I. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

Τα παραδείγματα που ακολουθούν αφορούν μονοδιάστατους χώρους καταστάσεων όπου ο νόμος της εξέλιξης εκφράζεται με μια διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$\frac{dx}{dt} = f(x)\,, \quad x \in \mathfrak{U} \subseteq \mathbb{R}\,.$$

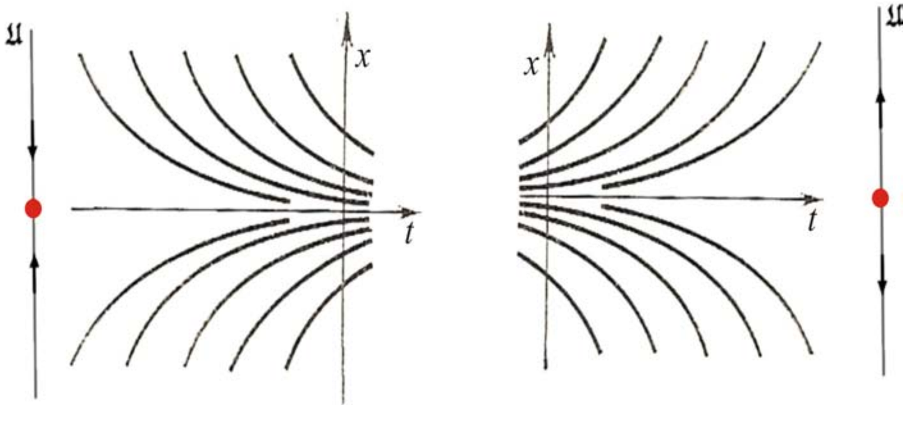
• ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Η μονοδιάστατη γραμμική δυναμική. *

Η *μονοδιάστατη γραμμική δυναμική* ορίζεται με τη γραμμική διαφορική εξίσωση:

$$\dot{x} = \alpha\, x\,, \quad x \in \mathfrak{U} = \mathbb{R}\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}\,,$$

και κάθε αρχική κατάσταση $x_o \in \mathfrak{U}$ ορίζει σε όλο το χρονικό άξονα τη λύση:

$$\phi_{x_o} : \mathbb{R} \to \mathfrak{U}\,, \quad \phi_{x_o}(t) = x_o e^{\alpha t}\,.$$



$\alpha < 0$ $\alpha > 0$

Γραφήματα λύσεων της διαφορικής εξίσωσης $\dot{x} = \alpha\, x\,, \quad x \in \mathbb{R}$.

Η μονοπαραμετρική ομάδα αποτελείται από τις ομοθεσίες της πραγματικής ευθείας:

$$\mathfrak{g}^t : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}\,, \quad \mathfrak{g}^t(x_o) = x_o e^{\alpha t}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

και η εξελικτική ροή εκφράζεται ως εξής:

$$\mathfrak{g} : \mathbb{R} \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}\,, \quad \mathfrak{g}(t, x_o) = x_o e^{\alpha t}\,.$$

---

*Στο πρότυπο αυτό υπάγονται τα προβλήματα αναπαραγωγής βακτηριδίων (α>0) και διάσπασης ραδιενεργών ουσιών (α<0), όπου κάθε κατάσταση ορίζεται αντίστοιχα από το πλήθος των βακτηριδίων ή την ποσότητα της ραδιενεργού ουσίας και ο χώρος των καταστάσεων είναι η θετική πραγματική ημιευθεία.

Προφανώς πληρούται η συνθήκη του ντετερμινισμού:

$$\mathfrak{g}^{t+t'}(x_o) = \mathfrak{g}^{t'} \circ \mathfrak{g}^{t}(x_o), \quad \forall x_o \in \mathfrak{U}, \ \forall t, t' \in \mathbb{R}.$$

Οι τροχιές στο μονοδιάστατο χώρο καταστάσεων ορίζονται ως εξής:

$$\mathcal{O}_{x_o} = \left\{ x_o e^{\alpha t} \in \mathfrak{U} \ / \ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Αν $\alpha = 0$, όλες οι τροχιές είναι σημειακές και έτσι κάθε σημείο του χώρου των καταστάσεων αποτελεί κατάσταση ισορροπίας και η χρονική ομάδα κάθε κατάστασης είναι η προσθετική ομάδα:

$$\mathfrak{T}_{x_o} = \left\{ t \in \mathbb{R} \ / \ \mathfrak{g}(t, x_o) = x_o \right\} = \mathbb{R}.$$

Αν $\alpha \neq 0$, μόνο μια τροχιά είναι σημειακή και ορίζει τη μοναδική κατάσταση ισορροπίας $x_o=0$. Στην περίπτωση αυτή εμφανίζονται δυο τύποι χρονικής ομάδας:

$$\mathfrak{T}_{x_o=0} = \left\{ t \in \mathbb{R} \ / \ \mathfrak{g}(t, 0) = 0 \right\} = \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \mathfrak{T}_{x_o \neq 0} = \left\{ t \in \mathbb{R} \ / \ \mathfrak{g}(t, x_o) = x_o \right\} = \left\{ 0 \right\}.$$

Αυτή η κατάσταση ισορροπίας είναι *ελκτική* όταν α<0 και *απωστική* όταν α>0, κατά την έννοια ότι, με την πάροδο του χρόνου, στη μια περίπτωση όλες οι άλλες τροχιές την πλησιάζουν απεριόριστα χωρίς ποτέ να την φτάσουν και στην άλλη περίπτωση όλες οι άλλες τροχιές απομακρύνονται απεριόριστα κατευθυνόμενες προς το άπειρο.

☑ **Προβληματισμός: Τοπολογική ταξινόμηση των ροών της γραμμικής δυναμικής.**

Σύμφωνα με τον ορισμό της τοπολογικής ισοδυναμίας των εξελικτικών ροών των δυναμικών συστημάτων, δυο μονοδιάστατα γραμμικά δυναμικά συστήματα:

$$\dot{x} = \alpha_i \, x, \quad x \in \mathfrak{U} = \mathbb{R}, \ \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1{,}2,$$

έχουν τοπολογικά ταυτόσημες εξελικτικές ροές:

$$\mathfrak{g}_i : \mathbb{R} \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}, \quad \mathfrak{g}_i(t, x_o) = x_o e^{\alpha_i t}, \quad i = 1{,}2,$$

αν και μόνο αν υπάρχει ομοιομορφισμός:

$$h : \mathfrak{U} \rightleftarrows \mathfrak{U}$$

τέτοιος ώστε:

$$h\big(\mathfrak{g}_{\mathrm{A}}(t, x_o)\big) = \mathfrak{g}_{\mathrm{B}}\big(t, h(x_o)\big), \quad \forall x_o \in \mathfrak{U}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί ότι δυο μονοδιάστατα γραμμικά δυναμικά συστήματα έχουν τοπολογικά ταυτόσημες εξελικτικές ροές αν και μόνο αν $\alpha_1 \alpha_2 > 0$. Πράγματι, αν $\alpha_1 \alpha_2 < 0$ τότε δεν υπάρχει ομοιομορφισμός $h : \mathfrak{U} \rightleftarrows \mathfrak{U}$ που αποκαθιστά την τοπολογική ισοδυναμία των εξελικτικών αυτών ροών αφού πρέπει: $|h(0)| = +\infty$.

Αν $\alpha_1\alpha_2 > 0$, τότε η τοπολογική ισοδυναμία των εξελικτικών ροών αποκαθίσταται διαμέσου του ομοιομορφισμού που ορίζεται ως εξής:

$$h : \mathfrak{U} \rightleftarrows \mathfrak{U}\,, \quad h(x) = \begin{vmatrix} +|\,x\,|^{\alpha_2/\alpha_1} & , x \geq 0 \\ -|\,x\,|^{\alpha_2/\alpha_1} & , x \leq 0 \end{vmatrix}$$

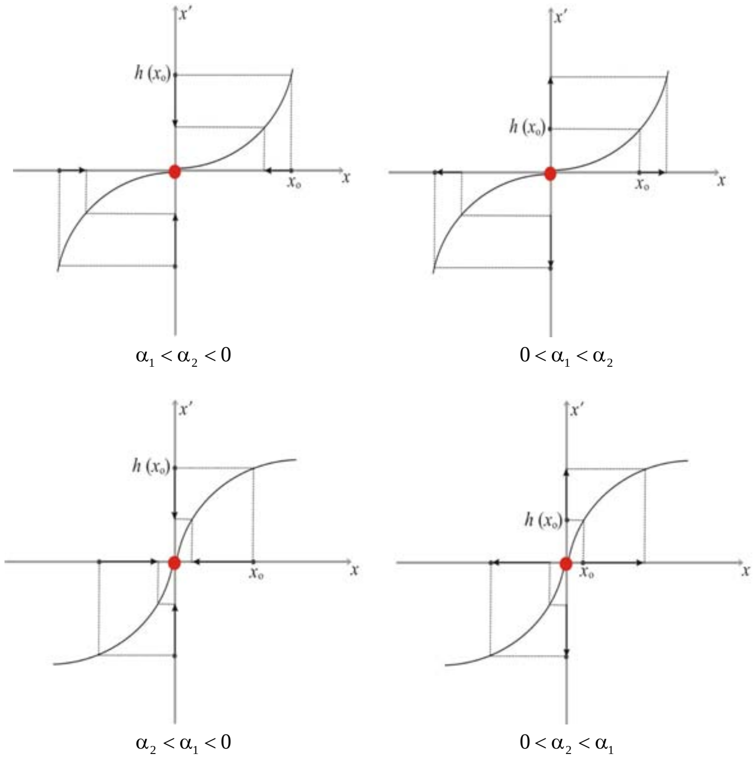
και διαπιστώνουμε ότι:

$$x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad h\Big(\mathfrak{g}_1(t, x_o)\Big) = \Big(x_o e^{\alpha_1 t}\Big)^{\alpha_2/\alpha_1} = x_o^{\alpha_2/\alpha_1} e^{\alpha_2 t} = \mathfrak{g}_2\big(t, h(x_o)\big)\,,$$

$$x \leq 0 \quad \Rightarrow \quad h\Big(\mathfrak{g}_1(t, x_o)\Big) = \Big(-|\,x_o|\, e^{\alpha_1 t}\Big)^{\alpha_2/\alpha_1} = -|\,x_o|^{\alpha_2/\alpha_1}\; e^{\alpha_2 t} = \mathfrak{g}_2\big(t, h(x_o)\big)\,.$$

Ο ομοιομορφισμός αυτός ταυτίζει τοπολογικά κάθε τροχιά της μιας γραμμικής δυναμικής με την αντίστοιχη τροχιά της άλλης γραμμικής δυναμικής:*

$$h\Big(\mathcal{O}_{x_o}\Big) = \mathcal{O}'_{h(x_o)}\,, \quad \forall x_o \in \mathfrak{U}\,.$$



$\alpha_1 < \alpha_2 < 0$ $\qquad$ $0 < \alpha_1 < \alpha_2$

$\alpha_2 < \alpha_1 < 0$ $\qquad$ $0 < \alpha_2 < \alpha_1$

Ομοιομορφισμός τοπολογικής ταύτισης των ροών της μονοδιάστατης γραμμικής δυναμικής.

---

* **Ο ομοιομορφισμός αυτός προφανώς δεν είναι αμφιδιαφορομορφικός.**

Ερώτημα 4: Τι θα μπορούσατε να πείτε για τη γραμμική και διαφορική ταξινόμηση αυτών των ροών;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Μη μονοσήμαντη μονοδιάστατη εξέλιξη.

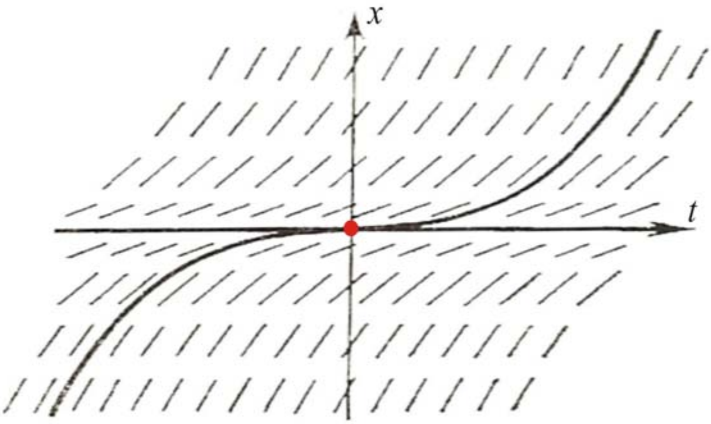
Στο μονοδιάστατο χώρο καταστάσεων $\mathfrak{U} \subseteq \mathbb{R}$ θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση:

$$\dot{x} = x^{2/3}, \quad x \in \mathfrak{U}.$$

Κάθε αρχική κατάσταση $x_o \in \mathfrak{U}$ ορίζει σε όλο το χρονικό άξονα τη λύση:

$$\phi_{x_o} : \mathbb{R} \to \mathfrak{U}, \quad \phi_{x_o}(t) = \left(x_o^{1/3} + t/3\right)^3,$$

όμως στην περίπτωση $x_o = 0$ υπάρχει επιπλέον η μηδενική λύση $x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$.



Γράφημα των λύσεων της διαφορικής εξίσωσης $\dot{x} = x^{2/3}, \quad x \in \mathbb{R}$.

Αν η αρχική κατάσταση είναι $x_o = 0$ τότε την αρχική αυτή στιγμή ο ρυθμός μεταβολής είναι μηδενικός και με την πάροδο του χρόνου, είτε θα παραμείνει μηδενικός, είτε θα μεταβληθεί ως εξής: $x'(t) = t^2/9$. Έτσι, το σύστημα, είτε θα παραμείνει για πάντα στην κατάσταση ισορροπίας $x(t) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$, είτε θα εξελιχθεί στην ευθύγραμμη τροχιά $x(t) = t^3/27$, $t \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή, δεν διασφαλίζεται η μονοσήμαντη ντετερμινιστική εξέλιξη στο μονοδιάστατο χώρο καταστάσεων.*

Αν η αρχική κατάσταση είναι $x_o \neq 0$ τότε το σύστημα δεν έχει άλλη επιλογή από το να εξελιχθεί στην προκαθορισμένη από το νόμο εξέλιξης ευθύγραμμη τροχιά:

$$\mathcal{O}_{x_o} = \left\{\left(x_o^{1/3} + t/3\right)^3 \in \mathfrak{U} \;/\; t \in \mathbb{R}\right\}.$$

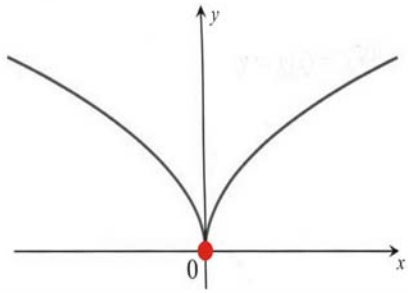
---

* **Ερώτημα 5:** Ποιος είναι ο λόγος; Άραγε, ισχύει το ίδιο για όλες τις διαφορικές εξισώσεις της μορφής:

$$\dot{x} = x^{\alpha}, \; 0 < \alpha < 1.$$

Από γεωμετρική άποψη, η εξεταζόμενη δυναμική ορίζεται στο διευρυμένο χώρο καταστάσεων, δηλαδή στο καρτεσιανό γινόμενο του χρονικού άξονα με το χώρο καταστάσεων, με ένα *πεδίο κλίσης*, δηλαδή μια απεικόνιση που σε κάθε $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathfrak{U}$ προσαρτά την ευθεία της οποίας η κλίση δίνεται από την αντίστοιχη τιμή του ρυθμού μεταβολής. Σε κάθε σημείο του διευρυμένου χώρου καταστάσεων, το γράφημα της αντίστοιχης λύσης οφείλει να συναντά εφαπτομενικά αυτό το πεδίο κλίσης. Εδώ, στην περίπτωση αυτού του παραδείγματος, η συνάρτηση που ορίζει το ρυθμό μεταβολής στο χώρο των καταστάσεων δεν είναι παντού παραγωγίσιμη:

$$f(x)=x^{2/3}\,,\quad x\in\mathbb{R}\,.$$



Γράφημα της συνάρτησης που ορίζει το ρυθμό μεταβολής της εξέλιξης.

☑ Προβληματισμός: Προϋποθέσεις μονοσήμαντης μονοδιάστατης εξέλιξης.

Θεωρούμε ένα δυναμικό σύστημα του οποίου η εξέλιξη στο μονοδιάστατο χώρο καταστάσεων διέπεται από τη διαφορική εξίσωση:

$$\dot{x}=f(x)\,,\quad x\in\mathfrak{U}\subseteq\mathbb{R}\,,$$

όπου ο ρυθμός μεταβολής ορίζεται από μια παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f:\mathfrak{U}\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,.$$

Αν τη στιγμή $t_o\in\mathbb{R}$ το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση $x_o\in\mathfrak{U}$, ισχυριζόμαστε ότι η εξέλιξή στο μονοδιάστατο χώρο καταστάσεων είναι μονοσήμαντα ορισμένη. Συγκεκριμένα, ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει μια μοναδική λύση της διαφορικής εξίσωσης που το γράφημά της διέρχεται από το σημείο $(t_o,x_o)\in\mathbb{R}\times\mathfrak{U}$:

$$\phi:\mathrm{I}\subseteq\mathbb{R}\to\mathfrak{U}\subseteq\mathbb{R}\,,\quad \phi(t_o)=x_o\,,$$

και η λύση αυτή ορίζεται τοπικά ως εξής:

$$\text{αν}\ \ f(x_o)=0 \qquad \text{τότε} \qquad \phi(t)\equiv x_o\,,$$

$$\text{αν}\ \ f(x_o)\neq 0 \qquad \text{τότε} \qquad t-t_o=\int_{x_o}^{\phi(t)}\frac{d\xi}{f(\xi)}\,.$$

Άσκηση 1. Αποφανθείτε για την ορθότητα ή όχι της προτεινόμενης απόδειξης: *

"Αν $f(x_o)=0$ τότε η συνάρτηση $\phi(t)\equiv x_o$ είναι η λύση που πληροί τη συνθήκη $\phi(t_o)=x_o$. Αν $f(x_o)\neq 0$ τότε υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $x=\phi(t)$ είναι λύση που πληροί τη συνθήκη $\phi(t_o)=x_o$ και συλλογιζόμαστε ως εξής: Το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων υποδεικνύει την τοπική αντιστρεψιμότητα της συνάρτησης $x=\phi(t)$. Συγκεκριμένα, στην περιοχή του x_o, ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $t=\psi(x)$ με $\psi(x_o)=t_o$ και ισχύει $\psi'(x_o)=1/f(x_o)$. Η συνθήκη $f(x_o)\neq 0$ διασφαλίζει τη συνέχεια της συνάρτησης $1/f(x)$ στην περιοχή του x_o και το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού υποδεικνύει ότι:

$$\psi(x) = \psi(x_o) + \int_{x_o}^{x}\frac{d\xi}{f(\xi)} .$$

Η σχέση αυτή ορίζει μονοσήμαντα τη συνάρτηση ψ στην περιοχή του x_o και η αντίστροφή της, δηλαδή η συνάρτηση ϕ, είναι εξίσου μονοσήμαντα ορισμένη στην περιοχή του t_o από τη συνθήκη $\phi(t_o)=x_o$ αφού $\psi'(x_o)\neq 0$. Συνεπώς, κάθε λύση της διαφορικής εξίσωσης που πληροί τη δεδομένη αρχική συνθήκη επαληθεύει, σε μια περιοχή του t_o, τη σχέση:

$$\int_{x_o}^{\phi(t)}\frac{d\xi}{f(\xi)} = t-t_o .$$

Άρα, αν η συνάρτηση $x=\phi(t)$, αντίστροφη της $\psi(x)$, είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης με $\phi(t_o)=x_o$ τότε είναι η μοναδική λύση που πληροί αυτή τη συνθήκη. Το ότι η συνάρτηση αυτή είναι πράγματι λύση για τη δεδομένη αρχική συνθήκη προκύπτει απευθείας από το ότι:

$$\phi'(t)=\left(\psi^{-1}\right)'(\phi(t))=f(\phi(t)) ,\quad \phi(t_o)=x_o ."$$

☑ **Σχόλιο: Η συνθήκη διασφάλισης της μονοσήμαντης εξέλιξης.**

Στην προτεινόμενη *απόδειξη* δεν χρησιμοποιήθηκε πουθενά η υπόθεση της παραγωγισιμότητας της συνάρτησης που ορίζει το ρυθμό μεταβολής. Αλλά αν η υπόθεση αυτή πλεονάζει και νομίσετε ότι αρκεί η συνέχεια του ρυθμού μεταβολής τότε το προηγούμενο παράδειγμα όπου δεν διασφαλίζεται η μονοσήμαντη εξέλιξη δίνει την απάντησή του. Άρα, η απόδειξη δεν είναι ορθή. Αλλά, πού βρίσκεται το σφάλμα;

Στην πραγματικότητα η μοναδικότητα αποδείχτηκε μόνο εκεί όπου δεν μηδενίζεται ο ρυθμός μεταβολής. Στο σημείο μηδενισμού του ρυθμού μεταβολής δηλώσαμε ότι το σύστημα θα παραμείνει οπωσδήποτε σε κατάσταση ισορροπίας, χωρίς όμως να αποδείξουμε την ανυπαρξία άλλης επιλογής. Η παραγωγισιμότητα του ρυθμού μεταβολής διασφαλίζει τη μοναδικότητα της λύσης που πληροί τη δεδομένη συνθήκη αλλά η απόδειξη που δώσαμε είναι σε αυτό το σημείο εσφαλμένη. Ακόμη και αν ο ρυθμός μεταβολής δεν είναι παραγωγίσιμος μπορεί να διασφαλιστεί η ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης εφόσον πληρούται η *συνθήκη του Lipschitz*.

