(i) Για κάθε ακέραιο $n \geq 1$, ορίζουμε μια νέα μετρική $d_{n,T}$ στο X ως

$$d_{n,T}(x,y) = \max_{0 \leq j \leq n} d(T^n(x), T^n(y)).$$

(ii) Δοθέντων $n \geq 1$, $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, ένα πεπερασμένο σύνολο $K \subset X$ ονομάζεται (n,ε,δ)–*καλύπτον σύνολο* αν η ένωση $\bigcup_{x \in K} B_\varepsilon(x; d_{n,T})$ των ε-μπαλλών $B_\varepsilon(x; d_{n,T}) = \{y \in X : d_{n,T}(x,y) < \varepsilon\}$ στον μετρικό χώρο $(X, d_{n,T})$ με κέντρα στα σημεία $x \in X$ έχει μέτρο μ μεγαλύτερο ή ίσο προς $1 - \delta$.

(iii) Έστω $N_T(n,\varepsilon,\delta)$ ο *μικρότερος* δυνατός πληθάριθμος των (n,ε,δ)–καλυπτόντων συνόλων, δηλαδή, $N_T(n,\varepsilon,\delta) = \min\{\operatorname{card} K : K$ είναι ένα (n,ε,δ)–καλύπτον σύνολο$\}$.

Παρατηρούμε ότι, για σταθερά ε, δ, η απεικόνιση $n \mapsto N_T(n,\varepsilon,\delta)$ είναι μονοτόνως αύξουσα, για σταθερά n, δ, η απεικόνιση $\varepsilon \mapsto N_T(n,\varepsilon,\delta)$ είναι μονοτόνως φθίνουσα καθώς και, για σταθερά n, ε, η απεικόνιση $\delta \mapsto N_T(n,\varepsilon,\delta)$ είναι μονοτόνως φθίνουσα.

Ορισμός 3.7. ([Katok80]) Αν X, T, μ είναι όπως παραπάνω, τότε η **μετρο–θεωρητική** (ή **μετρική**) **εντροπία του** T**–αναλλοίωτου μέτρου** μ (ή **της** μ**–μετρο–διατηρητικής απεικόνισης** T) **κατά Katok** ορίζεται ως

$$h_{\mu,\mathrm{Katok}}(T) = \lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log N_T(n,\varepsilon,\delta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log N_T(n,\varepsilon,\delta),$$

για κάθε $\delta > 0$ (με την έννοια ότι τα προηγούμενα όρια είναι ανεξάρτητα του δ).

Η ισοδυναμία των δυο ορισμών της εντροπίας, των Kolmogorov–Sinai και Katok, δίνεται από το εξής αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.5. *Αν X, T, μ είναι όπως παραπάνω, τότε ισχύει $h_{\mu,\mathrm{Katok}}(T) = h_\mu(T)$.*

Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού βρίσκεται στην αρχική εργασία του Katok ([Katok80]) αλλά μια εναλλακτική απόδειξη υπάρχει στο βιβλίο του Pollicott ([Pollicott93]).

Ισχύει η εξής *τοπολογική εκδοχή του Θεωρήματος Shannon–McMillan–Breiman* που αποδείχθηκε από τους Brin και Katok ([BK83]).

Θεώρημα 3.6. (**Brin–Katok.**) *Έστω X ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $T : X \to X$ μια συνεχής απεικόνιση, για την οποίαν το $\mu \in \mathcal{E}(X,T)$ είναι ένα εργοδικό μέτρο. Έστω $B_\varepsilon(x; d_{n,T}) = \{y \in X : d_{n,T}(x,y) < \varepsilon\}$ η μπάλλα στον $(X, d_{n,T})$ με κέντρο το σημείο $x \in X$ και ακτίνα $\varepsilon > 0$. Τότε*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} \log \mu(B_\varepsilon(x; d_{n,T})) = \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} \log \mu(B_\varepsilon(x; d_{n,T})) = h_\mu(T),$$

σχεδόν (ως προς μ) για όλα τα $x \in X$.

Παράδειγμα 3.1. Έστω ο δισδιάστατος τόρος $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ και η απεικόνιση $f: M \to M$ της μεταφοράς (ή περιστροφής στις συντεταγμένες του τόρου) $f: M \to M$, $f(x_1, x_2) = (x_1 + a_1, x_2 + a_2) \pmod 1$, όπου $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ και $\frac{a_1}{a_2} \notin \mathbb{Q}$, οπότε το (κανονικοποιημένο) μέτρο Lebesgue–Haar είναι εργοδικό. Επειδή η f είναι ισομετρία, έχουμε $d(f^j(x), f^j(y)) = d(x, y)$, για κάθε $j \geq 1$, δηλαδή, $d_{n,f}(x, y) = d(x, y)$, για κάθε $n \geq 1$. Επομένως, $N_f(n, \varepsilon, \delta) = N_f(1, \varepsilon, \delta)$, για κάθε $n \geq 1$, και έτσι $h_\mu(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log N_f(1, \varepsilon, \delta) = 0$. □

Παράδειγμα 3.2. Πάλι στον δισδιάστατο τόρο $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ θεωρούμε την απεικόνιση $f: M \to M$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 + x_2) \pmod 1$. Επειδή η αρχή $(0, 0)$ είναι σταθερό σημείο της f, το μέτρο Dirac $\mu = \delta_{(0,0)}$ είναι εργοδικό αναλλοίωτο μέτρο. Από τον ορισμό της εντροπίας κατά Katok, το μονοσύνολο $K = \{(0, 0)\}$ είναι πάντα ένα (n, ε, δ)–καλύπτον σύνολο για το μέτρο αυτό. Αυτό σημαίνει ότι $N_f(n, \varepsilon, \delta) = 1$ και, άρα, $h_\mu(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log 1 = 0$. □

Παράδειγμα 3.3. Έστω M, f όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Ας θεωρήσουμε τώρα ως αναλλοίωτο μέτρο το μέτρο Lebesgue–Haar. Σε κάθε $x \in M$, έχουμε $D_x f = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2 = (3 \pm \sqrt{5})/2$. Τότε, είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι υπάρχουν δυο σταθερές $c, C > 0$ τέτοιες ώστε να έχουμε $c \leq \frac{N_f(n,\varepsilon,\delta)}{\lambda_1^n} \leq C$, για αρκετά μεγάλα n, οπότε, $h_\mu(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \lambda_1^n = \log \lambda_1$. □

3.iii. Μετρο–Θεωρητική Εντροπία και Εχθέτες Lyapunov

Όπως μπορεί κανείς να υποψιασθεί από το Παράδειγμα 3.3, υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ μετρο–θεωρητικής εντροπίας και εκθετών Lyapunov. Το γενικό αποτέλεσμα είναι το επόμενο, το οποίο αρχικά αποδείχθηκε από τον Ruelle ([Ruelle78]) και για αυτό φέρει το όνομά του (μια απλή απόδειξή του υπάρχει στο βιβλίο του [Pollicott93]).

Θεώρημα 3.7. (**Η Ανισότητα του Ruelle.**) *Έστω $f : M \to M$ ένας διαφομορφισμός C^1 μιας συμπαγούς πολλαπλότητας Riemann M διάστασης d, για τον οποίον το $\mu \in \mathcal{E}(M, f)$ είναι ένα εργοδικό μέτρο. Έστω $\lambda_1, ..., \lambda_k$ οι εκθέτες Lyapunov του μ με αντίστοιχες πολλαπλότητες $m_1, ..., m_k$. Τότε ισχύει η ανισότητα:*

$$h_\mu(f) \leq \sum_{\lambda_j > 0} m_j \lambda_j.$$

Παρατήρηση 3.1. Αν αντικαταστήσουμε τον διαφομορφισμό f με τον αντίστροφό του f^{-1}, ο αντίστροφος διαφομορφισμός θα έχει το ίδιο εργοδικό μέτρο μ και την ίδια εντροπία, αλλά θα αλλάξει το πρόσημο των εκθετών Lyapunov. Τότε η ανισότητα του Ruelle γίνεται:

$$-h_\mu(f) \geq \sum_{\lambda_j < 0} m_j \lambda_j.$$

Η περίπτωση της ισότητας στη σχέση του προηγούμενου θεωρήματος έχει αρχικά διευρευνηθεί από τον Pesin (δείτε την εργασία του [Pesin77]) και για αυτό φέρει το όνομά του.

