
Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις

Μεταπτυχιακό Μάθημα - Ακαδημαϊκό έτος 2011-12

Καθηγητής: Σ. Πνευματικός

Η ΥΠΑΡΞΗ, Η ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ, Η ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

"Data aequatione fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire, et vice versa."

Isaac Newton, 1677

"Πρέπει να αντιμετωπίσουμε την ύπαρξη κατάσταση του σώματος ως αποτέλεσμα της προηγούμενης κατάστασής του και ως αιτία της επόμενης. Μια δάνονα υδου, σε μια δεδομένη στιγμή, θα κινήσει όλες τις δυνάμεις υδου κινούν τη φύση και την αντίστοιχη κατάσταση των όσων υδου την αποτελούν, ενώ ταυτόχρονα θα ήταν τόσο ευρεία ώστε να μπορεί να αναλύει όλα τα δεδομένα, θα είχε τη δυνατότητα να συμπεριλάβει σε ένα σχήμα τόσο τις κινήσεις των μεγαλύτερων σωμάτων του σώματος όσο και εκείνες των ελάχιστων ατόμων. Τίποτα δεν θα ήταν αβέβαιο για αυτήν, το μέλλον και το παρελθόν θα ήταν πάντα παρόντα στα μάτια της."

Pierre Simon Laplace, 1814

"Αν κινήσαμε ακριβώς τους νόμους της φύσης και την κατάσταση του σώματος την αρχική στιγμή, θα μπορούσαμε να προβλέψουμε ειδικά την μελλοντική του κατάσταση. Παρότι οι φυσικοί νόμοι δεν θα μας έδωσαν όλα τα μυστικά τους, δεν θα μπορούσαμε όμως να μάθουμε την κατάσταση παρά υροβλεπτικά. Αν αυτό μας επιτρέψει να προβλέψουμε τη μελλοντική κατάσταση με την ίδια υροβλεψη τότε λέμε ότι το φαινόμενο είχε υροβλεφθεί. Αλλά, τα υράγματα δεν είναι πάντα έτσι. Μικρές διαφορές στις αρχικές συνθήκες μπορεί να υδοφέρουν τεράστιες διαφορές στα τελικά φαινόμενα, ένα ανεπαίσθητο αρχικό σφάλμα ίσως υροκαλέσει ένα τεράστιο τελικό λάθος. Τότε, η υροβλεψη είναι αδύνατη και τα φαινόμενα υδοκρίνεται είναι τυχαία."

Henri Poincaré, 1908

Η ΑΠΑΡΧΗ ΤΗΣ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑΣ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Ο *Johannes Kepler* (1571-1630), πριν τη δημιουργία της θεωρίας των διαφορικών εξισώσεων, είχε θέσει το εξής γεωμετρικό ερώτημα, γνωστό ως *αντίστροφο πρόβλημα των εφαπτόμενων*: “Σε κάθε σημείο του χώρου δίνεται μια ευθεία και τίθεται ως ζητούμενο η ύπαρξη και ο προσδιορισμός μιας καμπύλης που θα δέχεται σε κάθε σημείο της ως εφαπτομένη μια από αυτές τις ευθείες.”

Ο *René Descartes* (1596-1650), ο *Pierre Fermat* (1601-1665) και ο *Gilles de Roberval* (1602-1675), εξέτασαν αυτό το πρόβλημα σε πολλές ειδικές περιπτώσεις. Επίσης, με το πρόβλημα αυτό ασχολήθηκε ο *Isaac Newton* (1642-1727) και ο *Gottfried Leibnitz* (1646-1716), οι οποίοι, λίγο αργότερα, θέτοντας τις βάσεις για τη δημιουργία του Απειροστικού και του Διαφορικού Λογισμού, έδωσαν το έναυσμα για τη δημιουργία της θεωρίας των διαφορικών εξισώσεων.

Ο Νεύτωνας, θέτοντας το ορθολογικό πλαίσιο μιας μαθηματικής θεωρίας ανταποκρινόμενης στα πειραματικά δεδομένα της φυσικής πραγματικότητας και βασισμένος στη σχέση *αιτίας και αποτελέσματος*, εισήγαγε την *αρχή του ντετερμινισμού* που ενυπάρχει στο νόημα της θεμελιώδους εξίσωσης της κίνησης. Σύμφωνα με αυτή την αρχή, η γνώση της θέσης και της ταχύτητας ενός σώματος σε μια δεδομένη χρονική στιγμή αρκεί για να προβλέψουμε το μέλλον και να μάθουμε το παρελθόν της κίνησής του. Οι νόμοι της Κλασικής Φυσικής υπακούουν σε αυτή τη ντετερμινιστική αρχή και η ικανότητά τους να προλέγουν την εξέλιξη των φυσικών συστημάτων μέσα από τη θεμελιώδη εξίσωση είναι εκπληκτική. Η διαφορική αυτή εξίσωση, σε συνδυασμό με το νόμο της παγκόσμιας έλξης, έδωσε τη δυνατότητα πρόβλεψης των κινήσεων των ουρανίων σωμάτων και οδήγησε σε μια ισχυρή πεποίθηση ότι τα πάντα είναι προβλέψιμα!

Ο *Leonhard Euler* (1707-1783) ανέπτυξε μια ενδιαφέρουσα *τεχνική διαμερισμού* για την κατασκευή προσεγγιστικών λύσεων των διαφορικών εξισώσεων η οποία προκάλεσε μεγάλο ενδιαφέρον, αφού οι μαθηματικές μας ικανότητες για την επίτευξη ακριβούς λύσης ήταν περιορισμένες. Ο *Augustin Louis Cauchy* (1789-1857), στα μαθήματα Ολοκληρωτικού Λογισμού που δίδασκε στην *Ecole Polytechnique* των Παρισίων, δηλώνει ότι πρωταρχικό μέλημά μας δεν πρέπει να είναι ο προσδιορισμός της γενικής λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης, αλλά της λύσης εκείνης που πληροί μια δεδομένη αρχική συνθήκη. Έτσι, τέθηκε το ζήτημα που σήμερα είναι γνωστό ως *πρόβλημα του Cauchy*:

Με δεδομένη μια συνάρτηση

$$f : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ορίζεται η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

και για κάθε δεδομένο σημείο $(x_0, t_0) \in \mathcal{U}$ τίθεται ως ζητούμενο η ύπαρξη και η μοναδικότητα λύσης της οποίας το γράφημα διέρχεται από αυτό το σημείο, δηλαδή που πληροί τη συνθήκη $x(t_0) = x_0$.

Η μελέτη μιας διαφορικής εξίσωσης δεν περιορίζεται πλέον στην αναζήτηση μιας παράγουσας, όπως απαιτούσε η έως τότε επικρατούσα αντίληψη, αλλά στον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος. Άλλωστε, ο *Bernard Bolzano* (1781-1848), έχοντας δώσει σαφή μαθηματική υπόσταση στην έννοια του ορίου, προσέφερε το πλαίσιο μιας απειροστικής αντιμετώπισης των διαφορικών εξισώσεων, όπως την φανταζόταν ο *Euler*. Ο *Cauchy*, αναπτύσσοντας τις απειροστικές μεθόδους, απαντά στο πρόβλημά του προϋποθέτοντας ότι η συνάρτηση που εκφράζει το ρυθμό μεταβολής και η παράγωγός της είναι συνεχείς και φραγμένες και έτσι αποδεικνύει την ύπαρξη λύσης μέσα από μια διαδικασία οριακής σύγκλισης. Στην απόδειξή του χρησιμοποιεί μια συνθήκη που απορρέει από το θεώρημα των *πεπερασμένων αυξήσεων* που ο ίδιος είχε δημιουργήσει και η οποία έμελε να γίνει γνωστή ως *συνθήκη του Lipschitz*.

Ο *Rudolf Lipschitz* (1832-1903), ακολουθώντας την πορεία που είχε χαράξει ο *Cauchy*, αντικαθιστά την προϋπόθεση της παραγωγισιμότητας της συνάρτησης του ρυθμού μεταβολής με την ασθενέστερη συνθήκη που φέρει το όνομά του. Ξέρουμε πλέον ότι η συνθήκη *Lipschitz* διασφαλίζει την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της λύσης στο πρόβλημα του *Cauchy*, δηλαδή διασφαλίζει τη *ντετερμινιστική* εξέλιξη εφόσον αυτή διέπεται από μια τέτοια διαφορική εξίσωση.

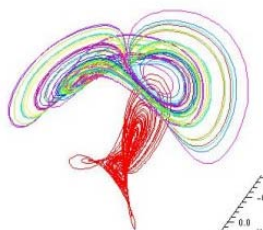
Η θεωρία των διαφορικών εξισώσεων γίνεται τώρα πιο φιλόδοξη και η πορεία της καθορίζεται από τις μελέτες των *Lazarus Fuchs* (1833-1902), *Paul Painlevé* (1863-1933), *Emile Picard* (1856-1941) και του *Henri Poincaré* (1854-1912), ο οποίος επιδιώκοντας να δώσει απάντηση στο πρόβλημα της ευστάθειας του ηλιακού συστήματος, θέτει τις βάσεις της θεωρίας των *Δυναμικών Συστημάτων*.

Οι αντιξοότητες προσδιορισμού εκπεφρασμένων λύσεων των διαφορικών εξισώσεων που υπεισέρχονται στα προβλήματα της κίνησης των ουρανίων σωμάτων τον οδηγούν στη χάραξη μιας πορείας για την ποιοτική μελέτη τους. Ο στόχος του πλέον εστιάζεται, καταρχάς στη μελέτη των ιδιομορφιών των διαφορικών εξισώσεων και κατόπιν στην ασυμπτωτική συμπεριφορά τους και στην ευαισθησία τους απέναντι στις διαταραχές των αρχικών συνθηκών. Η θεωρία των *Cauchy* και *Lipschitz* είναι ανεπαρκής για την επίτευξη αυτού του στόχου που απαιτεί απαντήσεις καθολικής και όχι απλά τοπικής φύσης ως προς τη συμπεριφορά των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων κατά τη μεταβολή των αρχικών συνθηκών ή των τιμών των παραμέτρων. Οι τοπολογικές και οι γεωμετρικές ιδιότητες των συναρτησιακών χώρων κατέχουν πλέον εξέχοντα ρόλο στην επίτευξη αυτού του στόχου, με επίκεντρο το θεώρημα του σταθερού σημείου όπως το επεξεργάστηκε στο πλαίσιο των διαφορικών εξισώσεων ο *Picard* και το εφάρμοσε επιτυχώς ο *Ernst Lindelöf* (1870-1946). Έτσι, το θεώρημα της ύπαρξης και μοναδικότητας των *Cauchy-Lipschitz* αναφέρεται συχνά και ως θεώρημα των *Picard-Lindelöf*.

Αυτή η ντετερμινιστική αντίληψη της προβλεψιμότητας κυριάρχησε κατά τη διάρκεια του 19^{ου} αιώνα και, εξάπτοντας την περιέργεια της επιστημονικής έρευνας, λειτούργησε εποικοδομητικά για την ταξινόμηση, ερμηνεία και κατανόηση ενός τεράστιου πλήθους αστρονομικών, φυσικών, χημικών, βιολογικών φαινομένων. Χρειάζεται όμως να διευκρινίσουμε τη διαφορά του *μαθηματικού από το φυσικό ντετερμινισμό*. Ο μαθηματικός ντετερμινισμός δηλώνει ότι κάθε επαναλαμβανόμενο πείραμα με ακριβώς ίδιες αρχικές και ίδιες οριακές συνθήκες οφείλει να δώσει ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα και τότε το μαθηματικό πρότυπο του φυσικού φαινομένου που εκφράζεται με μια διαφορική εξίσωση χαρακτηρίζεται ως ντετερμινιστικό εφόσον πληρούται η συνθήκη *Cauchy-Lipschitz*. Ο φυσικός ντετερμινισμός δηλώνει ότι κάθε επαναλαμβανόμενο πείραμα με σχεδόν ίδιες αρχικές και σχεδόν ίδιες οριακές συνθήκες οφείλει να δώσει σχεδόν το ίδιο αποτέλεσμα. Συνεπώς, η *ευστάθεια* του φαινομένου αποτελεί ουσιώδες χαρακτηριστικό του φυσικού ντετερμινισμού και εδώ υπεισέρχεται ο *χρόνος απόκλισης* των αποτελεσμάτων κατά την επανάληψη ενός πειράματος.

Ο *Poincaré*, εξετάζοντας το πρόβλημα της ευστάθειας του ηλιακού συστήματος και αναφερόμενος στο ντετερμινιστικό χαρακτήρα των διαφορικών εξισώσεων που πληρούν τη συνθήκη *Cauchy-Lipschitz*, έγραψε: “Μικρές διαφορές στις αρχικές συνθήκες μπορεί να παράξουν τεράστιες διαφορές στα τελικά φαινόμενα, ένα μηδανικό αρχικό σφάλμα μπορεί να προκαλέσει ένα τεράστιο τελικό λάθος και τότε η πρόβλεψη καθίσταται αδύνατη.”. Έτσι προκλήθηκε η ανάγκη δημιουργίας της *θεωρίας του χάους* και το ουσιαστικό χαρακτηριστικό αυτής της θεωρίας συνίσταται στην ευαισθησία εξάρτησης της εξέλιξης από τις αρχικές συνθήκες. Αλλά, αυτή η ευαισθησία, η αστάθεια, η φυσική απροσδιοριστία, εμφανίζονται συχνά στη φυσική πραγματικότητα; Ο ίδιος είπε ότι το *χάος* εμφανίζεται πολύ συχνά, σχεδόν σε όλα τα *μη ολοκληρώσιμα* προβλήματα. Όταν οι διαταραχές είναι ισχυρές τότε σχεδόν όλες οι φραγμένες τροχιές της εξέλιξης είναι χαοτικές. Στα *σχεδόν ολοκληρώσιμα* προβλήματα οι περισσότερες από τις τροχιές είναι ομαλές, αλλά παρολαυτά η ύπαρξη μικρών νησίδων χαοτικής συμπεριφοράς αρκεί για να προκαλέσει μετά πολύ χρόνο ισχυρό εκφυλισμό της ευστάθειας. Ένα σπουδαίο παράδειγμα σχεδόν ολοκληρώσιμου συστήματος έχει να κάνει με το κλασικό πρόβλημα της κίνησης των πλανητών. Στο ζήτημα αυτό, η κεπλεριανή κίνηση των πλανητών αποτελεί μια εξαιρετική πρώτη προσέγγιση και η μέθοδος των μικρών διαταραχών οδηγεί σε χρήσιμα και επαρκώς ακριβή αποτελέσματα. Εντούτοις, η μέθοδος αυτή είναι ανεπαρκής στα προβλήματα όπου υπεισέρχονται πολύ μεγάλες διαταραχές και η αστάθεια είναι πολύ μεγάλη, όπως για παράδειγμα στην κινητική θεωρία των αερίων.

