Εργασία για το
1ο Πανελλήνιο Συνέδριο και 6ο Θερινό Σχολείο
Πολυπλοκότητας και Χαοτικής Δυναμικής
Μη Γραμμικών Συστημάτων
Πάτρα, Ιούλιος 1993

ΜΙΓΑΔΙΚΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΣΦΑΙΡΑ ΤΟΥ RIEMANN

ΜΩΥΣΗΣ Α. ΜΠΟΥΝΤΟΥΡΙΔΗΣ

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης
671 00 Ξάνθη

mboudour@duth.gr
http://www.duth.gr/~mboudour/

Περιεχόμενα

1 Προαπαιτούμενα Μιγαδικής Ανάλυσης

1.1 Σφαίρα του Riemann

Το μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$ μαζί με το ∞ αποτελούν την *σφαίρα του Riemann*

$$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

ομοιομορφική με την διδιάστατη σφαίρα

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Η *στερεογραφική προβολή* $\varphi : \ \mathbb{C} \to S^2 \setminus (0,0,1)$

$$z = x + iy \longmapsto \varphi(z) = \Big(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\Big).$$

1.2 Ολόμορφες, Μερόμορφες και Αναλυτικές Συναρτήσεις

Έστω $D \subset \mathbb{C}$ φραγμένο ανοικτό, τότε:

- Η $f : \ D \to \mathbb{C}$ λέγεται *ολόμορφη* (στο D) αν $\exists f'(z), \forall z \in D$.
- Η $f : \ D \to \bar{\mathbb{C}}$ λέγεται *μερόμορφη* (στο D), αν κάθε $z \in D$ έχει μια γειτονιά όπου είτε η f ή η $1/f$ είναι ολόμορφη. Το σημείο $z_0 \in D$ λέγεται *πόλος* αν $f(z_0) = \infty$.

Έστω $D \subset \bar{\mathbb{C}}$ ανοικτό τέτοιο ώστε $\infty \in D$, τότε η $f : \ D \to \mathbb{C}$ λέγεται *ολόμορφη στο* ∞ (ή *μερόμορφη στο* ∞), αν η $z \longmapsto f(1/z)$ είναι ολόμορφη (ή μερόμορφη) σε μία γειτονιά του.

Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, τότε η $f : \ D \to \mathbb{C}$ λέγεται *αναλυτική* (στο D) αν είναι είτε ολόμορφη ή μερόμορφη (στο D).

1.3 Αναλυτικές Συναρτήσεις στην Σφαίρα του Riemann

Βασικό αποτέλεσμα:

$$R : \ \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}} \text{ αναλυτική} \Leftrightarrow R \text{ ρητή} : R(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

όπου $p(z)$, $q(z)$ πολυώνυμα με μιγαδικούς συντελεστές και χωρίς κοινούς παράγοντες.

Αλλοιώς: υπάρχει αντιστοιχία 1–1 μεταξύ των αναλυτικών συναρτήσεων στη σγφαίρα του Riemann και των ρητών συναρτήσεων.

Ο *βαθμός*, $\deg(R)$, της $R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ ορίζεται ως

$$\deg(R) = \max\{\deg(p), \deg(q)\}.$$

Ο βαθμός $\deg(R)$ της $R : \ \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ (αναλυτική):

- μετρά πόσες φορές η R "τυλίγει" τη σφαίρα του Riemann γύρω από τον εαυτό της,
- ισούται με τον αριθμό (μετρώντας πολλαπλότητες) των αντιστρόφων εικόνων οποιουδήποτε σημείου της $\bar{\mathbb{C}}$.

1.4 Κανονικά Σύνολα Αναλυτικών Συναρτήσεων

Ορισμός 1.1 Έστω $U \subset \bar{\mathbb{C}}$ ανοικτό, I σύνολο δεικτών και $\mathcal{F} = \{f_j : U \to \bar{\mathbb{C}}, j \in I\}$ σύνολο αναλυτικών συναρτήσεων, τότε η οικογένεια $\mathcal{F}$ ονομάζεται *κανονική* αν κάθε ακολουθία $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ περιέχει μια υπακολουθία f_{n_k} που συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή του U.

Ορισμός 1.2 Έστω (X, d_X), (Y, d_Y) μερικοί χώροι, I σύνολο δεικτών, $\mathcal{F} = \{f_j : X \to Y, i \in I\}$, τότε η οικογένεια $\mathcal{F}$ ονομάζεται *ισοσυνεχής* αν $\forall \epsilon, \exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $x_1, x_2 \in X$ έχουν $d_X(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_Y\Big(f_j(x_1), f_j(x_2)\Big) < \epsilon, \forall j \in I$.

Θεώρημα 1.1 (Arzelà-Ascoli) *Έστω $U \subset \bar{\mathbb{C}}$ ανοικτό, I σύνολο δεικτών*

$$\mathcal{F} = \Big\{f_j : U \to \bar{\mathbb{C}}, \text{ αναλυτικές }, j \in I\Big\}.$$

Η οικογένεια $\mathcal{F}$ είναι κανονική $\Leftrightarrow$ είναι ισοσυνεχής σε κάθε συμπαγές του U.

Θεώρημα 1.2 (Ικανή Συνθήκη Κανονικότητας) *Έστω $U \subset \bar{\mathbb{C}}$ ανοικτό, I σύνολο δεικτών*

$$\mathcal{F} = \Big\{f_j : U \to \bar{\mathbb{C}}, \text{ αναλυτικές }, j \in I\Big\}.$$

Αν η οικογένεια $\mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στα συμπαγή του U, τότε είναι κανονική.

Θεώρημα 1.3 (Vitali) *Έστω $U \subset \bar{\mathbb{C}}$ ανοικτό, $\{f_n\}$ ακολουθία αναλυτικών συναρτήσεων $f_n : U \to \bar{\mathbb{C}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Αν $\exists \varphi \neq V \subset U$ ανοικτό τέτοιο ώστε $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$, $\forall z \in V$, τότε η οριακή συνάρτηση f μπορεί να επεκταθεί σε μια αναλυτική συνάρτηση $f : U \to \bar{\mathbb{C}}$ και $f_n \to f$ ομοιμόρφως στα συμπαγή του U.*

2 Δυναμικά Συστήματα Αναλυτικών Συναρτήσεων στη Σφαίρα του Riemann

Έστω $R : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ αναλυτική.

Συμβολισμός: Για κάθε φυσικό αριθμό n, R^n συμβολίζει την *σύνθεση* της R με τον εαυτό της n φορές:

$$\begin{aligned} R^n &= \underbrace{R \circ R \circ R \cdots \circ R}_{n \text{ φορές}} : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}, \\ R^0 &= \mathrm{Id} \text{ (η ταυτοτική απεικόνιση στο } \bar{\mathbb{C}}). \end{aligned}$$

Προσοχή: Η παράσταση $(R(z))^n$ αναφέρεται σε δυνάμεις και η παράσταση $R^n(z)$ σε συνθέσεις.

- Για $z \in \bar{\mathbb{C}}$, το $R^n(z) \in \bar{\mathbb{C}}$ ονομάζεται *n-οστή επανάληψη* της R στο z.
- Η οικογένεια $\Big\{R^n\Big\}_{n\in\mathbb{N}}$ (αναλυτικών συναρτήσεων στην $\bar{\mathbb{C}}$) λέγεται ότι αποτελεί ένα (διακριτό) *δυναμικό σύστημα* στην $\bar{\mathbb{C}}$ (χώρος φάσεων).

- $z_n = R^n(z),\ z \in \bar{\mathbb{C}} \Leftrightarrow z_{n+1} = R(z_n), z_0 = z.$
- Η ακολουθία $\Big\{z_n = R^n(z)\Big\}_{n\in\mathbb{N}}$ αποτελεί την *προς τα εμπρός* (ή *θετική*) *τροχιά* του $z \in \bar{\mathbb{C}}$ και συμβολίζεται με $O^+(z)$.
- Το $z \in \bar{\mathbb{C}}$ ονομάζεται *σταθερό σημείο* αν
$$R(z) = z,$$
οπότε
$$O^+(z) = \{z\}.$$
- Το $z \in \bar{\mathbb{C}}$ ονομάζεται *περιοδικό σημείο* αν υπάρχει κάποιο $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε
$$R^n(z) = z$$
και τότε το μικρότερο τέτοιο n ονομάζεται *περίοδος* του z. Στο περιοδικό σημείο $z \in \bar{\mathbb{C}}$ περιόδου n, ανστιστοιχεί η *περιοδική τροχιά* (ή *κύκλος*)
$$O^+(z) = \Big\{z, R(z), \ldots, R^{n-1}(z)\Big\}.$$
Προφανώς, ένα σταθερό σημείο είναι περιοδικό σημείο περιόδου n και ένα περιοδικό σημείο περιόδου n είναι σταθερό σημείο της R^n.
- Το $z \in \bar{\mathbb{C}}$ ονομάζεται *προπεριοδικό* (ή *τελικώς περιοδικό*) σημείο αν υπάρχει κάποιος ακέραιος $n \geq 1$ τέτοιος ώστε το $R^n(z)$ να είναι περιοδικό σημείο περιόδου n. (Συνήθως, ένα προπεριοδικό σημείο υποτίθεται πως το ίδιο δεν είναι περιοδικό.)