Θεώρημα 3.8. (**Η Ισότητα του Pesin.**) *Έστω $f : M \to M$ ένας διαφομορφισμός $C^{1+\alpha}$ (δηλαδή, Hölder C^1) μιας συμπαγούς πολλαπλότητας Riemann M διάστασης d, για τον οποίον το $\mu \in \mathcal{E}(M, f)$ είναι ένα εργοδικό μέτρο και, επιπλέον, είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue στην M. Τότε ισχύει η ισότητα:*

$$h_\mu(f) = \sum_{\lambda_j > 0} m_j \lambda_j.$$

Σαν μια άμεση εφαρμογή των προηγουμένων, προκύπτει ο παρακάτω υπολογισμός της εντροπίας ενός γραμμικού αυτομορφισμού του n-διάστατου τόρου $\mathbb{T}^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ (n φορές) ως προς το μέτρο Lebesgue–Haar. (*Αυτομορφισμός* σημαίνει αντιστρεπτή απεικόνιση που η ίδια και η αντίστροφή της είναι και οι δυο μετρήσιμες.) Το αποτέλεσμα αυτό είχε αρχικά αποδειχθεί το 1958 από τον Sinai με στοιχειώδεις μεθόδους. Για την εξαγωγή του από την ισότητα του Pesin και την ανισότητα του Ruelle δείτε στο βιβλίο [Mañé87].

Πόρισμα 3.1. *Έστω $A\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ ένας γραμμικός αυτομορφισμός του τόρου $\mathbb{T}^n$ με ιδιοτιμές $\alpha_1, ..., \alpha_n$ και έστω μ το (κανονικοποιημένο) μέτρο Lebesgue–Haar στον $\mathbb{T}^n$. Τότε ισχύει η ισότητα:*

$$h_\mu(f) = \sum_{|\alpha_j|>1} \log|\alpha_j|.$$

3.iv. Τοπολογική Εντροπία

Ερχόμαστε τώρα στην έννοια της *τοπολογικής εντροπίας*, για την οποία δεν χρειαζόμαστε καθόλου την δομή του χώρου μέτρου παρά μόνον μια τοπολογική δομή (και για αυτό η ονομασία). Πρέπει να πούμε ότι υπάρχουν δυο διαφορετικοί ορισμοί τοπολογικής εντροπίας, που αποδεικνύεται όμως ότι είναι ισοδύναμοι.

Ξεκινάμε με τον παλαιότερο ορισμό της τοπολογικής εντροπίας, που δόθηκε από τους Adler, Konheim & McAndrew το 1965 ([AKM65]) και προχωρά παράλληλα με τον ορισμό της μετροθεωρητικής εντροπίας των Kolmogorov & Sinai, με την διαφορά ότι αντί για *διαμερισμούς* θεωρεί *καλύμματα*.

Έστω X ένας συμπαγής τοπολογικός χώρος. Ένα **ανοικτό κάλυμμα** του X είναι μια συλλογή από ανοικτά υποσύνολα, των οποίων η ένωση είναι το X. Τα ανοικτά καλύμματα συχνά θα συμβολίζονται, όπως οι διαμερισμοί, με μικρά ελληνικά γράμματα, π.χ., $\alpha, \beta, ...$ κοκ. Το ανοικτό κάλυμμα α ονομάζεται *πεπερασμένο*, όταν ο πληθάριθμός του $\operatorname{card}\alpha = k < +\infty$, οπότε $\alpha = \{A_1, ..., A_k\}$. Όπως στους διαμερισμούς, υπάρχει μια προφανής μερική διάταξη μεταξύ καλυμμάτων: Δοθέντων δυο ανοικτών καλυμμάτων α και β του X, λέμε ότι το β είναι μια *εκλέπτυνση* του α ή ότι το α είναι *υποτακτικό* του β και γράφουμε $\alpha \leq \beta$ αν, για κάθε $B \in \beta$, υπάρχει ένα $A \in \alpha$ έτσι ώστε $B \subset A$. Μια προφανής εκλέπτυνση των ανοικτών καλυμμάτων α και β είναι η **σύναφή** τους, που συμβολίζεται ως $\alpha \vee \beta$ και ορίζεται σαν το ανοικτό κάλυμμα $\alpha \vee \beta = \{A \cap B : A \in \alpha, B \in \beta\}$. Παρόμοια, ορίζεται η σύναψη των n ανοικτών καλυμμάτων $\alpha_1, ..., \alpha_n$ και συμβολίζεται ως $\bigvee_{j=1}^n \alpha_j = \alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_n$.

Δοθέντος του ανοικτού καλύμματος α του X, μια υποσυλλογή β των ανοικτών συνόλων, που απαρτίζουν το κάλυμμα α, ονομάζεται (ανοικτό) **υποκάλυμμα** του X, αν η ένωση όλων των υποσυνόλων της υποσυλλογής β είναι πάλι το X. Προφανώς, όταν β υποκάλυμμα του α, τότε $\alpha \leq \beta$.

Ορισμός 3.8. Η **εντροπία του ανοικτού καλύμματος** α του X ορίζεται ως

$$H(\alpha) = \log N(\alpha),$$

όπου $N(\alpha)$ είναι ο μικρότερος δυνατός πληθάριθμος (δηλαδή, αριθμός στοιχείων) των πεπερασμένων ανοικτών υποκαλυμμάτων του α, που σημαίνει ότι $N(\alpha) = \min\{\operatorname{card}\beta \colon \beta$ πεπερασμένο ανοικτό υποκάλλυμμα του $\alpha\}$.

Οι παρακάτω τρεις προτάσεις αποδεικνύονται εύκολα. (Δείτε [Walters82] για τις λεπτομέρες.)

Πρόταση 3.5. *Έστω τα ανοικτά καλύμματα α, β του X. Τότε:*

(i) $H(\alpha) \geq 0$.

(ii) $H(\alpha) = 0 \Leftrightarrow N(\alpha) = 1 \Leftrightarrow X \in \alpha$.

(iii) *Αν* $\alpha \leq \beta$, *τότε* $H(\alpha) \leq H(\beta)$.

(iv) $H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta)$.

Έστω τώρα μια *συνεχής* απεικόνιση $T\colon X \to X$.

Πρόταση 3.6. *Αν α είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του X, τότε και το $T^{-1}(\alpha) = \{T^{-1}(A)\colon A \in \alpha\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X και*

$$H(T^{-1}(\alpha)) \leq H(\alpha).$$

Αν, επιπλέον, η T είναι επί,

$$H(T^{-1}(\alpha)) = H(\alpha).$$

Πρόταση 3.7. *Αν α είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του X και $T\colon X \to X$ μια συνεχής απεικόνιση, τότε το όριο $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}(\alpha)\right)$ υπάρχει.*

Έτσι, είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε τον ορισμό των Adler, Konheim & McAndrew της τοπολογικής εντροπίας.