Οι δυνατότητες της ανθρώπινης σκέψης είναι περιορισμένες μπροστά στο εύρος των πολύπλοκων ζητημάτων που πρέπει να αντιμετωπίσει προκειμένου να υιοθετήσει μια ορθολογική συμπεριφορά. Πάντα υπάρχει μια ελάχιστη συνθήκη που μας διαφεύγει και ανατρέπει κάθε ανθρώπινη πρόβλεψη, μια μικρή ξεχασμένη αιτία που εκπλήσσει με τις απρόβλεπτες συνέπειές της. Ποιος μπορεί να προβλέψει το μέλλον; Κανείς, γιατί κανείς δεν είναι σε θέση να έχει πλήρη αντίληψη των δεδομένων. Όταν ο *Heisenberg* αποδεικνύει ότι ο παρατηρητής δεν μπορεί να γνωρίζει ακριβώς τη θέση ενός ηλεκτρονίου στο χώρο και το χρόνο τότε πώς είναι δυνατή η πρόβλεψη; Το παρόν δεν ορίζει μονοσήμαντα το μέλλον αφού στα μάτια μας αποκαλύπτονται περισσότερες από μια ενδεχόμενες εξελίξεις του ίδιου παρόντος. Σε αυτό ακριβώς έγκειται η αντιπαράθεση προς την αντίληψη της ντετερμινιστικής προβλεψιμότητας της οποίας μεγάλος υποστηρικτής υπήρξε ο *Pierre-Simon Laplace* (1749-1827).



ΜΑΘΗΜΑ 1^ο: ΑΠΟ ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ

✓ Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα n χημικών ουσιών που υπεισέρχονται σε μια χημική αντίδραση. Η στιγμιαία κατάσταση κάθε ουσίας χαρακτηρίζεται από την αριθμητική τιμή της συγκέντρωσής της, συνεπώς η στιγμιαία κατάσταση του συστήματος των χημικών ουσιών δηλώνεται με ένα σημείο στον ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^n :

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n .$$

Τα πειραματικά δεδομένα οδηγούν στον προσδιορισμό του ρυθμού μεταβολής των συγκεντρώσεων των αλληλεπιδρώντων χημικών ουσιών και στον καθορισμό n συναρτήσεων σε ένα χωρίο του ευκλείδειου χώρου \mathbb{R}^n :

$$f_i : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n .$$

Έτσι, διαμορφώνεται το μαθηματικό πρότυπο της εξέλιξης του συστήματος των χημικών ουσιών που εκφράζεται με το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n .$$

Αν ο ρυθμός μεταβολής των συγκεντρώσεων είναι αρκετά ομαλός, π.χ. αν οι συναρτήσεις που τον εκφράζουν διαθέτουν συνεχείς παραγώγους, με τοπική επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων προσδιορίζονται οι διαδοχικές καταστάσεις της εξέλιξης του συστήματος των χημικών ουσιών γνωρίζοντας απλά και μόνο την κατάστασή του σε μια δεδομένη χρονική στιγμή. Αυτό ακριβώς δηλώνει η αρχή του ντετερμινισμού που εκφράζεται με το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων. Συγκεκριμένα, αν τη στιγμή $t_0 \in \mathbb{R}$ το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση $x_0 \in \mathcal{U}$, η εξέλιξή του στο χώρο των καταστάσεων, μελλοντική και παρελθούσα, ορίζεται μονοσήμαντα στο χρονικό διάστημα της διάρκειάς της από τη λύση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων:

$$\phi_{x_0} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \phi_{x_0}(t_0) = x_0 .$$

Η εξέλιξη αυτή, για κάθε δεδομένη αρχική κατάσταση, αναπαρίσταται με την προσανατολισμένη καμπύλη που ορίζεται από την εικόνα της αντίστοιχης λύσης και καλείται τροχιά στο χώρο καταστάσεων:

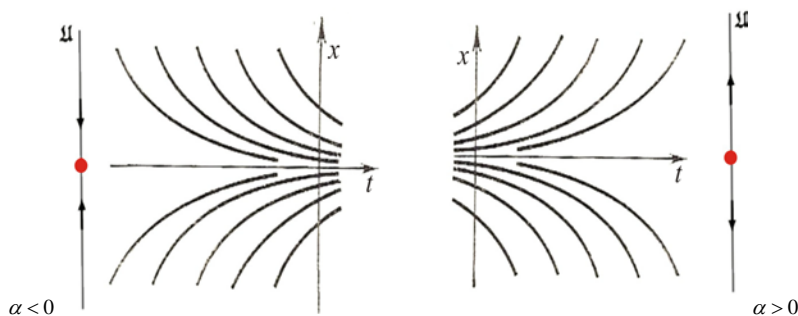
$$\mathcal{O}_{x_0} = \{ \phi_{x_0}(t) \in \mathcal{U} / t \in I \}, \quad x_0 \in \mathcal{U} .$$

✓ Ο *Thomas Robert Malthus* (1766-1834) εισήγαγε το πρώτο μαθηματικό πρότυπο της δυναμικής εξέλιξης ενός πληθυσμού σε ένα περιβάλλον χωρίς εξωτερικές επιδράσεις. Σύμφωνα με αυτό το πρότυπο, αν ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού είναι κάθε χρονική στιγμή ανάλογος του πλήθους του τότε η εξέλιξή του διέπεται από μια διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x, \quad \alpha > 0 .$$

Αν την αρχική στιγμή της παρατήρησης, $t_0 = 0$, το πλήθος του πληθυσμού είναι $x_0 \in \mathbb{R}^+$, τότε η εξέλιξή του, μελλοντική και παρελθούσα, δίνεται από την αντίστοιχη λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης:

$$\phi_{x_0} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi_{x_0}(t) = x_0 e^{\alpha t}, \quad \phi_{x_0}(0) = x_0 .$$



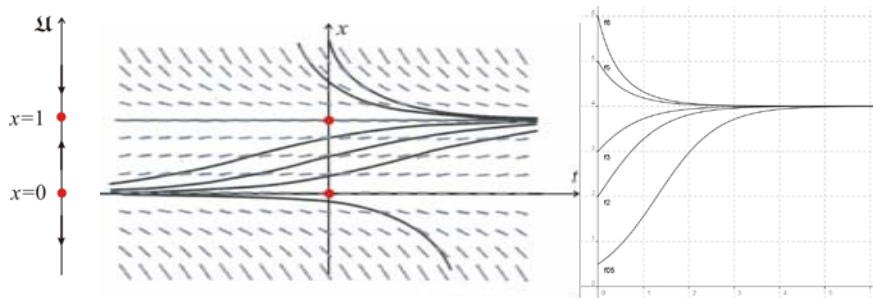
Γραφήματα λύσεων της διαφορικής εξίσωσης $\dot{x} = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, και τροχιές στο μονοδιάστατο χώρο καταστάσεων.

✓ Ο *Pierre-François Verhulst* (1804-1849) εισήγαγε το *λογιστικό πρότυπο* της δυναμικής εξέλιξης ενός πληθυσμού στο οποίο στην απλουστευμένη εκδοχή του εκφράζεται με τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x(1 - x/\kappa), \quad \alpha, \kappa > 0.$$

Αν την αρχική στιγμή της παρατήρησης, $t_0 = 0$, το πλήθος του πληθυσμού είναι $x_0 \in \mathbb{R}^+$, τότε η εξέλιξή του δίνεται από την αντίστοιχη λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης:

$$\phi_{x_0}: I_{x_0} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi_{x_0}(t) = \frac{x_0 e^{\alpha t}}{\kappa - x_0 + x_0 e^{\alpha t}}, \quad \phi_{x_0}(0) = x_0.$$



Γραφήματα λύσεων της διαφορικής εξίσωσης ($\kappa = 1, \alpha = 1$) και πληθυσμιακές εξελίξεις στο χρόνο ($x_0 > 0$).

Η χρονική διάρκεια της εξέλιξης, δηλαδή το πεδίο ορισμού κάθε λύσης, εξαρτάται από την αρχική συνθήκη και καθορίζεται από τις χρονικές στιγμές στις οποίες το γράφημά της δέχεται κατακόρυφη ασύμπτωτη, δηλαδή από τις ρίζες της εξίσωσης:

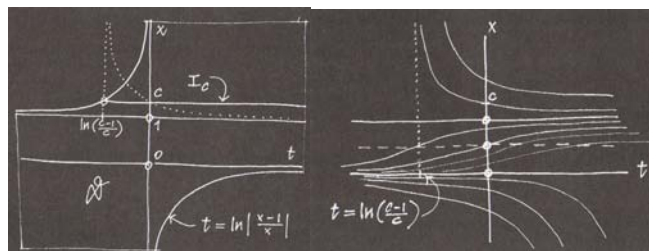
$$\kappa - x_0 + x_0 e^{\alpha t} = 0.$$

Συνεπώς

$$x_0 < 0 \Rightarrow I_{x_0} =]-\infty, \ln((x_0 - \kappa)/x_0)[, \quad x_0 \in [0, \kappa] \Rightarrow I_{x_0} = \mathbb{R}, \quad x_0 > \kappa \Rightarrow I_{x_0} =]\ln((x_0 - \kappa)/x_0), +\infty[$$

και επιπλέον προκύπτουν οι καταστάσεις ισορροπίας:

$$\begin{aligned} x_0 = 0 &\Rightarrow \phi_{x_0}(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (\text{απωστική ισορροπία}), \\ x_0 = \kappa &\Rightarrow \phi_{x_0}(t) = \kappa, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (\text{ελκτική ισορροπία}). \end{aligned}$$

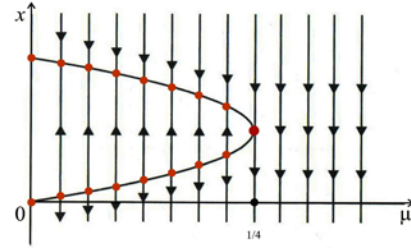
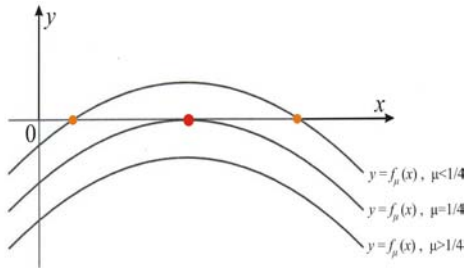


Προσδιορισμός της χρονικής διάρκειας της πληθυσμιακής εξέλιξης ($\kappa = 1$).

✓ Αν μια σταθερή εξωτερική διαταραχή επηρεάζει το ρυθμό της πληθυσμιακής μεταβολής τότε το λογιστικό πρότυπο εκφράζεται με τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x(1 - x/\kappa) - \mu, \quad \alpha, \kappa > 0, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Ο ρυθμός μεταβολής έχει δυο σημεία μηδενισμού αν $\mu < \alpha\kappa/4$, ένα σημείο μηδενισμού αν $\mu = \alpha\kappa/4$ και κανένα σημείο μηδενισμού αν $\mu > \alpha\kappa/4$. Συνεπώς, όταν $\mu < \alpha\kappa/4$ εμφανίζονται δυο καταστάσεις ισορροπίας, μια απωστική και μια ελκτική, και όσο η τιμή του μ πλησιάζει το $\alpha\kappa/4$ τόσο οι καταστάσεις αυτές πλησιάζουν μεταξύ τους έως ότου ταυτιστούν για $\mu = \alpha\kappa/4$ και κατόπιν εξαφανιστούν όταν $\mu > \alpha\kappa/4$. Η τιμή $\mu = \alpha\kappa/4$ καλείται *τιμή διακλάδωσης* και ορίζει μια ιδιαίτερη δυναμική συμπεριφορά αφού οι παράπλευρες τιμές ορίζουν διαφορετικές δυναμικές συμπεριφορές, από τη μια ύπαρξη και από την άλλη ανυπαρξία καταστάσεων ισορροπίας.



Το γράφημα της συνάρτησης του ρυθμού μεταβολής για τις τιμές της παραμέτρου: $\mu < 1/4$, $\mu = 1/4$, $\mu > 1/4$ και το διάγραμμα διακλάδωσης στο οποίο εμφανίζονται οι τοπολογικές μεταβολές της δυναμικής, ($\alpha = \kappa = 1$)

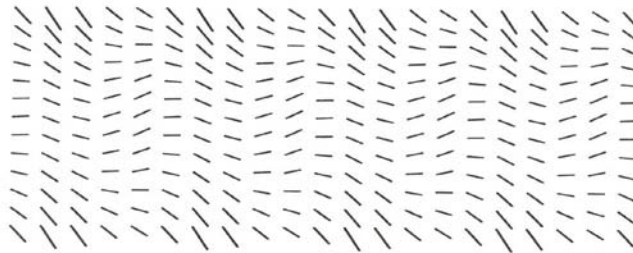
✓ Αν μια περιοδική εξωτερική διαταραχή επηρεάζει το ρυθμό της πληθυσμιακής μεταβολής τότε το λογιστικό πρότυπο εκφράζεται με τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x(1 - x/\kappa) - \mu(1 + \sin 2\pi t), \quad \alpha > 0, \mu \in \mathbb{R}^+.$$

Η συνάρτηση του ρυθμού μεταβολής ορίζεται πλέον στο διευρυμένο χώρο καταστάσεων, δηλαδή στο καρτεσιανό γινόμενο του χρονικού άξονα με το χώρο των καταστάσεων:

$$f_\mu : \mathbb{R} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\mu(t, x) = \alpha x(1 - x/\kappa) - \mu(1 + \sin 2\pi t).$$

Σε κάθε σημείο του διευρυμένου χώρου καταστάσεων $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{U}$ προσαρτάται η ευθεία που η κλίση της δίνεται από την αριθμητική τιμή $f_\mu(t_0, x_0)$ και η ύπαρξη λύσης της διαφορικής εξίσωσης σημαίνει ύπαρξη καμπύλης που δέχεται σε κάθε σημείο της ως εφαπτομένη μια από αυτές τις ευθείες. Το πρόβλημα γίνεται πλέον αρκετά περίπλοκο!