---

* **Ερώτημα 6:** Δοκιμάστε να εφαρμόσετε αυτό το σκεπτικό σε ένα παράδειγμα: $\dot{x}=x^{2/3}$, $x\in\mathbb{R}$.

Στο προηγούμενο παράδειγμα, η μη μοναδικότητα οφείλεται στο ότι ο ρυθμός μεταβολής δεν φθίνει αρκετά γρήγορα πλησιάζοντας τη μηδενική κατάσταση και έτσι η τροχιά έχει δυνατότητα διείσδυσης σε αυτή την κατάσταση σε πεπερασμένο χρόνο. Αντίθετα, στο πρώτο παράδειγμα όπου εξετάσαμε τη γραμμική δυναμική, απαιτείται άπειρος χρόνος για τη διείσδυση της τροχιάς στη μηδενική κατάσταση και έτσι διασφαλίζεται η μοναδικότητα της μηδενικής λύσης.

Η σύγκριση του ρυθμού μεταβολής μιας μονοδιάστατης δυναμικής με το ρυθμό μεταβολής της μονοδιάστατης γραμμικής δυναμικής οδηγεί στο κριτήριο διασφάλισης της μονοσήμαντης εξέλιξης στο χώρο των καταστάσεων. Συγκεκριμένα, όταν δοθεί μια διαφορική εξίσωση:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathfrak{U} \subseteq \mathbb{R},$$

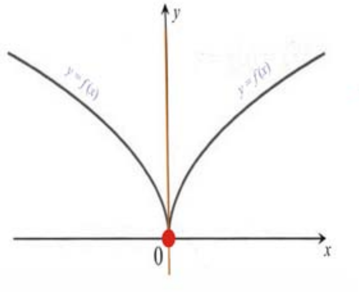
και σε κάποιο σημείο $x_o \in \mathfrak{U}$ ισχύει $f(x_o) = 0$, ελέγχουμε το κατά πόσο στην περιοχή αυτού του σημείου ο ρυθμός μεταβολής είναι ασθενέστερος του ρυθμού μεταβολής της γραμμικής δυναμικής. Π.χ. αν $x_o = 0$ τότε η μοναδικότητα της εξέλιξης διασφαλίζεται εφόσον υπάρχει σταθερά $\kappa > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $x \neq 0$, αρκετά γειτονικό του $x_o = 0$, ισχύει η συνθήκη:

$$|f(x)| \leq \kappa\, |x|.$$

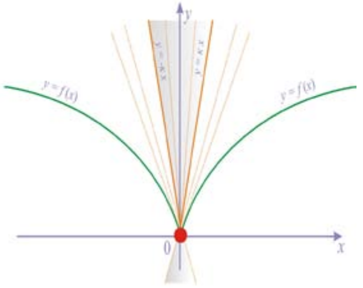
Πρόκειται για τη *συνθήκη Lipschitz* που γενικότερα δηλώνεται με την ύπαρξη σταθεράς $\kappa > 0$ τέτοιας ώστε, για κάθε $x \neq x_o$, αρκετά γειτονικό του x_o, ισχύει:

$$|f(x) - f(x_o)| \leq \kappa\, |x - x_o|.$$

Η συνθήκη αυτή πληρούται πάντα όταν η συνάρτηση που ορίζει το ρυθμό μεταβολής είναι παραγωγίσιμη και προφανώς δεν πληρούται στην περίπτωση της διαφορικής εξίσωσης του προηγούμενου παραδείγματος. Όταν η συνθήκη αυτή πληρούται και το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας τότε δεν υπάρχει άλλη επιλογή από το να παραμείνει για πάντα σε αυτή την κατάσταση. Η σαφής απάντηση στον προβληματισμό της μονοσήμαντης εξέλιξης δίνεται από το κλασικό θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων.



Η συνθήκη Lipschitz
δεν πληρούται στο σημείο *x*=0.



Η συνθήκη Lipschitz
πληρούται στο σημείο *x*=0.

• ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Η πιο απλή μη γραμμική διαφορική εξίσωση.

Στο μονοδιάστατο χώρο καταστάσεων $\mathfrak{U} \subseteq \mathbb{R}$ θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση:

$$\dot{x} = x^2 , \quad x \in \mathfrak{U} .$$

Από τον περιορισμό της συνάρτησης:

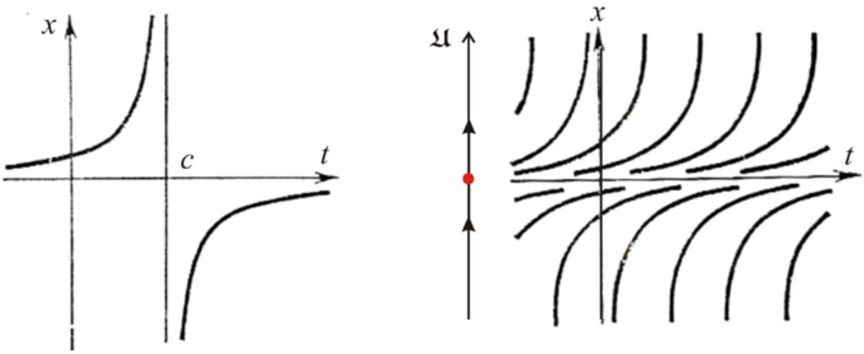
$$x(t) = -\frac{1}{t - \mathrm{c}} , \quad \mathrm{c} \in \mathbb{R} ,$$

στα διαστήματα $t < \mathrm{c}$ και $t > \mathrm{c}$ του χρονικού άξονα προκύπτουν δυο διαφορετικές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης. Συγκεκριμένα, αν το εξελισσόμενο σύστημα βρίσκεται τη στιγμή $t = 0$ στην κατάσταση $x_{\mathrm{o}} \in \mathfrak{U}$, τότε η εξέλιξή του στο χώρο των καταστάσεων καθορίζεται μονοσήμαντα από τη λύση:

$$\phi_{x_{\mathrm{o}}} : \mathrm{I}_{x_{\mathrm{o}}} \subset \mathbb{R} \to \mathfrak{U} , \quad \phi_{x_{\mathrm{o}}}(t) = \frac{x_{\mathrm{o}}}{1 - x_{\mathrm{o}}\, t} ,$$

και στην έκφραση αυτή συμπεριλαμβάνεται η κατάσταση ισορροπίας $x_{\mathrm{o}} = 0$:

$$\phi_{x_{\mathrm{o}}}(t) = 0 , \quad \forall t \in \mathbb{R} . ^{*}$$



Γραφήματα λύσεων της διαφορικής εξίσωσης $\dot{x} = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Εδώ η εξέλιξη εμφανίζει μια *εκρηκτική* συμπεριφορά αφού σε πεπερασμένο χρόνο οι τροχιές διαφεύγουν στο άπειρο! Έτσι, η εξελικτική ροή δεν ορίζεται σε όλο το χρονικό άξονα και ο λόγος βρίσκεται στη μη αμφιδιαφορικότητα των μετασχηματισμών ροής που θα την όριζαν κάθε στιγμή στο χώρο των καταστάσεων:

$$\mathfrak{g}^t : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U} , \quad \mathfrak{g}^t(x_{\mathrm{o}}) := \phi_{x_{\mathrm{o}}}(t) , \quad t \in \mathbb{R} .$$

---

* Οι λύσεις δεν θα είχαν δυνατότητα διαφυγής στο άπειρο αν ο χώρος καταστάσεων ήταν συμπαγής.

Ερώτημα 7: Τι θα μπορούσατε να πείτε για τη φύση αυτής της κατάστασης ισορροπίας;

☑ Προβληματισμός: Η κατασκευή της μονοδιάστατης εξελικτικής ροής.

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathfrak{U} = \mathbb{R},$$

όπου η συνάρτηση η οποία ορίζει το ρυθμό μεταβολής δέχεται συνεχή παράγωγο. Η διαδικασία χωρισμού των μεταβλητών οδηγεί στην τυπική σχέση:

$$\int \frac{dx}{f(x)} = t + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Αν ο ρυθμός μεταβολής έχει πεπερασμένο πλήθος σημείων μηδενισμού, $c_1,\ldots,c_p$, τότε σε κάθε ένα από τα ανοιχτά διαστήματα $\Delta_j =]c_{j-1}, c_j[$, $j=1,\ldots,p+1$, με $c_o = -\infty$, $c_{p+1} = +\infty$, είναι γνήσια μονότονος. Αν $m_j \in \Delta_j$, $j=1,\ldots,p+1$, ορίζεται η συνάρτηση:

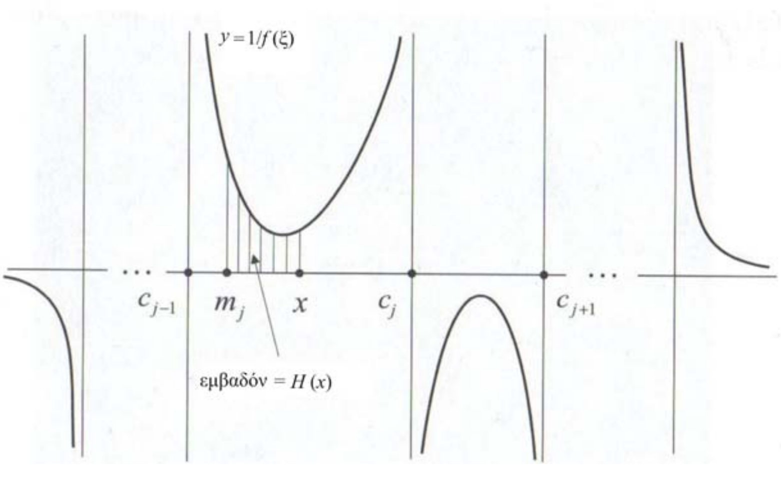
$$H_j : \Delta_j \to \mathbb{R}, \quad H_j(x) = \int_{m_j}^{x} \frac{d\xi}{f(\xi)}, \quad j=1,\ldots,p+1,$$

η οποία είναι γνήσια μονότονη αφού το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού υποδεικνύει ότι:

$$H_j'(x) = 1/f(x), \quad x \in \Delta_j, \quad j=1,\ldots,p+1.$$

Εξαιρώντας από το χώρο των καταστάσεων τα σημεία μηδενισμού του ρυθμού μεταβολής, προκύπτει η ακόλουθη συνάρτηση με τιμές στο χρονικό άξονα:

$$H : \mathfrak{U} - \{c_1,\ldots,c_p\} \to \mathbb{R}, \quad H(x) = H_j(x), \quad x \in \Delta_j, \quad j=1,\ldots,p+1.$$



Γράφημα της συνάρτησης $y = 1/f(\xi)$ και κατασκευή της συνάρτησης $H : \mathfrak{U} - \{c_1,\ldots,c_p\} \to \mathbb{R}$.

Στη συνάρτηση αυτή στηρίζεται η κατασκευή των λύσεων στο μέγιστο χρονικό διάστημα της ύπαρξής τους. Αν η αρχική συνθήκη $x(0)=x_o$ ορίζει μια κατάσταση ισορροπίας, δηλαδή αν $x_o = c_i$, $j=1,\ldots,p+1$, τότε η λύση $\phi_{x_o}(t)\equiv x_o$ υπάρχει σε όλο το χρονικό άξονα. Αν δεν πρόκειται για κατάσταση ισορροπίας τότε, για κάποιο $j=1,\ldots,p+1$, ισχύει $x_o = c \in \Delta_j$. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

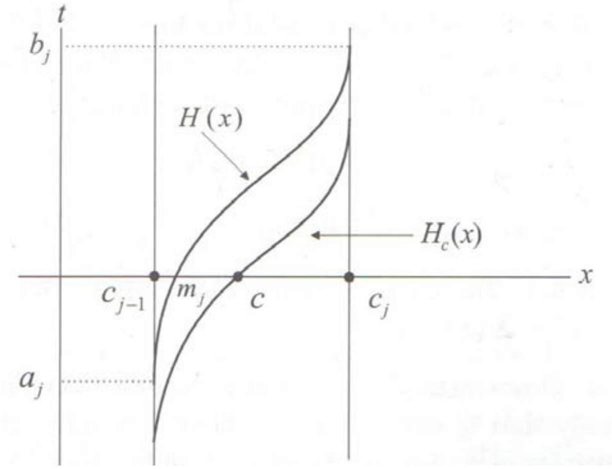
$$H_c : \Delta_j \to \mathbb{R}, \quad H_c(x) = H_j(x) - H_j(c),$$

η οποία προφανώς μηδενίζεται στο σημείο $x_o = c$ και είναι γνήσια μονότονη άρα αντιστρέψιμη, αφού με παράλληλη μεταφορά το γράφημά της ταυτίζεται με εκεί-νο της H_j. Το πεδίο ορισμού της H_j^{-1} είναι το χρονικό διάστημα $]a_j, b_j[$ όπου:

$$a_j = inf\left\{H_j(x) \,/\, x\in\Delta_j\right\} \quad \text{και} \quad b_j = sup\left\{H_j(x) \,/\, x\in\Delta_j\right\},$$

άρα το πεδίο ορισμού της H_c^{-1} είναι το χρονικό διάστημα $]a'_j, b'_j[$ όπου:

$$a'_j = a_j - H(c) \quad \text{και} \quad b'_j = b_j - H(c).$$



Γραφήματα των συναρτήσεων $H_j : \Delta_j \to \mathbb{R}$ και $H_c : \Delta_j \to \mathbb{R}$.

Εξετάζοντας το καταχρηστικό ολοκλήρωμα:

$$\int_{m_j}^{c_j} \frac{d\xi}{f(\xi)}$$

παρατηρούμε ότι αν αποκλίνει τότε το γράφημα της H_c, όπως το γράφημα της H_j, έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο σημείο $x = c_j$ άρα $b_j = \pm\infty$, διαφορετικά $b_j \in \mathbb{R}$ και τότε το γράφημα της H_c έχει κατακόρυφη εφαπτομένη στο σημείο $x = c_j$.

Η λύση που τη στιγμή $t=0$ διέρχεται από την κατάσταση $x_o = c \in \Delta_j$ ορίζεται στο μέγιστο χρονικό διάστημα ύπαρξης ως εξής:

$$\phi_{x_o} :]a', b'[\to \mathfrak{U}, \quad \phi_{x_o}(t) = H_c^{-1}(t).$$

Πράγματι, το θεώρημα της αντίστροφης συνάρτησης* διασφαλίζει όχι μόνο την ύπαρξη αυτής της συνάρτησης αλλά και τη διαφορισιμότητά της στο πεδίο ορισμού της και επιπλέον πληρούται η αρχική συνθήκη:

$$\phi_{x_o}(0) = H_c^{-1}(0) = x_o .$$

Το ότι επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση προκύπτει από τον υπολογισμό:

$$\phi'_{x_o}(t) = \left[H_c^{-1}\right]'(t) = \left[H'_c\left(H_c^{-1}\right)(t)\right]^{-1} = \left[\frac{1}{f\left(H_c^{-1}(t)\right)}\right]^{-1} = f\left(H_c^{-1}(t)\right) = f\left(\phi_{x_o}(t)\right), \; t \in]a', b'[.$$

Τέλος, το ότι πρόκειται για μέγιστη λύση αποδεικνύεται με εις άτοπο απαγωγή. Αν υπάρχει λύση σε κάποιο μεγαλύτερο χρονικό διάστημα $]a'', b''[\supseteq]a', b'[$ και τη στιγμή $t=0$ διέρχεται από την κατάσταση $x_o = c$:

$$\psi_{x_o} :]a'', b''[\to \mathfrak{U}, \quad \psi_{x_o}(0) = x_o, \quad \psi'_{x_o}(t) = f(\psi_{x_o}(t)),$$

τότε

$$\frac{d}{dt} H_c(\psi_{x_o}(t)) = H'_c(\psi_{x_o}(t))\, \psi'_{x_o}(t) = \frac{1}{f(\psi_{x_o}(t))} \psi'_{x_o}(t) = 1, \quad \forall t \in]a'', b''[.$$

Έτσι, θα υπάρχει σταθερά $k \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$H_c(\psi_{x_o}(t)) = t + k, \quad \forall t \in]a'', b''[\; : \quad H_c(\psi_{x_o}(0)) = H_c(x_o) = k$$

οπότε

$$H_c(\psi_{x_o}(t)) - H(x_o) = t, \quad \forall t \in]a'', b''[.$$

άρα

$$t \in]a'', b''[\quad \Rightarrow \quad t \in \left\{ H(x) - H(x_o) \,/\, x \in \Delta_j \right\} .$$

Αλλά

$$inf \left\{ H(x) - H(x_o) \,/\, x \in \Delta_j \right\} = a_j - H(x_o)$$

$$sup \left\{ H(x) - H(x_o) \,/\, x \in \Delta_j \right\} = b_j - H(x_o)$$

άρα

$$t \in]a_j - H(x_o), b_j - H(x_o)[=]a', b'[$$

και έτσι

$$a'' = a', \; b'' = b' .$$

---

* **Ερώτημα 8:** Το θεώρημα της αντίστροφης συνάρτησης, όπως συνήθως εκφράζεται, έχει τοπική ισχύ. Στη μονοδιάστατη περίπτωση, διασφαλίζει την τοπική αντιστρεψιμότητα κάθε συνάρτησης της οποίας η παράγωγος δεν μηδενίζεται σε ένα δεδομένο σημείο και την παραγωγισιμότητα της αντί-στροφης συνάρτησης. Πώς εδώ εξάγουμε ένα ολικό συμπέρασμα σε όλο το πεδίο ορισμού;

• ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Το λογιστικό πρότυπο της πληθυσμιακής δυναμικής.