Ορισμός 3.9. ([AKM65]) Έστω X ένας συμπαγής τοπολογικός χώρος, α ένα ανοικτό κάλυμμα του X και $T: X \to X$ μια συνεχής απεικόνιση. Τότε η **τοπολογική εντροπία ως προς το κάλυμμα α της απεικόνισης T κατά Adler, Konheim & McAndrew** ορίζεται ως

$$h_{\text{top}}(T, \alpha) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}(\alpha)\right).$$

Ορισμός 3.10. ([AKM65]) Έστω X ένας συμπαγής τοπολογικός χώρος και $T\colon X \to X$ μια συνεχής απεικόνιση. Τότε η **τοπολογική εντροπία της απεικόνισης T κατά Adler, Konheim & McAndrew** ορίζεται ως

$$h_{\text{top}}(T) = \sup\{h_{\text{top}}(T, \alpha)\colon \alpha \text{ ανοικτό κάλυμμα του } X\}.$$

Ερχόμαστε τώρα να δώσουμε έναν δεύτερο (ισοδύναμο) ορισμό τοπολογικής εντροπίας που επινοήθηκε το 1970 ξεχωριστά από τον Bowen ([Bowen70]) και τον Dinaburg ([Dinaburg70]) και για αυτό φέρει τα ονόματά τους.

Υποθέτουμε τώρα ότι X είναι ένας συμπαγής μετρικός χώρος (με μετρική $d(\cdot\,,\cdot)$). Στην πραγματικότητα, η υπόθεση της συμπαγότητας του X είναι περιττή (με κατάλληλες τροποποιήσεις, όπως έδειξε ο Bowen).

Πρώτα ορίζουμε τα εξής μεγέθη:

(i) Για κάθε ακέραιο $n \geq 1$, ορίζουμε μια νέα μετρική $d_{n,T}$ στο X ως

$$d_{n,T}(x, y) = \max_{0 \leq j \leq n} d(T^n(x), T^n(y)).$$

(ii) Δοθέντων $n \geq 1$, $\varepsilon > 0$, ένα σύνολο $F \subset X$ ονομάζεται (n,ε)–*καλύπτον σύνολο* αν $X \subset \bigcup_{x\in F} B_\varepsilon(x; d_{n,T})$, όπου $B_\varepsilon(x; d_{n,T}) = \{y \in X : d_{n,T}(x,y) < \varepsilon\}$ συμβολίζει την μπάλλα στον μετρικό χώρο $(X, d_{n,T})$ με κέντρο στο σημείο $x \in X$ και ακτίνα $\varepsilon > 0$.

(iii) Έστω $r_T(n,\varepsilon)$ ο *μικρότερος* δυνατός πληθάριθμος των (n,ε)–καλυπτόντων συνόλων, δηλαδή, $r_T(n,\varepsilon) = \min\{\operatorname{card} F \colon F$ είναι ένα (n,ε)–καλύπτον σύνολο$\}$.

(iv) Δοθέντων $n \geq 1$, $\varepsilon > 0$, ένα σύνολο $E \subset X$ ονομάζεται (n,ε)–*διαχωρισμένο* αν, για κάθε δυο διαφορετικά σημεία $x, y \in E, x \neq y$, υπάρχει τουλάχιστον ένα $k \in [0,n)$ έτσι ώστε $d_{n,T}(x,y) > \varepsilon$.

(v) Έστω $s_T(n,\varepsilon)$ ο *μεγαλύτερος* δυνατός πληθάριθμος των (n,ε)–διαχωρισμένων συνόλων, δηλαδή, $s_T(n,\varepsilon) = \max\{\operatorname{card} E \colon E$ είναι ένα (n,ε)–διαχωρισμένο σύνολο$\}$.

Παρατηρούμε ότι, για σταθερό n, οι απεικονίσεις $\varepsilon \mapsto r_T(n,\varepsilon)$ και $\varepsilon \mapsto s_T(n,\varepsilon)$ είναι και οι δυο μονοτόνως φθίνουσες και ότι ισχύουν οι ανισότητες

$$s_T(n, 2\varepsilon) \leq r_T(n,\varepsilon) \leq s_T(n,\varepsilon).$$

Αν ορίσουμε τους εκθετικούς ρυθμούς αύξησης των $r_T(n,\varepsilon)$ και $s_T(n,\varepsilon)$ ως

$$\begin{aligned} \underline{h}(f,\varepsilon) &= \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log r_T(n,\varepsilon), \\ \overline{h}(f,\varepsilon) &= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log s_T(n,\varepsilon), \end{aligned}$$

επειδή τα $\underline{h}(f,\varepsilon), \overline{h}(f,\varepsilon)$ είναι μη–φθίνουσες συναρτήσεις του ε, ορίζονται τα αντίστοιχα όρια, καθώς $\varepsilon \to 0$. Σύμφωνα με τους Bowen και Dinaburg τα δυο όρια αυτά ταυτίζονται και η κοινή τιμή τους ορίζει την τοπολογική εντροπία.

Ορισμός 3.11. ([Bowen70] & [Dinaburg70]) Έστω (X,d) ένας (συμπαγής) μετρικός χώρος και $T\colon X \to X$ μια συνεχής απεικόνιση. Τότε η **τοπολογική εντροπία της απεικόνισης** T **κατά Bowen & Dinaburg** ορίζεται ως

$$h_{\mathrm{top,BD}}(T;d) = \lim_{\varepsilon\to 0} \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log r_T(n,\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log s_T(n,\varepsilon),$$

όπου η εξάρτηση αυτής της εντροπίας από τη μετρική d υποδεικνύεται με το συμβολισμό αυτό.

Στην πραγματικότητα, αποδεικνύεται (δείτε [Walters82] ή [KH95]) ότι η τοπολογική εντροπία κατά Bowen & Dinaburg παίρνει την ίδια τιμή για *ισοδύναμες* μετρικές:

Πρόταση 3.8. *Αν d' είναι μια άλλη μετρική στο X που ορίζει την ίδια τοπολογία με την d, τότε $h_{\mathrm{top,BD}}(T;d') = h_{\mathrm{top,BD}}(T;d)$.*

Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι οι εντροπίες κατά Bowen & Dinaburg και κατά Adler, Konheim & McAndrew ταυτίζονται (δείτε [Walters82] για την απόδειξη):

Θεώρημα 3.9. *Αν X είναι ένας συμπαγής μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος, d μια οποιαδήποτε μετρική στο X και $T\colon X \to X$ μια συνεχής απεικόνιση, τότε*

$$h_{\mathrm{top}}(T) = h_{\mathrm{top,BD}}(T;d).$$

Στο επόμενο αποτέλεσμα παρατίθενται κάποιες από τις βασικές ιδιότητες της τοπολογικής εντροπίας. (Αποδείξεις στο [Walters82] ή και [KH95].)

Πρόταση 3.9. (i) $h_{\text{top}}(T) \geq 0$.

(ii) $h_{\text{top}}(\text{id}_X) = 0$, *όπου* id_X *είναι η ταυτοτική απεικόνιση στο* X.

(iii) $h_{\text{top}}(T^k) = |k| h_{\text{top}}(T)$, *για κάθε* $k \in \mathbb{Z}$.

(iv) *Αν* Λ *είναι ένα* T*-αναλλοίωτο (με την έννοια,* $T(\Lambda) = \Lambda$*) κλειστό σύνολο του* X*, τότε* $h_{\text{top}}(T|\Lambda) \leq h_{\text{top}}(T)$.

Σύμφωνα με το θεώρημα που ακολουθεί η τοπολογική εντροπία μένει αναλλοίωτη σε *τοπολογικές συζυγίες*, που ορίζονται ως εξής:

Ορισμός 3.12. Έστω X, Y δυο τοπολογικοί χώροι και $T: X \to X$, $S: Y \to Y$ δυο συνεχείς απεικονίσεις. Η απεικόνιση S ονομάζεται **τοπολογικός παράγοντας** της απεικόνισης T αν υπάρχει μια απεικόνιση $\varphi: X \to Y$, που είναι επί και συνεχής έτσι ώστε να ισχύει στον X

$$\varphi \circ T = S \circ \varphi,$$

δηλαδή, να αντιμετατίθεται το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\varphi"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ Y \arrow[r, "S"'] & Y \end{tikzcd}$$

Αν, επιπλέον, η απεικόνιση φ είναι ένα–προς–ένα, οπότε αντιστρεπτή, και η αντίστροφη απεικόνιση φ^{-1} είναι κι αυτή συνεχής (δηλαδή, αν η φ είναι ένας ομοιομορφισμός), τότε οι απεικονίσεις T, S ονομάζονται **τοπολογικά συζυγείς**.