Το πεδίο κλίσεων στο διευρυμένο χώρο καταστάσεων για δεδομένη τιμή της παραμέτρου $\mu > 0$ και για $\alpha = 1$.

Αν $x_0 \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$, για να προσδιοριστεί η λύση:

$$\phi_{x_0} : I_{x_0} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi_{x_0}(0) = x_0 : \dot{\phi}_{x_0}(t) = f_\mu(t, \phi_{x_0}(t)), \quad \forall t \in I_{x_0} \subseteq \mathbb{R},$$

αρκεί να γνωρίζουμε τη λύση στο πρώτο μοναδιαίο χρονικό διάστημα:

$$\dot{x}_1 = x_1(t), \quad x_1(0) = x_0 : \dot{x}_1(t) = f_\mu(t, x_1(t)), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

γιατί τότε η λύση αυτή θα μπορούσε να επεκταθεί στο επόμενο μοναδιαίο χρονικό διάστημα:

$$\dot{x}_2 = x_2(t), \quad x_2(0) = x_1(1) : \dot{x}_2(t) = f_\mu(t, x_2(t)), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

θέτοντας:

$$x_1(t+1) = x_2(t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Πράγματι, η χρονική περιοδικότητα του ρυθμού μεταβολής της πληθυσμιακής εξέλιξης:

$$f_\mu(t, x) = f_\mu(t+1, x), \quad \forall x \in \mathcal{U}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

υποδεικνύει ότι:

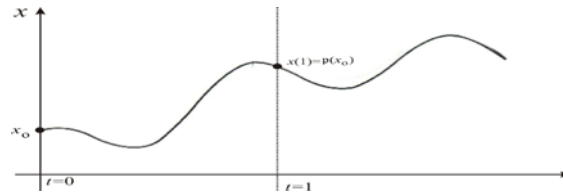
$$\dot{x}_1(t+1) = \dot{x}_2(t) = f_\mu(t, x_2(t)) = f_\mu(t+1, x_1(t+1)), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Η αλγοριθμική αυτή διαδικασία οδηγεί στην επέκταση της λύσης σε όλα τα μοναδιαία διαστήματα της χρονικής της εξέλιξης. Πώς όμως θα μάθουμε τη λύση στο πρώτο χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 1$; Τουλάχιστο, αν γνωρίζαμε την τιμή της τη στιγμή $t=1$ τότε θα χρησιμοποιούσαμε την απεικόνιση *Poincaré*:

$$p: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}, \quad p(x_0) := \phi_{x_0}(1),$$

και, αυτοσυνθέτοντας την k φορές, θα μαθαίναμε την τιμή της σε κάθε στιγμή $t = k \in \mathbb{N}$:

$$p \circ p(x_0) = p(x(1)) = x(2), \quad p \circ p \circ p(x_0) = p \circ p(x(1)) = p(x(2)) = x(3), \dots$$



Απεικόνιση Poincaré της διαφορικής εξίσωσης:
 $\dot{x} = \alpha x(1 - x/\kappa) - \mu(1 + \sin 2\pi t)$, $x \in \mathcal{M}$, $\alpha = 5$, $\kappa = 1$, $\mu = 0.8$.

Μπορούμε όμως να εντοπίσουμε τις αρχικές καταστάσεις που ορίζουν τις *περιοδικές λύσεις*, γιατί ακριβώς αυτές οι καταστάσεις είναι τα σταθερά σημεία της απεικόνισης *Poincaré*:

$$x_0 \in \mathcal{M}: \quad p(x_0) = x_0.$$

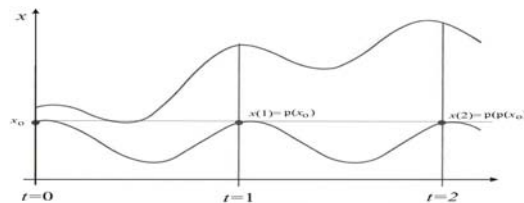
Πράγματι, αν $x_0 \in \mathcal{M}$ και $x(0) = x_0$ τότε:

$$p(x_0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad p^k(x_0) = x_0, \quad k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad x(k) = x_0, \quad k \in \mathbb{N},$$

και επειδή, για κάθε χρονική στιγμή μεταξύ $t=0$ και $t=1$, ισχύει:

$$x(t) = x(t+1) = \dots = x(t+k), \quad k \in \mathbb{N},$$

η λύση που ορίζεται από αυτή την αρχική συνθήκη είναι περιοδική με περίοδο $T=1$. Όμως, πόσα και ποια σταθερά σημεία έχει η απεικόνιση *Poincaré* αυτής της διαφορικής εξίσωσης;



Περιοδική και μη περιοδική λύση της διαφορικής εξίσωσης:
 $\dot{x} = \alpha x(1 - x/\kappa) - \mu(1 + \sin 2\pi t)$, $x \in \mathcal{M}$, $\alpha = 5$, $\kappa = 1$, $\mu = 0.8$.

Προκειμένου να αντιληφθούμε την εξάρτηση των λύσεων από την επιλογή της εκάστοτε αρχικής κατάστασης θα θεωρήσουμε την άγνωστη σε μας εξελικτική της ροή που ορίζεται ως εξής:

$$g: \mathbb{R} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}, \quad g(t, x_0) := \phi_{x_0}(t),$$

και για κάθε δεδομένη αρχική κατάσταση $x_0 \in \mathcal{M}$ ισχύει:

$$\partial_t g(t, x_0) = f(t, g(t, x_0)), \quad g(0, x_0) = x_0.$$

Προφανώς ισχύει:

$$p(x_0) := g(1, x_0), \quad \forall x_0 \in \mathcal{M}.$$

Το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού υποδεικνύει ότι:

$$g(t, x_0) = x_0 + \int_0^t f(s, g(s, x_0)) ds$$

άρα

$$\partial_{x_0} g(t, x_0) = 1 + \int_0^t \partial_{g(s, x_0)} f(s, g(s, x_0)) \partial_{x_0} g(s, x_0) ds.$$

Θέτουμε

$$w(t) = \partial_{x_0} g(t, x_0)$$

και προφανώς:

$$w(0) = \partial_{x_0} g(0, x_0) = 1.$$

Από την παράγωγο:

$$w'(t) = \partial_g f(t, g(t, x_0)) \partial_{x_0} g(t, x_0) = \partial_g f(t, g(t, x_0)) w(t)$$

προκύπτει η διαφορική εξίσωση:

$$w'(t) = \partial_g f(t, g(t, x_0)) w(t), \quad w(0) = 1,$$

που υποδεικνύει ότι:

$$w(t) = \exp \int_0^t \partial_g f(s, g(s, x_0)) ds.$$

Συνεπώς

$$\partial_{x_0} g(1, x_0) = \exp \int_0^1 \partial_{x_0} f(s, g(s, x_0)) ds$$

άρα

$$p'(x_0) = \exp \int_0^1 \partial_{x_0} f(s, g(s, x_0)) ds > 0.$$

Η απεικόνιση *Poincaré* είναι λοιπόν γνησίως αύξουσα και προκειμένου να διαπιστώσουμε προς τα πού το γράφημά της στρέφει τα κοίλα υπολογίζουμε τη 2^η παράγωγό της:

$$\begin{aligned} p''(x_0) &= \partial_{x_0} \left(\int_0^1 \partial_{x_0} f(s, g(s, x_0)) ds \right) \exp \int_0^1 \partial_{x_0} f(s, g(s, x_0)) ds = \\ &= p'(x_0) \left(\int_0^1 \partial_{x_0}^2 f(s, g(s, x_0)) \exp \left(\int_0^s \partial_{x_0} f(u, g(u, x_0)) du \right) ds \right) < 0 \end{aligned}$$

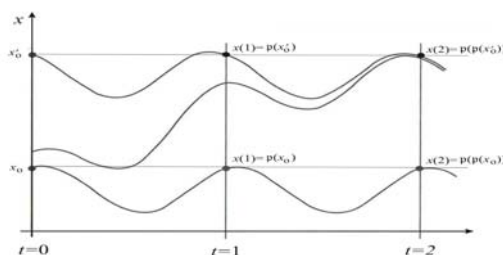
αφού

$$f(t, x) = \alpha x(1-x) - \mu(1 + \sin 2\pi t) \Rightarrow \partial_{x_0}^2 f(t, x) \equiv -2\alpha < 0.$$

Άρα, η απεικόνιση *Poincaré* έχει το πολύ δυο σταθερά σημεία αφού το γράφημά της τέμνει το πολύ σε δυο σημεία τη διαγώνιο του καρτεσιανού γινομένου $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$. Συνεπώς, υπάρχουν το πολύ δυο κατά-στάσεις που ορίζουν περιοδικές λύσεις:

$$x_0 \in \mathbb{I}: \quad p(x_0) = x_0 \Rightarrow g(t+1, x_0) = g(t, x_0) \Rightarrow \phi_{x_0}(t+1) = \phi_{x_0}(t),$$

$$x'_0 \in \mathbb{I}: \quad p(x'_0) = x'_0 \Rightarrow g(t+1, x'_0) = g(t, x'_0) \Rightarrow \phi_{x'_0}(t+1) = \phi_{x'_0}(t).$$

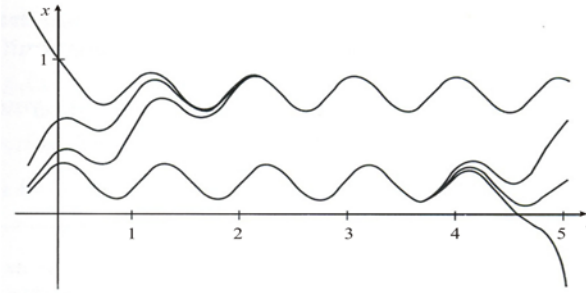


Οι δυο περιοδικές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης
 $\dot{x} = \alpha x(1-x/\kappa) - \mu(1 + \sin 2\pi t)$, $x \in \mathbb{I}$, $\alpha = 5$, $\kappa = 1$, $\mu = 0.8$.

Σημειώνοντας ότι:

$$f_\mu(t, x) = \alpha x(1-x/\kappa) - \mu(1 + \sin 2\pi t) \Rightarrow \partial_\mu f_\mu(t, x_0) = -(1 + \sin 2\pi t)$$

διαπιστώνουμε ότι για $t = 3/4$ ισχύει $\partial_\mu f_\mu(t, x_0) < 0$. Άρα, όσο η τιμή του μ αυξάνει τόσο η απεικόνιση *Poincaré* φθίνει γρηγορότερα έχοντας δυο σταθερά σημεία που δηλώνουν ύπαρξη δυο περιοδικών λύσεων έως ότου φτάσει σε μια τιμή $\mu = \mu_0$ όπου τα δυο σταθερά σημεία ταυτίζονται πράγμα που δηλώνει την ύπαρξη μόνο μιας περιοδικής λύσης και πέρα από αυτή την τιμή δεν υπάρχει πια σταθερό σημείο άρα ούτε περιοδική λύση. Όταν εμφανίζονται δυο σταθερά σημεία, άρα δυο περιοδικές λύσεις, τότε η μια επιδρά ελκτικά και η άλλη απωστικά στις υπόλοιπες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης.



Συμπεριφορά των λύσεων της διαφορικής εξίσωσης

$$\dot{x} = \alpha x(1 - x/\kappa) - \mu(1 + \sin 2\pi t), \quad x \in \mathbb{I}, \quad \alpha = 5, \kappa = 1, \mu = 0.8.$$

✓ Ο *Alfred Lotka* (1880-1949) και ο *Vito Volterra* (1860-1940) διαμόρφωσαν το μαθηματικό πρότυπο της δυναμικής εξέλιξης δυο αλληλεπιδρώντων πληθυσμών, *θηρευτών* και *θηραμάτων*, που συνυπάρχουν στο ίδιο περιβάλλον, το οποίο εκφράζεται με το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} = -\delta y + \gamma xy \end{cases}$$

Κάθε χρονική στιγμή το πλήθος των θηραμάτων και των θηρευτών δηλώνεται αντίστοιχα με τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς $x(t)$ και $y(t)$, οπότε η στιγμιαία πληθυσμική κατάσταση τους αναπαρίσταται με ένα σημείο του ευκλείδειου επιπέδου. Οι τιμές των παραμέτρων α, β καθορίζονται αντίστοιχα από το ρυθμό αναπαραγωγής των θηραμάτων που βρίσκουν επαρκή τροφή στο περιβάλλον και από τη μείωση του πλήθους τους αφού αποτελούν τροφή των θηρευτών, ενώ οι τιμές των παραμέτρων γ, δ καθορίζονται αντίστοιχα από το ρυθμό αναπαραγωγής και θνησιμότητας των θηρευτών που τρέφονται από τα θηράματα. Το γινόμενο $x(t)y(t)$ εκφράζει την συχνότητα συνάντησης των θηραμάτων με τους θηρευτές και επηρεάζει αρνητικά το πλήθος των θηραμάτων και θετικά το πλήθος των θηρευτών σε κάθε μια από τις εξισώσεις. Το πλήθος των θηρευτών αυξάνει όταν υπάρχουν αρκετά θηράματα και στην αντίθετη περίπτωση μειώνεται έως την ενδεχόμενη πλήρη εξαφάνισή τους έχοντας ως επακόλουθο τη ραγδαία αύξηση του πλήθους των θηραμάτων. Αν κάποια δεδομένη χρονική στιγμή $t_0 \in \mathbb{R}$ το πλήθος κάθε πληθυσμού είναι γνωστό $x(t_0) > 0, y(t_0) > 0$, η αντίστοιχη λύση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων ορίζεται σε όλο το χρονικό άξονα και υποδεικνύει μονοσήμαντα τη μελλοντική και παρελθούσα πληθυσμιακή εξέλιξή τους:

$$\phi: \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}^2, \quad \phi(t_0) = (x_0, y_0).$$