Στο μονοδιάστατο χώρο καταστάσεων $\mathfrak{U} \subseteq \mathbb{R}$ θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση:

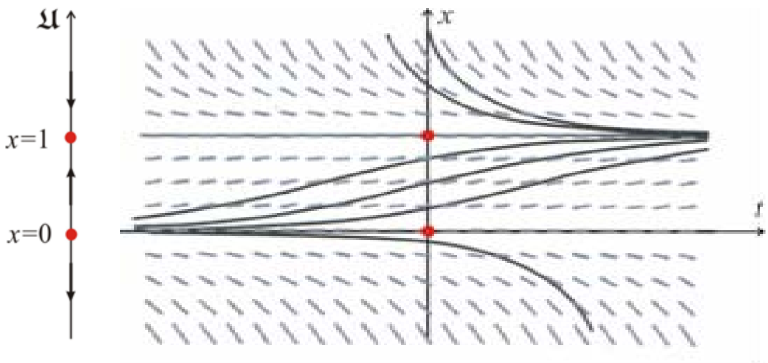
$$\dot{x} = x(1-x)\,, \quad x \in \mathfrak{U}\,.^{*}$$

Κάθε αρχική κατάσταση $x_o \in \mathfrak{U}$ ορίζει τη λύση στο μέγιστο χρονικό διάστημα της ύπαρξής της ως εξής:

$$\phi_{x_o} : \mathrm{I}_{x_o} \subset \mathbb{R} \to \mathfrak{U}\,, \quad \phi_{x_o}(t) = \frac{x_o e^t}{1 - x_o + x_o e^t}\,,$$

και στην έκφραση αυτή συμπεριλαμβάνονται οι καταστάσεις ισορροπίας:

$$x_o = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_{x_o}(t) = 0\,, \quad \forall t \in \mathbb{R}\,, \quad \text{(απωστική ισορροπία)},$$
$$x_o = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi_{x_o}(t) = 1\,, \quad \forall t \in \mathbb{R}\,, \quad \text{(ελκτική ισορροπία)}.$$



Πεδίο κλίσης και γραφήματα λύσεων της διαφορικής εξίσωσης.

Το μέγιστο χρονικό διάστημα εξέλιξης κάθε λύσης καθορίζεται από τις χρονικές στιγμές στις οποίες το γράφημά της δέχεται κατακόρυφη ασύμπτωτη, δηλαδή από τις ρίζες της εξίσωσης:

$$1 - x_o + x_o e^t = 0\,.$$

Έτσι, το πεδίο ύπαρξης της εξελικτικής ροής περιορίζεται ως εξής:

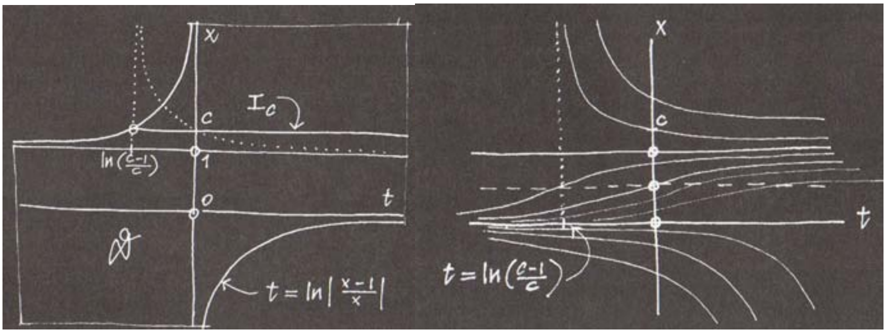
$$\mathfrak{D} = \left\{(t, x_o) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{U} \,/\, x_o \in \mathfrak{U},\, t \in \mathrm{I}_{x_o}\right\}$$

όπου

$$x_o \in [0, 1] \quad \Rightarrow \quad \mathrm{I}_{x_o} = \mathbb{R}\,,$$
$$x_o < 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{I}_{x_o} =]-\infty, ln\big((x_o - 1)/x_o\big)[\,,$$
$$x_o > 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{I}_{x_o} =]\,ln\big((x_o - 1)/x_o\big), +\infty[\,.$$

---

* Πρόκειται για απλουστευμένη εκδοχή του *λογιστικού πληθυσμιακού προτύπου* στο οποίο υπάγονται τα προβλήματα εξέλιξης πληθυσμών με σταθερή εξωτερική διαταραχή, (Λογιστικό μοντέλο Verhulst)



Προσδιορισμός του μέγιστου χρονικού διαστήματος ορισμού των λύσεων και
του περιορισμένου πεδίου ύπαρξης της εξελικτικής ροής της διαφορικής εξίσωσης
$\dot{x} = x(1-x)\,, \quad x \in \mathfrak{U} = \mathbb{R}$.

Η αρχική κατάσταση $x_o \in \mathfrak{U}$, στην οποία βρίσκεται το σύστημα τη στιγμή $t = 0$, καθορίζει τη χρονική διάρκεια της εξελικτικής ροής:

$$\mathfrak{g}(t, x_o) = \frac{x_o e^t}{1 - x_o + x_o e^t}\,, \quad t \in \mathrm{I}_{x_o}\,.$$

Η εξελικτική ροή δεν ορίζεται λοιπόν σε όλο το χρονικό άξονα και ο λόγος βρίσκεται στη μη αμφιδιαφορικότητα των μετασχηματισμών που θα την όριζαν κάθε στιγμή στο χώρο των καταστάσεων:

$$\mathfrak{g}^t(x_o) := \phi_{x_o}(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.^*$$

[*] **Ερώτημα 9:** Αποφανθείτε για την αλήθεια ή αναλήθεια της σχέσης:

$$\mathfrak{g}^{t+t'}(x_o) = \mathfrak{g}^{t'} \circ \mathfrak{g}^t(x_o)\,, \quad \forall t,t' \in \mathbb{R}\,,$$

όπου

$$\mathfrak{g}^t(x_o) = \frac{x_o e^t}{1 - x_o + x_o e^t}\,, \quad x_o \in \mathfrak{U}$$

Εξετάστε την εγκυρότητα του ακόλουθου υπολογισμού:

$$\mathfrak{g}^{t'}\left(\mathfrak{g}^t(x_o)\right) = \frac{\mathfrak{g}^t(x_o)\, e^{t'}}{1 - \mathfrak{g}^t(x_o) + \mathfrak{g}^t(x_o)\, e^{t'}} =$$

$$= \frac{\dfrac{x_o e^t}{1 - x_o + x_o e^t}\, e^{t'}}{1 - \dfrac{x_o e^t}{1 - x_o + x_o e^t} + \dfrac{x_o e^t}{1 - x_o + x_o e^t}\, e^{t'}} =$$

$$= \frac{x_o\, e^t\, e^{t'}}{1 - x_o + x_o\, e^t\, e^{t'}} = \frac{x_o\, e^{t+t'}}{1 - x_o + x_o\, e^{t+t'}} = \mathfrak{g}^{t+t'}(x_o)\,.$$

☑ Προβληματισμός: Η φύση των καταστάσεων ισορροπίας.

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathfrak{U} \subseteq \mathbb{R}.$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες εκδοχές μιας κατάστασης ισορροπίας $x_o \in \mathfrak{U}$:

- ***Κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας*:**

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \rho > 0: \ x \in \mathfrak{U}, \ |x - x_o| < \rho \ \Rightarrow \ |\phi_x(t) - \phi_{x_o}(t)| < \varepsilon, \ \forall t \geq 0.$$

- ***Κατάσταση ασυμπτωτικά ευσταθούς ισορροπίας*:**[*]

$$\textit{ευσταθής ισορροπία} \ \ \& \ \ |x - x_o| < \rho \ \Rightarrow \ \lim_{t \to +\infty} \phi_x(t) = x_o .$$

- ***Κατάσταση ασταθούς ισορροπίας*:** Μη ευσταθής ισορροπία.

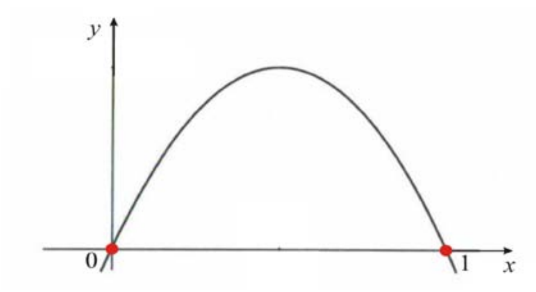
Θεώρημα. Αν η συνάρτηση που ορίζει το ρυθμό μεταβολής $y = f(x)$ δέχεται συνεχή παράγωγο στην κατάσταση ισορροπίας $x_o \in \mathfrak{U}$ και $f'(x_o) \neq 0$, τότε ισχύει:

$$f'(x_o) < 0 \ \Rightarrow \ x_o \ \text{ασυμπτωτικά ευσταθής κατάσταση ισορροπίας,}$$

$$f'(x_o) > 0 \ \Rightarrow \ x_o \ \text{ασταθής κατάσταση ισορροπίας.}$$

Πριν περάσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος ας δούμε στο παράδειγμα 4 ότι:

$$f'_\alpha(x) = 1 - 2x \ \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f'_\alpha(0) = \ 1 > 0 \\ f'_\alpha(1) = -1 < 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{ll} x_o = 0 & \text{απωστική ασταθής ισορροπία} \\ x_o = 1 & \text{ελκτική ασυμπτωτικά ευσταθής ισορροπία} \end{array} \right.$$



Γράφημα της συνάρτησης που ορίζει το ρυθμό μεταβολής: $y = x(1-x)$, $x \in \mathfrak{U} = \mathbb{R}$.

[*] Η ευστάθεια σημαίνει ότι οι λύσεις με αρχικές συνθήκες κοντά στην ελκτική κατάσταση ισορροπίας παραμένουν κοντά της για αυθαίρετα μεγάλο χρόνο, ενώ η ασυμπτωτική ευστάθεια σημαίνει επιπλέον ότι με την πάροδο του χρόνου οι λύσεις αυτές τείνουν στην ελκτική κατάσταση ισορροπίας.

Λήμμα. Η ευστάθεια, η ασυμπτωτική ευστάθεια και η αστάθεια της κατάστασης ισορροπίας $x_o \in \mathfrak{U}$ εκτιμώνται αντίστοιχα με τα ακόλουθα κριτήρια:

(1) $\exists \delta > 0: \ x \in \mathfrak{U}, \ |x - x_o| < \delta \ \Rightarrow \ (x - x_o) f(x) \leq 0$,

(2) $\exists \delta > 0: \ x \in \mathfrak{U}, \ 0 < |x - x_o| < \delta \ \Rightarrow \ (x - x_o) f(x) < 0$,

(3) $\exists \delta > 0: \ x \in \mathfrak{U}, \ -\delta < x - x_o < 0 \ \vee \ 0 < x - x_o < \delta \ \Rightarrow \ (x - x_o) f(x) > 0$.

Απόδειξη. Έστω $x_o \in \mathfrak{U}$ μια κατάσταση ισορροπίας: $f(x_o) = 0$.

(1) Λαμβάνοντας υπόψη την υπόθεση (1) και τη σχέση:

$$\frac{d}{dt}\left|x(t) - x_o\right|^2 = 2\big(x(t) - x_o\big)\frac{dx}{dt} = 2\big(x(t) - x_o\big) f(x)$$

προκύπτει ότι αν η αρχική συνθήκη $x(0)$ ληφθεί έτσι ώστε $0 < \left|x(0) - x_o\right| < \delta$ τότε:

$$\frac{d}{dt}\left|x(t) - x_o\right|^2 < 0 .$$

Η ανισότητα αυτή ισχύει κατ'αρχήν κοντά στο $t = 0$, γιατί η λύση είναι συνεχής συνάρτηση του t, άρα για αυτά τα t η απόσταση $|x(t) - x_o|$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του t. Εφόσον βρισκόμαστε στο διάστημα όπου αληθεύει αυτή η ανισότητα, η απόσταση αυτή παραμένει διαρκώς φθίνουσα, άρα $|x(t) - x_o| < \delta$ για κάθε $t \geq 0$. Έτσι, αρκεί να θέσουμε στον ορισμό της ευστάθειας $\rho = \varepsilon$, αποδεικνύεται η ευστάθεια της κατάστασης ισορροπίας:

$$|x - x_o| < \rho \ \Rightarrow \ |\phi_x(t) - \phi_{x_o}(t)| < \varepsilon, \ \ \forall t \geq 0 ..$$

(2) Έχοντας διαπιστώσει ότι η απόσταση $|x(t) - x_o|$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του t, διασφαλίζεται η ύπαρξη του ορίου $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = x_o$. Αν υποθέσουμε ότι το όριο είναι γνήσια θετικό $\ell > 0$ θα καταλήξουμε σε άτοπο. Πράγματι, θέτουμε:

$$M = \max_{x \in \Sigma}\left\{2\big(x(t) - x_o\big) f(x)\right\} \quad \text{όπου} \quad \Sigma = \left\{x : \ell \leq |x - x_o| \leq \delta\right\} .$$

Λαμβάνοντας υπόψη την υπόθεση (2) και τη σχέση:

$$\frac{d}{dt}\left|x(t) - x_o\right|^2 = 2\big(x(t) - x_o\big) f(x) \leq M < 0$$

προκύπτει

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\left|x(s) - x_o\right|^2 ds \leq \int_0^t M\, ds \quad \text{άρα} \quad \left|x(s) - x_o\right|^2 \leq \left|x(0) - x_o\right|^2 + M\, t$$

που οδηγεί σε άτοπο όταν το t τείνει στο μηδέν, άρα $\ell = 0$ και έτσι αποδεικνύεται η ασυμπτωτική ευστάθεια της κατάστασης ισορροπίας.

(3) Η αστάθεια μπορεί να προκληθεί από δεξιά ή αριστερά της κατάστασης ισορροπίας. Έστω ότι:

$$(x-x_o)\,f(x)>0\,,\quad 0<x-x_o<\delta\,.$$

Αν υποθέσουμε ότι η κατάσταση ισορροπίας είναι ευσταθής θα οδηγηθούμε σε άτοπο. Πράγματι, επιλέγουμε την αρχική κατάσταση έτσι ώστε: $0<|x(0)-x_o|<\rho$ και, δοθέντος $\varepsilon=\delta/2$, θα πρέπει για κατάλληλο ρ να ισχύει:

$$0<\left|x(0)-x_o\right|<\rho \quad\Rightarrow\quad \left|x(t)-x_o\right|<\varepsilon,\ \forall t\geq 0\,.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι για $\rho<\delta$ ισχύει:

$$\frac{d}{dt}\left|x(t)-x_o\right|^2=2\big(x(t)-x_o\big)\,f(x)>0 \quad \text{άρα} \quad |\,x(t)-x_o\,|\geq|\,x(0)-x_o\,|\,.$$

Θέτουμε:

$$m=\min_{x\in\Sigma}\left\{2\big(x(t)-x_o\big)\,f(x)\right\} \quad \text{όπου} \quad \Sigma=\left\{x:x(0)-x_o\leq x(t)-x_o\leq\delta\right\}$$

και παρατηρούμε ότι $m>0$ και $x(t)\in\Sigma$ για $t\geq 0$. Συνεπώς:

$$\int_0^t\frac{d}{dt}\left|x(s)-x_o\right|^2 ds\geq\int_0^t m\,ds \quad \text{άρα} \quad \left|x(s)-x_o\right|^2\geq\left|x(0)-x_o\right|^2+mt$$

που οδηγεί σε άτοπο όταν το t τείνει στο $+\infty$ και συμπεραίνουμε την αστάθεια της κατάστασης ισορροπίας. Ανάλογο είναι το αποδεικτικό σκεπτικό στην περίπτωση όπου $-\delta<x-x_o<0$.

Θεώρημα. Αν η συνάρτηση που ορίζει το ρυθμό μεταβολής $y=f(x)$ δέχεται συνεχή παράγωγο στην κατάσταση ισορροπίας $x_o\in\mathfrak{U}$ και $f'(x_o)\neq 0$, τότε ισχύει:

$f'(x_o)<0 \;\Rightarrow\; x_o$ ασυμπτωτικά ευσταθής κατάσταση ισορροπίας,

$f'(x_o)>0 \;\Rightarrow\; x_o$ ασταθής κατάσταση ισορροπίας.

Απόδειξη. Έστω $x_o\in\mathfrak{U}$ μια κατάσταση ισορροπίας και ας υποθέσουμε $f'(x_o)<0$. Η συνέχεια της παραγώγου υποδεικνύει ότι σε μια περιοχή του $x_o\in\mathfrak{U}$ ισχύει:

$$x\in\,]x_o-\delta,x_o+\delta[\;\Rightarrow\; f'(x)<0$$

και το θεώρημα μέσης τιμής δηλώνει την ύπαρξη x^* μεταξύ x και x_o έτσι ώστε:

$$f(x)-f(x_o)=f'(x^*)\,(x-x_o)\,.$$

Άρα, $x^*\in\,]x_o-\delta,x_o+\delta[$ και κατά συνέπεια $f'(x^*)<0$, οπότε:

$$x\in\,]x_o-\delta,x_o+\delta[\quad\Rightarrow\quad (x-x_o)\big(f(x)-f(x_o)\big)=f'(x^*)\,(x-x_o)^2<0$$

και

$$x\in\,]x_o-\delta,x_o+\delta[\quad\Rightarrow\quad (x-x_o)\,f(x)<0\,.$$

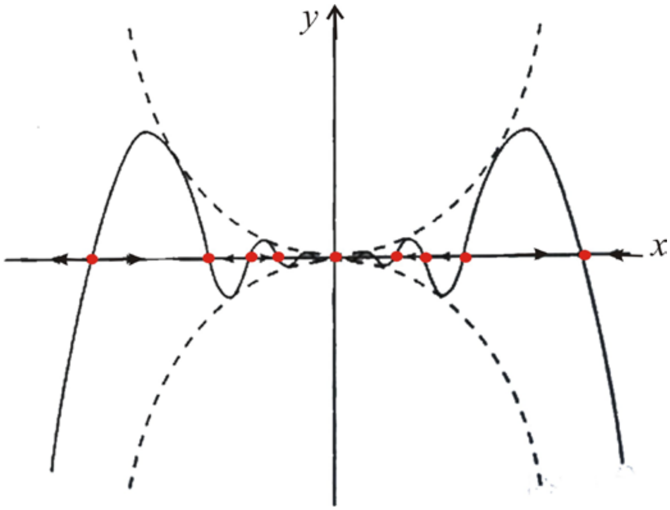
Από το Λήμμα προκύπτει η ασυμπτωτική ευστάθεια της κατάστασης ισορροπίας και με ανάλογο σκεπτικό αποδεικνύεται η περίπτωση της αστάθειας.