2.1 Ελκτικότης/Απωθητικότης Περιοδικών Σημείων

Έστω $R:\ \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ αναλυτική και $z \in \bar{\mathbb{C}}$ περιοδικό σημείο περιόδου n.

Ορισμοί: Το σημείο του $\bar{\mathbb{C}}$
$$\lambda(z) = (R^n)'(z)$$
ονομάζεται *ιδιοτιμή* (ή *χαρακτηριστική τιμή*) της περιοδικής τροχιάς $O^+(z) = \{z_1, \ldots, z_n\}$, όπου $z_j = R^{j-1}(z)$, $j = 1, \ldots, n$. Προφανώς ισχύει ότι $\lambda(z) = R'(z_1)\cdots R'(z_n)$.

- Η περιοδική τροχιά $O^+(z)$ ονομάζεται *ελκτική* αν
$$0 < |\lambda(z)| < 1.$$
- Η περιοδιοκή τροχιά $O^+(z)$ ονομάζεται *υπερελκτική* αν
$$\lambda(z) = 0.$$
- Η περιοδιοκή τροχιά $O^+(z)$ ονομάζεται *απωθητική* αν
$$|\lambda(z)| > 1.$$
- Η περιοδιοκή τροχιά $O^+(z)$ ονομάζεται *ουδέτερη* αν
$$|\lambda(z)| = 1.$$

Το $z \in \bar{\mathbb{C}}$ ονομάζεται *κρίσιμο σημείο* αν
$$R'(z) = 0.$$
(Το z δεν είναι απαραίτητα περιοδικό.) Επομένως, στην τροχιά ενός υπερελκτικού περιοδικού σημείου υπάρχει (τουλάχιστον) ένα κρίσιμο σημείο.

3 Αρίθμηση Ελκτικών και Κρίσιμων Σημείων

Έστω $R: \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ αναλυτική και $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ ελκτικό περιοδικό σημείο. Η *λεκάνη έλξης* του z_0 είναι το σύνολο

$$W^s(z_0) = \Big\{ z \in \bar{\mathbb{C}} : \; R^n(z) \to z_0, \text{ καθώς } n \to \infty \Big\}.$$

Η *άμεση λεκάνη έλξης* του z_0 είναι το συνεκτικό μέρος της λεκάνης έλξης $W^s(z_0)$ που περιέχει το z_0 και συμβολίζεται ως $A(z_0)$. Η (άμεση) λεκάνη έλξης της περιοδικής τροχιάς $O^+(z)$ ορίζεται ως η ένωση των (άμεσων) λεκανών έλξης όλων των σημείων της περιοδικής αυτής τροχιάς.

Θεώρημα 3.1 (Fatou, Julia) *Κάθε ελκτική περιοδική τροχιά περιέχει στην άμεση λεκάνη έλξης της τουλάχιστον ένα κρίσιμο σημείο.*

Θεώρημα 3.2 *Κάθε ρητή συνάρτηση βαθμού d έχει το πολύ $2d-2$ κρίσιμα σημεία.*

Πορίσματα:

(i) Κάθε πολυώνυμο βαθμού d έχει το πολύ $d-1$ ελκτικές περιοδικές τροχιές (σε πεπερασμένη απόσταση μεταξύ τους).

(ii) Για κάθε ρητή συνάρτηση, βαθμού d, ισχύει

$$\begin{aligned} &\operatorname{card}\Big\{ \text{ ελκτικών περιοδικών τροχιών } \Big\} + \\ +\frac{1}{2}\,&\operatorname{card}\Big\{ \text{ ουδέτερων περιοδικών τροχιών } \Big\} \quad \le 2(d-1) \end{aligned}$$

4 Δυναμική Μετασχηματισμών Möbius

Μια ρητή συνάρτηση $R(z)$ βαθμού $\deg(R) = 1$ ονομάζεται *μετασχηματισμός Möbius* αν:

$$R(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \; ad - bc \neq 0.$$

Όταν $c \neq 0$, $R(\infty) = \frac{a}{c}$ και $R(-\frac{d}{c}) = \infty$. Όταν $c = 0$, $R(\infty) = \infty$.

Περίπτωση 1: *ο R έχει μοναδικό σταθερό σημείο.*

(1α) Έστω ∞ το μοναδικό σταθερό σημείο, τότε

$$\begin{aligned} R(z) &= z + a \qquad \text{(παράλληλη μεταφορά)}, \\ R^n(z) &= z = na. \end{aligned}$$

Άρα

$$R^n(z) \to \infty, \text{ καθώς } n \to \infty.$$

(1β) Έστω $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ το μοναδικό σταθερό σημείο. Ορίζουμε

$$h(z) = \tfrac{1}{z-z_0}$$
$$(z_0 \mapsto h(z_0) = \infty)$$

Έστω

$$S(z) = hRh^{-1}(z),$$

τότε το ∞ είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της S και άρα

$$S^n(z) = hRh^{-1}(z) \to \infty, \text{ καθώς } n \to +\infty,$$

οπότε

$$R^n(z) \to h^{-1}(\infty) = z_0, \text{ καθώς } n \to +\infty$$

. Με άλλα λόγια, για κάθε μετασχηματισμό Möbius R με μοναδικό σταθερό σημείο $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$, ισχύει:

$$R^n(z) \to z_0 (n \to +\infty), \ \forall z \in \bar{\mathbb{C}}.$$

Περίπτωση 2: *Ο R έχει <u>δύο</u> σταθερά σημεία.*

(2α) Έστω 0 και ∞ τα δύο σταθερά σημεία, τότε

$$\begin{array}{ll} R(z) = kz, & k \neq 0 \\ (R(z) = |k|\frac{k}{|k|}, & \text{δηλαδή, είναι η σύνθεση} \\ & \text{μιας } \textit{περιστροφής}, \left|\frac{k}{|k|}\right| = 1, \\ & \text{και μιας } \textit{ομοιοθεσίας}, |k| > 0) \\ R^n(z) = k^n z. & \end{array}$$

Άρα

$$\begin{array}{lll} R^n(z) \to 0, & \text{καθώς } n \to +\infty, & \text{όταν } |k| < 1, \\ R^n(z) \to \infty, & \text{καθώς } n \to +\infty, & \text{όταν } |k| > 1, \\ |R^n(z)| = |z|, & \text{για κάθε } n, & \text{όταν } |k| = 1. \end{array}$$

Όταν $|k| = 1$, τότε:

είτε το k είναι *n-οστή ρίζα της μονάδας* το οποίο συνεπάγεται ότι $R^n = \mathrm{Id}$ (οπότε οι επαναλήψεις κάθε σημείου ($\neq 0, \infty$) περιστρέφονται κυκλικά γύρω από το 0 σε τροχιές με πεπερασμένο πλήθος σημείων).

ή το k *δεν* είναι n-οστή ρίζα της μονάδας (οπότε οι επαναλήψεις κάθε σημείου ($\neq 0, \infty$) περιστρέφονται κυκλικά γύρω από το 0 σε τροχιές που είναι πυκνές στους κύκλους).

(2β) Έστω z_0, $z_1 \in \bar{\mathbb{C}}$, $z_0 \neq z_1$, τα δύο σταθερά σημεία. Ορίζουμε

$$h(z) = \frac{z - z_0}{z - z_1}$$

$$(z_0 \mapsto h(z_0) = 0 \text{ και } z_1 \mapsto h(z_1) = \infty)$$

Έστω

$$S(z) = hRh^{-1}(z),$$

τότε το 0 και το ∞ είναι τα δύο σταθερά σημεία της $S(z)$ και εφαρμόζεται η περίπτωση (2α). Με άλλα λόγια, οι επαναλήψεις κάτω από έναν σταθερό μετασχηματισμό Möbius που έχει δύο σταθερά σημεία είτε συγκλίνουν σε κάποιο από τα σταθερά σημεία, ή κινούνται κυκλικά σε τροχιές που είτε έχουν πεπερασμένο πλήθος σημείων ή είναι πυκνές στους κύκλους.