Σημειώνουμε ότι υπάρχει ένα πρώτο ολοκλήρωμα:

$$F(x, y) = \beta y + \gamma x - \alpha \ln y - \delta \ln x$$

που δηλώνει ότι κατά τη διάρκεια της εξέλιξης διατηρείται σταθερή η τιμή της συνάρτησης:

$$F(x(t), y(t)) = \beta y(t) + \gamma x(t) - \alpha \ln y(t) - \delta \ln x(t), \quad x(t) > 0, y(t) > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Επίσης, υπάρχουν δυο καταστάσεις ισορροπίας από τις οποίες η πρώτη εκφράζει την ανυπαρξία των πληθυσμών και η δεύτερη μια μη μηδενική σταθερότητα του πλήθους τους στο διηνεκές:

$$\begin{cases} x(t)(\alpha - \beta y(t)) \\ -y(t)(\delta - \gamma x(t)) \end{cases} \Rightarrow \{x(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0\} \text{ και } \{x(t) = \alpha/\beta, y(t) = \delta/\gamma\}.$$

Ένα ερώτημα που τίθεται όταν εμφανίζονται καταστάσεις ισορροπίας αφορά στην ευστάθειά τους και αυτή μπορεί να ελεγχθεί με γραμμικοποίηση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων διαμέσου του ιακωβιανού πίνακα:

$$J(x(t), y(t)) = \begin{bmatrix} \alpha - \beta y(t) & -\beta x(t) \\ \gamma y(t) & \gamma x(t) - \delta \end{bmatrix}$$

Στην πρώτη κατάσταση ισορροπίας προκύπτει:

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\delta \end{bmatrix}$$

και η ετεροσημία των ιδιοτιμών $\lambda_1 = \alpha$ και $\lambda_2 = -\delta$ δηλώνει τη σαγματική της φύση και κατά συνέπεια την αστάθειά της. Στην δεύτερη κατάσταση ισορροπίας προκύπτει:

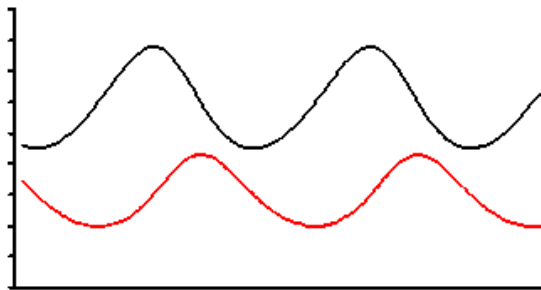
$$J(\delta/\gamma, \alpha/\beta) = \begin{bmatrix} 0 & -\beta\delta/\gamma \\ \alpha\gamma/\beta & 0 \end{bmatrix}$$

και οι φανταστικές ιδιοτιμές $\lambda_1 = i\sqrt{\alpha\delta}$ και $\lambda_2 = -i\sqrt{\alpha\delta}$ δηλώνουν την εστιακή της φύση και συγκεκριμένα την κεντρική της φύση άρα την ευστάθειά της. Γύρω από αυτή την κατάσταση ισορροπίας οι τροχιές που υποδεικνύουν την εξέλιξη των πληθυσμών είναι περιοδικές και ορίζονται από τις ισοσταθμικές καμπύλες του πρώτου ολοκληρώματος:

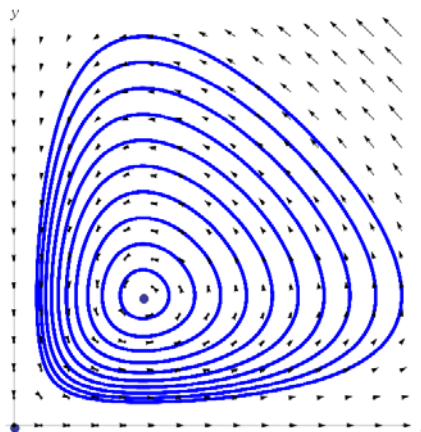
$$y^\alpha e^{-\beta y} e^{-\gamma x} x^\delta = K.$$

Η μέγιστη τιμή της σταθεράς K αντιστοιχεί στην κατάσταση της ευσταθούς ισορροπίας και δίνεται από τον αριθμό του *Euler*:

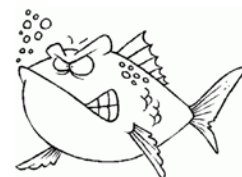
$$K_o = \max_{x,y>0} (y^\alpha e^{\beta y} e^{\gamma x} x^\delta) = (\alpha/\beta e)^\alpha (\delta/\gamma e)^\delta.$$



Χρονική εξέλιξη του πλήθους των θηραμάτων (--) και των θηρευτών (--).



Τροχιές της πληθυσμιακής εξέλιξης στο χώρο των καταστάσεων.



ΘΕΜΑΤΑ ΜΕΛΕΤΗΣ



1. Η ντετερμινιστική εξέλιξη της μονοδιάστατης δυναμικής.

Δίνεται μια διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

και τίθεται το ερώτημα των προϋποθέσεων που πρέπει να πληροί η συνάρτηση:

$$f : \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

ώστε να διασφαλίζεται η ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης που το γράφημά της διέρχεται από το δεδομένο σημείο $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M}$:

$$\phi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}, \quad \phi(t_0) = x_0.$$

❖ Ισχυριζόμαστε ότι, αν η συνάρτηση που εκφράζει το ρυθμό μεταβολής είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη σε ένα ανοιχτό διάστημα της πραγματικής ευθείας:

$$f : \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

τότε η διαφορική αυτή εξίσωση δέχεται λύση που το γράφημά της διέρχεται τη δεδομένη στιγμή $t_0 \in \mathbb{R}$ από τη δεδομένη κατάσταση $x_0 \in \mathcal{M}$:

$$\phi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}, \quad \phi(t_0) = x_0.$$

Η λύση αυτή είναι η μοναδική σε μια περιοχή του $t_0 \in \mathbb{R}$ που πληροί τη συνθήκη $\phi(t_0) = x_0$ και ισχύει:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{\phi(t)} \frac{d\xi}{f(\xi)} \quad \text{αν } f(x_0) \neq 0 \quad \text{και} \quad \phi(t) \equiv x_0 \quad \text{αν } f(x_0) = 0.$$

- Αποφανθείτε ως προς την ορθότητα του ακόλουθου αποδεικτικού συλλογισμού:

“Αν σε κάποιο σημείο $x_0 \in \mathcal{M}$ ο ρυθμός μεταβολής είναι μηδενικός: $f(x_0) = 0$, τότε το σημείο αυτό αποτελεί κατάσταση ισορροπίας, δηλαδή η σταθερή συνάρτηση $\phi(t) \equiv x_0, \forall t \in I$, είναι η λύση που πληροί τη συνθήκη $\phi(t_0) = x_0$. Αν ο ρυθμός μεταβολής δεν είναι μηδενικός: $f(x_0) \neq 0$, τότε ας υποθέσουμε ότι $x = \phi(t), t \in I$, είναι λύση που πληροί τη συνθήκη $\phi(t_0) = x_0$. Το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων διασφαλίζει την τοπική αντιστρεψιμότητά της, δηλαδή, στην περιοχή του x_0 , ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $t = \psi(x)$ με $\psi(x_0) = t_0$ και ισχύει $\psi'(x_0) = 1/f(x_0)$. Η συνθήκη $f(x_0) \neq 0$ διασφαλίζει τη συνέχεια της συνάρτησης $1/f(x)$ στην περιοχή του x_0 και το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού υποδεικνύει ότι:

$$\psi(x) = \psi(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{f(\xi)}.$$

Η συνάρτηση ψ είναι μονοσήμαντα ορισμένη στην περιοχή του x_0 και η αντίστροφή της, δηλαδή η συνάρτηση ϕ , είναι εξίσου μονοσήμαντα ορισμένη στην περιοχή του t_0 από τη συνθήκη $\phi(t_0) = x_0$ αφού $\psi'(x_0) \neq 0$. Η λύση αυτή προσδιορίζεται τοπικά από το θεώρημα τοπικής αντιστροφής. Άρα, για κάθε λύση $x = \phi(t)$ με $\phi(t_0) = x_0$ ισχύει, σε μια περιοχή του t_0 , η σχέση:

$$\int_{x_0}^{\phi(t)} \frac{d\xi}{f(\xi)} = t - t_0.$$

Αν λοιπόν η συνάρτηση $x = \phi(t)$, αντίστροφη της $\psi(x)$, είναι λύση με $\phi(t_0) = x_0$ τότε είναι η μοναδική λύση που πληροί αυτή τη συνθήκη. Το ότι η συνάρτηση αυτή είναι πράγματι λύση για τη δεδομένη συνθήκη προκύπτει απευθείας από το ότι:

$$\phi'(t) = (\psi^{-1})'(\phi(t)) = f(\phi(t)), \quad \phi(t_0) = x_0.”$$

- Εφαρμόστε τον προτεινόμενο αποδεικτικό συλλογισμό στην περίπτωση της διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{dx}{dt} = x^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Σχόλιο. Στον προτεινόμενο αποδεικτικό συλλογισμό δεν υπεισήλθε η υπόθεση της παραγωγισιμότητας του ρυθμού μεταβολής και χρησιμοποιήθηκε μόνο η συνέχειά του. Αλλά, αν πιστέψουμε ότι για τη διασφάλιση της μοναδικότητας της λύσης αρκεί η συνέχεια του ρυθμού μεταβολής τότε εύκολα θα διαψευστούμε και θα αντιληφθούμε τη μη ορθότητα της προτεινόμενης απόδειξης. Όμως, πού βρίσκεται το σφάλμα; Στην πραγματικότητα η μοναδικότητα αποδείχτηκε μόνο εκεί όπου δεν μηδενίζεται ο ρυθμός μεταβολής. Στο σημείο μηδενισμού του διαπιστώσαμε την ύπαρξη σταθερής λύσης χωρίς να αποδείξουμε την ανυπαρξία άλλης λύσης που πληροί την ίδια αρχική συνθήκη. Η εφαρμογή της συλλογιστική στη συγκεκριμένη διαφορική εξίσωση που σας προτείναμε θα σας πείσει για του λόγου το αληθές. Για παράδειγμα, στην περίπτωση $\alpha=2/3$, η συνάρτηση που ορίζει το ρυθμό μεταβολής είναι παραγωγίσιμη εκτός από το σημείο $x=0$. Από το σημείο αυτό, τη στιγμή $t=0$, εκτός από τη σημειακή τροχιά της μηδενικής λύσης, διέρχεται η τροχιά της λύσης:

$$x(t) = t^3 / 27, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Από κάθε άλλο σημείο $x_0 \neq 0$ διέρχεται μόνο η τροχιά της λύσης που ορίζεται ως εξής:

$$\phi_{x_0}(t) = (x_0^{1/3} + t/3)^3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Η μη μοναδικότητα οφείλεται στο ότι ο ρυθμός μεταβολής κατευθύνεται στο μηδενισμό φθίνοντας αργά και έτσι σε πεπερασμένο χρόνο μια άλλη τροχιά έχει δυνατότητα διείσδυσης στην κατάσταση ισορροπίας. Στην περίπτωση της γραμμικής δυναμικής διασφαλίζεται η μοναδικότητα της μηδενικής λύσης γιατί απαιτείται άπειρος χρόνος για τη διείσδυση μιας άλλης τροχιάς στην κατάσταση ισορροπίας. Η σύγκριση του ρυθμού μεταβολής μιας μονοδιάστατης δυναμικής με εκείνον της γραμμικής δυναμικής οδηγεί στο κριτήριο διασφάλισης της μονοσήμαντης εξέλιξης στο χώρο των καταστάσεων. Συγκεκριμένα, όταν η εξέλιξη διέπεται από μια διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

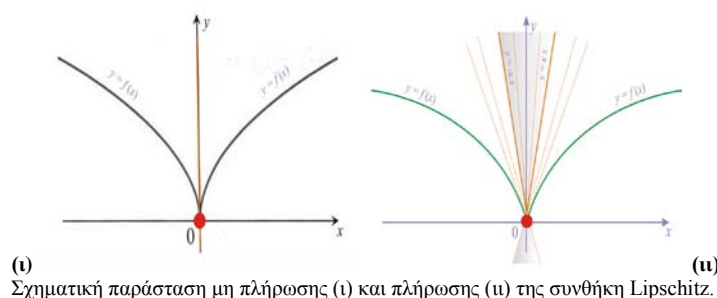
ελέγχουμε κατά πόσο στην περιοχή κάθε σημείου ο ρυθμός μεταβολής είναι ασθενέστερος εκείνου της γραμμικής δυναμικής και αν αυτό συμβαίνει τότε διασφαλίζεται τοπικά η μοναδικότητα της εξέλιξης. Αυτό δηλώνεται με την ύπαρξη θετικού πραγματικού αριθμού k τέτοιου ώστε, για κάθε $x \neq x_0$, αρκετά γειτονικό του x_0 , να ισχύει:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq k |x - x_0|.$$

Πρόκειται για την *τοπική συνθήκη Lipschitz* και εκεί όπου η συνθήκη αυτή πληρούται ο ενδεχόμενος μηδενισμός του ρυθμού μεταβολής δεν αφήνει στο σύστημα άλλη επιλογή από το να παραμείνει για πάντα σε κατάσταση ισορροπίας. Προφανώς, η συνθήκη αυτή πληρούται στα σημεία παραγωγικότητας της συνάρτησης του ρυθμού μεταβολής αλλά όχι πάντα στα σημεία μη παραγωγικότητας. Η απάντηση στο πρόβλημα της μονοσήμαντης εξέλιξης δίνεται από το θεώρημα της ύπαρξης και της μοναδικότητας των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων.



Γράφημα της συνάρτησης του ρυθμού μεταβολής και γράφημα των λύσεων της διαφορικής εξίσωσης $\dot{x} = x^{2/3}$, $x \in \mathbb{R}$.





2. Η κατασκευή των λύσεων των μονοδιάστατων διαφορικών εξισώσεων.

