ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ακαδημαϊκό έτος 2013-14

ΜΑΘΗΜΑ

ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Καθηγητής: Σ. Πνευματικός

ΘΕΜΑ ΜΕΛΕΤΗΣ 11

Σκοπός:

Υπολογιστική πρακτική για το βαρυτικό πεδίο δυνάμεων.

1. Στην πραγματικότητα το βαρυτικό πεδίο δεν δημιουργείται από ένα υλικό σημείο αλλά από ένα σώμα και για να προσδιοριστεί η βαρυτική δύναμη πρέπει να αθροιστούν οι συνεισφορές όλων των τμημάτων του λαμβάνοντας υπόψη τη γεωμετρία του και την πυκνότητα κατανομής της μάζας του. Ο Νεύτωνας, με καθαρά γεωμετρικό σκεπτικό, απέδειξε ότι το πεδίο βαρύτητας που ορίζεται από κάθε σφαιρικό σώμα είναι ίδιο με εκείνο που θα προέκυπτε αν η μάζα του M ήταν θεωρητικά συμπυκνωμένη σημειακά στο κέντρο του. Συνεπώς, ένα ουράνιο σώμα, στο μέτρο που μπορεί να θεωρηθεί σφαιρικό, ορίζει βαρυτικό πεδίο υπαγόμενο στη θεωρία των συγκεκριμένων κεντρικών πεδίων δυνάμεων που διέπονται από το νόμο της παγκόσμιας έλξης. Η κίνηση μιας μάζας m πραγματοποιείται έτσι σε ένα βαρυτικό πεδίο δυνάμεων που ορίζεται από τη συνάρτηση δυναμικού του Kepler:

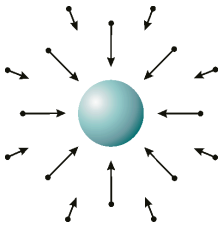
$$\mathrm{U}(r) = -k/r\,, \quad k>0\,,$$

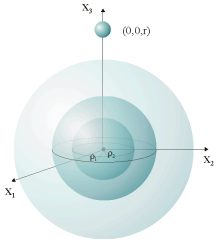
και συγκεκριμένα:

$$\mathrm{U}(x) = \frac{-k}{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{1/2}}\,, \quad k = GMm\,.$$

Θεωρούμε ένα διαμερισμό του κεντρικού σφαιρικού σώματος σε ομόκεντρους σφαιρικούς φλοιούς στοιχειώδους πάχους και, παρόλο που διαφορετικοί φλοιοί δεν έχουν αναγκαστικά ίδια πυκνότητα μάζας, εντούτοις η πυκνότητα κάθε φλοιού μπορεί να θεωρηθεί σταθερή. Κάθε φλοιός ασκεί τη δική του βαρυτική δύναμη στη σημειακή μάζα m παράγοντας το δικό του βαρυτικό δυναμικό. Η συμμετρία του φλοιού προκαλεί ίδια συμμετρία στο βαρυτικό δυναμικό, γεγονός που απλουστεύει την υπολογιστική διαδικασία. Αν η σημειακή μάζα απέχει από το κέντρο του φλοιού απόσταση r αρκεί να την θεωρήσουμε επάνω στον $3^{ο}$ άξονα του συστήματος αναφοράς που είναι τοποθετημένο στο κέντρο του πεδίου και στο σφαιρικό φλοιό ακτίνων $\rho_1 < \rho_2$ πυκνότητας $\sigma(x) = \sigma_o$ να υπολογίσουμε την τιμή:

$$\mathrm{U}(0,0,r) = -\mathbf{G}\, m\sigma_o \iiint\limits_{S_{\rho 1,\rho 2}} \frac{dx_1\, dx_2\, dx_3}{\left(x_1^2+x_2^2+(x_3-r)^2\right)^{1/2}}\,.$$





Αποδείξτε ότι:

- Αν η σημειακή μάζα m βρίσκεται στην εσωτερική κοιλότητα του φλοιού, το βαρυτικό δυναμικό είναι σταθερό άρα η βαρυτική δύναμη είναι μηδενική. Το αποτέλεσμα αυτό είναι λογικό εξαιτίας της συμμετρίας που υποδεικνύει ότι οι ασκούμενες βαρυτικές δυνάμεις στη σημειακή μάζα από τα αντιδιαμετρικά χωρία του φλοιού αλληλοαναιρούνται λαμβάνοντας υπόψη ότι το μέτρο τους είναι αντιστρόφως ανάλογο του τετραγώνου της απόστασης.
- Αν η σημειακή μάζα βρίσκεται στην εξωτερική επιφάνεια του φλοιού ή πέρα από αυτήν, το βαρυτικό δυναμικό είναι ίδιο με εκείνο που θεωρητικά ορίζεται από τη μάζα του φλοιού συμπυκνωμένη σημειακά στο κέντρο του.