5 Συζυγίες Αναλυτικών Συναρτήσεων στη Σφαίρα του Riemann

Έστω

$$\begin{array}{ll} U,V,\subseteq \bar{\mathbb{C}} & \text{ανοικτά,} \\ R:\ U \to V & \text{αναλυτική,} \\ S:\ U \to V & \text{αναλυτική.} \end{array}$$

Οι R, S λέγονατι *τοπικώς (αναλυτικώς) συζυγείς* (όταν $U,V \not\subseteq \bar{\mathbb{C}}$) ή *(αναλυτικώς) συζυγείς* (όταν $U,V = \bar{\mathbb{C}}$) αν υπάρχει ένας αναλυτικός ομοιομορφισμός $\varphi:\ U \to V$ τέτοιος ώστε να αντιμετατίθεται το παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{R} & U \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ V & \xrightarrow[S]{} & V \end{array}$$

δηλαδή,

$$\varphi \circ R(z) = S \circ \varphi(z),\ z \in U,$$

ή

$$R(z) = \varphi^{-1} \circ S \circ \varphi(z),\ z \in U.$$

Πρόταση: Έστω $S : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ αναλυτική, τότε η S είναι ομοιομορφική αν και μόνο αν η S είναι ρητή συνάρτηση βαθμού 1 (δηλαδή, ένας μετασχηματισμός Möbius).

Το πρώτο έναυσμα για συζυγίες στη Μιγαδική Ανάλυση δίνεται από το *Λήμμα του Schwarz.*

Συμβολισμός: Για $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$, $r > 0$, η παράσταση $D_r = \{z \in \bar{\mathbb{C}} :\ |z - z_0| < r\}$ συμβολίζει ένα *ανοικτό δίσκο* στο z_0 και η $D_r = D_r(0)$ ένα ανοικτό δίσκο στο 0.

Λήμμα του Schwarz: *Έστω $f :\ D_1 \to D_1$ αναλυτική τέτοια ώστε $f(0) = 0$, τότε:*

(i) $|f(z)| \leq |z|$, $\forall z \in D_1$ *και*

(ii) $|f'(0)| \leq 1$.

Επιπλέον, αν είτε $|f(z)| = |z|$, $z \neq 0$, ή $|f'(0)| = 1$, τότε $f(z) = \lambda z$, για κάποιο $\lambda \in \bar{\mathbb{C}}$, $|\lambda| = 1$.

Με άλλα λόγια, το Λήμμα του Schwarz λέει ότι μια αναλυτική συνάρτηση $f : D_1 \to D_1$, που έχει το 0 σταθερό σημείο, πρέπει είτε να έχει το 0 ελκτικό σταθερό σημείο ή να είναι περιστροφή (δηλαδή, το 0 να είναι ουδέτερο σταθερό σημείο).

5.1 Η Ελκτική/Απωθητική Περίπτωση

Θεώρημα 5.1 *Έστω $R :\ \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ αναλυτική, $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ ελκτικό ή απωθητικό περιοδικό σημείο περιόδου n και $\lambda = (R^n)'(z)$, $|\lambda| \neq 1$. Τότε υπάρχει γειτονιά U του z_0 και κάποιο $r > 0$ έτσι ώστε η R^n να είναι (τοπικά) συζυγής με την $z \mapsto \lambda z$ μέσω ενός μοναδικού αναλυτικού ομοιομορφισμού $\varphi :\ U \to D_r$ τέτοιου ώστε $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) = 1$ και με αντιμεταθετικότητα του διαγράμματος:*

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{R^n} & U \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ D_r & \xrightarrow[z \mapsto \lambda z]{} & D_r \end{array}$$

5.2 Η Υπερελκτική Περίπτωση

Θεώρημα 5.2 *Έστω $R: \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ αναλυτική, $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ υπερελκτικό περιοδικό σημείο περιόδου n, $k \geq 2$ ακέραιος τέτοιος ώστε*

$$(R^n)'(z_0) = (R^n)''(z_0) = \cdots = (R^n)^{(k-1)}(z_0) = 0, (R^n)^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

Τότε υπάρχει γειτονιά U του z_0 και κάποιο $r > 0$ έτσι ώστε η R^n να είναι (τοπικά) συζυγής με την $z \mapsto z^k$ μέσω ενός αναλυτικού ομοιομορφισμού $\varphi: U \to D_r$ τέτοιου ώστε $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) = 1$ και με αντιμεταθετικότητα του διαγράμματος:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "R^n"] \arrow[d, "\varphi"'] & U \arrow[d, "\varphi"] \\ D_r \arrow[r, "z \mapsto z^k"'] & D_r \end{tikzcd}$$

5.3 Η Ουδέτερη Περίπτωση

Έστω $R: \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ αναλυτική, $\deg(R) > 1$, $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ ουδέτερο σταθερό σημείο και $\lambda = R'(z_0)$, $|\lambda| = 1$. Υποθέτουμε ότι η R είναι (τοπικώς) συζυγής με την $z \mapsto \lambda z$ μέσω του αναλυτικού ομοιομορφισμού $\varphi: U \to D_r$, για κάποια γειτονιά U του z_0 και κάποιο $r > 0$, οπότε αντιμετατίθεται το παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "R"] \arrow[d, "\varphi"'] & U \arrow[d, "\varphi"] \\ D_r \arrow[r, "z \mapsto \lambda z"'] & D_r \end{tikzcd}$$

δηλαδή

$$\boxed{\varphi \circ R(z) = \lambda \varphi(z) \quad (z \in U)} \tag{ΣES}$$

Έτσι, η παραπάνω συνάρτησιακή εξίσωση, που ονομάζεται *συναρτησιακή εξίσωση του Schröder (ΣES)*, αποτελεί μια αναγκαία συνθήκη για την (τοπική) συζυγία της R με την $z \mapsto \lambda z$.

Γεωμετρικά, η (ΣES) λέει ότι το z_0 είναι το κέντρο ενός δισκου επί του οποίου η συνάρτηση γίνεται περιστροφή.

Πρόταση: Αν το λ είναι *ρίζα της μονάδας*, τότε η (ΣES) *δεν* έχει λύση.

Απόδειξη: Έστω $\lambda^n = 1$, $\varphi(z)$ λύση της (ΣES). Άρα $\varphi \circ R^n \circ \varphi^{-1} = \mathrm{Id}$, το οποίο συνεπάγεται ότι $R^n = \mathrm{Id}$ στο U. Επειδή η R^n είναι αναλυτική αυτό συνεπάγεται ότι $R^n = \mathrm{Id}$ στην $\bar{\mathbb{C}}$. Από αυτό παίρνουμε ότι $\deg R = 1$, το οποίο είναι άτοπο.■

Θεώρημα 5.3 (Camacho) *Έστω $f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$ αναλυτική γύρω από το 0. Αν $\lambda^n = 1$ και $\lambda^m \neq 1$, για $1 < m < n$, τότε είτε $f^n = \mathrm{Id}$ ή υπάρχει ένας τοπικός ομοιομορφισμός h και ένας ακέραιος $k > 1$ έτσι ώστε $h(0) = 0$ και $h \circ f \circ h^{-1}(z) = \lambda z(1 + z^{kn})$.*

Ανάλυση του θεωρήματος του Camacho: Έχουμε

$$\{z \in \bar{\mathbb{C}}: \ z^{kn} \in \mathbb{R}\} = \bigcup_{j=1}^{kn} \ell_j,$$

όπου ℓ_j είναι οι ευθείες που περνούν από το 0 και διαιρούν το $\mathbb{C}$ σε $2kn$ γωνιακούς τομείς S_j (ο καθένας με γωνία π/kn). Έστω $g(z) = z(1+z^{kn})$. Αμέσως βλέπουμε ότι η g αφήνει αναλλοίωτες και την ένωση των ευθειών $\bigcup_{j=1}^{kn} \ell_j$ και κάθε έναν από τους γωνιακούς τομείς S_j.

Τέλος, η απεικόνιση $z \mapsto \lambda z(1+z^{kn})$ είναι η σύνθεση της $g(z)$ με την περιστροφή $z \mapsto \lambda z$ κατά γωνία $\frac{2q\pi}{n}$, $q \in \mathbb{Z}$ (επειδή $|\lambda| = 1$ και $\lambda^n = 1$ συνεπάγεται ότι $\lambda = e^{\frac{2q\pi}{n} i}$).

Το Θεώρημα του Άνθους (Fatou, Julia, Camacho) *Έστω $f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$ αναλυτική γύρω από το 0 και έστω $\lambda^n = 1$ και $\lambda^m \neq 1$, για $1 < m < n$. Αν $f^n \neq \mathrm{Id}$, τότε υπάρχει ένα ακέραιος k και nk αναλυτικές καμπύλες, ανά δύο εφαπτόμενες στην αρχή. Έτσι, σχηματίζεται ένα άνθος A με κέντρο την αρχή και γύρω του nk πέταλα Π_j ($A = \bigcup_{j=1}^{nk} \Pi_j$), έτσι ώστε*

(i) $f^n(A) \subset A$,

(ii) $f^p(z) \to 0$, *καθώς* $p \to +\infty$, $\forall z \in A$, *εφαπτομενικώς ως προς τον άξονα του πετάλου,*

(iii) $f^p(B) \to 0$, *καθώς* $p \to +\infty$, *ομοιομόρφως για κάθε συμπαγές* $B \subset \Pi_j$.