Δίνεται μια διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

και η συνάρτηση που ορίζει το ρυθμό μεταβολής είναι παντού παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο:

$$f : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} .$$

❖ Θα παρουσιάσουμε μια διαδικασία κατασκευής της λύσης της διαφορικής αυτής εξίσωσης που το γράφημά της διέρχεται τη δεδομένη στιγμή $t_0 \in \mathbb{R}$ από τη δεδομένη κατάσταση $x_0 \in \mathcal{U}$:

$$\phi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}, \quad \phi(t_0) = x_0 .$$

• Αποφανθείτε ως προς την ορθότητα της προτεινόμενης κατασκευαστικής διαδικασίας:

Ο χωρισμός των μεταβλητών οδηγεί στην τυπική σχέση:

$$\int \frac{dx}{f(x)} = t + c, \quad c \in \mathbb{R} .$$

Τα σημεία μηδενισμού του ρυθμού μεταβολής καθορίζουν ένα διαμερισμό του μονοδιάστατου χώρου καταστάσεων. Αν το πλήθος τους είναι πεπερασμένο, c_1, \dots, c_p , τότε ο ρυθμός μεταβολής είναι γνήσια μονότονος σε κάθε ένα από τα ανοιχτά διαστήματα:

$$\Delta_j =]c_{j-1}, c_j[, \quad j = 1, \dots, p+1, \quad \text{με } c_0 = -\infty, \quad c_{p+1} = +\infty .$$

Πράγματι, αν $m_j \in \Delta_j$, $j = 1, \dots, p+1$, τότε προκύπτουν οι γνήσια μονότονες συναρτήσεις:

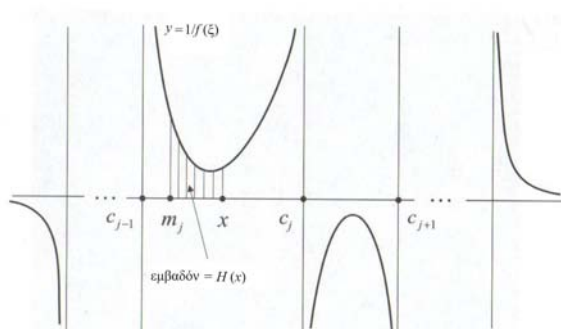
$$H_j : \Delta_j \rightarrow \mathbb{R}, \quad H_j(x) = \int_{m_j}^x \frac{d\xi}{f(\xi)}, \quad j = 1, \dots, p+1,$$

αφού το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού υποδεικνύει ότι:

$$H'_j(x) = 1/f(x), \quad x \in \Delta_j, \quad j = 1, \dots, p+1 .$$

Από τη συνένωση αυτών των γνήσια μονότονων συναρτήσεων προκύπτει η συνάρτηση:

$$H : \mathcal{U} - \{c_1, \dots, c_p\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(x) = H_j(x), \quad x \in \Delta_j, \quad j = 1, \dots, p+1 .$$



Γράφημα της συνάρτησης $y = 1/f(x)$ και κατασκευή της συνάρτησης $H : \mathcal{U} - \{c_1, \dots, c_p\} \rightarrow \mathbb{R}$.

Αν η αρχική συνθήκη $x(0) = x_0$ είναι κάποιο από τα σημεία μηδενισμού του ρυθμού μεταβολής, δηλαδή $x_0 = c_j$, $j = 1, \dots, p+1$, τότε σε όλο το χρονικό άξονα ορίζεται η λύση:

$$\phi_{x_0}(t) \equiv x_0, \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

Αν η αρχική συνθήκη δεν είναι κάποιο από τα σημεία μηδενισμού του ρυθμού μεταβολής τότε, για κάποιο $j=1, \dots, p+1$, ισχύει $x_0 = c \in \Delta_j$. Η συνάρτηση:

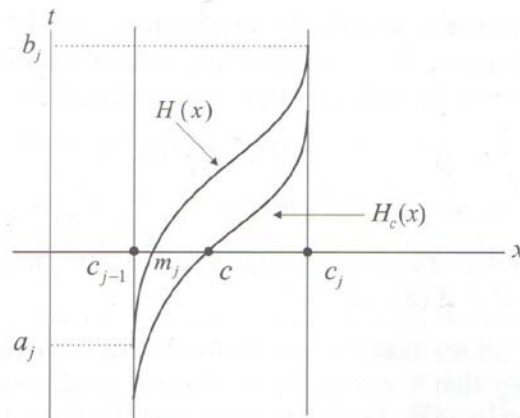
$$H_c : \Delta_j \rightarrow \mathbb{R}, \quad H_c(x) = H_j(x) - H_j(c),$$

είναι γνήσια μονότονη άρα αντιστρέψιμη, αφού με παράλληλη μεταφορά το γράφημά της ταυτίζεται με εκείνο της H_j . Το πεδίο ορισμού της H_c^{-1} είναι το διάστημα $]a_j, b_j[$ όπου:

$$a_j = \inf\{H_j(x) / x \in \Delta_j\} \quad \text{και} \quad b_j = \sup\{H_j(x) / x \in \Delta_j\},$$

άρα το πεδίο ορισμού της H_c^{-1} είναι το διάστημα $]a'_j, b'_j[$ όπου:

$$a'_j = a_j - H(c) \quad \text{και} \quad b'_j = b_j - H(c).$$



Γραφήματα των συναρτήσεων $H_j : \Delta_j \rightarrow \mathbb{R}$ και $H_c : \Delta_j \rightarrow \mathbb{R}$.

Αν το καταχρηστικό ολοκλήρωμα:

$$\int_{m_j}^{c_j} \frac{d\xi}{f(\xi)}$$

αποκλίνει τότε το γράφημα της H_c , όπως το γράφημα της H_j , έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο σημείο $x = c_j$ άρα $b_j = \pm\infty$. Διαφορετικά, $b_j \in \mathbb{R}$ οπότε το γράφημα της H_c έχει κατακόρυφη εφαπτομένη στο σημείο $x = c_j$. Η λύση που τη στιγμή $t=0$ διέρχεται από την κατάσταση $x_0 = c \in \Delta_j$ ορίζεται στο μέγιστο χρονικό διάστημα ύπαρξης ως εξής:

$$\phi_{x_0} :]a', b'[\rightarrow \mathcal{M}, \quad \phi_{x_0}(t) = H_c^{-1}(t).$$

Πράγματι:

$$\phi'_{x_0}(t) = [H_c^{-1}]'(t) = [H'_c(H_c^{-1}(t))]^{-1} = \left[\frac{1}{f(H_c^{-1}(t))} \right]^{-1} = f(H_c^{-1}(t)) = f(\phi_{x_0}(t)), \quad t \in]a', b'[,$$

και πληροῦται η συνθήκη:

$$\phi_{x_0}(0) = H_c^{-1}(0) = x_0.$$

Το θεώρημα της αντίστροφης συνάρτησης¹ διασφαλίζει όχι μόνο την ύπαρξη αυτής της λύσης αλλά και τη διαφορισιμότητά της στο πεδίο ορισμού της. Το ότι πρόκειται για μέγιστη λύση αποδεικνύεται με εις άτοπο απαγωγή. Αν υπάρχει λύση σε κάποιο μεγαλύτερο χρονικό διάστημα $]a'', b''[\supseteq]a', b'[$ και τη στιγμή $t=0$ διέρχεται από την κατάσταση $x_0 = c$:

$$\psi_{x_0} :]a'', b''[\rightarrow \mathcal{M}, \quad \psi_{x_0}(0) = x_0, \quad \psi'_{x_0}(t) = f(\psi_{x_0}(t)),$$

τότε

¹ Το θεώρημα της αντίστροφης συνάρτησης, όπως συνήθως εκφράζεται, έχει τοπική ισχύ. Στη μονοδιάστατη περίπτωση, διασφαλίζει την τοπική αντιστρεψιμότητα κάθε συνάρτησης της οποίας η παράγωγος δεν μηδενίζεται σε ένα δεδομένο σημείο και την παραγωγισιμότητα της αντίστροφης συνάρτησης. Πώς εδώ εξάγουμε ένα ολικό συμπέρασμα σε όλο το πεδίο ορισμού;

$$\frac{d}{dt} H_c(\psi_{x_0}(t)) = H'_c(\psi_{x_0}(t)) \psi'_{x_0}(t) = \frac{1}{f(\psi_{x_0}(t))} \psi'_{x_0}(t) = 1, \quad \forall t \in]a'', b''[.$$

Έτσι, θα υπάρξει σταθερά $k \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$H_c(\psi_{x_0}(t)) = t + k, \quad \forall t \in]a'', b''[: \quad H_c(\psi_{x_0}(0)) = H_c(x_0) = k$$

οπότε

$$H_c(\psi_{x_0}(t)) - H_c(x_0) = t, \quad \forall t \in]a'', b''[.$$

άρα

$$t \in]a'', b''[\Rightarrow t \in \{H(x) - H(x_0) / x \in \Delta_j\}.$$

Αλλά

$$\inf \{H(x) - H(x_0) / x \in \Delta_j\} = a_j - H(x_0)$$

$$\sup \{H(x) - H(x_0) / x \in \Delta_j\} = b_j - H(x_0)$$

άρα

$$t \in]a_j - H(x_0), b_j - H(x_0)[=]a', b'[$$

και έτσι

$$a'' = a', \quad b'' = b'.$$

Σχόλιο. Για να αποσαφηνιστεί στη σκέψη σας η προτεινόμενη κατασκευαστική διαδικασία εφαρμόστε την σε συγκεκριμένες διαφορικές εξισώσεις, π.χ. όταν $f(x) = x(1-x)$, αλλά εξετάστε και την περίπτωση $f(x) = \sin x$.



3. Η φύση των καταστάσεων ισορροπίας της μονοδιάστατης δυναμικής.

Δίνεται μια διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

και η συνάρτηση που ορίζει το ρυθμό μεταβολής είναι παραγωγίσιμη με συνεχείς παραγώγους:

$$f : \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες εκδοχές της φύσης μιας κατάστασης ισορροπίας $x_0 \in \mathcal{M}$, $f(x_0) = 0$:

- *Κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \rho > 0 : x \in \mathcal{M}, |x - x_0| < \rho \Rightarrow |\phi_x(t) - \phi_{x_0}(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

- *Κατάσταση ασυμπτωτικά ευσταθούς ισορροπίας:*

$$\text{ευσταθής ισορροπία} \ \& \ |x - x_0| < \rho \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_x(t) = x_0.$$

- *Κατάσταση ασταθούς ισορροπίας:* Μη ευσταθής ισορροπία.

Σχόλιο. Η ευστάθεια σημαίνει ότι οι λύσεις με αρχικές συνθήκες κοντά στην ελκτική κατάσταση ισορροπίας παραμένουν κοντά της για αυθαίρετα μεγάλο χρόνο, ενώ η ασυμπτωτική ευστάθεια σημαίνει επιπλέον ότι με την πάροδο του χρόνου οι λύσεις αυτές τείνουν στην ελκτική κατάσταση ισορροπίας.

- Αποδείξτε ότι οι καταστάσεις ισορροπίας της μονοδιάστατης δυναμικής χαρακτηρίζονται ως εξής:

$$f(x_0) = 0 \ \& \ f'(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ ασυμπτωτικά ευσταθής ισορροπία,}$$

$$f(x_0) = 0 \ \& \ f'(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ ασταθής ισορροπία.}$$

- Αποδείξτε ότι η φύση των καταστάσεων ισορροπίας κάθε μονοδιάστατης δυναμικής διατηρείται αναλλοίωτη κατά τη γραμμικοποίησή της σε κάθε κατάσταση ισορροπίας.

Σχόλιο. Η γραμμικοποίηση μιας μονοδιάστατης διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

σε μια κατάσταση ισορροπίας $x_0 \in \mathbb{R}$ όπου δεν μηδενίζεται η παράγωγος του ρυθμού μεταβολής είναι εξ' ορισμού η γραμμική διαφορική εξίσωση:

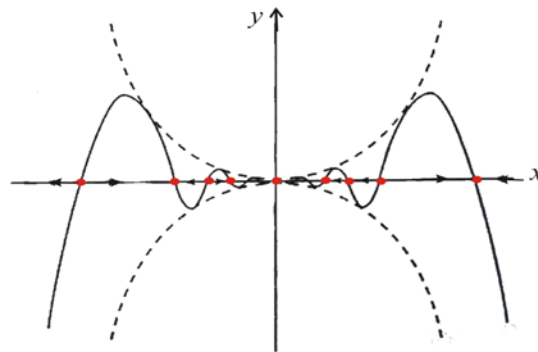
$$\frac{dx}{dt} = \alpha x \quad \text{όπου} \quad \alpha = f'(x_0) \dots$$

Η μονοδιάστατη γραμμική διαφορική εξίσωση παρουσιάζει στην κατάσταση ισορροπίας $x_0 = 0$ ασυμπτωτική ευστάθεια όταν $\alpha < 0$ και αστάθεια όταν $\alpha > 0$, οπότε το προηγούμενο κριτήριο δίνει την απόδειξη:

$$\frac{dx}{dt} = f'(x_0)x \Rightarrow \phi_{x_0}(t) = x_0 e^{f'(x_0)t}.$$

- Προσδιορίστε τη φύση των καταστάσεων ισορροπίας της δυναμικής που ορίζεται ως εξής:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) : \begin{cases} -x^3 \sin 1/x & \text{όταν } x \neq 0 \\ 0 & \text{όταν } x = 0 \end{cases}$$



Γράφημα της συνάρτησης του ρυθμού μεταβολής.
Η κατάσταση ισορροπίας $x = 0$ είναι ευσταθής αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Σχόλιο. Η συνάρτηση του ρυθμού μεταβολής δέχεται συνεχή παράγωγο και έτσι διασφαλίζεται η ύπαρξη και η μοναδικότητα των λύσεων της διαφορικής εξίσωσης. Οι καταστάσεις ισορροπίας είναι $x_0 = 0$ και $x_k = 1/k\pi$, $k \in \mathbb{Z}^*$. Στην κατάσταση ισορροπίας $x_0 = 0$, όπου μηδενίζεται η παράγωγος του ρυθμού μεταβολής, με δεδομένο $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε το μικρότερο $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $1/n_0\pi < \varepsilon$ και θέτοντας $\rho = 1/n_0\pi$, προκύπτει:

$$|x| < \rho \Rightarrow \phi_x(t) \in [-1/n_0\pi, 1/n_0\pi], \forall t \geq 0 \Rightarrow |\phi_x(t)| < \varepsilon, \forall t \geq 0.$$

Αυτό ισχύει γιατί τα άκρα του διαστήματος $[-1/n_0\pi, 1/n_0\pi]$ αποτελούν καταστάσεις ισορροπίας. Αν $x \in]0, \rho[$, επιλέγουμε $n_0^* \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $1/n_0^*\pi < \varepsilon$ οπότε $|\phi_x(t)| > 1/n_0^*\pi, \forall t \geq 0$, άρα:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_x(t) \neq x_0 = 0.$$

Με χρήση των προηγούμενων κριτηρίων αναγνωρίζουμε τη φύση της ισορροπίας στα σημεία $x_k = 1/k\pi$, $k \in \mathbb{Z}^*$, και διαπιστώνουμε τη διατήρησή της κατά τη γραμμικοποίηση στις διαδοχικές καταστάσεις ισορροπίας:

$$x_0 = 1/k\pi \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\cos k\pi}{k\pi} x.$$

Σχόλιο. Θα δώσουμε το σκεπτικό της απόδειξης των κριτηρίων που χαρακτηρίζουν τη φύση των καταστάσεων ισορροπίας των μονοδιάστατων διαφορικών εξισώσεων:

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

Λήμμα. Η ευστάθεια, η ασυμπτωτική ευστάθεια και η αστάθεια της κατάστασης ισορροπίας $x_0 \in \mathcal{U}$ εκτιμώνται αντίστοιχα ως εξής:

- (1) $\exists \delta > 0: x \in \mathcal{U}, |x - x_0| < \delta \Rightarrow (x - x_0)f(x) \leq 0,$
- (2) $\exists \delta > 0: x \in \mathcal{U}, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow (x - x_0)f(x) < 0,$
- (3) $\exists \delta > 0: x \in \mathcal{U}, -\delta < x - x_0 < 0 \vee 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow (x - x_0)f(x) > 0.$

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in \mathcal{U}$ μια κατάσταση ισορροπίας: $f(x_0) = 0$.

