

Εξέταση στην Εισαγωγή στην Αλγεβρα και Θεωρία Συνόλων

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

5 Φεβρουαρίου 2008

Θέμα 1: α) Εστω ότι A, B και Γ είναι τρία τυχαία υποσύνολα του συνόλου X . Δείξτε ότι $A \cap (B \Delta \Gamma) = (A \cap B) \Delta (A \cap \Gamma)$. ($A \Delta B$ συμβολίζει τη συμμετρική διαφορά)

β) Εστω ότι $f : X \rightarrow Y$ είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση και A, B είναι τυχαία υποσύνολα του Y . Δείξτε ότι $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, όπου

$$f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}.$$

(2 μονάδες)

Θέμα 2: Εστω ότι οι R και S είναι σχέσεις ισοδυναμίας επί του συνόλου X (δηλαδή είναι $R \subseteq X \times X$ και $S \subseteq X \times X$). Δείξτε ότι και η τομή τους $R \cap S \subseteq X \times X$ είναι σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου X . (2 μονάδες)

Θέμα 3: α) Δείξτε ότι, για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$, ισχύει $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$

β) Δίνεται το σύνολο X που έχει n στοιχεία. Με $P_k(X)$ συμβολίζουμε το σύνολο εκείνων των υποσυνόλων του X που έχουν k στοιχεία (όπου $k < n$). Πόσες συναρτήσεις υπάρχουν από το δυναμοσύνολο του X στο $P_k(X)$; (2 μονάδες)

Θέμα 4: Εστω ότι $\langle G, \cdot, ()^{-1}, e \rangle$ είναι ομάδα. Δείξτε ότι το υποσύνολό της $N(a) = \{x \in G \mid a \cdot x = x \cdot a\}$ είναι υποομάδα της G . Είναι δυνατό μία ομάδα G να έχει τον ίδιο πληθάρημο με μία γνήσια υποομάδα της; (δηλαδή υποομάδα διαφορετική από την ίδια την ομάδα G) (2 μονάδες)

Θέμα 5: α) Εξηγείστε γιατί σε οποιονδήποτε αντιμεταθετικό δακτύλιο ισχύουν, για όλα τα στοιχεία του x και y , οι σχέσεις $0 \cdot x = 0$, $(-x) \cdot y = -x \cdot y$.

β) Εξηγείστε γιατί ένα σώμα είναι κατ' ανάγκη ακέραια περιοχή. Ποιό παράδειγμα ακέραιας περιοχής ξέρετε που δεν είναι σώμα; (2 μονάδες)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