Άσκηση 2. Προσδιορίστε τη φύση των καταστάσεων ισορροπίας της δυναμικής που ορίζεται από την ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$\dot{x} = f(x)\,, \quad x \in \mathfrak{U} \subseteq \mathbb{R}\,,$$

όπου

$$f(x) = \begin{vmatrix} -x^3 sin 1/x & \textit{όταν } x \neq 0 \\ 0 & \textit{όταν } x = 0 \end{vmatrix}$$



Γράφημα της συνάρτησης του ρυθμού μεταβολής.
Η κατάσταση ισορροπίας $x = 0$ είναι ευσταθής αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθής.*

* ***Υπόδειξη.*** Η συνάρτηση που ορίζει το ρυθμό μεταβολής δέχεται παντού συνεχή παράγωγο και έτσι διασφαλίζεται η ύπαρξη και η μοναδικότητα των λύσεων της διαφορικής εξίσωσης. Οι καταστάσεις ισορροπίας είναι $x_o = 0$ και $x_k = 1/k\pi$, $k \in \mathbb{Z}^*$, και, εκτός από το σημείο $x_o = 0$ όπου μηδενίζεται η παράγωγος του ρυθμού μεταβολής, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε απευθείας τα κριτήρια ευστάθειας και αστάθειας στα σημεία $x_k = 1/k\pi$, $k \in \mathbb{Z}^*$. Για το σημείο $x_o = 0$, με δεδομένο ε>0, επιλέγουμε το μικρότερο $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $1/n_o\pi < \varepsilon$ και θέτοντας $\rho = 1/n_o\pi$, προκύπτει:

$$|x| < \rho \;\Rightarrow\; g^t(x) \in [-1/n_o\pi, 1/n_o\pi],\, \forall t \geq 0 \;\Rightarrow\; |g^t(x)| < \varepsilon\,,\, \forall t \geq 0\,,$$

και αυτό ισχύει γιατί τα άκρα του διαστήματος $[-1/n_o\pi, 1/n_o\pi]$ αποτελούν καταστάσεις ισορροπίας. Αν $x \in]0, \rho[$, επιλέγουμε $n_o^* \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $1/n_o^*\pi < \varepsilon$ οπότε $|g^t(x)| > 1/n_o^*\pi$, $\forall t \in \geq 0$, άρα:

$$\lim_{t \to +\infty} g^t(x) \neq x_o = 0\,.$$

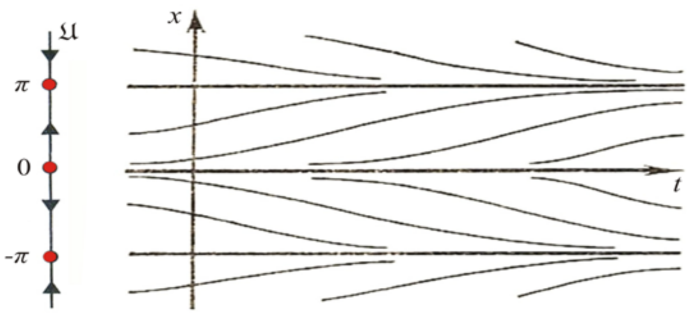
• ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Εμφάνιση άπειρων καταστάσεων ισορροπίας.

Στο μονοδιάστατο χώρο καταστάσεων $\mathfrak{U}=\mathbb{R}$ θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση:

$$\dot{x} = sin\, x\,, \quad x \in \mathfrak{U}\,.$$

Οι διαδοχικές καταστάσεις από τις οποίες διέρχεται το σύστημα, ξεκινώντας από την κατάσταση $x_{\text{o}} \in \mathfrak{U}$, ορίζονται από την αντίστοιχη λύση:

$$\phi_{x_{\text{o}}} : \mathbb{R} \to \mathfrak{U}\,, \quad \phi_{x_{\text{o}}}(t) = .^{*}$$



Τροχιές και γραφήματα λύσεων της διαφορικής εξίσωσης $\dot{x} = \sin x\,, \quad x \in \mathbb{R}$.

Τη στιγμή $t \in \mathbb{R}$, ορίζεται στο χώρο των καταστάσεων ο μετασχηματισμός ροής που αποδίδει κάθε αρχική κατάσταση του συστήματος στην κατάσταση στην οποία θα βρεθεί τη δεδομένη αυτή στιγμή:

$$\mathfrak{g}^{t} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad \mathfrak{g}^{t}(x_{\text{o}}) = \phi_{x_{\text{o}}}(t)\,.$$

Πρόκειται για αμφιδιαφορομορφισμούς της πραγματικής ευθείας που ορίζουν τη μονοπαραμετρική ομάδα. Τα σημεία $x_{\text{o}} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, είναι σταθερά σημεία της ροής η οποία, σε θετικό χρόνο κατευθύνεται από κάθε αρχική κατάσταση στην πλησιέστερη κατάσταση ισορροπίας που αντιστοιχεί σε περιττό πολλαπλάσιο του π, ενώ σε αρνητικό χρόνο κατευθύνεται από κάθε αρχική κατάσταση στην πλησιέστερη κατάσταση ισορροπίας που αντιστοιχεί σε άρτιο πολλαπλάσιο του π. Οι καταστάσεις ισορροπίας που αντιστοιχούν σε άρτιο πολλαπλάσιο του π είναι απωστικές και εκείνες που αντιστοιχούν σε περιττό πολλαπλάσιο του π είναι ελκτικές. Σε κάθε δεδομένη κατάσταση προσαρτάται η τροχιά:

$$\mathcal{O}_{x_{\text{o}}} = \left\{ \mathfrak{g}^{t}(x_{\text{o}}) \in \mathfrak{U} \,/\, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad x_{\text{o}} \in \mathfrak{U}\,,$$

και προκύπτουν δυο τύποι χρονικής ομάδας:

$$\mathfrak{T}_{x_{\text{o}}=k\pi} = \left\{ t \in \mathbb{R} \,/\, \mathfrak{g}^{t}(k\pi) = k\pi \right\} = \mathbb{R}\,, \quad \mathfrak{T}_{x_{\text{o}}\neq k\pi} = \left\{ t \in \mathbb{R} \,/\, \mathfrak{g}^{t}(x_{\text{o}}) = x_{\text{o}} \right\} = \{0\}\,.$$

---

* **Ερώτημα 10.** Ποιες είναι οι λύσεις και η μονοπαραμετρική ομάδα της διαφορικής εξίσωσης;

☑ Προβληματισμός: Γραμμικοποίηση στις καταστάσεις ισορροπίας.

Η *γραμμικοποίηση* μιας διαφορικής εξίσωσης:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathfrak{U} \subseteq \mathbb{R},$$

στην κατάσταση ισορροπίας $x_0 \in \mathfrak{U}$ είναι εξ'ορισμού η γραμμική διαφορική εξίσωση:

$$\dot{x} = f'(x_0)\, x, \; x \in \mathfrak{U} \subseteq \mathbb{R}.$$

Το ερώτημα που τίθεται αφορά στη διατήρηση ή μη της φύσης των καταστάσεων ισορροπίας μιας μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης κατά τη γραμμικοποίησή της.

Η μονοδιάστατη γραμμική δυναμική:

$$\dot{x} = \alpha x, \quad x \in \mathfrak{U} = \mathbb{R},$$

παρουσιάζει την κατάσταση ισορροπίας $x_0 = 0$ που είναι ασυμπτωτικά ευσταθής όταν $\alpha < 0$ και ασταθής όταν $\alpha > 0$. Γνωρίζουμε ήδη ότι, αν η συνάρτηση $y = f(x)$ δέχεται συνεχή παράγωγο στην κατάσταση ισορροπίας $x_0 \in \mathfrak{U}$ και $f'(x_0) \neq 0$, τότε:

$$f'(x_0) < 0 \;\Rightarrow\; x_0 \text{ ασυμπτωτικά ευσταθής ισορροπία,}$$

$$f'(x_0) > 0 \;\Rightarrow\; x_0 \text{ ασταθή ισορροπίας,}$$

άρα η φύση της διατηρείται κατά τη γραμμικοποίηση:

$$\dot{x} = f'(x_0)\, x \;\Rightarrow\; \phi_{x_0}(t) = x_0 e^{f'(x_0)\,t} \;\Rightarrow\; \mathfrak{g}^t(x_0) = x_0 e^{f'(x_0)\,t}, \quad x_0 \in \mathfrak{U}.$$

Στο παράδειγμα της μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης:

$$\dot{x} = \sin x, \quad x \in \mathfrak{U},$$

η φύση των καταστάσεων ισορροπίας διατηρείται κατά τη γραμμικοποίηση:

$$x_0 = 2k\pi \;\Rightarrow\; \dot{x} = -x \;\Rightarrow\; \text{ασυμπτωτικά ευσταθής ισορροπία,}$$

$$x_0 = (2k+1)\pi \;\Rightarrow\; \dot{x} = +x \;\Rightarrow\; \text{ασταθής ισορροπία.}$$

Άσκηση 3. Εξετάστε την ενδεχόμενη μεταβολή της φύσης των καταστάσεων ισορροπίας της ακόλουθης διαφορικής εξίσωσης κατά τη γραμμικοποίησή της:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathfrak{U} \subseteq \mathbb{R},$$

όπου

$$f(x) = \left| \begin{array}{ll} -x^3 \sin 1/x & \text{όταν } x \neq 0 \\ 0 & \text{όταν } x = 0 \end{array} \right.$$

• ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Ανθεκτικότητα των καταστάσεων ισορροπίας.

Στο μονοδιάστατο χώρο καταστάσεων $\mathfrak{U} = \mathbb{R}$ θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση:

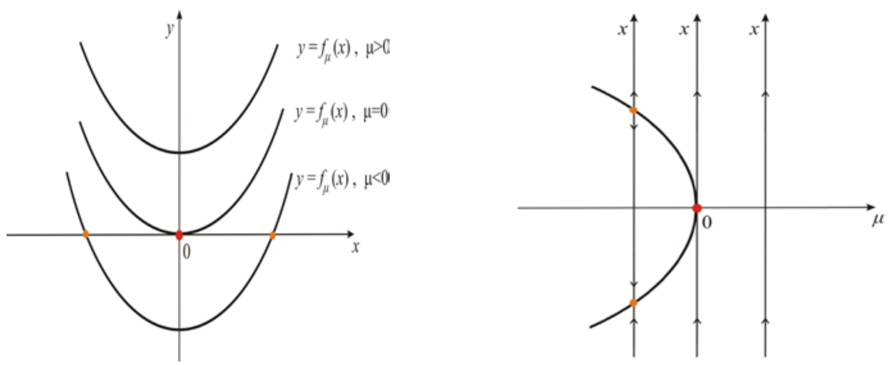
$$\dot{x} = x^2 + \mu\,, \quad x \in \mathfrak{U}\,,^{*}$$

όπου ο ρυθμός μεταβολής εξαρτάται από μια παράμετρο $\mu \in \mathbb{R}$:

$$f_\mu(x) = x^2 + \mu\,.$$

Η παράμετρος αυτή υπεισέρχεται ως διαταραχή της τετραγωνικής δυναμικής και ζητούμενο είναι η μελέτη της τοπολογικής διαφοροποίησης αυτής της δυναμικής. Ο ρυθμός μεταβολής εμφανίζει τώρα δυο σημεία μηδενισμού $x{=}x_1{<}0$ & $x{=}x_2{>}0$ όταν $\mu{<}0$, ένα σημείο μηδενισμού $x{=}0$ όταν $\mu{=}0$ και κανένα σημείο μηδενισμού όταν $\mu{>}0$. Συνεπώς, όταν $\mu{<}0$ τότε εμφανίζονται δυο καταστάσεις ισορροπίας, μια ελκτική ασυμπτωτικά ευσταθής $x_{\text{o}}{=}x_1$ και μια απωστική ασταθής $x_{\text{o}}{=}x_2$, αφού αντίστοιχα ισχύει $f'_\mu(x_1) < 0$ και $f'_\mu(x_2) > 0$. Όσο η τιμή $\mu{<}0$ τείνει να μηδενιστεί τόσο οι δυο αυτές καταστάσεις ισορροπίας πλησιάζουν μεταξύ τους έως ότου ταυ-τιστούν όταν $\mu{=}0$ και εξαφανιστούν όταν $\mu{>}0$. Η τιμή $\mu{=}0$ ορίζει μια ιδιόμορφη δυναμική *διακλάδωσης*, αφού οι παράπλευρες τιμές ορίζουν διαφορετικές δυναμικές συμπεριφορές, από τη μια ανυπαρξία και από την άλλη ύπαρξη δυο καταστάσεων ισορροπίας, άρα πλήρη μεταβολή του τοπολογικού τοπίου στο χώρο καταστάσεων. Αξιοσημείωτη είναι η παρατήρηση ότι στην κατάσταση ισορροπίας $x_{\text{o}}{=}0$ που αντιστοιχεί στην τιμή διακλάδωσης $\mu{=}0$ μηδενίζεται η παράγωγος του ρυθμού μεταβολής:

$$f'_{\mu=0}(x_{\text{o}}) = 0\,.$$



Γράφημα της συνάρτησης του ρυθμού μεταβολής για τις τιμές της παραμέτρου: $\mu{<}0$, $\mu{=}0$, $\mu{>}0$, και διάγραμμα διακλάδωσης της διαφορικής εξίσωσης: $\dot{x} = x^2 + \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$.

---

[*] **Ερώτημα 11.** Ποια είναι η επίπτωση της διαταραχής στην τοπολογική φύση των τροχιών;

☑ Προβληματισμός: Εμφάνιση σημείων διακλάδωσης κατά τη διαταραχή.

Αν η εξέλιξη ενός δυναμικού συστήματος διέπεται από τη διαφορική εξίσωση:

$$\dot{x} = f(x)\,,\quad x \in \mathfrak{U} \subseteq \mathbb{R}\,,$$

τίθεται το ερώτημα της εμφάνισης σημείων διακλάδωσης στο χώρο καταστάσεων κατά τη διαταραχή του ρυθμού μεταβολής:

$$\dot{x} = f(x) + \mu\,,\quad \mu \in \mathbb{R}\,.$$

Κατά τη διαταραχή του ρυθμού μεταβολής της γραμμικής δυναμικής:

$$\dot{x} = \alpha\, x\,,\quad x \in \mathfrak{U} = \mathbb{R}\,,$$

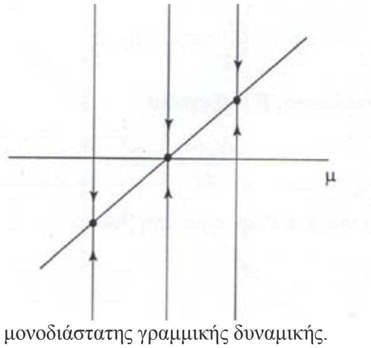
δεν εμφανίζονται σημεία διακλάδωσης και η φύση της κατάστασης ισορροπίας διατηρείται αναλλοίωτη. Συγκεκριμένα, στην ελκτική γραμμική δυναμική:

$$\dot{x} = -x + \mu\,,\quad x \in \mathfrak{U} \subseteq \mathbb{R}\,,$$

πριν τη διαταραχή (μ=0) η κατάσταση ισορροπίας x_o=0 είναι ασυμπτωτικά ευσταθής και το ίδιο ισχύει κατά τη διαταραχή για την κατάσταση ισορροπίας $x_o = \mu$, αφού η παράγωγος του ρυθμού μεταβολής παραμένει γνήσια αρνητική. Επίσης, στην απωστική γραμμική δυναμική:

$$\dot{x} = x + \mu\,,\quad x \in \mathfrak{U} \subseteq \mathbb{R}\,,$$

πριν τη διαταραχή (μ=0) η κατάσταση ισορροπίας x_o=0 είναι ασταθής και το ίδιο ισχύει κατά τη διαταραχή για την κατάσταση ισορροπίας $x_o = -\mu$, αφού η παράγωγος του ρυθμού μεταβολής παραμένει γνήσια θετική. Συνεπώς, κατά τη διαταραχή του ρυθμού μεταβολής των μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων διατηρείται η φύση των καταστάσεων ισορροπίας στις οποίες δεν μηδενίζεται η παράγωγος του ρυθμού μεταβολής, αφού το ίδιο ισχύει για τη γραμμικοποίησή τους σε αυτές τις καταστάσεις. Άρα, στην περιοχή των καταστάσεων ισορροπίας στις οποίες δεν μηδενίζεται η παράγωγος του ρυθμού μεταβολής, η διαταραχή δεν μπορεί να προκαλέσει εμφάνιση σημείων διακλάδωσης και συνακόλουθα ούτε μεταβολή της τοπολογικής φύσης της εξελικτικής ροής στο χώρο καταστάσεων.



Διαγράμματα διακλάδωσης κατά τη διαταραχή της μονοδιάστατης γραμμικής δυναμικής.

Συνεπώς, αναγκαία προϋπόθεση για την εμφάνιση σημείου διακλάδωσης είναι ο μηδενισμός της παραγώγου του ρυθμού μεταβολής σε κάποια κατάσταση ισορροπίας, δηλαδή η ύπαρξη $\mu_o \in \mathbb{R}$ και $x_o \in \mathfrak{U}$ τέτοιων ώστε:

$$f_{\mu_o}(x_o) = 0 \quad \text{και} \quad f'_{\mu_o}(x_o) = 0 \,.$$

Αλλά, η συνθήκη αυτή δεν είναι από μόνη της ικανή να προκαλέσει διακλάδωση. Για παράδειγμα, οι καταστάσεις ισορροπίας της διαφορικής εξίσωσης:

$$\dot{x} = -x^3 + \mu \,, \quad x \in \mathfrak{U} = \mathbb{R} \,,$$

ορίζονται από την παραμετρική εξίσωση:

$$-x^3 + \mu = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{\mu}$$

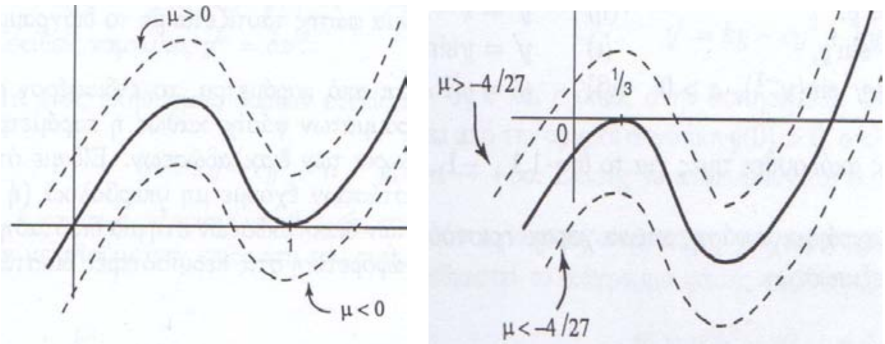
και η κατάσταση ισορροπίας στην οποία μηδενίζεται η παράγωγος του ρυθμού μεταβολής προκύπτει για $\mu = 0$ και είναι $x_o = 0$ χωρίς να υπάρχει διακλάδωση και μεταβολή της τοπολογικής φύσης της εξελικτικής ροής.