- (1) Λαμβάνοντας υπόψη την υπόθεση (1) και τη σχέση:

$$\frac{d}{dt}|x(t) - x_0|^2 = 2(x(t) - x_0) \frac{dx}{dt} = 2(x(t) - x_0)f(x)$$

προκύπτει ότι αν η αρχική συνθήκη $x(0)$ ληφθεί έτσι ώστε $0 < |x(0) - x_0| < \delta$ τότε:

$$\frac{d}{dt}|x(t) - x_0|^2 < 0.$$

Η ανισότητα αυτή ισχύει κατ'αρχήν κοντά στο $t=0$, γιατί η λύση είναι συνεχής συνάρτηση του t , άρα για αυτά τα t η απόσταση $|x(t) - x_0|$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του t . Εφόσον βρισκόμαστε στο διάστημα όπου αληθεύει αυτή η ανισότητα, η απόσταση αυτή παραμένει διαρκώς φθίνουσα, άρα $|x(t) - x_0| < \delta$ για κάθε $t \geq 0$. Έτσι, αν τεθεί στον ορισμό της ευστάθειας $\rho = \varepsilon$, αποδεικνύεται η ευστάθεια της κατάστασης ισορροπίας:

$$|x - x_0| < \rho \Rightarrow |\phi_x(t) - \phi_{x_0}(t)| < \varepsilon, \forall t \geq 0.$$

- (2) Έχοντας διαπιστώσει ότι η απόσταση $|x(t) - x_0|$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του t , διασφαλίζεται η ύπαρξη του $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0$. Αν υποθέσουμε ότι το όριο είναι γνήσια θετικό $\ell > 0$ καταλήγουμε σε άτοπο. Πράγματι, θέτουμε:

$$M = \max_{x \in \Sigma} \{2(x(t) - x_0)f(x)\} \quad \text{όπου} \quad \Sigma = \{x: \ell \leq |x - x_0| \leq \delta\}.$$

Από την υπόθεση (2) και τη σχέση:

$$\frac{d}{dt}|x(t) - x_0|^2 = 2(x(t) - x_0)f(x) \leq M < 0$$

προκύπτει

$$\int_0^t \frac{d}{ds}|x(s) - x_0|^2 ds \leq \int_0^t M ds \quad \text{άρα} \quad |x(s) - x_0|^2 \leq |x(0) - x_0|^2 + Mt.$$

Όταν το t τείνει στο μηδέν φτάνουμε στο άτοπο $\ell = 0$ και αποδεικνύεται η ασυμπτωτική ευστάθεια.

- (3) Η αστάθεια μπορεί να προκληθεί από δεξιά ή αριστερά της κατάστασης ισορροπίας. Έστω ότι:

$$(x - x_0)f(x) > 0, \quad 0 < x - x_0 < \delta.$$

Αν υποθέσουμε ότι η κατάσταση ισορροπίας είναι ευσταθής θα οδηγηθούμε σε άτοπο. Πράγματι, επιλέγουμε την αρχική κατάσταση έτσι ώστε: $0 < |x(0) - x_0| < \rho$ και, δοθέντος $\varepsilon = \delta/2$, θα πρέπει για κατάλληλο ρ να ισχύει:

$$0 < |x(0) - x_0| < \rho \Rightarrow |x(t) - x_0| < \varepsilon, \forall t \geq 0.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι για $\rho < \delta$ ισχύει:

$$\frac{d}{dt}|x(t) - x_0|^2 = 2(x(t) - x_0)f(x) > 0 \quad \text{άρα} \quad |x(t) - x_0| \geq |x(0) - x_0|.$$

Θέτουμε:

$$m = \min_{x \in \Sigma} \{2(x(t) - x_0)f(x)\} \quad \text{όπου} \quad \Sigma = \{x: x(0) - x_0 \leq x(t) - x_0 \leq \delta\}$$

και παρατηρούμε ότι $m > 0$ και $x(t) \in \Sigma$ για $t \geq 0$. Συνεπώς:

$$\int_0^t \frac{d}{ds}|x(s) - x_0|^2 ds \geq \int_0^t m ds \quad \text{άρα} \quad |x(s) - x_0|^2 \geq |x(0) - x_0|^2 + mt$$

που οδηγεί σε άτοπο όταν το t τείνει στο $+\infty$ και συμπεραίνουμε την αστάθεια της κατάστασης ισορροπίας. Ανάλογο είναι το αποδεικτικό σκεπτικό στην περίπτωση όπου $-\delta < x - x_0 < 0$.

Θεώρημα. Αν η συνάρτηση που ορίζει το ρυθμό μεταβολής $y = f(x)$ δέχεται συνεχή παράγωγο στην κατάσταση ισορροπίας $x_0 \in \mathcal{M}$ και $f'(x_0) \neq 0$, τότε ισχύει:

$$f'(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ ασυμπτωτικά ευσταθής κατάσταση ισορροπίας,}$$

$$f'(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ ασταθής κατάσταση ισορροπίας.}$$

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in \mathcal{M}$ μια κατάσταση ισορροπίας και ας υποθέσουμε $f'(x_0) < 0$. Η συνέχεια της παραγώγου υποδεικνύει ότι σε μια περιοχή του $x_0 \in \mathcal{M}$ ισχύει:

$$x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\Rightarrow f'(x) < 0$$

και το θεώρημα μέσης τιμής δηλώνει την ύπαρξη x^* μεταξύ x και x_0 έτσι ώστε:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x^*)(x - x_0).$$

Άρα, $x^* \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ και κατά συνέπεια $f'(x^*) < 0$, οπότε:

$$x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\Rightarrow (x - x_0)(f(x) - f(x_0)) = f'(x^*)(x - x_0)^2 < 0$$

και

$$x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\Rightarrow (x - x_0)f(x) < 0.$$

Από το Λήμμα προκύπτει η ασυμπτωτική ευστάθεια της κατάστασης ισορροπίας και με ανάλογο σκεπτικό αποδεικνύεται η περίπτωση της αστάθειας.



4. Διαταραχή της μονοδιάστατης δυναμικής και εμφάνιση διακλαδώσεων.

Δίνεται μια διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

και η συνάρτηση που ορίζει το ρυθμό μεταβολής είναι παραγωγίσιμη με συνεχείς παραγώγους:

$$f : \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

❖ Τίθεται το ερώτημα των επιπτώσεων που μπορεί να επιφέρει στις καταστάσεις ισορροπίας μια διαταραχή του ρυθμού μεταβολής, π.χ. μια σταθερή διαταραχή:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \mu, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

- Διαπιστώστε ότι κατά τη σταθερή διαταραχή της μονοδιάστατης γραμμικής δυναμικής η φύση της κατάστασης ισορροπίας, ευσταθής ή ασταθής, διατηρείται αναλλοίωτη.
- Αποδείξτε ότι κατά τη σταθερή διαταραχή μιας μονοδιάστατης δυναμικής η φύση των καταστάσεων ισορροπίας δεν αλλοιώνεται όταν στις καταστάσεις αυτές η παράγωγος του ρυθμού μεταβολής δεν είναι μηδενική.
- Προσδιορίστε τις αλλοιώσεις που θα επιφέρει μια σταθερή διαταραχή του ρυθμού μεταβολής στη φύση των καταστάσεων ισορροπίας της μονοδιάστατης δυναμικής στις ακόλουθες περιπτώσεις:

$$\frac{dx}{dt} = f_\mu(x), \quad \mu \in \mathbb{R},$$

- i) $f_\mu(x) = -x^3 + \mu$, ii) $f_\mu(x) = x^2 + \mu$, iii) $f_\mu(x) = x(1-x)^2 + \mu$, iv) $f_\mu(x) = x - x^3 + \mu$.

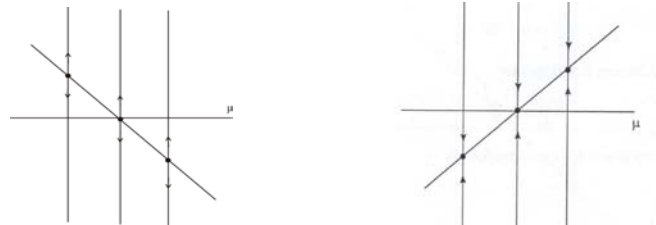
Σχόλιο 1. Στη διαταραχή της ελκτικής γραμμικής δυναμικής:

$$\frac{dx}{dt} = -x + \mu,$$

η προϋπάρχουσα ($\mu=0$) κατάσταση ισορροπίας $x_0=0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής και η προκύπτουσα κατάσταση ισορροπίας $x_0=\mu$ είναι επίσης ασυμπτωτικά ευσταθής, αφού η παράγωγος του ρυθμού μεταβολής παραμένει γνήσια αρνητική. Στη διαταραχή της απωστικής γραμμικής δυναμικής:

$$\frac{dx}{dt} = x + \mu$$

η προϋπάρχουσα ($\mu=0$) κατάσταση ισορροπίας $x_0=0$ είναι ασταθής και η προκύπτουσα κατάσταση ισορροπίας $x_0=-\mu$ είναι επίσης ασταθής, αφού η παράγωγος του ρυθμού μεταβολής παραμένει γνήσια θετική.



Διαγράμματα διακλάδωσης κατά τη διαταραχή της μονοδιάστατης γραμμικής δυναμικής.

Σχόλιο 2. Όταν η παράγωγος του ρυθμού μεταβολής μιας μονοδιάστατης δυναμικής δεν μηδενίζεται σε μια κατάσταση ισορροπίας τότε η φύση της, ευσταθής ή ασταθής, διατηρείται αναλλοίωτη κατά τη γραμμικοποίηση σε αυτή την κατάσταση και, ήδη γνωρίζουμε ότι, η φύση της κατάστασης ισορροπίας κάθε μονοδιάστατης γραμμικής δυναμικής δεν επηρεάζεται από τις σταθερές διαταραχές. Συνεπώς, αναγκαία προϋπόθεση για ενδεχόμενη ύπαρξη τιμής διακλάδωσης κατά τη σταθερή διαταραχή του ρυθμού μεταβολής είναι ο μηδενισμός της παραγώγου του σε κάποια κατάσταση ισορροπίας, δηλαδή η ύπαρξη $\mu_0 \in \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{I}$ τέτοιων ώστε:

$$f_{\mu_0}(x_0) = 0 \quad \text{και} \quad f'_{\mu_0}(x_0) = 0.$$

Αλλά, η συνθήκη αυτή δεν είναι από μόνη της ικανή να προκαλέσει την εμφάνιση τιμών διακλάδωσης κατά τη σταθερή διαταραχή και κατά συνέπεια την αλλαγή της τοπολογικής φύσης της δυναμικής συμπεριφοράς.

Σχόλιο 3. Η διαταραχή του ρυθμού μεταβολής στις προηγούμενες περιπτώσεις προκαλεί τα εξής φαινόμενα:

i) Στην περίπτωση

$$f_{\mu}(x) = -x^3 + \mu.$$

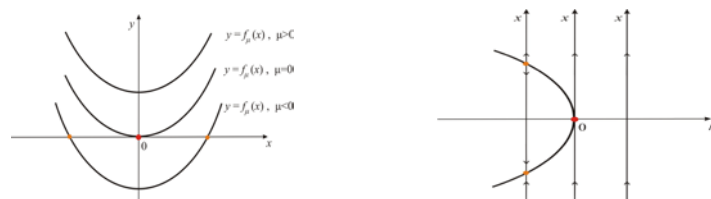
η παράγωγος του αδιατάρακτου ($\mu=0$) ρυθμού μεταβολής μηδενίζεται στην κατάσταση ισορροπίας $x_0=0$. Ο μηδενισμός αυτός αποτελεί αναγκαία αλλά όχι ικανή συνθήκη ύπαρξης τιμών διακλάδωσης κατά τη διαταραχή. Εδώ η διαταραχή προκαλεί μόνο μετατόπιση του σημείου ισορροπίας στο μονοδιάστατο χώρο καταστάσεων:

$$-x^3 + \mu = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{\mu}.$$

ii) Στην περίπτωση

$$f_{\mu}(x) = x^2 + \mu,$$

η παράγωγος του αδιατάρακτου ρυθμού μεταβολής μηδενίζεται στην κατάσταση ισορροπίας $x_0=0$: $f'_{\mu=0}(0)=0$. Εδώ, η διαταραχή προκαλεί εξάλειψη της κατάστασης ισορροπίας όταν $\mu > 0$ και εμφάνιση δυο καταστάσεων ισορροπίας όταν $\mu < 0$, μιας ελκτικής $x=x_1 < 0$ και μιας απωστικής $x=x_2 > 0$, αφού αντίστοιχα ισχύει $f'_{\mu}(x_1) < 0$ και $f'_{\mu}(x_2) > 0$. Όσο η τιμή της παραμέτρου μ πλησιάζει από τις αρνητικές τιμές το μηδέν τόσο οι δυο καταστάσεις πλησιάζουν μεταξύ τους έως ότου ταυτιστούν όταν $\mu=0$ και εξαφανιστούν στις θετικές τιμές του μ . Κατά τη διαταραχή προκύπτει η τιμή διακλάδωσης $\mu=0$ όπου οι παράπλευρες τιμές ορίζουν διαφορετικές δυναμικές συμπεριφορές, από τη μια ανυπαρξία και από την άλλη ύπαρξη δυο καταστάσεων ισορροπίας.