Θεώρημα 3.10. *Έστω* X, Y *δυο συμπαγείς μετρικοποιήσιμοι τοπολογικοί χώροι και* $T: X \to X$, $S: Y \to Y$ *δυο συνεχείς απεικονίσεις. Αν η* S *είναι τοπολογικός παράγοντας της* T*, τότε* $h_{\text{top}}(S) \leq h_{\text{top}}(T)$*. Και άρα, αν οι* T*,* S *είναι τοπολογικά συζυγείς, τότε* $h_{\text{top}}(T) = h_{\text{top}}(S)$.

Απόδειξη. Έστω d_X, d_Y οι μετρικές των X, Y (αντιστοίχως) και έστω $\varphi: X \to Y$ η επί και συνεχής απεικόνιση τέτοια ώστε $\varphi \circ T = S \circ \varphi$. Προφανώς, η φ είναι ομοιομόρφως συνεχής, οπότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε $d_X(x_1, x_2) < \delta$ να συνεπάγεται $d_Y(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) < \varepsilon$. Επομένως, η εικόνα κάθε μπάλλας $B_\delta(x; (d_X)_{n,T})$ του X βρίσκεται μέσα σε μια μπάλλα $B_\varepsilon(y; (d_Y)_{n,S})$ του Y και, άρα, $r_T(n, \delta; d_X) \geq r_S(n, \varepsilon; d_Y)$. Παίρνοντας λογαρίθμους και όρια, προκύπτει η ζητούμενη σχέση. □

Ακολουθούν δυο παραδείγματα υπολογισμού της τοπολογικής εντροπίας, που γίνεται μέσω του ορισμού των Bowen και Dinaburg.

Παράδειγμα 3.4. Έστω ο δισδιάστατος τόρος $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ και η απεικόνιση $f: M \to M$ της μεταφοράς (ή περιστροφής στις συντεταγμένες του τόρου) $f: M \to M$, $f(x_1, x_2) = (x_1 + a_1, x_2 + a_2) \pmod 1$, όπου $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Επειδή η f είναι ισομετρία, έχουμε $d(f^j(x), f^j(y)) = d(x, y)$, για κάθε $j \geq 1$, δηλαδή, $d_{n,f}(x, y) = d(x, y)$, για κάθε $n \geq 1$. Επομένως, $r_f(n, \varepsilon) = r_f(1, \varepsilon)$, για κάθε $n \geq 1$, και έτσι $h_{\text{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log r_f(1, \varepsilon) = 0$. □

Παράδειγμα 3.5. Πάλι στον δισδιάστατο τόρο $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ θεωρούμε την απεικόνιση $f\colon M \to M$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 + x_2) \pmod 1$. Σε κάθε $x \in M$, έχουμε $D_x f = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2 = (3 \pm \sqrt{5})/2$. Τότε, είναι εύκολο να φράξουμε το $r_f(n, \varepsilon)$, για αρκετά μεγάλες τιμές του n, με φραγμούς που περιλαμβάνουν την n-οστή δύναμη λ_1^n της μεγαλύτερης ιδιοτιμής $\lambda_1 = (3 + \sqrt{5})/2$. Έτσι, παίρνουμε $h_{\mathrm{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log r_f(n, \varepsilon) = \log \lambda_1$. $\square$

Η σχέση μεταξύ τοπολογικής και μετρο–θεωρητικής εντροπίας δίνεται από το επόμενο θεμελιώδες αποτέλεσμα (που αποδεικνύεται στα βιβλία [Mañé87] και [Walters82]).

Θεώρημα 3.11. (**Η Αρχή Βελτιστοποίησης της Εντροπίας.**) *Έστω X ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $T\colon X \to X$ μια συνεχής απεικόνιση. Τότε η τοπολογική εντροπία της T ικανοποιεί τη σχέση*

$$h_{\mathrm{top}}(T) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(X,T)} h_\mu(T).$$

Τέλος, στις παρακάτω προτάσεις γίνονται υπολογισμοί της τοπολογικής εντροπίας για συγκεκριμένους τύπους απεικονίσεων. Οι αποδείξεις των προτάσεων αυτών μπορούν να βρεθούν στο βιβλίο του Walters ([Walters82]) και στις παρατιθέμενες αναφορές.

Πρόταση 3.10. *Έστω X ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $T\colon X \to X$ μια απεικόνιση. Αν η T είναι είτε ισομετρία ή συστολή ή περιοδική, τότε $h_{\mathrm{top}}(T) = 0$.*

Πρόταση 3.11. *Αν $f : S^1 \to S^1$ είναι ένας ομοιομορφισμός του μοναδιαίου κύκλου, τότε $h_{\mathrm{top}}(f) = 0$.*

Πρόταση 3.12. *Αν $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι μια απεικόνιση Lipschitz με σταθερά c, τότε $h_{\mathrm{top}}(f) \le \max\{0, n \log c\}$.*

Πρόταση 3.13. *Έστω $f\colon M \to M$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση σε μια συμπαγή πολλαπλότητα Riemann M διάστασης d. Τότε:*

(i) ([Bowen71]) $h_{\mathrm{top}}(f) \le \max\{0, d \log \sup_{x \in M} \|D_x f\|\}$.

(ii) ([S.Katok80]) $h_{\mathrm{top}}(f) \le \log \max_{x \in M} \max_{L \subset T_x M} |\det D_x f|L|$.

(iii) ([Przytycki80]) *Αν η f είναι $C^{1+\alpha}$ και M χωρίς σύνορο, τότε*

$$h_{\mathrm{top}}(f) \le \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \max_{L \subset T_x M} \int_M |\det D_x f^n|L| \, d\mathcal{L}(x).$$

3.v. Τοπολογική Εντροπία και Εκθέτες Lyapunov

Τώρα θα προσπαθήσουμε να διερευνήσουμε κάτω από ποιά συνθήκη για την τοπολογική εντροπία έχουμε μη–μηδενικούς εκθέτες Lyapunov. Στην περίπτωση διαφομορφισμού σε συμπαγή πολλαπλότητα, η συνθήκη αυτή συμβαίνει να είναι η θετικότητα της τοπολογικής εντροπίας, όπως δείχνει το επόμενο θεώρημα. Παράλληλα, αν επιπλέον η πολλαπλότητα είναι δισδιάστατη (δηλαδή, επιφάνεια), η συνθήκη αυτή συνεπάγεται ότι και οι δυο εκθέτες Lyapunov είναι μη–μηδενικοί.

Θεώρημα 3.12. *Έστω $f : M \to M$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση σε μια συμπαγή πολλαπλότητα M. Αν $h_{\mathrm{top}}(f) > 0$, τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Υπάρχει $\mu \in \mathcal{E}(M, f)$ με μη–μηδενικό εκθέτη Lyapunov.*

(ii) *Όταν* $\dim M = 2$*, τότε υπάρχει* $\mu \in \mathcal{E}(M,f)$ *με εκθέτες Lyapunov* $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$.