Θεώρημα 5.4 (Siegel) *Έστω $R : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ αναλυτική, $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ ουδέτερο σταθερό σημείο και $\lambda = R'(z_0) = e^{2\pi i\theta}$ ($|\lambda| = 1$). Αν $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (άρρητος) και υπάρχουν θετικές σταθερές a, b έτσι ώστε, $\forall p, q \in \mathbb{Z}$, $q \geq 1$,*

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| > \frac{a}{q^b}, \tag{$\star$}$$

τότε η (ΣES) έχει λύση, δηλαδή, η $R(z)$ είναι τοπικώς συζυγής με την $z \mapsto \lambda z$ μέσω ενός αναλυτικού ομοιομορφισμού $\varphi : U \to D_r$, για κάποια γειτονιά U του z_0 και κάποιο $r > 0$, οπότε αντιμετατίθεται το παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{R} & U \\ \varphi\big\downarrow & & \big\downarrow\varphi \\ D_r & \xrightarrow[z \mapsto \lambda z]{} & D_r \end{array}$$

*Επιπλέον, το μέτρο Lebesgue των $\lambda \in S^1$ που **δεν** ικανοποιούν την ($\star$) είναι μηδενικό.*

6 Σύνολα Fatou και Σύνολα Julia

Έστω $R : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ αναλυτική, $\deg(R) \geq 2$.

Ορισμός 6.1 Ένα σημείο $z \in \bar{\mathbb{C}}$ λέγεται ότι ανήκει στο *σύνολο Fatou* $F = F(R)$ της R αν υπάρχει μια γειτονιά U του z στην $\bar{\mathbb{C}}$ τέτοια ώστε η οικογένεια των επαναλήψεων $\mathcal{F} = \{R^n : U \to \bar{\mathbb{C}},\ n = 1, 2, \ldots\}$ να είναι κανονική.

Το *σύνολο Julia* $J = J(R)$ της R ορίζεται ως το συμπλήρωμα στην $\bar{\mathbb{C}}$ του συνόλου Fatou F, δηλαδή, $J = \bar{\mathbb{C}} \setminus F$. Το σύνολο Fatou ονομάζεται επίσης:

- *περιοχή κανονικότητας*,
- *περιοχή ισοσυνέχειας* και
- *ευσταθές σύνολο.*

Βασικές ιδιότητες:

(i) Αν το F είναι ανοικτό και πλήρως (θετικώς και αρνητικώς) αναλλοίωτο, τότε το J είναι συμπαγές και πλήρως αναλλοίωτο.

(ii) Αν ισχύει $F = \{z \in \bar{\mathbb{C}} : \ O^+(z)$ είναι ευσταθής$\}$ και $O^+(z)$ ευσταθής, τότε $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $\zeta \in \bar{\mathbb{C}}$, $d(z,\zeta) < \delta$, να συνεπάγεται ότι $d(R^n(z), R^n(\zeta)) < \varepsilon$, $\forall n = 1, 2, \ldots$

Παράδειγμα: Έστω $R(z) = z^2$. Τότε $D_1 \subset F$, $\bar{\mathbb{C}} \setminus D_1 \subset F$ και $S^1 = J$. Γενικώς όμως τα σύνολα Julia δεν είναι απαραίτητα ομαλά και πολλές φορές είναι φράκταλ (*fractal*).

Θεώρημα 6.1 *$J \neq \emptyset$.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε το αντίθετο: $J = \emptyset$. Τότε $F = \bar{\mathbb{C}}$, το οποίο συνεπάγεται ότι $\{R^n\}$ είναι κανονική στην $\bar{\mathbb{C}}$. Αυτό με την σειρά του σημαίνει ότι υπάρχει υπακολουθία $R^{n_k} \to S$ ομοιομόρφως στα συμπαγή της $\bar{\mathbb{C}}$, όπου $S : \ \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ αναλυτική. Άρα: $\deg(R^{n_k}) \to \deg(S)$ ή $[\deg(R)]^{n_k} \to \infty$, το οποίο συνεπάγεται ότι $\deg(S) = \infty$, το οποίο είναι άτοπο.■

Παρατήρηση: Ενδέχεται $F = \emptyset$. Το παράδειγμα του Lattès αποτελεί μια τέτοια περίπτωση: $R(z) = \frac{(z^2+1)^2}{4z(z^2-1)}$ με $J = \bar{\mathbb{C}}$ και $F = \emptyset$.

Θεώρημα 6.2 *Ισχύει:*

$$\Big\{\textit{(υπερ)ελκτικά περιοδικά σημεία}\Big\} \subset F,$$

$$\overline{\Big\{\textit{απωθητικά περιοδικά σημεία}\Big\}} \subset J.$$

(Απόδειξη με το Θεώρημα Μέσης Τιμής και το Θεώρημα Arzela-Ascoli.)

Θεώρημα 6.3 (Fatou, Julia) *Ισχύει:*

$$J = \overline{\Big\{\textit{απωθητικά περιοδικά σημεία}\Big\}}$$

. (Απόδειξη με το Θεώρημα Montel από το οποίο συνεπάγεται ότι

$$J \subset \overline{\{\textit{απωθητικά περιοδικά σημεία}\}}.)$$

Θεώρημα 6.4 *Έστω $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ ουδέτερο σταθερό σημείο και $\lambda = R'(z_0)$, $|\lambda| = 1$. Τότε $z_0 \in F$ αν και μόνο αν η $R(z)$ είναι τοπικώς συζυγής με την παράγωγο τς $z \mapsto \lambda z$.*

Απόδειξη: ($\Leftarrow$) Εξ ορισμού της F.
($\Rightarrow$) Έστω $z_0 \in F$, U συνεκτικό μέρος του F, $z_0 \in U$. Υποθέτουμε πως το U είναι απλώς συνεκτικό. (Αν το U δεν είναι απλώς συνεκτικό, παίρνουμε το ολικό κάλυμμα του U.) Σύμφωνα με το θεώρημα της Απεικόνισης του Riemann, υπάρχει αναλυτική $\varphi : \ U \to D_1$ τέτοια ώστε $\varphi(z_0) = 0$ και η φ είναι 1-1. Έστω $S = \varphi \circ R \circ \varphi^{-1}$. Τότε $S(0) = 0$ και $|S'(0)| = 1$. Από το Λήμμα του Schwarz πέρνουμε ότι $S(z) = \lambda z$.■

Πόρισμα: Έστω $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ ουδέτερο σταθερό σημείο και $\lambda = R'(z_0)$, $|\lambda| = 1$. Αν $\lambda = e^{2\pi i\theta}$, για κάθε $\theta \in \mathbb{Q}$, τότε $z_0 \in J$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε το αντίθετο: $z_0 \in F$. Γράφουμε $\theta = \frac{p}{q}$, p, q σχετικώς πρώτοι. Επειδή $(R^q)'(z_0) = 1$, το προηγούμενο θεώρημα συνεπάγεται την αντιμεταθετικότητα του διαγράμματος

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{R^q} & U \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ D_r & \xrightarrow[\mathrm{Id}]{} & D_r \end{array}$$

δηλαδή, $\varphi \circ R^q = \varphi \Rightarrow R^q = \mathrm{Id}$ στο U. R αναλυτική $\Rightarrow R^q = \mathrm{Id}$ στην $\bar{\mathbb{C}} \Rightarrow \deg(R) = 1$, άτοπο (≥ 2).■

7 Συνέπειες Θεωρήματος Montel

Θεώρημα του Montel: *Έστω $U \subset \bar{\mathbb{C}}$ ανοικτό, $\mathcal{F} = \{f : U \to \bar{\mathbb{C}}\}$ οικογένεια αναλυτικών συναρτήσεων. Αν υπάρχουν τρεία σημεία $\alpha, \beta, \gamma \in \bar{\mathbb{C}}$ τέτοια ώστε*

$$\bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(U) \subset \bar{\mathbb{C}} \setminus \{\alpha, \beta, \gamma\},$$

τότε η οικογένεια $\mathcal{F}$ είναι κανονική.

Ορισμός 7.1 Έστω $R : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ αναλυτική, $U \subset \bar{\mathbb{C}}$ ανοικτό και $z \in \bar{\mathbb{C}}$. Τα *σύνολα των παραλειπόμενων σημείων* E_U και E_z ορίζονται ως εξής:

$$E_U = \bar{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{n \geq 0} R^n(U),$$

$$E_z = \bigcup \Big\{ E_V : V \subset U \text{ ανοικτό, } z \in V \Big\}.$$

Θεώρημα 7.1 *Έστω $z \in J$ και U ανοικτή γειτονιά του z.*

(i) *Το σύνολο E_U περιέχει το πολύ δύο σημεία,*

(ii) *Το σύνολο E_z περιέχει το πολύ δύο σημεία.*

(Απόδειξη: συνέπεια του Θεωρήματος Montel.)