Γράφημα της συνάρτησης του ρυθμού μεταβολής για τις τιμές της παραμέτρου: $\mu < 0$, $\mu = 0$, $\mu > 0$, και διάγραμμα διακλάδωσης της διαφορικής εξίσωσης: $\dot{x} = x^2 + \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$.

iii) Στην περίπτωση

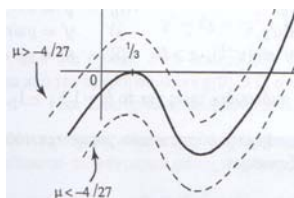
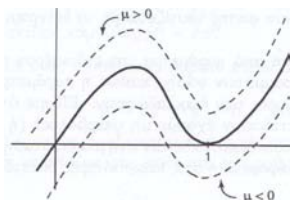
$$f_{\mu}(x) = x(1-x)^2 + \mu,$$

πριν τη διαταραχή ($\mu=0$) υπήρχαν δυο καταστάσεις ισορροπίας $x_1=0$ και $x_2=1$ στις οποίες ισχύει:

$$f'_{\mu=0}(0) \neq 0 \text{ και } f'_{\mu=0}(1) = 0.$$

Διαπιστώνουμε ότι κατά τη διαταραχή εμφανίζονται δυο τιμές διακλάδωσης:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{\mu_0}(x_0) = 0 \\ f'_{\mu_0}(x_0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_0(1-x_0)^2 + \mu = 0 \\ 3x_0^2 - 4x_0 + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x_0 = 1 \Rightarrow \mu_0 = 0) \\ (x_0 = 1/3 \Rightarrow \mu_0 = -4/27) \end{array} \right.$$



Γράφημα της συνάρτησης του ρυθμού μεταβολής για τις τιμές της παραμέτρου: $\mu > 0$, $\mu = 0$, $\mu < 0$ και $\mu > -4/27$, $\mu = -4/27$, $\mu < -4/27$.

iv) Στην περίπτωση

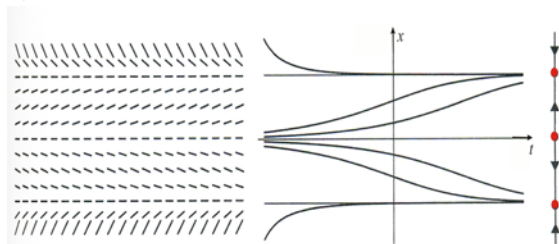
$$f_{\mu}(x) = x - x^3 + \mu,$$

πριν τη διαταραχή ($\mu=0$) υπήρχαν τρεις καταστάσεις ισορροπίας $x_0 = 0, \pm 1$ τέτοιες ώστε:

$$f'(0) > 0 \Rightarrow x_0 = 0 \text{ απωστική κατάσταση ασταθούς ισορροπίας,}$$

$$f'(1) < 0 \Rightarrow x_0 = +1 \text{ ελκτική κατάσταση ασυμπτωτικά ευσταθούς ισορροπίας,}$$

$$f'(-1) < 0 \Rightarrow x_0 = -1 \text{ ελκτική κατάσταση ασυμπτωτικά ευσταθούς ισορροπίας,}$$



Πεδίο κλίσης και γραφήματα λύσεων της διαφορικής εξίσωσης: $\dot{x} = x - x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

Κατά τη διαταραχή οι καταστάσεις ισορροπίας ορίζονται από την παραμετρική εξίσωση:

$$x^3 - x = \mu.$$

Ο ρυθμός μεταβολής παρουσιάζει δύο τοπικά ακρότατα:

$$f'_{\mu}(x) = 1 - 3x^2 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = +\sqrt{3}/3 \Rightarrow \mu_1 = -2\sqrt{3}/9 \\ x_2 = -\sqrt{3}/3 \Rightarrow \mu_2 = +2\sqrt{3}/9 \end{array} \right.$$

και διαπιστώνουμε ότι:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = -2\sqrt{3}/9 : x_1 = +\sqrt{3}/3 \Rightarrow f_{\mu_1}(x_1) = f'_{\mu_1}(x_1) = 0 \\ \mu_2 = +2\sqrt{3}/9 : x_2 = -\sqrt{3}/3 \Rightarrow f_{\mu_2}(x_2) = f'_{\mu_2}(x_2) = 0 \end{array} \right.$$

Διαπιστώνουμε ότι κατά τη διαταραχή προκύπτουν δυο τιμές διακλάδωσης όπου οι παράπλευρες και ενδιάμεσες τιμές ορίζουν διαφορετικές δυναμικές συμπεριφορές:

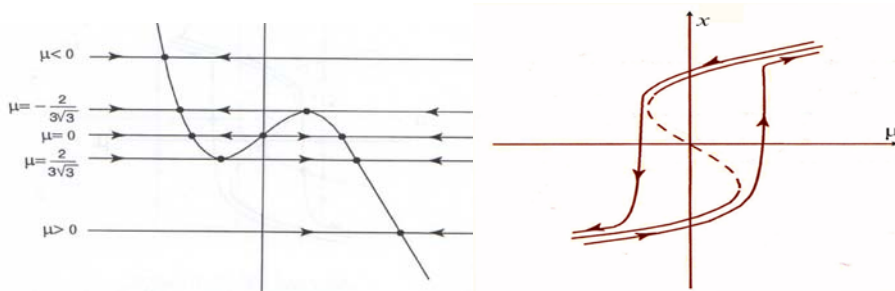
$$\mu < -2\sqrt{3}/9 \Rightarrow \text{μια ευσταθής κατάσταση ισορροπίας,}$$

$$\mu_1 = -2\sqrt{3}/9 \Rightarrow \text{μια ευσταθής κατάσταση ισορροπίας (τιμή διακλάδωσης),}$$

$$-2\sqrt{3}/9 < \mu < 2\sqrt{3}/9 \Rightarrow \text{μια ασταθής και δυο ευσταθείς καταστάσεις ισορροπίας,}$$

$$\mu_2 = 2\sqrt{3}/9 \Rightarrow \text{μια ευσταθής κατάσταση ισορροπίας (τιμή διακλάδωσης),}$$

$$\mu > 2\sqrt{3}/9 \Rightarrow \text{μια ευσταθής κατάσταση ισορροπίας.}$$



Οι καταστάσεις ισορροπίας για τις διάφορες τιμές της σταθερής διαταραχής. Το φαινόμενο της υστέρησης. (hysteresis loop)

Αν η εξέλιξη ενός φυσικού συστήματος διέπεται από την προηγούμενη διαφορική εξίσωση και τη στιγμή $t = 0$ το βρίσκεται στην κατάσταση $x(0)$, ερμηνεύουμε τη συμπεριφορά του ως εξής: Αν στο μ δοθεί μια τιμή γνήσια μεγαλύτερη από την κρίσιμη τιμή $\mu_2 = 2\sqrt{3}/9$, το σύστημα, ανεξάρτητα από την αρχική του κατάσταση, θα πλησιάσει γρήγορα στη μοναδική ελκτική κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας $x(t) \equiv x^+$. Αν τώρα η τιμή του μ αρχίσει να μειώνεται αργά, το σύστημα θα εξακολουθεί να παραμένει κοντά σε αυτή την ισορροπία ακόμη και αν η τιμή του μ φτάσει και πέσει κάτω από την κρίσιμη τιμή μ_2 . Αν η τιμή του μ συνεχίσει να μειώνεται, και εφόσον φτάσει και πέσει κάτω από την κρίσιμη τιμή $\mu_1 = -2\sqrt{3}/9$, εμφανίζεται η άλλη μοναδική ελκτική κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας $x(t) \equiv x^-$ και το σύστημα μεταπηδά από τον άνω στον κάτω κλάδο του γραφήματος. Αν τώρα αντιστραφεί η διαδικασία και η παράμετρος μ , ξεκινώντας από μια τιμή γνήσια μικρότερη από την κρίσιμη τιμή $\mu_1 = -2\sqrt{3}/9$, αρχίσει να αυξάνει αργά, τότε η εξέλιξη του συστήματος θα είναι διαφορετική. Αυτό οφείλεται στο ότι το σύστημα θα εξακολουθήσει να παραμένει κοντά στον κάτω κλάδο ακόμη και όταν η τιμή του μ ξεπεράσει την κρίσιμη τιμή μ_1 και μόνο όταν φτάσει την κρίσιμη τιμή μ_2 θα μεταπηδήσει στον άνω κλάδο του γραφήματος. Έτσι, το σύστημα δεν αντιλαμβάνεται το ενδιάμεσο τμήμα του γραφήματος μεταξύ των δυο κλάδων και αντί να επανακάμψει στην αναμενόμενη εξελικτική του πορεία ακολουθεί ένα βρόγχο υστέρησης.



5. Η εξέλιξη ενός πληθυσμού ψαριών σε μια λίμνη στο πέρασμα του χρόνου.

Ένας πληθυσμός ψαριών εξελίσσεται σε μια λίμνη και κάθε χρονική στιγμή το πλήθος τους δηλώνεται με τον αριθμό $x(t)$. Η εξέλιξη αυτή διέπεται από την εξίσωση:

$$\dot{x} = f_{\mu}(x)$$

όπου

$$f_{\mu}(x) = \alpha x - \beta x^2 - \mu$$

με α και β θετικές σταθερές και μ θετική παράμετρο που δηλώνει το ρυθμό αλίευσης των ψαριών. Θέλουμε να εξετάσουμε το πώς η αλίευση επηρεάζει την εξέλιξη του πληθυσμού των ψαριών.

- Αν $0 < \mu \leq \alpha^2 / 4\beta$, δείξτε ότι υπάρχει κρίσιμη τιμή x_0 τέτοια ώστε:
 - αν $x(0) < x_0$, ο πληθυσμός των ψαριών θα εκλείψει σε πεπερασμένο χρόνο.
 - αν $x(0) > x_0$, ο πληθυσμός των ψαριών θα τείνει σε κατάσταση ισορροπίας.
- Αν $\mu > \alpha^2 / 4\beta$, δείξτε ότι ο πληθυσμός των ψαριών θα εκλείψει ανεξάρτητα από το ποιο ήταν το αρχικό πλήθος $x(0)$.
- Αν ο ρυθμός αλίευσης είναι ανάλογος του πλήθους των ψαριών:

$$f_{\mu}(x) = \alpha x - \beta x^2 - \mu x$$

και $\alpha < \mu$, δείξτε ότι με την πάροδο του χρόνου ο πληθυσμός θα οδηγηθεί σε εξαφάνιση. Τι θα συμβεί στις περιπτώσεις: $\alpha = \mu$ και $\alpha > \mu$;

- Τι μπορείτε να προβλέψετε για την εξέλιξη του πληθυσμού των ψαριών αν ο ρυθμός αλίευσης είναι περιοδικός:

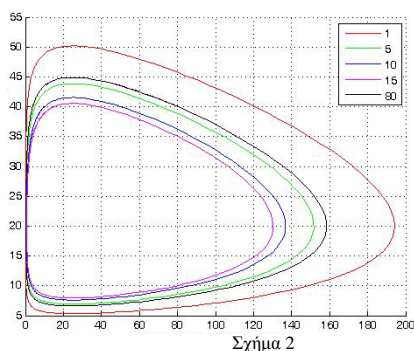
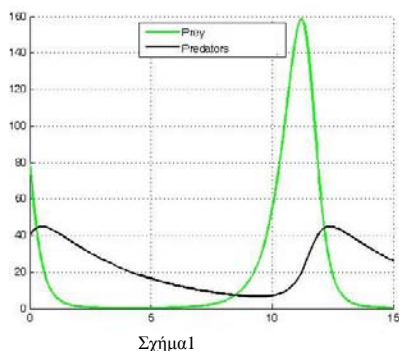
$$f_{\mu}(x) = \alpha x - \beta x^2 - \mu(1 + \sin 2\pi t);$$



6. Η εξέλιξη δυο πληθυσμών ψαριών σε μια λίμνη στο πέρασμα του χρόνου.

Δυο πληθυσμοί ψαριών συνυπάρχουν και εξελίσσονται σε μια λίμνη, όπου τα μικρά ψάρια βρίσκουν άφθονη τροφή στο περιβάλλον τους και αποτελούν τροφή των μεγάλων ψαριών. Κάθε χρονική στιγμή το πλήθος των μικρών και των μεγάλων ψαριών δηλώνεται αντίστοιχα με τους αριθμούς $x(t)$ και $y(t)$ και η κατάσταση των δυο πληθυσμών αναπαρίσταται με ένα σημείο $(x(t), y(t))$ στο ευκλείδειο επίπεδο.

Την αρχική στιγμή $t = 0$ υπήρχαν στη λίμνη $x(0) = 80$ μικρά και $y(0) = 40$ μεγάλα ψάρια και σε ένα αυθαίρετο χρονικό διάστημα διαπιστώθηκε ότι η πληθυσμιακή τους εξέλιξη αντικατοπτρίζεται στα γραφήματα του σχήματος 1 και του σχήματος 2.