Απόδειξη. (i) Από την αρχή βελτιστοποίησης της εντροπίας (Θεώρημα 3.11), υπάρχει ένα μέτρο $\mu \in \mathcal{M}(M,f)$ τέτοιο ώστε $h_{\text{top}}(f) \geq h_\mu(f) > 0$. Επειδή το $\mathcal{M}(M,f)$ είναι κυρτός χώρος, του οποίου τα ακραία σημεία είναι στο $\mathcal{E}(M,f)$ (Θεωρήματα 1.5(iv) και 1.6) και η απεικόνηση $\mathcal{M}(M,f) \ni \mu \mapsto h_\mu(f) \in \mathbb{R}^+$ είναι κοίλη (Πρόταση 3.4(iii)), χωρίς να χάσουμε σε γενικότητα μπορούμε να αντικαταστήσουμε το μ με ένα εργοδικό μέτρο $\mu' \in \mathcal{E}(M,f)$ (που εμφανίζεται στην εργοδική ανάλυση του μ – Θεώρημα 1.6) και να υποθέσουμε ότι ακόμη ισχύει η συνθήκη $h_{\mu'}(f) > 0$. Οπότε η ανισότητα του Ruelle (Θεώρημα 3.7) συνεπάγεται το ζητούμενο.

(ii) Έστω τώρα λ_1, λ_2 οι δυο εχθέτες Lyapunov. Πρώτα παρατηρούμε ότι από την (i) υπάρχει $\mu \in \mathcal{E}(M,f)$ με $\lambda_1 > 0$. Αλλά το μ παραμένει εργοδικό και για την αντίστροφη απεικόνιση f^{-1} και $h_\mu(f^{-1}) = h_\mu(f) > 0$, ενώ οι εχθέτες Lyapunov αλλάζουν πρόσημο. Οπότε η ανισότητα του Ruelle συνεπάγεται ότι $\lambda_2 < 0$. $\square$

3.vi. Εντροπία Απεικονίσεων Διαστημάτων

Θα εξετάσουμε τώρα την εντροπία για απεικονίσεις διαστημάτων. Πιο συγκεκριμένα, ενδιαφερόμαστε για τις *κατά τμήματα μονότονες* απεικονίσεις από το διάστημα $I = [0,1]$ στον εαυτό του. Έστω $f\colon I \to I$ είναι μια τέτοια απεικόνιση και $\mathcal{I} = \{I_1, I_2, ..., I_r\}$ ο διαμερισμός του I σε πεπερασμένο πλήθος διαστημάτων (ανά δυο ξένων μεταξύ τους) τέτοιων ώστε κάθε ένα από τα I_J να είναι διάστημα μονοτονίας και συνέχειας της f (ή καλύτερα, του περιορισμού $f|I_j$). Επιπλέον, κάθε ένα από τα διαστήματα του διαμερισμού $\bigvee_{j=1}^{n-1} T^{-j}(\mathcal{I})$ θα είναι διάστημα μονοτονίας και συνέχειας της f^n (ή καλύτερα, του περιορισμού $f^n|I_j$).

Μια κατά τμήματα C^1 μονότονη απεικόνιση $f : I \to I$ ονομάζεται **επεκτατική** αν υπάρχει σταθερά λ τέτοια ώστε

$$|f'(x)| \geq \lambda > 1, \text{ σχεδόν για κάθε } x \in I.$$

Η ύπαρξη αναλλοίωτων μέτρων για επεκτατικές κατά τμήματα μονότονες απεικονίσεις έχει μελετηθεί διεξοδικά στην βιβλιογραφία. Ένα σχετικά γενικό αποτέλεσμα που ισχύει είναι το επόμενο (για το οποίο η απόδειξη μαζί με αναλυτικές σχετικές συζητήσεις μπορούν να βρεθούν στο βιβλίο [LM94]).

Θεώρημα 3.13. *Έστω* $f : I \to I$ *μια επεκτατική κατά τμήματα* C^1 *μονότονη απεικόνιση, για την οποία ικανοποιούνται οι συνθήκες:*

(i) *Υπάρχει σταθερά* $c > 0$ *τέτοια ώστε, για κάθε* $n \geq 0$,

$$c^{-1} \leq \frac{|(f^n)'(x)|}{|(f^n)'(y)|} \leq c,$$

για κάθε $x, y \in \bigvee_{j=1}^{n-1} T^{-j}(\mathcal{I})$.

(ii) *Για κάθε* $j = 1, ..., r$, $f(I_j) \supset (0,1)$ *(δηλαδή, η* $f|I_j\colon \operatorname{int} I_j \to (0,1)$ *είναι επί).*

Τότε υπάρχει μοναδικό f*-αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας* μ *στα σύνολα Borel του* I*, που είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue. Επιπλέον, η* f *είναι ακριβής απεικόνιση ως προς το* μ.

Παρατήρηση 3.2. Όταν η $f\colon I \to I$ είναι απεικόνιση τάξης C^2, η παραπάνω συνθήκη (i) μπορεί να αντικατασταθεί από τη συνθήκη ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$\frac{|f''(x)|}{|f'(y)|} \leq C,$$

για κάθε I_j $(j = 1, ..., r)$ και για κάθε $x, y \in I_j$.

Για επεκτατικές απεικονίσεις που ικανοποιούν τις συνθήκες του θεωρήματος 3.13 ο Rohlin ([Rohlin61]) υπολόγισε τη μετρική εντροπία για το απολύτως συνεχές αναλλοίωτο μέτρο μ σύμφωνα με το επόμενο αποτέλεσμα (απόδειξη του οποίου μπορεί να βρεθεί και στο άρθρο του Jakobson στο βιβλίο [Sinai89]).

Θεώρημα 3.14. (**Τύπος του Rohlin.**) *Έστω $f: I \to I$ και μ όπως στο Θεώρημα 3.13. Τότε ισχύει:*

$$h_\mu(f) = \int_I \log |f'| \, d\mu$$

και έτσι (κατά την Πρόταση 2.2)

$$h_\mu(f) = \lambda_\mu,$$

όπου λ_μ είναι ο εκθέτης Lyapunov του ακριβούς (και άρα εργοδικού) μέτρου μ.

Παράδειγμα 3.6. Έστω ο r-αδικός μετασχηματισμός $T(x) = rx \pmod 1, x \in [0,1)$, όπου $r > 1$ ακέραιος. Επειδή, τότε, το μοναδικό αναλλοίωτο μέτρο είναι το μέτρο Lebesgue $\mathcal{L}$, έχουμε $h_{\mathcal{L}}(T) = \log r$. Παρόμοια, για την απεικόνιση της τέντας $T(x) = 1 - 2|x - \frac{1}{2}|, x \in [0,1]$, ισχύει ότι $h_{\mathcal{L}}(T) = \log 2$. Έτσι, επειδή η λογιστική απεικόνιση (για σταθερά ίση με 4) $f(x) = 4x(1-x), x \in [0,1]$, είναι τοπολογικά συζυγής με την απεικόνιση της τέντας και η εντροπία μένει αναλλοίωτη σε συζυγίες, βρίσκουμε ότι και για τη λογιστική απεικόνιση (για σταθερά ίση με 4) $h_\mu(f) = \log 2$, όπου μ είναι το μοναδικό απολύτως συνεχές αναλλοίωτο μέτρο της λογιστικής αυτής απεικόνισης. $\square$

Παράδειγμα 3.7. Έστω η απεικόνιση του Gauss $T(x) = 1/x \pmod 1, x \in (0,1)$. Παρότι η απεικόνιση αυτή έχει αριθμήσιμο πλήθος ασυνεχειών, οπότε δεν ανήκει στην κατηγορία των κατά τμήματα μονοτόνων απεικονίσεων που εδώ μελετάμε, ισχύει και για αυτήν ο τύπος του Rohlin ([Rohlin61]). Δοθέντος, τότε, ότι το μέτρο Gauss μ (δείτε Παράδειγμα 1.4) είναι το μοναδικό απολύτως συνεχές αναλλοίωτο μέτρο, παίρνουμε $h_\mu(T) = \dfrac{2}{\log 2} \displaystyle\int_0^1 \frac{|\log x|}{1+x} \, dx = \frac{\pi^2}{6 \log 2}$. $\square$

Το ερώτημα τώρα είναι τι συμβαίνει με τις κατά τμήματα μονότονες απεικονίσεις που *δεν* είναι επεκτατικές. Υπάρχει μια απάντηση που δίνεται για μια ειδική κατηγορία τέτοιων απεικονίσεων, οι οποίες περιγράφονται στον ορισμό που ακολουθεί.