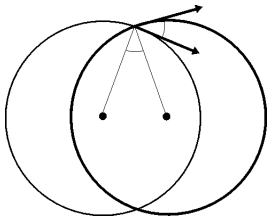
2. Σε ποιο σημείο μεταξύ Γης και Σελήνης ένα σώμα δέχεται από τη Γη και τη Σελήνη δύναμη ίδιου μέτρου;

3. Αν ένα σώμα εκτοξευτεί από την επιφάνεια της γης με ταχύτητα μικρότερη των 11,2km/s αποδείξτε ότι δεν θα μπορέσει να εγκαταλείψει το πεδίο της γήινης βαρύτητας και αν εκτοξευτεί με ταχύτητα μικρότερη των 16,6km/s δεν θα μπορέσει να εγκαταλείψει το ηλιακό μας σύστημα.

4. Κάποτε πίστεψαν στην ύπαρξη ενός πλανήτη, του Ήφαιστου, που περιφερόταν γύρω από τον Ήλιο σε μέση απόσταση 0,2 AU. Αν αυτός ο πλανήτης υπήρχε σε πόσα γήινα χρόνια θα πραγματοποιούσε μια πλήρη περιφορά γύρω από τον Ήλιο;

5. Ανάμεσα στους πλανήτες Άρη και Δία υπάρχει ένα πλήθος αστεροειδών που κινούνται σε μια ζώνη με μέση απόσταση 2,8 AU από τον Ήλιο. Θα μπορούσαμε να σκεφτούμε ότι ίσως αυτοί οι αστεροειδείς προήλθαν από την έκρηξη ενός άγνωστου πλανήτη που υπήρχε κάποτε στο ηλιακό σύστημα. Αριθμώντας τους υπάρχοντες πλανήτες διαδοχικά από τον Ερμή έως τον Πλούτωνα και συμβολίζοντας τη μέση απόσταση του n-οστού πλανήτη από τον Ήλιο με r_n AU, προσδιορίστε σε ημιλογαριθμική κλίμακα τα αντίστοιχα σημεία με τεταγμένες $r_n - 4$ AU, n>1. Λαμβάνοντας υπόψη τον αγνοούμενο πλανήτη και επαναλαμβάνοντας την αρίθμηση, διαπιστώστε ότι τα σημεία έξι πλανητών κείνται στην ίδια ευθεία σύμφωνα με τη σχέση $r_n = 2^n c + 0,4$ και προσδιορίστε την τιμή του c.

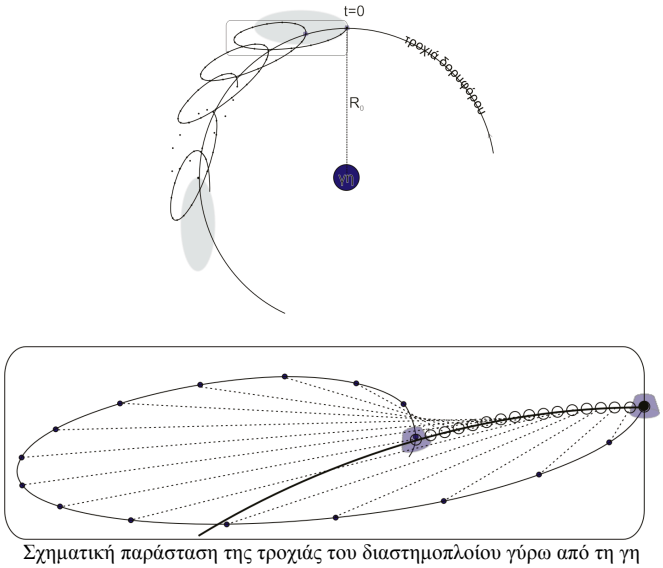
6. Κατά την τοποθέτηση ενός δορυφόρου γύρω από τη γη σε κυκλική τροχιά ακτίνας 300 km, η διεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας υπέστη απόκλιση προς την πλευρά της γης κατά 1^o. Επαληθεύστε ότι το περίγειο της τροχιάς θα μειωθεί περίπου κατά 110 km.



7. Όταν ο κοσμοναύτης A. Léonov έκανε τον περίπατό του στο διάστημα, ενώ το διαστημόπλοιό του εκτελούσε κυκλική τροχιά γύρω από τη γη, έριξε προς την πλευρά της γης το φακό της κάμεράς του με ταχύτητα 10m/sec. Ποια τροχιά διέγραψε ο φακός;

Απάντηση. Αναφορικά προς το διαστημόπλοιο, ο φακός διέγραψε ελλειπτική τροχιά της οποίας ο μεγάλος άξονας είχε μήκος 32 km και ο μικρός άξονας 16 km περίπου. Ο φακός διέτρεξε στην τροχιά του περίπου 30 km σε 1½ ώρα και τότε ο Léonov τον είδε να περνά δίπλα του, σε απόσταση μερικών δεκάδων μέτρων, στην αντίθετη πλευρά από εκείνη που έβλεπε τη γη.

Από το βιβλίο του V. Béletski, *Κίνηση Διαστημοπλοίων*, Εκδόσεις Naouka, Μόσχα 1972.



Σχηματική παράσταση της τροχιάς του διαστημοπλοίου γύρω από τη γη και του φακού γύρω από το διαστημόπλοιο.