Άσκηση 4. Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\mu \in \mathbb{R}$, εξετάστε την ύπαρξη σημείων διακλάδωσης και την τοπολογική διαφοροποίηση της εξελικτικής ροής στο μονοδιάστατο χώρο καταστάσεων της διαφορικής εξίσωσης :

$$\dot{x} = f_\mu(x) \,, \quad x \in \mathfrak{U} \subseteq \mathbb{R} \,,$$

όπου

$$f_\mu(x) = x(1-x)^2 + \mu \,.$$ [*]



$\mu_o = 0$, $x_o = 1$ $\qquad\qquad$ $\mu_o = -4/27$, $x_o = 1/3$

Διαγράμματα διακλάδωσης.

[*] *Υπόδειξη*. Εμφανίζονται δυο διακλαδώσεις:

$$\left| \begin{array}{l} f_{\mu_o}(x_o) = 0 \\ f'_{\mu_o}(x_o) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_o(1-x_o)^2 + \mu = 0 \\ 3x_o^2 - 4x_o + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left| \begin{array}{lll} x_o = 1 & \Rightarrow & \mu_o = 0 \\ x_o = 1/3 & \Rightarrow & \mu_o = -4/27 \end{array} \right.$$

• ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7. Η διαταραχή και το φαινόμενο της υστέρησης.

Στο μονοδιάστατο χώρο καταστάσεων $\mathfrak{U} = \mathbb{R}$ θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση που ορίζεται για κάθε τιμή της παραμέτρου $\mu \in \mathbb{R}$ ως εξής:

$$\dot{x} = x - x^3 + \mu, \quad x \in \mathfrak{U}.$$

Στην αδιατάρακτη περίπτωση:

$$\dot{x} = x - x^3, \quad x \in \mathfrak{U} = \mathbb{R},$$

οι διαδοχικές καταστάσεις από τις οποίες διέρχεται το σύστημα, ξεκινώντας από την κατάσταση $x_o \in \mathfrak{U}$, ορίζονται από την αντίστοιχη λύση:

$$\phi_{x_o} : \mathbb{R} \to \mathfrak{U}, \quad \phi_{x_o}(t) = {}^{*}.$$

Στην περίπτωση αυτή ο ρυθμός μεταβολής μηδενίζεται σε τρία σημεία και εμφανίζονται τρεις καταστάσεις ισορροπίας:

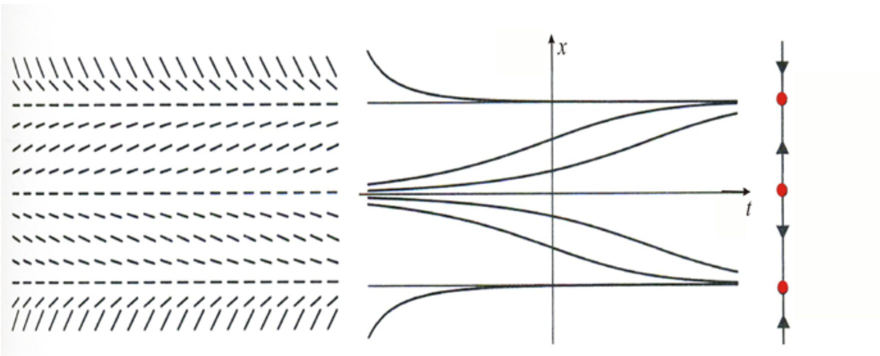
$$x_o = 0, \pm 1 : \qquad \phi_{x_o=0}(t) \equiv 0, \quad \phi_{x_o=1}(t) \equiv 1, \quad \phi_{x_o=-1}(t) \equiv -1,$$

και η φύση τους προσδιορίζεται ως εξής:

$f'(0) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_o = 0$ απωστική κατάσταση ασταθούς ισορροπίας,

$f'(+1) < 0 \quad \Rightarrow \quad x_o = +1$ ελκτική κατάσταση ασυμπτωτικά ευσταθούς ισορροπίας,

$f'(-1) < 0 \quad \Rightarrow \quad x_o = -1$ ελκτική κατάσταση ασυμπτωτικά ευσταθούς ισορροπίας,



Πεδίο κλίσης και γραφήματα λύσεων της διαφορικής εξίσωσης: $\dot{x} = x - x^3, \quad x \in \mathbb{R}$.

Το ερώτημα που τίθεται αφορά στην τοπολογική διαφοροποίηση της δυναμικής στο χώρο των καταστάσεων κατά τη διαταραχή του ρυθμού μεταβολής.

---

[*] **Ερώτημα 12.** Ποιες είναι οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης και τι μπορούμε να πούμε για τη μονοπαραμετρική ομάδα και την εξελικτική ροή στο χώρο των καταστάσεων;

☑ Προβληματισμός: Το φαινόμενο της υστέρησης κατά τη διαταραχή.

Θα εξετάσουμε τη διαφοροποίηση του πλήθους και της φύσης των καταστάσεων ισορροπίας κατά τη διαταραχή του ρυθμού μεταβολής:

$$f_\mu(x) = x - x^3 + \mu\,.$$

Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου, οι καταστάσεις ισορροπίας ορίζονται από την παραμετρική εξίσωση:

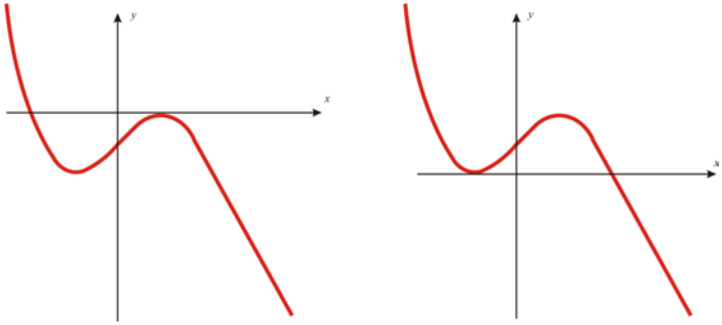
$$x^3 - x = \mu\,.$$

Ο ρυθμός μεταβολής παρουσιάζει δύο τοπικά ακρότατα:

$$f_\mu'(x) = 1 - 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{lll} x_1 = +\sqrt{3}/3 & \Rightarrow & \mu_1 = -2\sqrt{3}/9 \\ x_2 = -\sqrt{3}/3 & \Rightarrow & \mu_2 = +2\sqrt{3}/9 \end{array} \right.$$

συνεπώς, εμφανίζονται δυο περιπτώσεις μηδενισμού της παραγώγου του ρυθμού μεταβολής σε κατάσταση ισορροπίας:

$$\left| \begin{array}{lllll} \mu_1 = -2\sqrt{3}/9 & : & x_1 = +\sqrt{3}/3 & \Rightarrow & f_{\mu_1}(x_1) = f_{\mu_1}'(x_1) = 0 \\ \mu_2 = +2\sqrt{3}/9 & : & x_2 = -\sqrt{3}/3 & \Rightarrow & f_{\mu_2}(x_2) = f_{\mu_2}'(x_2) = 0 \end{array} \right.$$



Οι καταστάσεις ισορροπίας για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου.

Οι δυο αυτές τιμές της παραμέτρου μ προκαλούν διακλάδωση και συνακόλουθα τοπολογική αλλαγή της εξελικτικής ροής. Προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

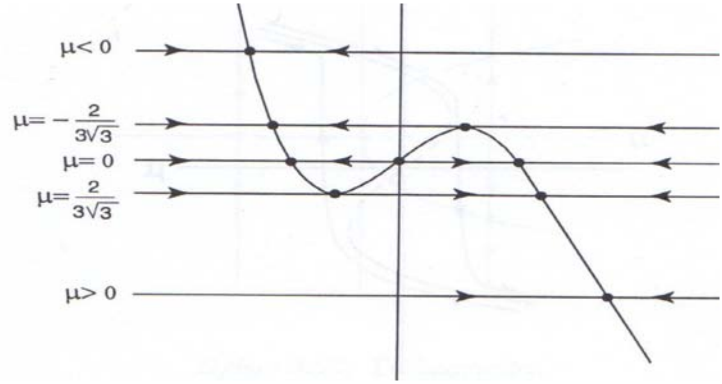
$\mu < -2\sqrt{3}/9 \quad \Rightarrow$ μια ευσταθής κατάσταση ισορροπίας,

$\mu = -2\sqrt{3}/9 \quad \Rightarrow$ μια ευσταθής κατάσταση ισορροπίας & ένα σημείο διακλάδωσης,

$-2\sqrt{3}/9 < \mu < 2\sqrt{3}/9 \quad \Rightarrow$ μια ασταθής και δυο ευσταθείς καταστάσεις ισορροπίας,

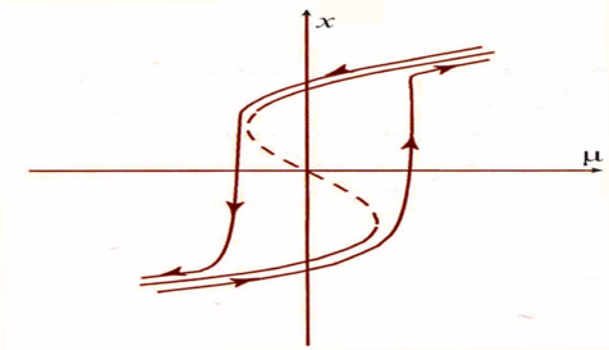
$\mu = +2\sqrt{3}/9 \quad \Rightarrow$ μια ευσταθής κατάσταση ισορροπίας & ένα σημείο διακλάδωσης,

$\mu > +2\sqrt{3}/9 \quad \Rightarrow$ μια ευσταθής κατάσταση ισορροπίας.



Οι καταστάσεις ισορροπίας για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου.

Άσκηση 5. Αν η εξέλιξη ενός φυσικού συστήματος διέπεται από την προηγούμενη παραμετρική διαφορική εξίσωση, όπου $\mu \in \mathbb{R}$ εκφράζει την εξάρτησή του από κάποια παράμετρο, ερμηνεύστε τις διακυμάνσεις της δυναμικής του συμπεριφοράς, γνωρίζοντας ότι τη στιγμή $t = 0$ το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση $x(0)$.*



Το φαινόμενο της υστέρησης.

---

* **Υπόδειξη.** Αν στο μ δοθεί μια τιμή γνήσια μεγαλύτερη από την κρίσιμη τιμή $\mu_2 = 2\sqrt{3}/9$, το σύστη-μα, ανεξάρτητα από την αρχική του κατάσταση, θα πλησιάσει γρήγορα στη μοναδική ελκτική κατά-σταση ευσταθούς ισορροπίας $x(t) \equiv x^+$. Αν τώρα η τιμή του μ αρχίσει να μειώνεται αργά, το σύστημα θα εξακολουθεί να παραμένει κοντά σε αυτή την ισορροπία ακόμη και αν η τιμή του μ φτάσει και πέ-σει κάτω από την κρίσιμη τιμή μ_2. Αν η τιμή του μ συνεχίσει να μειώνεται, και εφόσον φτάσει και πέ-σει κάτω από την κρίσιμη τιμή $\mu_1 = -2\sqrt{3}/9$, εμφανίζεται η άλλη μοναδική ελκτική κατάσταση ευστα-θούς ισορροπίας $x(t) \equiv x^-$ και τότε το σύστημα *μεταπηδά* από τον άνω στον κάτω κλάδο του γραφήμα-τος. Αν τώρα αντιστραφεί η διαδικασία και η παράμετρος μ, ξεκινώντας από μια τιμή γνήσια μικρό-τερη από την κρίσιμη τιμή $\mu_1 = -2\sqrt{3}/9$, αρχίσει να αυξάνει αργά, τότε η εξέλιξη του συστήματος θα είναι τελείως διαφορετική. Αυτό οφείλεται στο ότι το σύστημα θα εξακολουθήσει να παραμένει κοντά στον κάτω κλάδο ακόμη και όταν η τιμή του μ ξεπεράσει την κρίσιμη τιμή μ_1 και μόνο όταν φτάσει την κρίσιμη τιμή μ_2 θα μεταπηδήσει στον άνω κλάδο του γραφήματος. Έτσι, το σύστημα δεν *αντιλαμ-βάνεται* το ενδιάμεσο τμήμα του γραφήματος μεταξύ των δυο κλάδων και αντί να επανακάμψει στην αναμενόμενη εξελικτική του πορεία ακολουθεί ένα *βρόγχο υστέρησης* (*hysteresis loop*), βλ. Σχήμα.

• ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8. Διαταραχή της πληθυσμιακής δυναμικής.

Στο μονοδιάστατο χώρο καταστάσεων $\mathfrak{U} = \mathbb{R}$ θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση που ορίζεται για κάθε τιμή της παραμέτρου $\mu \in \mathbb{R}$ ως εξής:

$$\dot{x} = \alpha x(1-x) + \mu \,, \quad x \in \mathfrak{U} \,, \quad \alpha > 0 \,.^*$$

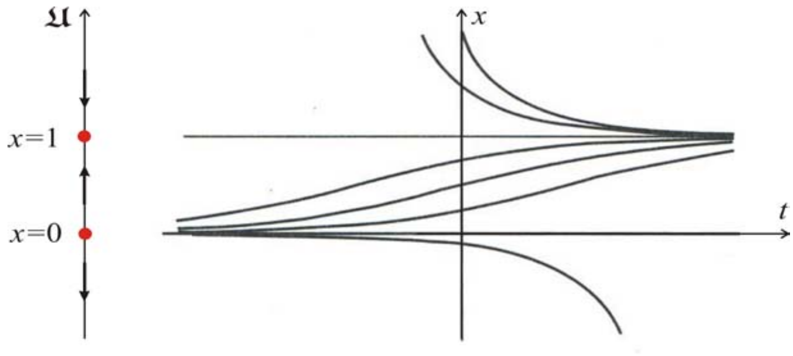
Η αδιατάρακτη περίπτωση $\mu = 0$ έχει ήδη εξεταστεί σε προηγούμενο παράδειγμα όπου, στην περίπτωση αυτή, κάθε αρχική κατάσταση $x_o \in \mathfrak{U}$ ορίζει τη λύση στο μέγιστο χρονικό διάστημα της ύπαρξής της ως εξής:

$$\phi_{x_o} : \mathrm{I}_{x_o} \subset \mathbb{R} \to \mathfrak{U} \,, \quad \phi_{x_o}(t) = \frac{x_o e^t}{1 - x_o + x_o e^t} \,,$$

και εμφανίζονται δυο καταστάσεις ισορροπίας:

$$x_o = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_{x_o}(t) = 0 \,, \quad \forall t \in \mathbb{R} \,, \quad \text{(απωστική ασταθής ισορροπία)},$$

$$x_o = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi_{x_o}(t) = 1 \,, \quad \forall t \in \mathbb{R} \,, \quad \text{(ελκτική ευσταθής ισορροπία)}.$$



Πεδίο κλίσης και γραφήματα λύσεων της αδιατάρακτης διαφορικής εξίσωσης:

$$\dot{x} = \alpha x(1-x) \,, \quad x \in \mathfrak{U} \,, \quad \alpha > 0 \,.$$

Το ερώτημα που τίθεται αφορά στην τοπολογική διαφοροποίηση της δυναμικής στο χώρο των καταστάσεων κατά τη σταθερή διαταραχή του ρυθμού μεταβολής:

$$f_\mu : \mathfrak{U} \to \mathbb{R} \,, \quad f_\mu(x) = \alpha x(1-x) - \mu \,, \quad \mu \in \mathbb{R}^+ \,, \quad (\alpha = 1) \,.$$

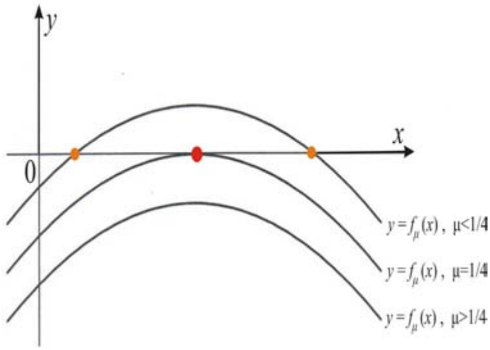
---

* Πρόκειται για απλουστευμένη εκδοχή του *λογιστικού πληθυσμιακού προτύπου* στο οποίο υπάγονται τα προβλήματα εξέλιξης πληθυσμών με σταθερή εξωτερική διαταραχή, (Λογιστικό μοντέλο Verhulst).

Ερώτημα 13. Θα μπορούσατε να προσδιορίσετε τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης:

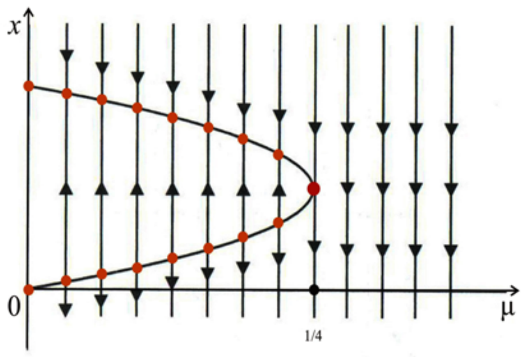
$$\dot{x} = \alpha x(1-x) - \mu \,, \quad x \in \mathfrak{U} = \mathbb{R} \,, \quad \alpha = 1, \; \mu > 0 \;;$$

Η συνάρτηση αυτή έχει δυο σημεία μηδενισμού $x = x_1$ και $x = x_2$ όταν μ<¼, ένα σημείο μηδενισμού $x = x_0$ όταν μ=¼ και κανένα σημείο μ ηδενισμού όταν μ>¼. Συνεπώς, όταν μ<¼ εμφανίζονται δυο καταστάσεις ισορροπίας, μια απωστική $x = x_1$ και μια ελκτική $x = x_2$, αφού αντίστοιχα ισχύει: $f_\mu'(x_1) > 0$ και $f_\mu'(x_2) < 0$.



Το γράφημα της συνάρτησης του ρυθμού μεταβολής για τις τιμές της παραμέτρου: μ<¼, μ=¼, μ>¼.

Όσο η τιμή του μ πλησιάζει το ¼ τόσο οι δυο αυτές καταστάσεις ισορροπίας πλησιάζουν μεταξύ τους έως ότου ταυτιστούν όταν μ=¼ και εξαφανιστούν όταν μ>¼.
Η τιμή μ=¼ προκαλεί την εμφάνιση μιας ιδιόμορφης δυναμικής συμπεριφοράς, μιας *διακλάδωσης*, αφού οι παράπλευρες τιμές ορίζουν διαφορετικές δυναμικές συμπεριφορές, από τη μια ύπαρξη και από την άλλη ανυπαρξία καταστάσεων ισορροπίας, άρα μεταβολή της τοπολογικής φύσης των εξελικτικών ροών.