Ορισμός 3.13. Μια κατά τμήματα C^1 μονότονη απεικόνιση $f: I \to I$ ονομάζεται **PC–απεικόνιση** αν σε κάθε I_j οι f και f' ικανοποιούν τις εξής συνθήκες:

(i) Η f' είναι συνεχής κατά Hölder τάξης $\alpha > 0$.

(ii) Η f έχει μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος κρίσιμων σημείων, δηλαδή, σημείων $c_i \in I_j$, όπου $f'(c_i) = 0$.

(iii) Τα κρίσιμα σημεία της f είναι *μη–εκφυλισμένα*, με την έννοια ότι υπάρχουν θετικές σταθερές C και k_i^- (k_i^+) τέτοιες ώστε

$$C^{-1} \leq \frac{|f'(x)|}{|x - c_i|^{k_i^{-(+)}}} \leq C,$$

σε μια αριστερή (δεξιά) γειτονιά του c_i.

Για την γενική αυτή κατηγορία απεικονίσεων (που περιλαμβάνει τη λογιστική απεικόνιση) ο Ledrappier απέδειξε το επόμενο σημαντικό αποτέλεσμα στην εργασία του [Ledrappier81] που συνδέει μετρική εντροπία και εκθέτη Lyapunov.

Θεώρημα 3.15. (**Ledrappier.**) *Έστω $f : I \to I$ μια PC–απεικόνιση και μ ένα εργοδικό αναλλοίωτο μέτρο με εκθέτη Lyapunov λ_μ. Τότε*

(i) $h_\mu(f) \leq \max\{0, \lambda_\mu\}$.

(ii) *Αν $H_\mu(I) > 0$, οπότε το μ έχει θετική μετρική εντροπία, τότε το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue αν και μόνον αν $h_\mu(f) = \lambda_\mu$.*

Αναφορικά τώρα με την τοπολογική εντροπία, αυτή μπορεί αμέσως να υπολογισθεί για τις συνεχείς κατά τμήματα μονότονες απεικονίσεις, μετρώντας το πλήθος διαστημάτων μονοτονίας των επαναλήψεων, σύμφωνα με το παρακάτω αποτέλεσμα των Misiurewicz και Szlenk (που αποδεικνύεται στην εργασία τους [MS80] και στο βιβλίο [ALM93]).

Θεώρημα 3.16. (**Misiurewicz & Szlenk.**) *Έστω $f : I \to I$ μια συνεχής κατά τμήματα μονότονη απεικόνιση. Συμβολίζουμε με c_n τον ελάχιστο αριθμό διαστημάτων μονοτονίας της f^n. Τότε*

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log c_n$$

και $h_{\text{top}}(f) \leq \frac{1}{n} \log c_n$, για κάθε $n \geq 1$.

Όπως αποδεικνύεται στα δυο αποτελέσματα που ακολουθούν, οι συνεχείς κατά τμήματα μονότονες απεικονίσεις με θετική τοπολογική εντροπία μπορούν να είναι τοπολογικά συζυγείς με κατάλληλες συνεχείς κατά τμήματα γραμμικές απεικονίσεις ή να έχουν τοπολογικούς παράγοντες τέτοιες απεικονίσεις.

Θεώρημα 3.17. (**Parry.**) *Έστω $f : I \to I$ (όπου το I είναι τυχόν διάστημα του $\mathbb{R}$) μια συνεχής κατά τμήματα (αυστηρώς) μονότονη απεικόνιση, που είναι τοπολογικά μεταβατική (δηλαδή, έχει μια πυκνή τροχιά). Τότε $h_{\text{top}}(f) = \log s > 0$ και η f είναι τοπολογικά συζυγής με μια συνεχή κατά τμήματα γραμμική απεικόνιση $T\colon [0,1] \to [0,1]$ με κλίση $\pm s$.*

Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού υπάρχει στην εργασία του Parry [Parry66] αλλά και στο βιβλίο [ALM93].

Θεώρημα 3.18. (**Milnor & Thurston.**) *Έστω $f\colon I \to I$ (όπου το I είναι τυχόν διάστημα του $\mathbb{R}$) μια συνεχής κατά τμήματα (αυστηρώς) μονότονη απεικόνιση με τοπολογική εντροπία $h_{\text{top}}(f) = \log s > 0$. Τότε υπάρχει μια συνεχής κατά τμήματα γραμμική απεικόνιση $T : [0,1] \to [0,1]$ με κλίση $\pm s$ που είναι τοπολογικός παράγοντας της f μέσω μιας απεικόνισης $\varphi : I \to [0,1]$ συνεχούς, επί και τέτοιας ώστε $\varphi \circ f = T \circ \varphi$, η οποία (απεικόνιση φ), επιπλέον, είναι μονοτόνως αύξουσα.*

Το αποτέλεσμα αυτό έχει αποδειχθεί στην εργασία [MT77] των Milnor και Thurston (δείτε και στο βιβλίο [dMvS93]), ενώ μια διαφορετική απόδειξη περιέχεται στο βιβλίο [ALM93].

4. Πολυπλοκότητα

4.i. Πολυπλοκότητα Τροχιών

Ο ορισμός της πολυπλοκότητας των τροχιών των δυναμικών συστημάτων έχει δοθεί από τον Brudno με βάση τον ορισμό της *αλγοριθμικής πολυπλοκότητας* ενός πεπερασμένου αντικειμένου που έχει επινοηθεί από τον Kolmogorov.

Ορισμός 4.1. ([Kolmogorov65]) Έστω $\mathcal{S}$ ένα πεπερασμένο σύνολο (αλφάβητος), $\mathcal{S}^*$ το σύνολο των πεπερασμένων λέξεων από το $\mathcal{S}$ και A μια υπολογίσιμη απεικόνιση από το $\{0,1\}^*$ στο $\mathcal{S}^*$, δηλαδή, ένας αλγόριθμος που υλοποιείται σε μια καθολική μηχανή του Turing. Τότε η **(αλγοριθμική) πολυπλοκότητα** της λέξης $w \in \mathcal{S}^*$ ως προς τον αλγόριθμο A ορίζεται ως

$$K_A(w) = \begin{cases} \inf\{l(p) \colon p \in \{0,1\}^*, A(p) = w\}, \\ \infty, \text{ αν } A(p) \neq w, \text{ για κάθε } p \in \{0,1\}^*, \end{cases}$$

όπου με $l(p)$ συμβολίζεται το *μήκος* της λέξης $p \in \{0,1\}^*$, δηλαδή, ο αριθμός γραμμάτων του p από την αλφάβητο $\{0,1\}$.

Ο Kolmogorov έδειξε ([Kolmogorov65]) ότι υπάρχει ένας αλγόριθμος B τέτοιος ώστε, για κάθε άλλο αλγόριθμο A και για κάθε λέξη w, να ισχύει

$$K_B(w) \leq K_A(w) + C_A,$$

όπου C_A είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το A (αλλά όχι από το w). Ένας τέτοιος αλγόριθμος ονομάζεται *ασυμπτωτικά βέλτιστος*. Επομένως, πάντοτε θα υπολογίζεται η πολυπλοκότητα μιας λέξης w ως προς έναν ασυμπτωτικά βέλτιστο αλγόριθμο και για αυτό θα συμβολίζεται ως $K(w)$ χωρίς δείκτη.

Ο Brudno έδωσε τον εξής ορισμό της πολυπλοκότητας μιας λέξης που αποτελείται από ένα αριθμήσιμο πλήθος γραμμάτων. Τέτοιες λέξεις ανήκουν στο σύνολο $\mathcal{S}^\infty = \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$, δηλαδή, το σύνολο $\mathcal{S}^\infty = \{w = \{w(j)\}_{j\in\mathbb{N}} \colon w(j) \in \mathcal{S}, \text{ για κάθε } j \in \mathbb{N}\}$.