Θεώρημα 7.2 *Έστω $z \in J$.*

(i) *Το E_z είναι αρνητικώς αναλλοίωτο ($R^{-1}(E_z) \subset E_z$).*

(ii) *Το E_z είναι ανεξάρτητο της επιλογής του $z \in J$ και γι' αυτό συμβολίζεται ως $E = E(R)$. Το E περιέχει το πολύ δύο σημεία που ονομάζονται* ***εξαιρετικά σημεία****.*

(iii) *Αν το E περιέχει ακριβώς δύο εξαιρετικά σημεία, τότε η $R(z)$ είναι τυπικά συζυγής με την $z \mapsto z^{\pm d}$, όπου $d = \deg(R)$, της οποίας απεικόνισης τα παραλειπόμενα σημεία είναι $\{0, \infty\}$ (το πρόσημο είναι $+$ αν το E περιέχει δύο σταθερά σημεία και $-$ αν το E περιέχει μια περιοδική τροχιά περιόδου 2).*

(iv) *Αν το E περιέχει μόνο ένα εξαιρετικό σημείο, τότε η $R(z)$ είναι τοπικά συζυγής με ένα πολυώνυμο, του οποίου το μοναδικό παραλειπόμενο σημείο είναι το $\{\infty\}$.*

Πορισμα: Αν $\mathrm{int}(J) \neq \emptyset$, τότε $J = \bar{\mathbb{C}}$.

Απόδειξη: Έστω $U \subset \mathrm{int}(J)$ ανοικτό. Το ότι το J είναι θετικά αναλλοίωτο σημαίνει ότι $J \supset \bigcup_{n \geq 0} R^n(U) = \bar{\mathbb{C}} \setminus E$. Παίρνοντας την κλειστότητα, επειδή το J είναι κλειστό και το E περιέχει το πολύ δύο σημεία, έπεται ότι

$$J \supset \bar{\mathbb{C}} \qquad \text{ή} \qquad J = \bar{\mathbb{C}}.\blacksquare$$

Πόρισμα:

(i) Αν $z \in \bar{\mathbb{C}} \setminus E$, τότε

$$J \subset \Big\{ \text{οριακά σημεία της } \bigcup_{n \geq 0} R^{-n}(z) \Big\}.$$

(ii) Συνεπώς, αν $z \in J$, τότε

$$J = \overline{\bigcup_{n \geq 0} R^{-n}(z)}.$$

Απόδειξη:

(i) Από τον ορισμό του E και το γεγονός ότι οι επαναλήψεις οποιασδήποτε γειτονιάς κάθε σημείου του J τελικώς περιλαμβάνουν το z.

(ii) Αν $z \in J$, επειδή το J είναι αρνητικώς αναλλοίωτο, από την

$$\bigcup_{n \geq 0} R^{-n}(z) \subset J$$

συνεπάγεται ότι

$$\overline{\bigcup_{n \geq 0} R^{-n}(z)} \subset \bar{J} = J \text{ (κλειστό)}.$$

Εξάλλου από το (i) συνεπάγεται ότι $J \subset \overline{\bigcup_{n \geq 0} R^{-n}(z)}$.$\blacksquare$

Θεώρημα 7.3 *Το σύνολο Julia J είναι **τέλειο** (δηλαδή, μη-κενό, κλειστό και κάθε σημείο του είναι οριακό σημείο).*

Απόδειξη: Έστω τυχόν $a \in J$. Θα δείξουμε ότι το a είναι οριακό σημείο του J. Έστω U γειτονιά του a. Διαλέγουμε ένα $b \in J$ όπως στον Λήμμα που ακολουθεί, δηλαδή, τέτοιο ώστε $a \in O^+(b)$ αλλά $b \notin O^+(a)$. Αφού $b \in J$, $b \notin E$ και υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $b \in R^k(U)$. Έστω $c \in U$ τέτοιο ώστε $R^k(c) = b$. Τότε $c \neq a$, γιατί $b \notin O^+(a)$, και $c \in J$, γιατί το J είναι αρνητικώς αναλλοίωτο.$\blacksquare$

Λήμμα: Αν $a \in J$, τότε υπάρχει $b \in J$ τέτοιο ώστε $a \in O^+(b)$ αλλά $b \notin O^+(a)$.

8 Ταξινόμηση του Sullivan των Συνόλων Fatou

Το 1982 ο Sullivan ολοκλήρωσε την ταξινόμηση των δυναμικών ιδιοτήτων μιας ρητής απεικόνησης πάνω στο σύνολό της Fatou, χρησιμοποιώντας την θεωρία των *σχεδόν-συμμόρφων* απεικονίσεων (ιδίως το Θεώρημα της Μετρήσιμης Απεικόνισης Riemann των Morrey, Ahlfors και Bers).

Ορισμός 8.1 Έστω $R: \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ αναλυτική, D μια *συνιστώσα* (συνεκτικό μέρος) του συνόλου Fatou F της R. Τότε το D ονομάζεται

(i) **περιοδική** συνιστώσα αν υπάρχει ακέραιος $n \geq 0$ τέτοιος ώστε $R^n(D) = D$,

(ii) **προπεριοδική** (ή **τελικώς περιοδική**) συνιστώσα αν υπάρχει ακέραιος $m \geq 0$ τέτοιος ώστε το $R^m(D)$ να είναι περιοδική συνιστώσα,

(iii) **περιπλανώμενη** συνιστώσα αν τα σύνολα $R^n(D)$, για ακέραιο $n \geq 0$, είναι ανά δύο ξένα.

Αρχικά ο Fatou είχε θέσει το ερώτημα αν υπάρχουν περιπλανώμενες συνιστώσες και την τελική (αρνητική) απάντηση έδωσε ο Sullivan το 1982 με το επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 8.1 (Sullivan) *Όλες οι συνιστώσες του συνόλου Fatou F της αναλυτικής $R: \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ είναι* ***προπεριοδικές****. Επιπλέον, υπάρχει μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος περιοδικών συνιστωσών.*

Επομένως, η δυναμική της αναλυτικής $R: \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ καθορίζεται από τον περιορισμό της R σε μια περιοδική συνιστώσα του συνόλου Fatou F. Η δυναμική του περιορισμού αυτού είναι ενός από τους πέντε τύπους του παρακάτω αποτελέσματος.

Θεώρημα 8.2 (Sullivan) *Έστω D συνιστώσα του συνόλου Fatou F της αναλυτικής $R: \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ τέτοια ώστε*

$$R(D) = D.$$

(Αν D είναι περιοδική συνιστώσα, $R^n(D) = D$, τότε τα παρακάτω ισχύουν για την $S = R^n$.) Τότε η συνιστώσα D είναι ενός από τους εξής πέντε τύπους:

(i) ***Ελκτική*** *συνιστώσα αν το D είναι η άμεση λεκάνη έλξης ενός ελκτικού σταθερού σημείου z_o (δηλαδή, $D = A(z_0)$). Τότε η R είναι 1-1 γύρω από το z_0. Επίσης, στο D υπάρχουν άπειρα κρίσιμα σημεία, τα οποία συσσωρεύονται στο z_0 (που δεν είναι όμως κρίσιμο σημείο).*

(ii) ***Υπερελκτική*** *συνιστώσα αν το D είναι η άμεση λεκάνη έλξης ενός κρίσιμου σημείου z_0 που είναι και σταθερό σημείο. Τότε υπάρχουν κάποιες "εμφυλλώσεις" (;) (foliation) γύρω από το z_0 και η R απεικονίζει κάθε φύλλο σε ένα άλλο που βρίσκεται πλησιέστερα στο z_0. Επιπλέον, η R είναι (στο D) συζυγής προς την $z \mapsto z^k$, για κάθε $k > 1$.*

(iii) ***Παραβολική*** *συνιστώσα (ή* ***περιοχή του Leau****) αν το σύνορο ∂D του D περιέχει ένα ουδέτερο σταθερό σημείο z_0 (οπότε $z_0 \in J$) τέτοιο ώστε $R'(z_0) = e^{2\pi i\theta}$, $\theta \in \mathbb{Q}$, και $R^n(z_0) \to z_0$, καθώς $n \to +\infty$, για κάθε $z \in D$. Τα πέταλα στο Θεώρημα του Άνθους ανήκουν σε παραβολικές συνιστώσες. Επίσης, στο D υπάρχουν άπειρα κρίσιμα σημεία που συσσωρεύονται στο z_0.*

(iv) ***Δίσκος του Siegel*** *αν το D είναι απλώς συνεκτικό και ο περιορισμός $R|D$ είναι αναλυτικός συζυγής με κάποια περιστροφή σε ένα δίσκο. Με άλλα λόγια, αν υπάρχει ένας αναλυτικός ομοιομορφισμός $h: D_r \to D_r$ έτσι ώστε να αντιμετατίθεται το διάγραμμα:*

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{R} & D \\ h\downarrow & & \downarrow h \\ D_r & \xrightarrow[z\mapsto e^{i\theta z}]{} & D_r \end{array} \qquad h(z_0)=0$$

$\theta \in \mathbb{R}$ (υποχρεωτικά $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)

Τότε όλες οι τροχιές περιστρέφονται γύρα από το z_0 σε απλές κλειστές καμπύλες. Κάθε τροχιά σε μια τέτοια κλειστή καμπύλη είναι πυκνή στην καμπύλη αυτή. Το σύνορο ∂D της D περιέχεται στην κλειστότητα των (θετικών) τροχιών των κρισίμων σημείων της R.