Διάγραμμα διακλάδωσης στο οποίο εμφανίζονται οι τοπολογικές μεταβολές της δυναμικής.

Τώρα, το ερώτημα που τίθεται είναι πιο περίπλοκο, αλλά πολύ πιο σημαντικό για τις εφαρμογές, αφού αντί μιας σταθερής διαταραχής θέλουμε να εξετάσουμε τις επιπτώσεις στην πληθυσμιακή εξέλιξη από μια χρονικά περιοδική διαταραχή του ρυθμού μεταβολής:

$$f_\mu : \mathbb{R} \times \mathfrak{U} \to \mathbb{R} \, , \quad f_\mu(t,x) = \alpha x(1-x) - \mu\left(1 + sin2\pi t\right) , \;\; \mu \in \mathbb{R}^+ , \;\; (\alpha = 1) \, .$$

☑ Προβληματισμός: Περιοδική διαταραχή της πληθυσμιακής δυναμικής.

Όταν η εξέλιξη ενός φυσικού συστήματος επηρεάζεται από χρονικά μεταβαλλόμενους εξωτερικούς παράγοντες τότε, στη διαφορική εξίσωση που διέπει την εξέλιξη, ο χρόνος υπεισέρχεται άμεσα ως ανεξάρτητη μεταβλητή και έτσι ο ρυθμός μεταβολής ορίζεται στο *διευρυμένο χώρο καταστάσεων*, δηλαδή στο καρτεσιανό γινόμενο του χρονικού άξονα με το χώρο των καταστάσεων:

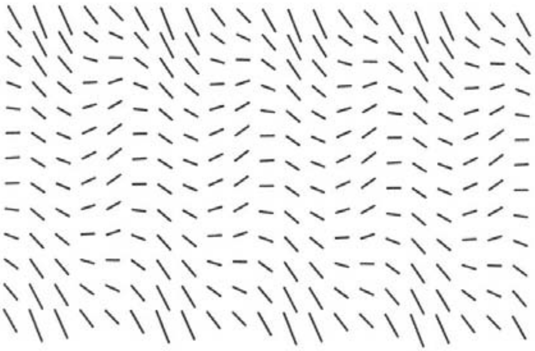
$$f : \mathbb{R}\times\mathfrak{U} \to \mathbb{R}, \quad y = f(t,x),$$

και η διαφορική εξίσωση διατυπώνεται ως εξής:

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x\in\mathfrak{U},\ t\in\mathbb{R}\,.^{*}$$

Σε κάθε σημείο του διευρυμένου χώρου καταστάσεων $(t_o, x_o)\in\mathbb{R}\times\mathfrak{U}$ προσαρτάται η ευθεία της οποίας η κλίση δίνεται από την αριθμητική τιμή $f(t_o, x_o)$ και έτσι ορίζεται το πεδίο κλίσης. Το παράδειγμά μας, για κάθε τιμή της παραμέτρου μ, εντάσσεται σε αυτό το πλαίσιο και η εξέλιξη διέπεται από τη διαφορική εξίσωση:

$$\dot{x} = \alpha x(1-x) - \mu\left(1+sin2\pi t\right), \quad x\in\mathfrak{U}\subseteq\mathbb{R}, \ \alpha>0,\ \mu>0\,.$$



Το πεδίο κλίσεων της μη αυτόνομης διαφορικής εξίσωσης στο διευρυμένο χώρο καταστάσεων για μια δεδομένη τιμή της παραμέτρου $\mu>0$ και για $\alpha=1$.

Η χρονική περιοδικότητα του ρυθμού μεταβολής της πληθυσμιακής εξέλιξης:

$$f_\mu(t,x) = f_\mu(t+1,x), \quad \forall x\in\mathfrak{U}, \forall t\in\mathbb{R}, \ \mu\in\mathbb{R}^+,$$

υποδεικνύει ότι, αν $x_o\in\mathfrak{U}$ τότε για να προσδιοριστεί η λύση:

$$x = x(t), \quad x(0)=x_o : \quad \dot{x}(t) = f_\mu\left(t, x(t)\right), \quad \forall t\in \mathrm{I}_{x_o}\subseteq\mathbb{R},$$

[*] Οι διαφορικές εξισώσεις στις οποίες υπεισέρχεται άμεσα ο χρόνος ως ανεξάρτητη μεταβλητή καλούνται *μη αυτόνομες* σε αντιπαράθεση προς τις *αυτόνομες* όπου ο χρόνος υπεισέρχεται έμμεσα. Τις μη αυτόνομες διαφορικές εξισώσεις θα τις εξετάσουμε αναλυτικά σε επόμενη θεματική ενότητα.

αρκεί, στο πρώτο μοναδιαίο χρονικό διάστημα, να γνωρίζουμε τη λύση:

$$\dot{x}_1 = x_1(t)\,,\; x_1(0) = x_o : \quad \dot{x}_1(t) = f_\mu\left(t, x_1(t)\right), \quad 0 \le t \le 1\,.$$

Πράγματι, η λύση αυτή θα επεκταθεί στο επόμενο μοναδιαίο χρονικό διάστημα θεωρώντας τη λύση:

$$\dot{x}_2 = x_2(t)\,,\; x_2(0) = x_1(1) : \quad \dot{x}_2(t) = f_\mu\left(t, x_2(t)\right), \quad 0 \le t \le 1\,.$$

και θέτοντας:

$$x_1(t+1) = x_2(t)\,, \quad 0 \le t \le 1\,,$$

αφού:

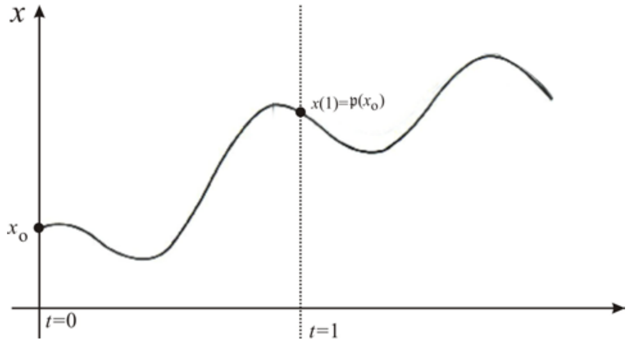
$$\dot{x}_1(t+1) = \dot{x}_2(t) = f_\mu\left(t, x_2(t)\right) = f_\mu\left(t+1, x_1(t+1)\right), \quad 0 \le t \le 1\,.$$

Η αλγοριθμική αυτή διαδικασία οδηγεί στην επέκταση αυτής της λύσης σε όλα τα μοναδιαία διαστήματα της χρονικής εξέλιξης. Πώς όμως θα μάθουμε τη λύση στο πρώτο χρονικό διάστημα $0 \le t \le 1$; Αν τουλάχιστο γνωρίζαμε την τιμή της τη στιγμή $t=1$; Τότε θα κατασκευάζαμε την *απεικόνιση Poincaré*:

$$\mathfrak{p} : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}\,, \quad \mathfrak{p}(x_o) := x(1)\,.$$

Συνθέτοντας την απεικόνιση αυτή με τον εαυτό της k φορές προκύπτει η τιμή της λύσης τη στιγμή $t = k \in \mathbb{N}$, δηλαδή η κατάσταση στην οποία θα βρεθεί το σύστη-μα τη στιγμή αυτή για οποιαδήποτε αρχική κατάσταση $x_o \in \mathfrak{U}$:

$$\mathfrak{p}\circ\mathfrak{p}(x_o) = \mathfrak{p}(x(1)) = x(2)\,, \quad \mathfrak{p}\circ\mathfrak{p}\circ\mathfrak{p}(x_o) = \mathfrak{p}\circ\mathfrak{p}(x(1)) = \mathfrak{p}(x(2)) = x(3)\,, \ldots$$ [*]



Απεικόνιση Poincaré της διαφορικής εξίσωσης:
$\dot{x} = \alpha\, x(1-x) - \mu\left(1+\sin 2\pi t\right), \quad x \in \mathfrak{U}\,, \quad \alpha = 5,\; \mu = 0.8\,.$

[*] Η συνεχής δυναμική που ορίζεται από τη διαφορική εξίσωση ανάγεται σε μια *διακριτή δυναμική* που ορίζεται από μια απεικόνιση στο χώρο των καταστάσεων και έτσι διαβλέπουμε το πεπρωμένο κάθε λύσης και τη μορφή της εξελικτικής συμπεριφοράς στο χώρο των καταστάσεων.

Εντούτοις, μπορούμε να εντοπίσουμε τις αρχικές καταστάσεις που ορίζουν τις περιοδικές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης γιατί ακριβώς αυτές οι καταστάσεις είναι τα σταθερά σημεία της απεικόνισης Poincaré:

$$x_{\text{o}} \in \mathfrak{U} : \quad \mathfrak{p}(x_{\text{o}}) = x_{\text{o}} \,.$$

Πράγματι, αν $x_{\text{o}} \in \mathfrak{U}$ και $x(0) = x_{\text{o}}$ τότε:

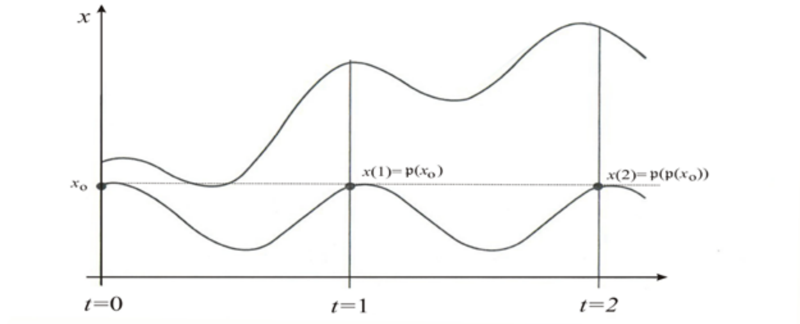
$$\mathfrak{p}(x_{\text{o}}) = x_{\text{o}} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{p}^k(x_{\text{o}}) = x_{\text{o}} \,,\ k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad x(k) = x_{\text{o}} \,,\ k \in \mathbb{N} \,,$$

και για κάθε χρονική στιγμή μεταξύ $t = 0$ και $t = 1$, ισχύει:

$$x(t) = x(t+1) = \ldots = x(t+k) \,, \quad k \in \mathbb{N} \,,$$

άρα η λύση που ορίζεται από την αρχική συνθήκη $x(0) = x_{\text{o}}$ είναι συνάρτηση περιοδική ως προς το χρόνο με περίοδο $T = 1$. Όμως, πόσα και ποια σταθερά σημεία έχει η απεικόνιση Poincaré της λογιστικής πληθυσμιακής εξέλιξης όταν υφίσταται περιοδική διαταραχή:

$$\dot{x} = f(t, x) = \alpha x(1 - x) - \mu\big(1 + \sin 2\pi t\big)\,;$$



Περιοδική και μη περιοδική λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$\dot{x} = \alpha x(1 - x) - \mu\big(1 + \sin 2\pi t\big)\,, \quad x \in \mathfrak{U}\,, \quad \alpha = 5,\ \mu = 0.8\,.$$

Προκειμένου να αντιληφθούμε την εξάρτηση των λύσεων αυτής της διαφορικής εξίσωσης από την επιλογή της εκάστοτε αρχικής κατάστασης θα θεωρήσουμε την άγνωστη σε μας εξελικτική της ροή*:

$$\mathfrak{g} : \mathbb{R} \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{U} \,, \quad \mathfrak{g}(t, x_{\text{o}}) := \phi_{x_{\text{o}}}(t)\,.$$

Όμως, για κάθε δεδομένη αρχική κατάσταση $x_{\text{o}} \in \mathfrak{U}$, ξέρουμε ότι ισχύει:

$$\partial_t \mathfrak{g}(t, x_{\text{o}}) = f(t, \mathfrak{g}(t, x_{\text{o}}))\,, \quad \mathfrak{g}(0, x_{\text{o}}) = x_{\text{o}}\,,$$

* Η κατασκευή της εξελικτικής της ροής της μη αυτόνομης δυναμικής στο πεδίο ύπαρξής της είναι πιο περίπλοκη από εκείνη της αυτόνομης δυναμικής που μελετήσαμε έως τώρα.

και η απεικόνιση Poincaré ορίζεται ως εξής:

$$\mathfrak{p} : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U} \,, \quad \mathfrak{p}(x_o) := \mathfrak{g}(1, x_o) \,.$$

Το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού υποδεικνύει ότι:

$$\mathfrak{g}(t, x_o) = x_o + \int_0^t f(s, \mathfrak{g}(s, x_o))\, ds$$

άρα

$$\partial_{x_o} \mathfrak{g}(t, x_o) = 1 + \int_0^t \partial_{\mathfrak{g}} f(s, \mathfrak{g}(s, x_o))\, \partial_{x_o} \mathfrak{g}(s, x_o)\, ds \,.$$

Θέτουμε

$$w(t) = \partial_{x_o} \mathfrak{g}(t, x_o)$$

και προφανώς:

$$w(0) = \partial_{x_o} \mathfrak{g}(0, x_o) = 1 \,.$$

Από την παράγωγο:

$$w'(t) = \partial_{\mathfrak{g}} f(t, \mathfrak{g}(t, x_o))\, \partial_{x_o} \mathfrak{g}(t, x_o) = \partial_{\mathfrak{g}} f(t, \mathfrak{g}(t, x_o))\, w(t)$$

προκύπτει η διαφορική εξίσωση:

$$w'(t) = \partial_{\mathfrak{g}} f(t, \mathfrak{g}(t, x_o))\, w(t) \,, \quad w(0) = 1 \,,$$

που υποδεικνύει ότι:

$$w(t) = exp \int_0^t \partial_{\mathfrak{g}} f(s, \mathfrak{g}(s, x_o))\, ds \,.$$

Συνεπώς

$$\partial_{x_o} \mathfrak{g}(1, x_o) = exp \int_0^1 \partial_{x_o} f(s, \mathfrak{g}(s, x_o))\, ds$$

άρα

$$\mathfrak{p}'(x_o) = exp \int_0^1 \partial_{x_o} f(s, \mathfrak{g}(s, x_o))\, ds > 0 \,.$$

Η απεικόνιση Poincaré της διαφορικής μας εξίσωσης είναι λοιπόν γνησίως αύξουσα και προκειμένου να διαπιστώσουμε προς τα πού το γράφημά της στρέφει τα κοίλα υπολογίζουμε τη 2^{η} παράγωγό της:

$$\mathfrak{p}''(x_o) = \partial_{x_o} \left(\int_0^1 \partial_{x_o} f(s, \mathfrak{g}(s, x_o)) ds \right) exp \int_0^1 \partial_{x_o} f(s, \mathfrak{g}(s, x_o)) ds =$$

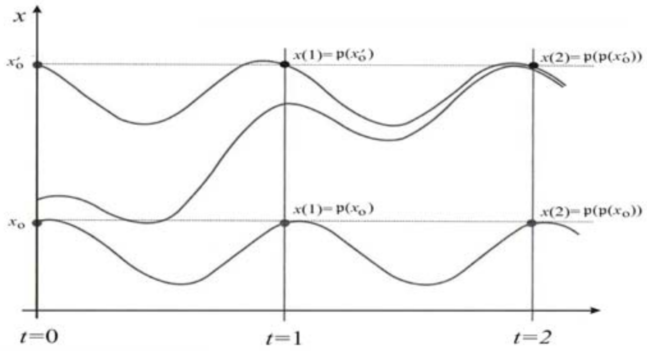
$$= \mathfrak{p}'(x_o) \left(\int_0^1 \partial_{x_o}^2 f(s, \mathfrak{g}(s, x_o))\, exp \left(\int_0^s \partial_{x_o} f(u, \mathfrak{g}(u, x_o)) du \right) ds \right) < 0$$

αφού

$$f(t, x) = \alpha x(1 - x) - \mu\left(1 + \sin 2\pi t\right) \quad \Rightarrow \quad \partial_{x_o}^2 f(t, x) \equiv -2\alpha < 0 \,.$$

Άρα, η απεικόνιση Poincaré έχει το πολύ δυο σταθερά σημεία αφού το γράφημά της τέμνει το πολύ σε δυο σημεία τη διαγώνιο του καρτεσιανού γινομένου $\mathfrak{U}\times\mathfrak{U}$. Συνεπώς, υπάρχουν το πολύ δυο καταστάσεις που ορίζουν περιοδικές λύσεις:

$$x_o\in\mathfrak{U}:\quad \mathfrak{p}(x_o)=x_o \quad\Rightarrow\quad \mathfrak{g}(t+1,x_o)=\mathfrak{g}(t,x_o) \quad\Rightarrow\quad \phi_{x_o}(t+1)=\phi_{x_o}(t)\,,$$
$$x'_o\in\mathfrak{U}:\quad \mathfrak{p}(x'_o)=x'_o \quad\Rightarrow\quad \mathfrak{g}(t+1,x'_o)=\mathfrak{g}(t,x'_o) \quad\Rightarrow\quad \phi_{x'_o}(t+1)=\phi_{x'_o}(t)\,.$$

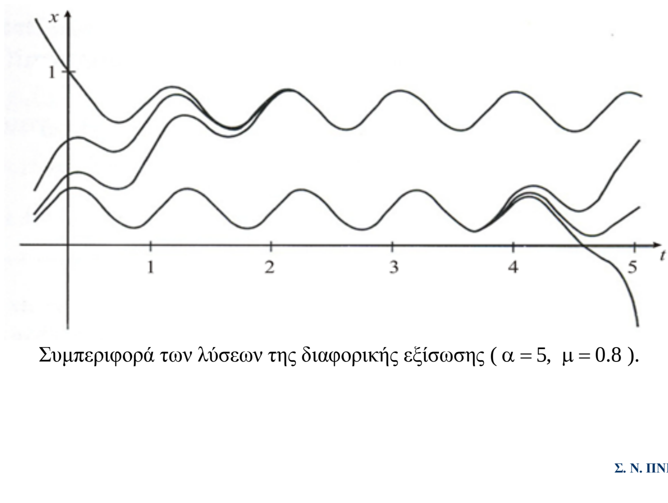


Οι δυο περιοδικές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης ($\alpha=5,\ \mu=0.8$).

Σημειώνοντας ότι:

$$f_\mu(t,x)=\alpha x(1-x)-\mu\left(1+sin2\pi t\right) \quad\Rightarrow\quad \partial_\mu f_\mu(t,x_o)=-(1+sin2\pi t)$$

διαπιστώνουμε ότι $\partial_\mu f_\mu(t,x_o)<0$ εκτός από την περίπτωση $t=3/4$. Συνεπώς, όσο η τιμή της παραμέτρου μ αυξάνει τόσο η απεικόνιση Poincaré φθίνει γρηγορό-τερα έχοντας δυο σταθερά σημεία που σημαίνει ύπαρξη δυο περιοδικών λύσεων. Έως ότου φτάσουμε σε μια τιμή της παραμέτρου $\mu=\mu_o$ οπότε εμφανίζεται μόνο ένα σταθερό σημείο άρα μόνο μια περιοδική λύση και πέρα από αυτή την τιμή δεν υπάρχει πια σταθερό σημείο άρα ούτε περιοδική λύση. Παρατηρούμε ότι όταν εμφανίζονται δυο σταθερά σημεία άρα δυο περιοδικές λύσεις τότε η μια επιδρά ελκτικά και η άλλη απωστικά στις υπόλοιπες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης.