Ορισμός 4.2. ([Brudno83]) Η **πολυπλοκότητα** της λέξης $w \in \mathcal{S}^\infty$ ορίζεται ως

$$K(w) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} K(w^n),$$

όπου $w^n = w(0)w(1)\cdots w(n-1) \in \mathcal{S}^*$.

Έστω τώρα X ένας συμπαγής τοπολογικός χώρος και $T \colon X \to X$ μια απεικόνιση. Θεωρούμε το πεπερασμένο κάλυμμα $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j\in\mathcal{S}}$ σε ανοικτά σύνολα του X και ορίζουμε μια απεικόνιση $\varphi_{\mathcal{U}} \colon X \to \mathcal{S}^\infty$ ως εξής

$$w = \{w(j)\}_{j\in\mathbb{N}} \in \varphi_{\mathcal{U}}(x) \Leftrightarrow T^j(x) \in U_{w(j)}, \text{για κάθε } j \in \mathbb{N}.$$

Προφανώς, το $\varphi_{\mathcal{U}}(x)$ περιγράφει το *δρομολόγιο* της τροχιάς του $x \in X$, δηλαδή, του συνόλου $\{T^j(x) \colon j \in \mathbb{N}\}$, καταγράφοντας τους δείκτες των συνόλων του καλύμματος $\mathcal{U}$ του X, από τα οποία περνά η τροχιά.

Ορισμός 4.3. ([Brudno83]) Η **πολυπλοκότητα της τροχιάς του σημείου** $x \in X$ (κάτω από την T) **ως προς το κάλυμμα** $\mathcal{U}$ του X ορίζεται ως

$$K(x, T|\mathcal{U}) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \inf_{w\in\varphi_{\mathcal{U}}(x)} K(w^n).$$

Αποδεικνύεται στον [Brudno83] ο εξής χρήσιμος χαρακτηρισμός:

$$K(x,T|\mathcal{U}) \leq \inf_{w\in\varphi_{\mathcal{U}}(x)} K(w), \text{ οπότε, } K(x,T|\mathcal{U}) = K(\varphi_{\mathcal{U}}(x)).$$

Ορισμός 4.4. ([Brudno83]) Όταν X και T είναι όπως παραπάνω, η **πολυπλοκότητα της τροχιάς του σημείου** $x \in X$ (κάτω από την T) ορίζεται ως

$$K(x,T) = \sup\{K(x,T|\mathcal{U}) \colon \mathcal{U} \text{ πεπερασμένο κάλυμμα του } X\}.$$

Το βασικό αποτέλεσμα του Brudno (που αποδεικνύεται στην εργασία [Brudno83]) αναφέρεται στη σχέση μεταξύ της πολυπλοκότητας τροχιάς και της μετρικής εντροπίας και είναι το παρακάτω:

Θεώρημα 4.1. (**Brudno**.) *Αν $\mu \in \mathcal{E}(X,T)$, τότε*

$$K(x,T) = h_\mu(T),$$

σχεδόν (ως προς μ) για κάθε $x \in X$.

Στην γενική περίπτωση, ο Brudno αποδεικνύει το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 4.2. (**Brudno**.) *Αν $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$, τότε*

$$K(x,T) \leq \sup\{h_\mu(T) \colon \mu \in V_T(\delta_x)\},$$

για κάθε $x \in X$, όπου το $V_T(\delta_x)$ αποτελείται από όλα τα σημεία συσσώρευσης στην ασθενή τοπολογία της ακολουθίας $\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{T^{-j}(x)}\right\}_{n\geq 1}$ και δ_y είναι το μέτρο Dirac στο $y \in X$.*

4.ii. Πολυπλοκότητα Απεικονίσεων Διαστημάτων

Θα εξετάσουμε τώρα την πολυπλοκότητα για απεικονίσεις διαστημάτων και πιο συγκεκριμένα, για τις *κατά τμήματα μονότονες* απεικονίσεις από το διάστημα $I = [0,1]$ στον εαυτό του. Έστω $f \colon I \to I$ μια τέτοια απεικόνιση και $\mathcal{I} = \{I_1, I_2, ..., I_r\}$ το πεπερασμένο κάλυμμα του I στα διαστήματα μονοτονίας και συνεχείας της f. Στην περίπτωση αυτή, έχουμε την αλφάβητο $\mathcal{S} = \{1, ..., r\}$, όπου $r = \operatorname{card}\mathcal{I}$. Επιπλέον, συμβολίζουμε τώρα το δρομολόγιο της τροχιάς του $x \in I$ ως $\varphi_{\mathcal{U}}(x) = (x_0x_1x_2\cdots)$, όπου $x_0 = x$ και $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$, για κάθε $n \geq 1$. Έτσι, η πεπερασμένη περικοπή του $\varphi_{\mathcal{U}}(x)$ είναι $\varphi_{\mathcal{U}}(x)^n = (x_0\cdots x_{n-1})$.

Ορισμός 4.5. ([Brudno83]) Η **πολυπλοκότητα της τροχιάς του σημείου** $x \in I$ (κάτω από την f) **ως προς το κάλυμμα** $\mathcal{I}$ του I ορίζεται ως

$$K(x,f|\mathcal{I}) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} K(x_0\cdots x_{n-1}).$$

Τότε το θεμελιώδες αποτέλεσμα του Brudno γράφεται ως εξής.

Θεώρημα 4.3. (**Brudno**.) *Αν $\mu \in \mathcal{E}(I,f)$, τότε*

$$K(x,f|\mathcal{I}) = h_\mu(f),$$

σχεδόν (ως προς μ) για κάθε $x \in I$.

Αν $\mu \in \mathcal{M}(I,f)$, τότε

$$K(x,f|\mathcal{I}) \leq \sup\{h_\mu(f) \colon \mu \in V_f(\delta_x)\},$$

για κάθε $x \in I$.

Για την περίπτωση των κατά τμήματα μονοτόνων απεικονίσεων διαστημάτων, ο Keller στην εργασία του [Keller95] έχει τροποποιήσει ως εξής τους ορισμούς της πολυπλοκότητας τροχιάς.

Ορισμός 4.6. ([Keller95]) Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, έστω

$$k_m(x, f|\mathcal{I}) = K(x_0 \cdots x_{m-1})$$

και

$$K_m(x, f|\mathcal{I}) = \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} k_m(T^j(x), f|\mathcal{I}).$$

Λόγω υπαθροιστικότητας ορίζεται το όριο

$$\tilde{K}(x, f|\mathcal{I}) = \lim_{m \to +\infty} \frac{1}{m} K_m(x, f|\mathcal{I})$$

και, όταν $\mu \in \mathcal{M}(I, f)$, το όριο

$$\tilde{K}_\mu(\mathcal{I}) = \lim_{m \to +\infty} \frac{1}{m} \int_I k_m(x, f|\mathcal{I})\, d\mu(x).$$

Τότε, ο Keller απέδειξε στην [Keller95] το παρακάτω αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.4. (**Keller**.) (i) *$K(x, f|\mathcal{I}) \leq \tilde{K}(x, f|\mathcal{I})$ και, αν $\mu \in \mathcal{E}(I, f)$,*

$$K(x, f|\mathcal{I}) = h_\mu(f, \mathcal{I}) = \tilde{K}_\mu(\mathcal{I}) = \tilde{K}(x, f|\mathcal{I}),$$

σχεδόν (ως προς μ) για κάθε $x \in I$.