(v) ***Δακτύλιος Herman*** *αν η $R: D \to D$ είναι αναλυτικώς συζυγής προς μια περιστροφή σε μαι δακτυλιοειδή περιοχή. Αυτή είναι η μόνη περίπτωση που δεν αντιστοιχεί σε σταθερό σημείο. Τότε όλες οι τροχιές περιστρέφονται σε κλειστές καμπύλες μέσα στον δακτύλιο και είναι πυκνές στις καμπύλες αυτές. Πάλι, το σύνορο ∂D της D περιέχεται στην κλειστότητα των (θετικών) τροχιών των κρίσιμων σημείων. Από την Αρχή του Μεγίστου συνεπάγεται ότι τα πολυώνυμα δεν μπορούν να έχουν δακτύλιους Herman στο σύνολο Fatou. Παράδειγμα ρητών συναρτήσεων με δακτύλιους Herman έχει δωσει ο Herman. Π.χ., για κάποιες τιμές των a και α η απεικόνιση*

$$R(z) = \frac{e^{2\pi i\alpha}}{z}\Big(\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\Big)^2$$

έχει ένα δακτύλιο Herman που περιέχει τον S^1.

Το θεώρημα της ταξινόμησης του Sullivan έχει πολλές ενδιαφέρουσες συνέπειες.

Πόρισμα: Αν κάθε κρίσιμο σημείο της R είναι προπεριοδικό (αλλά όχι περιοδικό), τότε $J = \bar{\mathbb{C}}$.

Απόδειξη: Όταν κάθε κρίσιμο σημείο είναι προπεριοδικό, υπάρχει υποχρεωτικά μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος κρισίμων σημείων. Επομένως, $F = \emptyset$, γιατί στις περιπτώσεις των συνιστωσών του F που είναι ελκτικές, παραβολικές, δίσκοι Siegel και δακτύλιοι Herman πρέπει τα κρίσιμα σημεία να είναι άπειρα. Επιπλέον, οι υπερελκτικές συνιστώσες του F περιέχουν μόνο κρίσιμα σημεία.■

Πόρισμα: Αν για το πολυώνυμο $p(z)$ κάθε κρίσιμο σημείο εκτός του ∞ είναι προπεριοδικό (αλλά όχι περιοδικό), τότε $F = A(\infty)$, δηλαδή, το σύνολο Fatou F είναι απλώς συνεκτικό.

Απόδειξη: Όπως στο προηγούμενο πόρισμα, $F = W^s(\infty)$. Αλλά για πολυώνυμα $W^s(\infty) = A(\infty)$.■

9 Άλλες Ιδιότητες Συνόλων Julia

Λόγω της μεγάλης σπουδαιότητας των επεκτατικών και των υπερβολικών συστημάτων στην θεωρία των Δυναμικών Συστημάτων, είναι ενδιαφέρον να ξέρουμε κάτω από ποιές συνθήκες μια αναλυτική συνάρτηση είναι *επεκτατική* πάνω στο σύνολό της Julia. Έστω $R: \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ αναλυτική, J το σύνολο Julia της R και C το σύνολο των κρισίμων σημείων της R, τότε ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 9.1 *Αν*

$$\overline{O^+(C)} \cap J = \emptyset,$$

τότε

$$\lim_{n\to+\infty} \inf_{z\in J} \Big|\Big(R^n\Big)'(z)\Big| = +\infty.$$

Είναι όμως αξιοπρόσεκτο το γεγονός ότι κάτω από την παραπάνω συνθήκη το σύνολο Julia αποδεικνύεται ότι είναι *σχεδόν αυτοόμοιο*, δηλαδή, ικανοποιεί μια χαρακτηριστική ιδιότητα των φράκταλ.

Ορισμός 9.1 Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $f : X \to X$. Η f ονομάζεται *K-σχεδόν-ισομετρία* αν υπάρχει κάποιο $K > 0$ τέτοιο ώστε, $\forall x, y \in X$, να ισχύει

$$\frac{1}{K}d(x,y) < d\Big(f(x), f(y)\Big) < Kd(x,y).$$

Ορισμός 9.2 Έστω $R : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ αναλυτική και $A \subset \bar{\mathbb{C}}$. Το A ονομάζεται *σχεδόν αυτοόμοιο* αν υπάρχουν $K, r_0 > 0$ και μια K-σχεδόν-ισομετρία $f : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ τέτοια ώστε η f να απεικονίζει το $\frac{1}{r}(A \cap D_r(z))$ στο A, $\forall r < r_0$ και $\forall z \in A$.

Θεώρημα 9.2 (Sullivan) *Αν*

$$\overline{O^+(C)} \cap J = \emptyset,$$

τότε το σύνολο Julia J είναι σχεδόν-αυτοόμοιο.

10 Δυναμική Πολυωνύμων

Έστω $p(z)$ πολυώνυμο βαθμού d.

- Αν $p(\infty) = \infty$, αυτό συνεπάγεται ότι το ∞ είναι σταθερό σημείο και $p^{-1}(\infty) = \{\infty\}$.
- Αν $p'(\infty) = 0$ (υπολογίζοντας την $p'(\infty)$ στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων), αυτό συνεπάγεται ότι το ∞ είναι στάσιμο σημείο και υπερελκτικό σταθερό σημείο.
- Αν
$$\bigcup_{n=0}^{\infty} p^n(\bar{\mathbb{C}}) = \bar{\mathbb{C}},$$
αυτό συνεπάγεται ότι το ∞ είναι (το μοναδικό) εξαιρετικό σημείο.
- Υπάρχει γειτονιά U του ∞ και $r \geq 1$ έτσι ώστε η $p|U$ να είναι αναλυτικώς συζυγής με τον περιορισμό της $z \mapsto z^d$ στο $\bar{\mathbb{C}} \setminus D_r$.
- Ισχύει ότι $F \neq \emptyset$ (γιατί ∞ είναι υπελκτικό σταθερό σημείο που ανήκει στο F).
- Το J είναι φραγμένο στο $\bar{\mathbb{C}}$ (γιατί το γεγονός ότι $\infty \in F$ συνεπάγεται ότι $\infty \notin J$ κλειστό).
- Ισχύει ότι $W^s(\infty) = A(\infty)$ (γιατί $p^{-1}(\infty) = \{\infty\}$).

Έστω C το σύνολο των κρισίμων σημείων του $p(z)$, C' το σύνολο των πεπερασμένων κρισίμων σημείων του p (μετρούμενης πολλαπλότητας), τότε

$$\mathrm{card}(C') \leq d - 1$$

, γιατί $\mathrm{card}(C) \leq 2d - 2$ και η πολλαπλότητα του ∞ είναι $d - 1$) και

$$\mathrm{card}\Big\{\text{πεπερασμένων ελκτικών περιοδικών τροχιών}\Big\} + \\ + \frac{1}{2}\mathrm{card}\Big\{\text{ουδετέρων περιοδικών τροχιών}\Big\} \leq d - 1.$$

Η δομή των συνόλων Fatou και Julia των πολυωνύμων δίνεται από τα παρακάτω αποτελέσματα.

Θεώρημα 10.1 *Καμιά περιοδική συνιστώσα του συνόλου Fatou F του $p(z)$ δεν είναι δακτύλιος Herman.*
(Απόδειξη με εφαρμογή της Αρχής του Μεγίστου.)

Θεώρημα 10.2 *Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η απεικόνιση* $p|A(\infty)$ *είναι αναλυτικώς συζυγής με το περιορισμό της απεικόνισης* $z \mapsto z^d$ *στο εξωτερικό του* D.

(ii) *Το σύνολο* $A(\infty)$ *είναι απλώς συνεκτικό.*

(iii) *Το σύνολο Julia* J *είναι συνεκτικό.*

(iv) *Τα σύνολα* $A(\infty)$ *και* C' *είναι ξένα.*

Με άλλα λόγια, για κάθε πεπερασμένο κρίσιμο σημείο η ακολουθία $\{p^n(z)\}$ *είναι φραγμένη.*

Απόδειξη (Σκαρίφημα):

(i) $\Rightarrow$ **(ii)** Λόγω ομοιομορφισμού.