Συμπεριφορά των λύσεων της διαφορικής εξίσωσης ($\alpha=5,\ \mu=0.8$).

Πρόβλημα 1. Η εξέλιξη ενός πληθυσμού στο πέρασμα του χρόνου.

Ένας πληθυσμός ψαριών εξελίσσεται σε μια λίμνη και κάθε χρονική στιγμή το πλήθος τους δηλώνεται με τον αριθμό $x(t)$. Η εξέλιξη αυτή διέπεται από την εξίσωση:

$$\dot{x} = f_{\mu}(x)$$

όπου

$$f_{\mu}(x) = \alpha x - \beta x^2 - \mu$$

με α και β θετικές σταθερές και μ θετική παράμετρο που δηλώνει το ρυθμό αλίευσης των ψαριών. Θέλουμε να εξετάσουμε το πώς η αλίευση επηρεάζει την εξέλιξη του πληθυσμού των ψαριών.

- Αν $0 < \mu \le \alpha^2 / 4\beta$, δείξτε ότι υπάρχει κρίσιμη τιμή x_o τέτοια ώστε:
  - αν $x(0) < x_o$ ο πληθυσμός των ψαριών θα εκλείψει σε πεπερασμένο χρόνο.
  - αν $x(0) > x_o$ ο πληθυσμός των ψαριών θα τείνει σε κατάσταση ισορροπίας.
- Αν $\mu > \alpha^2 / 4\beta$, δείξτε ότι ο πληθυσμός των ψαριών θα εκλείψει ανεξάρτητα από το ποιο ήταν το αρχικό πλήθος $x(0)$.
- Αν ο ρυθμός αλίευσης είναι ανάλογος του πλήθους των ψαριών:

  $$f_{\mu}(x) = \alpha x - \beta x^2 - \mu x$$

  και $\alpha < \mu$, δείξτε ότι με την πάροδο του χρόνου ο πληθυσμός θα οδηγηθεί σε εξαφάνιση. Τι θα συμβεί στις περιπτώσεις: $\alpha = \mu$ και $\alpha > \mu$;
- Τι μπορείτε να προβλέψετε για την εξέλιξη του πληθυσμού των ψαριών αν ο ρυθμός αλίευσης είναι περιοδικός:

  $$f_{\mu}(x) = \alpha x - \beta x^2 - \mu(1 + sin 2\pi t)\,;$$

ΙΙ. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

Τα παραδείγματα που ακολουθούν αφορούν δισδιάστατους χώρους καταστάσεων όπου ο νόμος εξέλιξης εκφράζεται με ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων της μορφής:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2)\,, \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2)\,.$$

• ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Γραμμική δυναμική - αποσυζευγμένες εξισώσεις.

Θεωρούμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων που ορίζεται, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$, ως εξής:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = \alpha\, x_2 \end{cases} \qquad (x_1, x_2) = x \in \mathfrak{U} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,.$$

Πρόκειται για σύστημα ανεξάρτητων διαφορικών εξισώσεων και για κάθε δεδομένη αρχική κατάσταση προκύπτει η αντίστοιχη λύση:

$$\phi_{x_o} : \mathbb{R} \to \mathfrak{U}\,, \quad \phi_{x_o}(t) = \left(x_{01}\, e^{t},\, x_{02}\, e^{\alpha t} \right), \quad x_o = (x_{01}, x_{02}) \in \mathfrak{U}\,.$$

Η μονοπαραμετρική ομάδα αποτελείται από τους γραμμικούς ισομορφισμούς:*

$$\mathfrak{g}^{t} : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}\,, \quad \mathfrak{g}^{t}(x_o) = \left(x_{01}\, e^{t},\, x_{02}\, e^{\alpha t} \right), \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

και δρα στο χώρο των καταστάσεων ως εξής:

$$\mathfrak{g}^{t}(x_o) = \begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}.$$

Προφανώς πληρούται η συνθήκη του ντετερμινισμού:

$$\mathfrak{g}^{t+t'}(x_o) = \mathfrak{g}^{t'} \circ \mathfrak{g}^{t}(x_o)\,, \quad \forall x_o \in \mathfrak{U}\,, \ \forall t, t' \in \mathbb{R}\,.$$

Η εξελικτική ροή ορίζεται ως εξής:

$$\mathfrak{g} : \mathbb{R} \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}\,, \quad \mathfrak{g}(t, x_o) = \left(x_{01}\, e^{t},\, x_{02}\, e^{\alpha t} \right),$$

και κάθε δεδομένη κατάσταση ορίζει την τροχιά:

$$\mathcal{O}_{x_o} = \left\{ \mathfrak{g}(t, x_o) \in \mathfrak{U} \,/\, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad x_o \in \mathfrak{U}\,.$$

---

* Η μονοπαραμετρική ομάδα αποσυντίθεται σε ευθύ άθροισμα δυο μονοδιάστατων μονοπαραμετρικών ομάδων οι οποίες αποτελούνται αντίστοιχα από τις μονοδιάστατες ομοθεσίες λόγου e^{t} και $e^{\alpha t}$ της πραγματικής ευθείας και δρουν στον οριζόντιο και τον κατακόρυφο άξονα του ευκλείδειου επιπέδου.

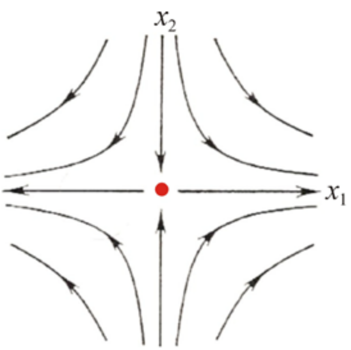
Οι τροχιές εξελίσσονται μέσα στις επίπεδες καμπύλες που ορίζονται ως εξής:

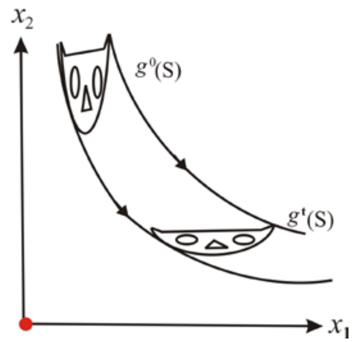
$$|x_2| = c\,|x_1|^{\alpha}\,.$$

Η αρχή των αξόνων αποτελεί τη μοναδική κατάσταση ισορροπίας για όλες τις τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ εκτός από την τιμή α=0 οπότε εμφανίζονται άπειρες άλλες καταστάσεις ισορροπίας. Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- $\alpha < 0$: **Σάγμα επικεντρωμένο στην κατάσταση ισορροπίας.**

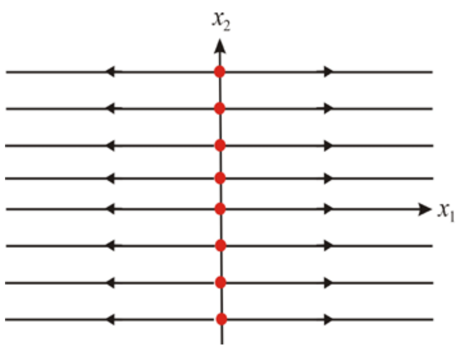
Προκύπτουν υπερβολικές τροχιές τοποθετημένες στα τεταρτημόρια του συστήματος των αξόνων και επιπλέον οι τέσσερις ημιάξονες είναι επίσης τροχιές από τις οποίες οι δυο κατακόρυφες έλκονται από την κατάσταση ισορροπίας και οι δυο οριζόντιες απωθούνται από αυτήν. Το σύνολο των τροχιών καλείται *σάγμα* επικεντρωμένο στην κατάσταση ισορροπίας.

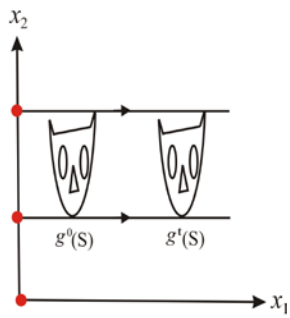




Τροχιές στο χώρο των καταστάσεων $\alpha < 0$ Ροή στο χώρο των καταστάσεων

- $\alpha = 0$: Κάθε σημείο του κατακόρυφου άξονα αποτελεί κατάσταση ισορροπίας. Από κάθε κατάσταση ισορροπίας εξέρχονται απωστικά και παράλληλα προς τον οριζόντιο άξονα δυο ημιευθειακές τροχιές αντίθετης φοράς.

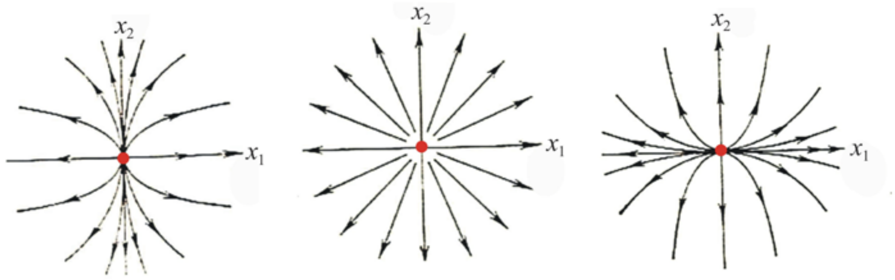




Τροχιές στο χώρο των καταστάσεων $\alpha = 0$ Ροή στο χώρο των καταστάσεων

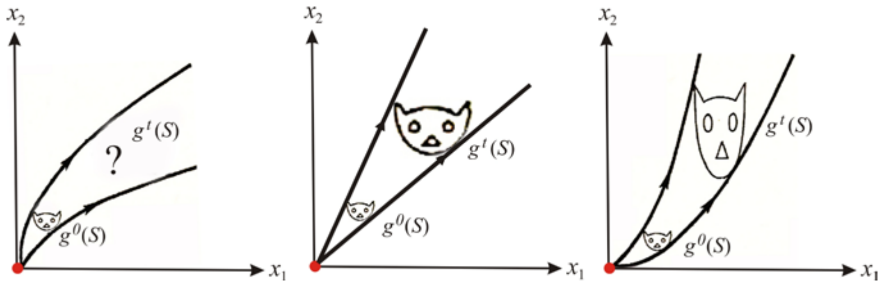
- $\alpha > 0$: **Κόμβος επικεντρωμένος στην κατάσταση ισορροπίας.**

Προκύπτουν παραβολικές τροχιές απωθούμενες από την κατάσταση ισορροπίας οι οποίες εξέρχονται εφαπτομενικά προς τον κατακόρυφο άξονα όταν α<1, προς τον οριζόντιο άξονα όταν α>1 και στην περίπτωση α=1 είναι ακτινικές. Το σύνολο των τροχιών καλείται *κόμβος* επικεντρωμένος στην κατάσταση ισορροπίας.



$0 < \alpha < 1$ $\alpha = 1$ $1 < \alpha$

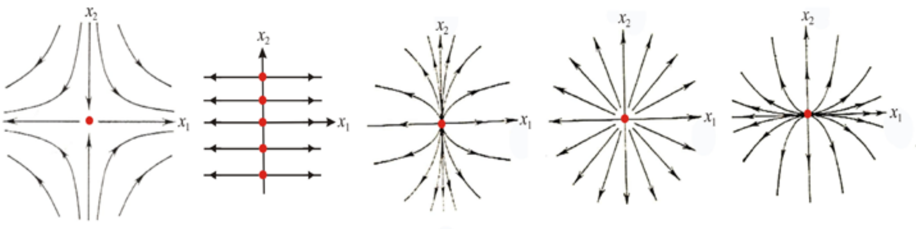
Τροχιές στο χώρο των καταστάσεων



$0 < \alpha < 1$ $\alpha = 1$ $1 < \alpha$

Ροή στο χώρο των καταστάσεων.*

Άσκηση 6. Σχεδιάστε τις διαδοχικές παραμορφώσεις των τροχιών για αντίστοιχες σταδιακές μεταβολές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$. Μπορείτε να διαισθανθείτε σε ποιες τιμές της παραμέτρου αλλάζει η τοπολογική φύση των τροχιών;



* **Ερώτημα 14.** Θα μπορούσατε να σχεδιάσετε την εικόνα που λείπει στους μετασχηματισμούς ροής;

• ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Γραμμική δυναμική - αποσυζεύξιμες εξισώσεις.

Θεωρούμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων που ορίζεται ως εξής:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \qquad (x_1, x_2) = x \in \mathfrak{U} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ .$$

Πρόκειται για σύστημα συζευγμένων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων και η γραμμική αλλαγή των καρτεσιανών συντεταγμένων:

$$y_1 = x_1 + x_2 , \quad y_2 = x_1 - x_2 ,$$

προκαλεί αποσύζευξη των εξισώσεων και οδηγεί στο σύστημα:

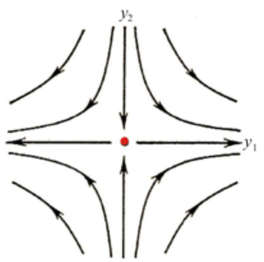
$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \ y_1 \\ \dot{y}_2 = -y_2 \end{cases} \qquad (y_1, y_2) = y \in \mathfrak{U} \ .$$

Για κάθε δεδομένη αρχική κατάσταση προκύπτει η αντίστοιχη λύση:

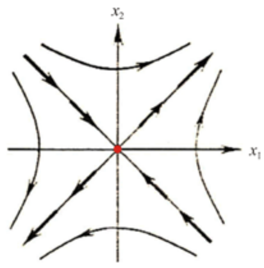
$$y_1(t) = y_1(0)\,\mathrm{e}^{t} , \quad y_2(t) = y_2(0)\,\mathrm{e}^{-t} ,$$

και επανερχόμενοι στο αρχικό σύστημα συντεταγμένων προκύπτει:

$$x_1(t) = x_1(0)\,ch\,t + x_2(0)\,sh\,t \ , \quad x_2(t) = x_1(0)\,sh\,t + x_2(0)\,ch\,t \ .$$



Τροχιές στο σύστημα συντεταγμένων (y_1, y_2)



Τροχιές στο σύστημα συντεταγμένων (x_1, x_2)

Η μονοπαραμετρική ομάδα αποτελείται από τους γραμμικούς ισομορφισμούς:

$$\mathfrak{g}^t : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U} , \quad \mathfrak{g}^t(x_o) = \left(x_{01} ch\,t + x_{02} sh\,t,\ x_{01} sh\,t + x_{02} ch\,t \right)$$

που δρουν στο χώρο των καταστάσεων ως εξής:

$$\mathfrak{g}^t(x_o) = \begin{bmatrix} ch\,t & sh\,t \\ sh\,t & ch\,t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} .$$

και κάθε δεδομένη αρχική κατάσταση ορίζει την τροχιά:

$$\mathcal{O}_{x_o} = \left\{ \mathfrak{g}(t, x_o) \in \mathfrak{U} \,/\, t \in \mathbb{R} \right\} , \quad x_o \in \mathfrak{U} \ .$$

• ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Γραμμική δυναμική - περιοδικές τροχιές.

Θεωρούμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων που ορίζεται ως εξής:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \ \ x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases} . \qquad (x_1, x_2) = x \in \mathfrak{U} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ .$$

Πρόκειται για σύστημα συζευγμένων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων και η μη γραμμική αλλαγή των καρτεσιανών συντεταγμένων:

$$x_1 = r\,cos\,\theta\,, \quad x_2 = r\,sin\,\theta\,, \qquad r > 0, \;\; \theta \in \mathbb{R}\ (mod\, 2\pi)\ ,$$

προκαλεί αποσύζευξη των εξισώσεων και οδηγεί στο σύστημα:

$$\begin{cases} \dot{r}(t) = 0 \\ \dot{\theta}(t) = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r(t) = r_{\text{o}} \\ \theta(t) = \theta_{\text{o}} - t \end{cases}$$

από όπου προκύπτει:

$$x_1(t) = r_{\text{o}}\, cos(\theta_{\text{o}} - t) \ , \quad x_2(t) = r_{\text{o}}\, sin(\theta_{\text{o}} - t)\,,$$

άρα

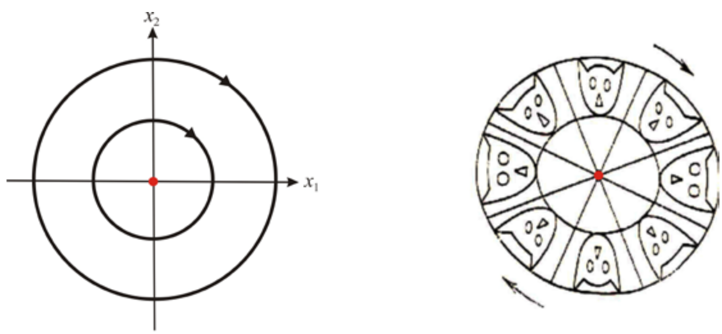
$$x_1(t) = x_1(0)\,cos\,t + x_2(0)\,sin\,t \ , \quad x_2(t) = x_2(0)\,cos\,t - x_1(0)\,sin\,t\ .$$

Η μονοπαραμετρική ομάδα ταυτίζεται με την ομάδα στροφών του ευκλείδειου επιπέδου και δρα στο χώρο των καταστάσεων ως εξής:

$$\mathfrak{g}^t(x_{\text{o}}) = \begin{bmatrix} cos\,t & sin\,t \\ -sin\,t & cos\,t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} .$$

Η περιοδικότητα των τροχιών ανταποκρίνεται στη φύση των χρονικών ομάδων:

$$\mathfrak{T}_{x_{\text{o}} \neq 0} = \left\{ t \in \mathbb{R} \ / \ \mathfrak{g}(t, x_{\text{o}}) = x_{\text{o}} \right\} = \left\{ 2\pi k \ / \ k \in \mathbb{Z} \right\}, \qquad \mathfrak{T}_{x_{\text{o}} = 0} = \left\{ t \in \mathbb{R} \ / \ \mathfrak{g}(t, 0) = 0 \right\} = \mathbb{R}\ .$$



Κυκλικές τροχιές εξελισσόμενες γύρω από το σημείο ισορροπίας στο ευκλείδειο επίπεδο και δράση της μονοπαραμετρικής ομάδας.

• ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Γραμμική δυναμική - σπειροειδείς τροχιές.

Θεωρούμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων που ορίζεται ως εξής:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \ \ x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 \end{cases} \qquad (x_1, x_2) = x \in \mathfrak{U} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ .$$

Η μη γραμμική αλλαγή των καρτεσιανών συντεταγμένων:

$$x_1 = r\,cos\,\theta\,, \quad x_2 = r\,sin\,\theta\,, \quad r > 0,\ \ \theta \in \mathbb{R}\ (mod\,2\pi)\,,$$

προκαλεί αποσύζευξη των εξισώσεων:

$$\begin{cases} \dot{r}(t) = r(t) \\ \dot{\theta}(t) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r(t) = r_{o}\,e^{t} \\ \theta(t) = \theta_{o} - t \end{cases}$$

από όπου προκύπτει:

$$x_1(t) = r_{o}\,e^{t} cos\,(\theta_{o} - t)\ , \quad x_2(t) = r_{o}\,e^{t} sin\,(\theta_{o} - t)\,,$$

άρα

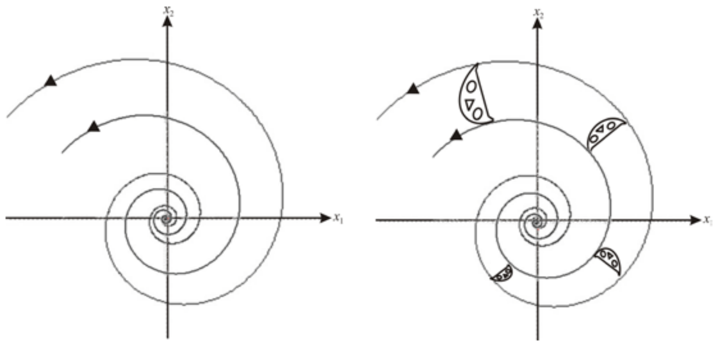
$$x_1(t) = x_1(0)\,e^{t} cos\,t + x_2(0)\,e^{t} sin\,t\ , \quad x_2(t) = x_2(0)\,e^{t} cos\,t - x_1(0)\,e^{t} sin\,t\,.$$

Η μονοπαραμετρική ομάδα αποτελείται από τις συνθέσεις ομοθεσιών λόγου e^t με τις στροφές του ευκλείδειου επιπέδου και δρα στο χώρο των καταστάσεων ως εξής:

$$\mathfrak{g}^{t}(x_{o}) = e^{t}\begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}.$$

Η μη περιοδικότητα των τροχιών ανταποκρίνεται στη φύση των χρονικών ομάδων:

$$\mathfrak{T}_{x_o \neq k\pi} = \{t \in \mathbb{R}\ /\ \mathfrak{g}(t, x_{o}) = x_{o}\} = \{0\}\,, \qquad \mathfrak{T}_{x_o = 0} = \{t \in \mathbb{R}\ /\ \mathfrak{g}(t, 0) = 0\} = \mathbb{R}\,.$$



Σπειροειδής τροχιά εξελισσόμενη γύρω από το σημείο ισορροπίας στο ευκλείδειο επίπεδο και δράση της μονοπαραμετρικής ομάδας.

☑ ΟΙ ΤΡΟΧΙΕΣ ΤΗΣ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

Θεωρούμε ένα σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς πραγματικούς συντελεστές εκφρασμένο στις καρτεσιανές συντεταγμένες που ορίζονται από μια ορθοκανονική βάση του ευκλείδειου επιπέδου:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 + b_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = a_2 x_1 + b_2 x_2 \end{cases}$$

και αναζητούμε τις λύσεις του:

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 , \quad x(t) = \left(x_1(t), x_2(t) \right) .$$

Το ερώτημα που τίθεται αφορά στην ύπαρξη και τον προσδιορισμό γραμμικών συντεταγμένων στις οποίες το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων αποκτά απλούστερη έκφραση με δυνατότητα άμεσης επίλυσής του. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε στις καρτεσιανές συντεταγμένες του ευκλείδειου επιπέδου το γραμμικό μετασχηματισμό:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} .$$

Οι καρτεσιανές συντεταγμένες ορίζονται από μια ορθοκανονική βάση και τις κανονικές προβολές:

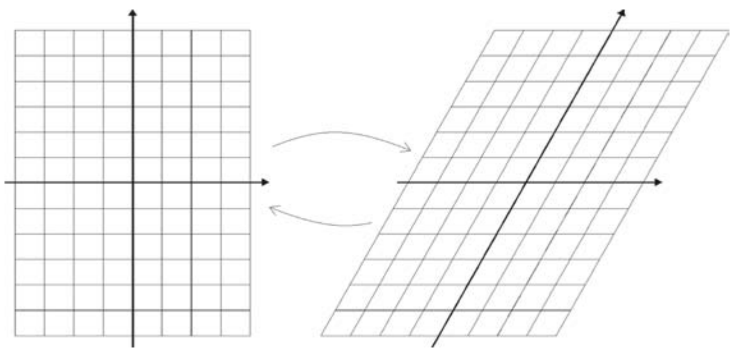
$$x_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} , \quad i = 1,2 .$$

Κάθε γραμμικός ισομορφισμός:

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

μετατρέπει την ορθοκανονική βάση σε βάση όχι απαραίτητα ορθοκανονική, οπότε οι καρτεσιανές συντεταγμένες μετασχηματίζονται σε γραμμικές συντεταγμένες:

$$y_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} , \quad y_i = x_i \circ \phi^{-1} , \quad i = 1,2 .$$



Γραμμικός μετασχηματισμός των καρτεσιανών συντεταγμένων στο ευκλείδειο επίπεδο.

Οι αλλαγές των συντεταγμένων καθορίζονται από το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[rr, shift left, "\phi"] \arrow[dr, "x_i"'] & & \mathbb{R}^2 \arrow[ll, shift left] \arrow[dl, "y_i"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

Το σύστημα των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων διατυπώνεται συμβολικά στις καρτεσιανές συντεταγμένες ως εξής:

$$\dot{\mathrm{X}}(t) = \mathrm{A}\,\mathrm{X}(t)$$

και στις νέες γραμμικές συντεταγμένες αποκτά την έκφραση:

$$\dot{\mathrm{Y}}(t) = \mathrm{B}\,\mathrm{Y}(t) .$$

Οι ιδιοτιμές κάθε γραμμικού μετασχηματισμού διατηρούνται αναλλοίωτες κατά την αλλαγή βάσης και ταυτίζονται με τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης:

$$\mathfrak{det}\left(\mathrm{A} - \lambda \mathbf{I}_{\mathbb{R}^3}\right) = 0 .$$

Θεωρώντας την ορίζουσα και το ίχνος του γραμμικού μετασχηματισμού που επίσης διατηρούνται αναλλοίωτα κατά τις αλλαγές βάσης:

$$\mathfrak{det}\,\mathrm{A} = \mathrm{a}_1\mathrm{b}_2 - \mathrm{b}_1\mathrm{a}_2 \quad \text{και} \quad \mathfrak{tr}\,\mathrm{A} = \mathrm{a}_1 + \mathrm{b}_2$$

προκύπτει η ακόλουθη έκφραση της χαρακτηριστικής εξίσωσης:

$$\lambda^2 - \left(\mathfrak{tr}\,\mathrm{A}\right)\lambda + \mathfrak{det}\mathrm{A} = 0$$

και η φύση των ιδιοτιμών καθορίζεται από το πρόσημο της διακρίνουσας:

$$\Delta(\mathrm{A}) = (\mathfrak{tr}\mathrm{A})^2 - 4\mathfrak{det}\mathrm{A} .$$

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

- $\Delta(\mathrm{A}) > 0 \;\Rightarrow\;$ ιδιοτιμές $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R},\ \lambda \neq \lambda'$,
- $\Delta(\mathrm{A}) = 0 \;\Rightarrow\;$ ιδιοτιμές $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R},\ \lambda = \lambda'$,
- $\Delta(\mathrm{A}) < 0 \;\Rightarrow\;$ ιδιοτιμές $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C},\ \lambda = \alpha + i\beta,\ \lambda' = \alpha - i\beta$.

Τώρα θα προσδιοριστούν όλες οι ενδεχόμενες τροχιές και εξελικτικές ροές της γραμμικής δυναμικής στο ευκλείδειο επίπεδο και το σκεπτικό αυτό θα γενικευθεί εύκολα στους πολυδιάστατους ευκλείδειους χώρους. Η γραμμική και τοπολογική ταξινόμηση των τροχιών και εξελικτικών ροών αποτελεί κεντρικό ζητούμενο του μαθήματος.

- **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ $\Delta(\mathrm{A}) > 0$** $\Rightarrow$ ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \neq \lambda_2$.

Στην περίπτωση αυτή προκύπτουν δυο ανεξάρτητοι ιδιοάξονες:

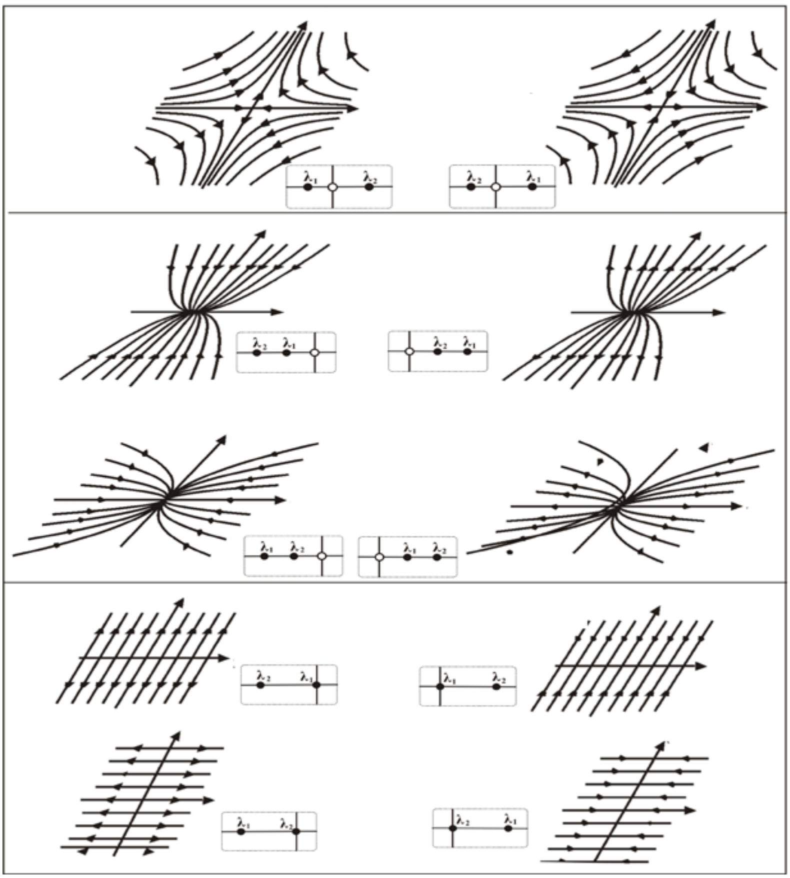
$$\mathrm{E}_{\lambda_i} = \left\{ \vec{\xi} \in \mathbb{R}^2 \,/\, \mathrm{A}\,\vec{\xi} = \lambda_i \vec{\xi} \right\}, \quad i = 1,2\,.$$

Επιλέγοντας μια βάση ιδιοδιανυσμάτων ο πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού διαγωνιοποιείται και προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

οπότε στις αντίστοιχες γραμμικές συντεταγμένες το σύστημα εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 \\ \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \Rightarrow x(t) = c_1 \vec{\xi}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{\xi}_2 e^{\lambda_2 t}\,.$$



- **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ $\Delta(\mathrm{A}) = 0$** $\Rightarrow$ ιδιοτιμές $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R},\ \lambda = \lambda'$.

Στην περίπτωση αυτή ο ιδιόχωρος είναι δισδιάστατος ή μονοδιάστατος:

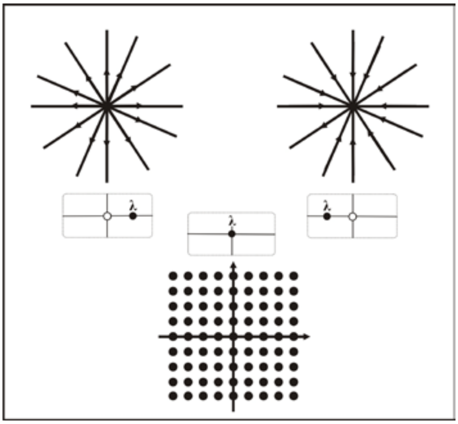
$$\mathrm{E}_\lambda = \left\{ \vec{\xi} \in \mathbb{R}^2 \,/\, \mathrm{A}\vec{\xi} = \lambda \vec{\xi} \right\}.$$

- Αν $dim\,\mathrm{E}_\lambda = 2$ τότε ο γραμμικός μετασχηματισμός εκφράζει ομοθεσία που έχει ως λόγο την τιμή της διπλής ιδιοτιμής:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

και προκύπτουν απευθείας οι λύσεις του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda x_1 \\ \dot{x}_2 = \lambda x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = x_{1o} e^{\lambda t} \\ x_2(t) = x_{2o} e^{\lambda t} \end{cases} \Rightarrow x(t) = x_o e^{\lambda t}.$$



Οι τροχιές είναι οι ημιευθείες που ανάλογα με το πρόσημο της ιδιοτιμής απομακρύνονται ή πλησιάζουν ακτινωτά την αρχή του ευκλείδειου επιπέδου που αποτελεί κατάσταση ισορροπίας, ενώ στην ειδική περίπτωση μηδενικής ιδιοτιμής κάθε σημείο του επιπέδου αποτελεί κατάσταση ισορροπίας.

- Αν $dim\,\mathrm{E}_\lambda = 1$ τότε επιλέγουμε μια βάση αποτελούμενη από ένα ιδιοδιάνυσμα $\vec{\xi}$ και ένα διάνυσμα $\vec{\xi}'$ τέτοιο ώστε:

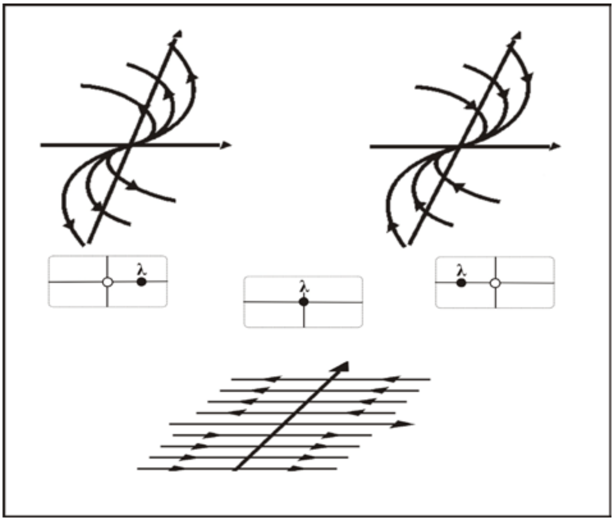
$$\mathrm{A}\vec{\xi}' = \vec{\xi} + \lambda \vec{\xi}'$$

και στη βάση αυτή ο γραμμικός μετασχηματισμός έχει τριγωνικό πίνακα:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Έτσι, προκύπτουν οι γραμμικές συντεταγμένες στις οποίες το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων αποκτά απλούστερη μορφή και υπολογίζονται απευθείας οι λύσεις:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda\, y_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 = \lambda y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = (c_1 t + c_2)\, e^{\lambda t} \\ y_2(t) = c_1 e^{\lambda t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \ldots \\ x_2(t) = \ldots \end{cases}$$



- **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ $\boldsymbol{\Delta(A) < 0}$** $\Rightarrow$ ιδιοτιμές $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C},\ \lambda = \alpha + \mathrm{i}\,\omega,\ \lambda' = \alpha - \mathrm{i}\,\omega$.

Στην περίπτωση αυτή έχουμε δυο συζυγείς μιγαδικές ιδιοτιμές και στο μιγαδικό επίπεδο προκύπτουν δυο συζυγή μιγαδικά ιδιοδιανύσματα*:

$$\vec{\zeta} = \vec{\zeta}_1 + \mathrm{i}\,\vec{\zeta}_2\,, \quad \vec{\zeta}' = \vec{\zeta}_1 - \mathrm{i}\,\vec{\zeta}_2\,.$$

Τα πραγματικά διανύσματα:

$$\vec{\xi}_1 = \vec{\zeta} + \vec{\zeta}' = 2\vec{\zeta}_1\,, \quad \vec{\xi}_2 = \mathrm{i}(\vec{\zeta} - \vec{\zeta}') = -2\vec{\zeta}_2\,,$$

συγκροτούν βάση στην οποία ο γραμμικός μετασχηματισμός εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

* Ο μιγαδικός γραμμικός μετασχηματισμός εκφράζεται στη βάση των συζυγών ιδιοδιανυσμάτων ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z_1(t) = z_1(0) e^{(\alpha + i\omega)t} \\ z_2(t) = z_2(0) e^{(\alpha - i\omega)t} \end{cases}$$

Έτσι, προκύπτουν οι γραμμικές συντεταγμένες στις οποίες το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων αποκτά απλούστερη μορφή:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha y_1 - \omega y_2 \\ \dot{y}_2 = \omega y_1 + \alpha y_2 \end{cases}.$$

Όμως, για τον υπολογισμό των λύσεων χρειάζεται να εισαχθούν νέες μη γραμμικές συντεταγμένες:[*]

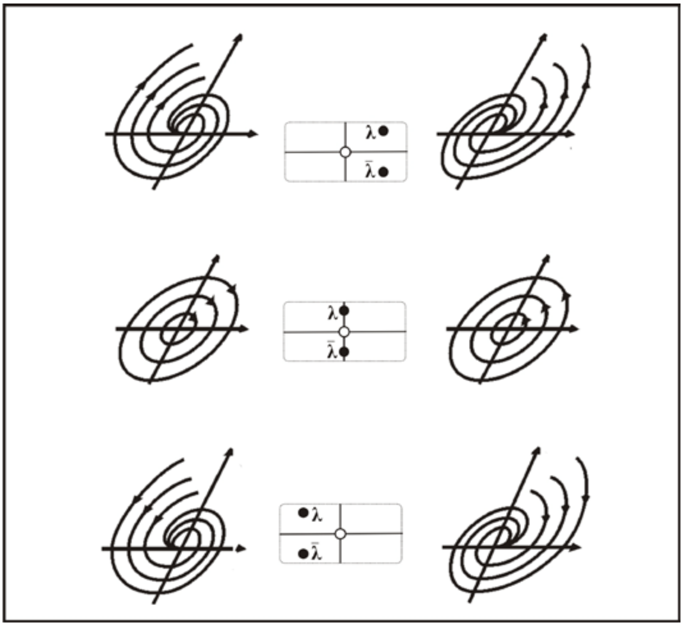
$$y_1 = r\cos\theta\,,\ \ y_2 = r\sin\theta\,,\quad r>0,\ \ \theta\in\mathbb{R}\ (mod\,2\pi)\,,$$

και προκύπτει:

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r(t) = r_o e^{\alpha t} \\ \theta(t) = \omega t + \theta_o \end{cases}$$

άρα:

$$\begin{cases} y_1(t) = r_o e^{\alpha t}\cos(\omega t + \theta_o) \\ y_2(t) = r_o e^{\alpha t}\sin(\omega t + \theta_o) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \dots \\ x_2(t) = \dots \end{cases}$$



Άσκηση 7. Προσδιορίστε την έκφραση των μονοπαραμετρικών ομάδων της δισδιάστατης γραμμικής δυναμικής και των εξελικτικών ροών της στο ευκλείδειο επίπεδο και δώστε την αλγεβρική και γεωμετρική ερμηνεία τους.

[*] Δεν πρόκειται πάντα για πολικές συντεταγμένες γιατί δεν ορίζονται απευθείας από το ορθοκανονικό σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων του ευκλείδειου επιπέδου.

ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΤΡΟΧΙΩΝ
ΤΗΣ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