(ii) *$\tilde{K}(x, f|\mathcal{I}) = \sup\{\tilde{K}_\mu(\mathcal{I}) : \mu \in V_f(\delta_x)\}$, για κάθε $x \in I$, και, αν $\mu \in \mathcal{M}(I, f)$,*

$$\tilde{K}_\mu(\mathcal{I}) = h_\mu(f, \mathcal{I}).$$

Για την περίπτωση των S-μονοτροπικών απεικονίσεων ο Keller έχει αποδείξει ([Keller95]) το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 4.5. (**Keller**.) *Έστω $f : I \to I$ μια S-μονοτροπική απεικόνιση. Τότε υπάρχουν δυο σταθερές $\lambda_f, C_f(\mathcal{I}) \in \mathbb{R}$ (η λ_f όπως στο Θεώρημα 2.3) τέτοιες ώστε $C_f(\mathcal{I}) \geq \max\{\lambda_f, 0\}$ και*

$$\tilde{K}(x, f|\mathcal{I}) = C_f(\mathcal{I}),$$

σχεδόν (ως προς το μέτρο Lebesgue) για όλα τα $x \in I$. Επιπλέον:

(i) *Αν $\lambda_f > 0$, τότε είναι $C_f(\mathcal{I}) = \lambda_f$.*

(ii) *Αν η f έχει έναν ευσταθή περιοδικό ελκυστή ή έναν σωληνοειδή ελκυστή (οι ελκυστές αυτοί περιλαμβάνονται στην περίπτωση $\lambda_f < 0$ και σε κάποιες από τις περιπτώσεις $\lambda_f = 0$ του Θεωρήματος 2.3 και των παρατηρήσεων που το ακολουθούν), τότε είναι $C_f(\mathcal{I}) = 0$.*

Ο Keller ισχυρίζεται στην [Keller95] ότι υπάρχουν όμως S-μονοτροπικές απεικονίσεις με $\lambda_f = 0$ και $0 < C_f(\mathcal{I}) < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (ακόμη και μεταξύ των μελών της λογιστικής οικογένειας).

Αναφορές

[AKM65] Adler, R.L., A.G. Konheim, and M.H. McAndrew. Topological entropy. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **114** (1965), 309-319.

[ALM93] Alsedà, Lluís, Jaume Llibre, and Michal Misiurewicz. *Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One.* World Scientific, Singapore, 1993.

[Bowen70] Bowen, Rufus. Topological Entropy and Axiom A. In *Global Analysis, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vol. 14, pp. 23-41. American Mathematical Society, Providence (RI), 1970.

[Bowen71] Bowen, Rufus. Entropy for group endomorhisms and homogeneous spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **153** (1971), 401-414.

[BK83] Brin, M., and A. Katok. On local entropy. *Lect. Notes Math.*, **1007** (1983), 30-38.

[Brudno83] Brudno, A.A. Entropy and the complexity of trajectories of a dynamical system. *Transl. Moscow Math. Soc.*, **44** (1983), 127-151.

[Dinaburg70] Dinaburg, E.I. The relation between topological entropy and metric entropy. *Soviet Math.*, **11** (1970), 13-16.

[Guckenheimer79] Guckenheimer, John. Sensitive dependence to initial conditions for one dimensional maps. *Commun. Math. Phys.*, **70** (1979), 133-160.

[HK90] Hofbauer, Franz, and Gerhard Keller. Quadratic maps without asymptotic measure. *Commun. Math. Phys.*, **127** (1990), 319-317.

[Johnson87] Johnson, Stewart D. Singular measures without restrictive intervals. *Commun. Math. Phys.*, **110** (1987), 185-190.

[Katok80] Katok, Anatole. Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorhisms. *Publ. Math. I.H.E.S.*, **51** (1980), 137-173.

[KH95] Katok, Anatole, and Boris Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems.* Cambridge University Press, Cambridge (UK), 1995.

[S.Katok80] Katok, Svetlana R. The estimation from above for the topological entropy of a diffeomorphism. *Lect. Notes Math.*, **819** (1980), 258-264.

[KW82] Katznelson, Y., and B. Weiss. A simple proof of some ergodic theorems. *Israel J. Math.*, **42** (1982), 291-296.

[Keller90] Keller, Gerhard. Exponents, attractors and Hopf decompositions for interval maps. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **10** (1990), 717-744.

[Keller95] Keller, Gerhard. Lyapunov exponents and complexity for interval maps. *Lect. Notes Math.*, **1486** (1995), 216-226.

[Kingman73] Kingman, J.F.C. Subadditive ergodic theory. *Ann. Probab.*, **1** (1973), 883-909.

[Kolmogorov65] Kolmogorov, A.N. Three approaches to the definition of the concept of the "ammount of information." *Problemy Peredachi Informatsii*, **1** (1965), 3-11. *Selected Transl. Math. Statist. and Probab.*, **7** (1968), 293-302.

[LM94] Lasota, Andrzej, and Michael C. Mackey. *Chaos, Fractals, and Noise. Stochastic Aspects of Dynamics.* Springer–Verlag, New York, 1994.

[Ledrappier81] Ledrappier, François. Some properties of absolutely continuous invariant measures on an interval. *Regod. Th. & Dynam. Sys.*, **1** (1981), 77-93.

[Mañé87] Mañé, Ricardo. *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics.* Springer–Verlag, Berlin, 1987.

[dMvS93] de Melo, Welington, and Sebastian van Strien. *One–Dimensional Dynamics.* Springer–Verlag, Berlin, 1993.

[MT77] Milnor, J., and W. Thurston. *On Iterated maps of the Interval: I, II* Πρινςετον πρεπριντ, 1977. *Lect. Notes Math.*, **1342** (1988), 465-563.

[Misiurewicz81] Misiurewicz, Michal. Absolutely continuous measures for certain maps of the interval. *Publ. Math. I.H.E.S.*, **53** (1981), 17-51.

[MS80] Misiurewicz, M., and W. Szlenk. Entropy of piecewise monotone mappings. *Studia Math.*, **67** (1980), 45-63.

[Oseledec68] Oseledec, V.I. A multiplicative ergodic theorem. Liapunov characteristic numbers for dynamical systems. *Trans. Moscow Math. Soc.*, **19** (1968), 197-221.

[PdM82] Palis, Jr., Jacob, and Welington de Melo. *Geometric Theory of Dynamical Systems.* Springer–Verlag, New York, 1982.

[Parry66] Parry, William. Symbolic dynamics and transformations of the unit interval. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **122** (1966), 368-378.

[Parry81] Parry, William. *Topics in Ergodic Theory.* Cambridge University Press, Cambridge UK, 1981.

[Pesin77] Pesin, Ya. B. Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory. *Russian Math. Surveys*, **32** (1977), 54-114.

[Pollicott93] Pollicott, Mark. *Lectures on Ergodic Theory and Pesin Theory on Compact Manifolds.* Cambridge University Press, Cambridge (UK), 1993.

[Przytycki80] Przytycki, Feliks. An upper estimation for topological entropy of diffeomorphisms. *Invent. Math.*, **59** (1980), 205-213.

[Robinson95] Robinson, Clark. *Dynamical Systems. Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos.* CRC Press, Boca Raton (Fl.), 1995.

[Rohlin61] Rohlin, V.A. Exact endomorphisms of Lebesgue space. *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat.*, **25** (1961), 499-530. *Amer. Math. Soc. Trans.* (2) **39** (1964), 1-36.

[Rudin74] Rudin, Walter. *Real and Complex Analysis.* McGraw–Hill, New York, 1974.

[Ruelle78] Ruelle, David. An inequality for the entropy of differentiable maps. *Bol. Soc. Bras. Mat.*, **9** (1978), 83-87.

[Ruelle79] Ruelle, David. Ergodic theory of differentiable dynamical systems. *Publ. Math. I.H.E.S.*, **50** (1979), 275-320.

[Sinai89] Sinai, Ya. G. (Ed.). *Dynamical Systems II.* Springer–Verlag, Berlin, 1989.

[Walters82] Walters, Peter. *An Introduction to Ergodic Theory.* Springer–Verlag, New York, 1982.