(ii) $\Rightarrow$ **(iii)** Λόγω του ότι ένα υποσύνολο του επιπέδου είναι απλώς συνεκτικό αν και μόνο αν το σύνορό του είναι συνεκτικό και του ότι $\partial A(\infty) = \partial W^s(\infty) = J$.

(iii) $\Rightarrow$ **(iv)** Αποδεικνύοντας ότι $A(\infty) \cap C' \neq \emptyset$ συνεπάγεται ότι το J είναι μη συνεκτικό. Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιείται ο ομοιομορφισμός της συζυγίας του $p(z)$ και της $z \mapsto z^d$ στην γειτονιά του ∞, για να εισαχθεί ένα κατάλληλο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων τοπικά στο ∞.

(iv) $\Rightarrow$ **(i)** Όπως στην απόδειξη του "**(iii)** $\Rightarrow$ **(iv)**".

Για μια πληρέστερη τοπολογική περιγραφή της δυναμικής του συνόλου Julia, χρειαζόνται πρώτα οι εξής ορισμοί.

Ορισμός 10.1 Έστω *μονόπλευρος χώρος των* n *συμβόλων* Σ_n που ορίζεται ως

$$\begin{aligned}\Sigma_n &= \prod_{k=0}^{\infty}\Big\{1,\ldots,n\Big\}\\ &= \Big\{\{s_k\}_{k=0,1,2,\ldots} :\ s_k \in \{1,\ldots,n\},\ k=0,1,2,\ldots\Big\}.\end{aligned}$$

Η *απεικόνιση μετατόπισης* $\sigma:\ \Sigma_n \to \Sigma_n$ ορίζεται ως

$$\Big[\sigma(\{s_k\})\Big]_k = s_{k+1}.$$

Το δυναμικό σύστημα που παράγει η απεικόνιση $\sigma:\ \Sigma_n \to \Sigma_n$ ονομάζεται *μονόπλευρη μετατόπιση των* n *συμβόλων.*

Ορισμός 10.2 Έστω $A \subset \bar{\mathbb{C}}$, $A \neq \emptyset$. Το A ονομάζεται *σύνολο Cantor* αν είναι:

(i) *κλειστό,*

(ii) *τέλειο* (χωρίς μεμονομένα σημεία),

(iii) *ολικώς μη-συνεκτικό* (κάθε συνιστώσα του είναι μόνο ένα σημείο).

Θεώρημα 10.3 *Αν* $C' \subset A(\infty)$, *τότε:*

(i) *το σύνολο Julia* J *είναι σύνολο Cantor,*

(ii) *η* $p|J$ *είναι ισόμορφη με την μονόπλευρη απεικόνιση των* d *συμβόλων.*

(Στην επόμενη ενότητα θα δώσουμε μια απόδειξη του θεωρήματος αυτού για την περίπτωση των τετραγωνικών πολυωνύμων.)

11 Δυναμική Τετραγωνικών Πολυωνύμων

Άσκηση: Έστω το τετραγωνικό πολυώνυμο

$$p(z) = az^2 + 2bz + d.$$

Δείξτε ότι

$$p(z) = M^{-1} \circ p_c \circ M(z),$$

όπου $p_c(z) = z^2 + c$, $c = ad + b - b^2$ και $M(z) = az + b$.

Με άλλα λόγια, κάθε τετραγωνικό πολυώνυμο είναι αναλυτικώς συζυγές προς την *κανονική μορφή* του:

$$p_c(z) = z^2 + c.$$

Παρατήρηση: Το $p_c(z)$ έχει μοναδικό κρίσιμο σημείο στην αρχή, δηλαδή,

$$C' = \{0\}.$$

- Επειδή το ∞ είναι υπερελκτικό σταθερό σημείο του $p_c(z)$, το $p_c(z)$ είναι τοπικώς αναλυτικώς συζυγές με την $z \mapsto z^2$ γύρω από το ∞. Δηλαδή υπάρχουν:
  - γειτονιά U του ∞ στην $\bar{\mathbb{C}}$,
  - $r \geq 1$,
  - αναλυτικώς ομοιομορφισμός $\varphi_c : \ U \to \bar{\mathbb{C}} \setminus D_r$,

  έτσι ώστε $\varphi_c(\infty) = \infty$ και να αντιμετατίθεται το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{p_c(z)} & U \\ {\scriptstyle \varphi_c(z)}\downarrow & & \downarrow \\ \bar{\mathbb{C}} \setminus D_r & \xrightarrow[z \mapsto z^2]{} & \bar{\mathbb{C}} \setminus D_r \end{array}$$

  ή

$$\varphi_c\Big(p_c(z)\Big) = \Big[\varphi_c(z)\Big]^2, \ z \in U,$$

  ή

$$p_c(z) = \varphi_c^{-1}\Big([\varphi_c(z)]^2\Big), \ z \in U.$$

Ανάλυση σε απειρογινόμενο του φ_c:
Για z κοντά στο ∞ ($|z| \geq R_c = 1 + |c|$)

$$\varphi_c(z) = z \prod_{k=0}^{\infty} \Big(1 + \frac{c}{[p_c^k(z)]^2}\Big)^{\frac{1}{2^{k+1}}},$$

όπου

$$\Big(1 + \frac{c}{[p_c^k(z)]^2}\Big)^{\frac{1}{2^{k+1}}} = 1$$

είναι η διακλάδωση της 2^{k+1}-οστής ρίζας της μονάδας.

Ορισμός 11.1 Το *γεμάτο σύνολο Julia* K_c του $p_c(z)$ ορίζεται ως το συμπλήρωμα στην $\bar{\mathbb{C}}$ της λεκάνης έλξης του ∞:

$$K_c = \bar{\mathbb{C}} \setminus W^s(\infty).$$

Παρατήρηση: $J_c = \partial K_c = \partial W^s(\infty)$.

Το παρακάτω αποτέλεσμα δείχνει την διχοτομία μεταξύ των τιμών της παραμέτρου c που συνεπάγεται μια ριζική μεταβολή στην δομή του συνόλου Julia J_c του $p_c(z)$.

Θεώρημα 11.1 *Έστω*

$$\begin{aligned} O^+(0) &= \Big\{c_k = p_c^k(0)\Big\} \\ &= \Big\{0, c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, \dots\Big\} \end{aligned}$$

η τροχιά του κρίσιμου σημείου O.

(i) *Αν $O \notin A(\infty)$ (δηλαδή, αν η ακολουθία $\{c_k\}$* ***δεν*** *συγκλίνει στο ∞), τότε το σύνολο Julia J_c είναι* ***συνεκτικό****.*

(ii) *Αν $O \in A(\infty)$ (δηλαδή, αν η ακολουθία $\{c_k\}$ συγκλίνει στο ∞), τότε το σύνολο Julia J_c είναι σύνολο Cantor (κλειστό, τέλειο και ολικώς* ***μή-συνεκτικό****).*

Με άλλα λόγια, το J_c είναι μη -συνεκτικό αν και μόνο αν $c_k \to \infty$, $k \to \infty$.

Απόδειξη του ότι "$c_k \to \infty \Rightarrow J_c$ μή συνεκτικό": Έστω $h_c:\ \bar{\mathbb{C}} \to [0, \infty]$ που ορίζεται ως

$$h_c(z) = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{2^k} \log_+ |p_c^k(z)|,$$

όπου

$$\log_+ |z| = \max\{\log|z|, 0\}.$$

Επειδή

$$h_c(z) > 0 \Leftrightarrow z \in W^s(\infty),$$

έπεται ότι

$$h_c(z) = 0,\ \text{για } z \in K_c,$$

δηλαδή, το γεμάτο σύνολο Julia K_c είναι η στάθμη του O για την $h_c(z)$. Επιπλέον,

$$h_c\Big(p_c(z)\Big) = 2h_c(z).$$

Τέλος, (συμβολίζοντας με U το πεδίο ορισμού της $\varphi_c(z)$)

$$h_c(z) = \log|\varphi_c(z)|,\ \text{για } z \in U.$$

Επομένως, για αρκετά μεγάλο r, έχουμε τη στάθμη

$$h_c^{-1}(r) = \varphi_c^{-1}\Big(\{w \in \bar{\mathbb{C}}:\ |w| = e^r\}\Big).$$

Όταν $r \to +\infty$, οι στάθμες $h_c^{-1}(r)$ είναι απλές κλειστές καμπύλες γύρω από το ∞. Λόγω των ιδιοτήτων των αναλυτικών συναρτήσεων, και η στάθμη που περιέχει το c είναι μια απλή κλειστή καμπύλη που περνά από το c. Επειδή το κρίσιμο σημείο O απεικονίζεται στο c τοπικώς ως

μια διακλαδιζόμενη 2-1 επικαλυπτική απεικόνιση, η στάθμη της h_c που περιέχει το O είναι ένας "*δεμένος*" *κύκλος* σε σχήμα 8.
Λόγω του γεγονότος ότι τα τετραγωνικά πολυώνυμα είναι διπλά διακλαδιζόμενες επικαλύψεις της $\bar{\mathbb{C}}$, στις οποίες η διακλάδωση μπορεί μόνο να γίνει στα κρίσιμα σημεία, καταλήγουμε στο ότι οι στάθμες

$$h_c^{-1}\Big(\frac{h_c(0)}{2^k}\Big)$$

αποτελούνται από 2^k «δεμένους» κύκλους (σε σχήμα 8).

