Εξέταση στην Εισαγωγή στην Αλγεβρα και Θεωρία Συνόλων

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

29 Μαΐου 2009

Θέμα 1: α) Εστω ότι B και C είναι δυο τυχαία υποσύνολα του συνόλου X. Δείξτε ότι, αν υπάρχει $A \subseteq X$, τέτοιο ώστε $A \cap B = A \cap C$ και $A \cup B = A \cup C$, τότε είναι $B = C$.

β) Εστω ότι $f : X \to Y$ είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση. Για το οποιοδήποτε υποσύνολο $B \subseteq Y$, συμβολίζουμε με $f^{-1}[B]$ το σύνολο $\{x \in X \mid f(x) \in B\}$. Δείξτε ότι, αν B_i είναι υποσύνολα του Y, τότε ισχύει

$$f^{-1}[\bigcup_i B_i] = \bigcup_i f^{-1}[B_i]$$

Θέμα 2: α) Δίνονται δύο συναρτήσεις $f\colon X \to Z$ και $g\colon Y \to W$. Ορίζουμε μια συνάρτηση $hX \times Y \to Z \times W$ με $h(x, y) = (f(x), g(y))$. Δείξτε ότι, αν οι f και g είναι επί, τότε και η h είναι επί.

β) Υπάρχει σύνολο που να έχει τον ίδιο πληθάριθμο με ένα γνήσιο υποσύνολό του; Δώστε παράδειγμα αν υπάρχει ή αποδείξτε ότι δεν υπάρχει.

Θέμα 3: α) Δείξτε ότι, για κάθε φυσικό αριθμό n και οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς a, b, ισχύει $\sum_{k=0}^{n}(a + kb) = \frac{1}{2}(n + 1)(2a + nb)$

β) Πόσες ένα - προς - ένα συναρτήσεις υπάρχουν από το σύνολο $\mathbb{Z}_7$ στο $\mathbb{Z}_9$;

Θέμα 4:

Θέμα 5: Εστω ότι ο αριθμός p είναι πρώτος.

α) Δείξτε ότι στο δακτύλιο $\mathbb{Z}_p$ ισχύει ότι $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ ή $x = -1$.

β) Υπάρχουν στο στοιχεία a, b στο $\mathbb{Z}_p$, τέτοια ώστε $a \neq 0$, $b \neq 0$ αλλά και $ab = 0$; (2 μονάδες)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