Θεωρώντας την h_c ως *συνάρτηση ύψους*, οι στάθμες (ισο-υψείς) της h_c διαιρούν το $W^s(\infty)$ ως εξής: (δείτε σχήμα) ■

12 Σύνολα Mandelbrot

Η προηγούμενη διχοτομία στις τιμές της παραμέτρου c του τετραγωνικού πολυωνύμου $p_c(z) = z^2 + c$ που συνεπάγεται είτε συνεκτικότητα ή μη-συνεκτικότητα του συνόλου Julia J του $p_c(z)$, μελετήθηκε λεπτομερώς από τον Mandelbrot.

Ορισμός 12.1 Το *σύνολο Mandelbrot* $M\Big(= M(z^2+c)\Big)$ ορίζεται ως το υποσύνολο του $\bar{\mathbb{C}}$ που αποτελείται από όλες εκείνες τις τιμές της παραμέτρου c, για τις οποίες το σύνολο Julia $J_c\Big(= J(z^2+c)\Big)$ είναι συνεκτικό.

Παρατήρηση: Το σύνολο Mandelbrot M ορίζεται στον *χώρο παραμέτρου* με οποιονδήποτε από τους παρακάτω ισοδύναμους τρόπους:

$$\begin{aligned} M &= \Big\{c \in \bar{\mathbb{C}} :\ J_c \text{ συνεκτικό}\Big\} \\ &= \Big\{c \in \bar{\mathbb{C}} :\ O^+(c) = \{c_k = p_c^k(c)\}_{k=0,1,2,\ldots} \text{ φραγμένη}\Big\} \\ &= \Big\{c \in \bar{\mathbb{C}} :\ h_c(0) = 0\Big\}. \end{aligned}$$

Θεώρημα 12.1 (i) $M = \Big\{c \in \bar{\mathbb{C}} :\ |c_k| \leq 2,\ k = 0,1,2,\ldots\Big\}$

(ii) *M είναι συμπαγές στο $\mathbb{C}$.*

Θεώρημα 12.2 (Douady και Hubbard) *Το σύνολο Mandelbrot M είναι συνεκτικό.*

Το κύριο σημείο στην απόδειξη των Douady και Hubbard είναι το να αποδειχθεί πως η απεικόνιση

$$\Phi :\ \bar{\mathbb{C}} \setminus M \to \bar{\mathbb{C}} \setminus D_1, \quad \Phi(c) = \varphi_c(c),$$

είναι ένας *σύμμορφος ομοιομορφισμός*.

Ένα ρόλο-κλειδί στην ανάλυση των Douady και Hubbard παίζουν οι *επεκτάσεις των απεικονίσεων Riemann*, που αποτελούν ένα κλασικό τμήμα της Μιγαδικής Ανάλυσης. Αναφορικά με αυτές ο Καραθεοδωρής απέδειξε το παρακάτω σημαντικό αποτέλεσμα.

Ορισμός 12.2 Έστω $S \subset \bar{\mathbb{C}}$ και $z_0 \in S$. Το S λέγεται *τοπικώς συνεκτικό* στο z_0 αν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \varepsilon' \in (0,\varepsilon)$ τέτοιο ώστε το σύνολο $D_{\varepsilon'}(z_0) \cap S$ να είναι συνεκτικό υποσύνολο του $D_\varepsilon(z_0) \cap S$.

Θεώρημα 12.3 (Καραθεοδωρή) *Έστω $D \subset \bar{\mathbb{C}}$ απλώς συνεκτικό, $f: D \to D_1$ σύμμορφος αυτομορφισμός, τότε το σύνορο ∂D του D είναι τοπικώς συνεκτικό αν και μόνο αν η f^{-1} επεκτείνεται σε μια **συνεχή** απεικόνιση $g: \bar{D_1} \to \bar{D}$.*

Για την διερεύνυση της τοπικής συνεκτικότητας του J_c ή του M, οι Douady και Hubbard όρισαν πρώτα τα *ακτινικά όρια* ως εξής.

Ορισμός 12.3 Έστω $D \subset \bar{\mathbb{C}}$ απλώς συνεκτικό, $z_0 \in D$, $f: D \to D_1$ σύμμορφος αυτομορφισμός $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$. Τότε το *ακτινικό τόξο* γωνίας θ ορίζεται ως η καμπύλη $f^{-1}(re^{2\pi i\theta})$, για $0 \le r < 1$, και το *ακτινικό όριο* γωνίας θ ορίζεται ως το $\lim_{r\to 1} f^{-1}(re^{2\pi i\theta})$.

Προφανώς, το Θεώρημα του Καραθεοδωρή συνεπάγεται ότι αν το D είναι τοπικώς συνεκτικό, τότε ορίζονται τα ακτινικά όρια για κάθε γωνία, αλλά και το αντίστροφο.

Θεώρημα 12.4 (Douady και Hubbard) *Αν το c είναι ένα από τα παρακάτω:*

(i) *έλκεται προς μια ελκτική περιοδική τροχιά,*

(ii) *έλκεται προς μια ουδέτερη περιοδική τροχιά με ιδιοτιμή που είναι ρίζα της μονάδας,*

(iii) *είναι προπερδιοδικό (αλλά όχι περιοδικό) σημείο,*

τότε τα K_c και J_c είναι τοπικώς συνεκτικά.

Αλλά τα σύνολα Julia τατραγωνικών πολυωνύμων δεν είναι πάντα τοπικώς συνεκτικά, όπως δείχνει το επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 12.5 (Douady και Sullivan) *Αν το τετραγωνικό πολυώνυμο $p_c(z)$ έχει ένα ουδέτερο σταθερό σημείο με ιδιοτιμή που δεν είναι ρίζα της μονάδας και το $p_c(z)$ δεν είναι τοπικά συζυγές με την παράγωγο του, τότε το σύνολο Julia J_c δεν είναι τοπικά συνεκτικό.*

Όσον αφορά την τοπική συνεκτικότητα του *συμπληρώματος* (στην $\bar{\mathbb{C}}$) του συνόλου Mandelbrot M, προς το παρόν υπάρχει μόνο το εξής αποτέλεσμα:

Θεώρημα 12.6 (Douady και Hubbard) *Έστω $\Phi: \bar{\mathbb{C}} \setminus M \to \bar{\mathbb{C}} \setminus D_1$ ο σύμμορφος αυτομορφισμός του θεωρήματος της συνεκτικότητας του M. Τότε, για κάθε $\theta \in \mathbb{Q}$, το ακτινικό όριο γωνίας $\lim_{r\to 1} \Phi^{-1}(re^{2\pi i\theta})$ υπάρχει, είναι μοναδικό και ικανοποιεί είτε την περίπτωση (ii) ή την (iii) του Θεωρήματος 12.4.*

Αναφορές

[1] A. F. Beardon. *Iteration of Rational Functions.* Springer-Verlag, 1991.

[2] P. Blanchard. Complex analytic dynamics of the Riemann sphere. *Bull. Amer. math. Soc.*, 11:85–141, 1984.

[3] P. Blanckhard and A. Chiu. Complex dynamisc: an informal discussion. In J. Bélai and S. Dubuc, editors, *Fractal Geometry and Analysis.* Kluwer Publications, 1991.

[4] A. Douady. Systèmes dynamiques holomorphe. *Astérisque*, 105–106:39–63, 1983.

[5] A. Douady and J Hubbard. Itération des polynômes quadratiques complexes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 294:123–126, 1982.

[6] A. Douady and J. Hubbard. *Étude dynamique des polynômes complexes.* Publications Mathématiques d'Orsay, 1984.

[7] A. E. Eremenko and M. Yu. Lyubich. The dynamics of analytic transformations. *Leningrad Math. J.*, 1:563–634, 1990.

[8] M. Yu. Lyubich. The dynamics of rational transforms: the topological picture. *Russian Math. Surveyes*, 41:43–117, 1986.

[9] D. Sullivan. Quasiconformal mappings and dynamics II and III. Preprints.

[10] D. Sullivan. Quasiconformal mappings and dynamics I. *Annals of Mathematics*, 122:401–418, 1985.