- Ερμηνεύστε τα δυο αυτά γραφήματα της εξέλιξης των πληθυσμών και εξετάστε το ενδεχόμενο η εξέλιξή τους να διέπεται από το μαθηματικό πρότυπο των *Lotka-Volterra*, για συγκεκριμένες τιμές των συντελεστών και συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} = -\delta y + \gamma xy \end{cases}$$

Σχόλιο. Όσο λιγότερα μικρά ψάρια υπάρχουν τόσο περισσότερο φθίνει ο πληθυσμός των μεγάλων ψαριών αφού δεν βρίσκουν τροφή και όσο λιγότερα μεγάλα ψάρια υπάρχουν τόσο περισσότερο αυξάνει ο πληθυσμός των μικρών ψαριών αφού πολλαπλασιάζονται πιο γρήγορα. Τα γραφήματα δείχνουν ότι κάποιες εποχές υπάρχει κίνδυνος εξαφάνισης κάποιου από τους δυο πληθυσμούς, αλλά παρολαυτά ο κύκλος της ζωής τους δεν σταματά. Προφανώς, αν μηδενιζόταν ο πληθυσμός των μικρών ψαριών τότε θα μηδενιζόταν και ο πληθυσμός των μεγάλων ψαριών αφού δεν θα είχαν πια τροφή για να επιβιώσουν, ενώ αν πρώτα μηδενιζόταν ο πληθυσμός των μεγάλων ψαριών τότε θα αύξανε ραγδαία ο πληθυσμός των μικρών ψαριών αφού έχουν άφθονη τροφή στο περιβάλλον τους. Επίσης, τα γραφήματα δείχνουν ότι υπάρχουν και περίοδοι εξάρσης των δυο πληθυσμών. Φαίνεται ότι η εξέλιξη αυτών των πληθυσμών διέπεται από το μαθηματικό πρότυπο των *Lotka-Volterra*.

- Αποδείξτε ότι το σύστημα των εξισώσεων *Lotka-Volterra* μπορεί να εκφραστεί ως διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$A(x, y) dx + B(x, y) dy = 0 .$$

- Έχοντας προσδιορίσει τους συντελεστές της προηγούμενης διαφορικής εξίσωσης, θεωρείστε στο ευκλείδειο επίπεδο τη διαφορική μορφή:

$$\omega = A(x, y) dx + B(x, y) dy .$$

Εξετάστε αν η διαφορική αυτή μορφή είναι ακριβής και αν όχι προσδιορίστε ένα ολοκληρωτικό παράγοντα που η προσθήκη του την καθιστά ακριβή. Επίσης, προσδιορίστε τον πυρήνα της και εξετάστε κατά πόσο επηρεάζεται από την προσθήκη του ολοκληρωτικού παράγοντα.

- Αποδείξτε ότι η ακριβής αυτή διαφορική μορφή αποτελεί διαφορικό της συνάρτησης:

$$F(x, y) = g_1(x) + g_2(y)$$

όπου

$$g_1(x) = \gamma x - \delta \ln x \quad \text{και} \quad g_2(y) = \beta y - \alpha \ln y .$$

- Διαπιστώστε ότι στις ισοσταθμικές καμπύλες αυτής της συνάρτησης εξελίσσονται οι τροχιές των λύσεων του συστήματος των εξισώσεων *Lotka-Volterra*, δηλαδή κατά τη διάρκεια της εξέλιξης των πληθυσμών διατηρείται σταθερή η τιμή της συνάρτησης:

$$F(x(t), y(t)) = g_1(x(t)) + g_2(y(t)), \quad x(t) > 0, \quad y(t) > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα υποσύνολα του ευκλείδειου επιπέδου είναι κυρτά:

$$\Sigma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0, F(x, y) \geq c\}, \quad c \in \mathbb{R}^+$$

δηλαδή, αν δυο σημεία $a = (x_1, y_1)$ και $b = (x_2, y_2)$ ανήκουν σε ένα τέτοιο σύνολο τότε στο ίδιο σύνολο ανήκουν όλα τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος:

$$(1 - \lambda)a + \lambda b, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Επίσης, αποδείξτε ότι τα σύνολα αυτά είναι συμπαγή, δηλαδή κλειστά και φραγμένα υποσύνολα του ευκλείδειου επιπέδου.

- Αποδείξτε ότι όλα τα προηγούμενα υποσύνολα του ευκλείδειου επιπέδου έχουν ένα κοινό σημείο:

$$Q \in \bigcap_{c>0} \Sigma_c, \quad \text{όπου } Q = (\alpha/\beta, \delta/\gamma)$$

αφού διαπιστώσετε ότι:

$$c \leq c' \Rightarrow \Sigma_c \supseteq \Sigma_{c'}.$$

- Αποδείξτε στο σημείο Q αποκτά το ολικό της μέγιστο η συνάρτηση

$$F(x, y) = g_1(x) + g_2(y).$$

και ισχύει:

$$\max_{x, y > 0} F(x, y) = (\alpha/\beta e)^\alpha (\delta/\gamma e)^\delta.$$

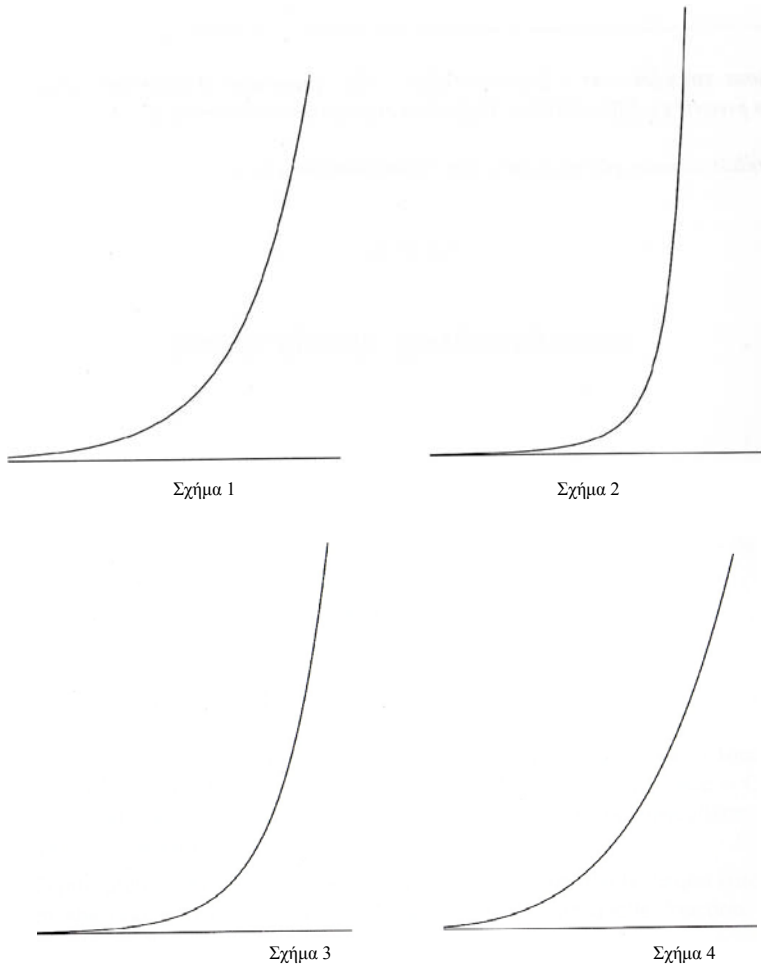
- Αποδείξτε ότι το σημείο Q αποτελεί κατάσταση ισορροπίας των εξισώσεων *Lotka-Volterra* και πρόκειται για κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας. Η ισορροπία αυτή είναι ασυμπτωτικά ευσταθής;
- Αποδείξτε ότι κάθε άλλη τροχιά που ορίζεται από οποιαδήποτε αρχική συνθήκη (x_0, y_0) , $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, εξελίσσεται περιοδικά γύρω από την κατάσταση ισορροπίας Q μέσα στο πρώτο τεταρτημόριο του ευκλείδειου επιπέδου.
- Σε ποιο θεώρημα βασιστήκατε προκειμένου να αποφανθείτε για την ευστάθεια της κατάστασης ισορροπίας Q ; Δώστε την εκφώνησή του και την απόδειξή του.



7. Η εξέλιξη των πληθυσμών *Hobbit* και *Mordor* στο πέρασμα του χρόνου.

Οι δημογραφικές μελέτες έχουν δείξει ότι ο πληθυσμός *Hobbit* διπλασιάζεται κάθε αιώνα και ο πληθυσμός *Mordor* αυξάνεται κατά 25% κάθε χρόνο και αυτοί οι ρυθμοί αύξησης παραμένουν σταθεροί στο πέρασμα του χρόνου.

- Θα μπορούσε το γράφημα του σχήματος 1, με κατάλληλη διαβάθμιση των αξόνων, να αναπαραστήσει την εξέλιξη του πληθυσμού *Hobbit* στο πέρασμα του χρόνου; Τα σχήματα 2, 3, 4;
Θα μπορούσε το γράφημα του σχήματος 1, με κατάλληλη διαβάθμιση των αξόνων, να αναπαραστήσει την εξέλιξη του πληθυσμού *Mordor* στο πέρασμα του χρόνου; Τα σχήματα 2, 3, 4;
- Ένας πληθυσμός παρουσιάζει ετήσιο ρυθμό αύξησης 1% και την 1^η Ιανουαρίου 2012 αριθμούσε 1 εκατομμύριο άτομα. Πώς θα αναπαριστούσατε γραφικά την εξέλιξη αυτού του πληθυσμού μεταξύ 1.1.2011 και 1.1.2013. Με την προϋπόθεση ότι ο ρυθμός αύξησης διατηρείται σταθερός, πόσος θα είναι ο πληθυσμός έναν αιώνα αργότερα (1.1.2112); Το σχήμα 1, με κατάλληλη διαβάθμιση των αξόνων, θα μπορούσε να εκφράσει την εξέλιξη αυτού του πληθυσμού; Τα σχήματα 2, 3, 4;



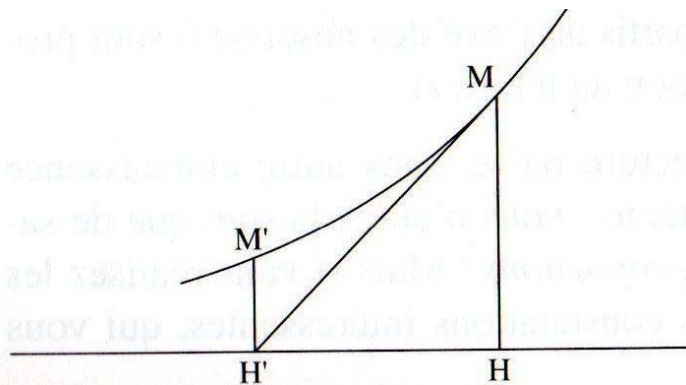
- Εξετάστε διαδοχικά στα σχήματα 1, 2, 3, 4 το εξής ερώτημα:

Επιλέξτε στην καμπύλη ένα σημείο M και χαράζοντας από αυτό το σημείο την κατακόρυφη ευθεία σημειώστε με H την τομή της με τον άξονα των τετμημένων. Κατόπιν χαράξτε προσεκτικά την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο M και σημειώστε με H' το σημείο τομής της με τον άξονα των τετμημένων.

Άραγε, όταν το σημείο M μεταβάλλεται επάνω στην καμπύλη το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $H'H$ διατηρείται σταθερό;

Αν η απάντησή σας είναι αρνητική, χαράξτε την κατακόρυφη ευθεία από το σημείο H' και σημειώστε με M' το σημείο τομής της με την καμπύλη.

Άραγε, η επιλογή του σημείου M επηρεάζει το λόγο $HM/H'M'$;

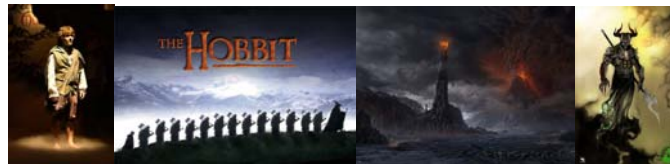


- Προβλέψατε, για τον επόμενο αιώνα, την πληθυσμιακή εξέλιξη που έχει σταθερό ετήσιο ρυθμό αύξησης 1% και κατόπιν προσδιορίσατε την τιμή του λόγου $HM/H'M$ κατά τη μεταβολή του σημείου M . Μάλλον καταλήξατε σε αισθητά ίδιο αριθμητικό αποτέλεσμα. *Άραγε, πρόκειται για απλή σύμπτωση;*

Ποιος είναι ο ανά έτος ρυθμός αύξησης του πληθυσμού *Hobbit*; *Άραγε, ο ρυθμός αυτός μπορεί να αναγνωριστεί στο Σχήμα 1; Στα σχήματα 2, 3, 4;*

Ποιος είναι ο ανά αιώνα ρυθμός αύξησης του πληθυσμού *Mordor*; *Άραγε, ο ρυθμός αυτός μπορεί να αναγνωριστεί στο Σχήμα 1; Στα σχήματα 2, 3, 4;*

- Αποδείξτε ότι για να αναγνωριστεί αν μια δεδομένη καμπύλη αποτελεί γράφημα συνάρτησης που εκφράζει την εξέλιξη των πληθυσμών *Hobbit* και *Mordor* δεν χρειάζεται να ξέρουμε ούτε τη διαβάθμιση του άξονα των τετμημένων, ούτε τη μονάδα του άξονα των τεταγμένων, αλλά αρκεί να εφαρμοστεί το κριτήριο εκθετικότητας που απορρέει από τη γεωμετρική διαπίστωσή σας.
- Ο νόμος που διέπει την εξέλιξη των πληθυσμών *Hobbit* και *Mordor* μπορεί να εκφραστεί με μια διαφορική εξίσωση; Αν ναι, κατασκευάστε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τα γραφήματα των λύσεών τους με κοινή αρχική συνθήκη επιλέγοντας κατάλληλη διαβάθμιση.
- Σας προβληματίσε το ότι τα δεδομένα του ζητήματος που εξετάσατε παίρνουν διακριτές αριθμητικές τιμές και η γραφική τους αναπαράσταση εκφράζεται με συνεχή καμπύλη; *Άραγε, πώς περνάμε από το διακριτό στο συνεχές;*



Hobbit

Mordor

Σχόλιο. Τα ερωτήματα αυτά ή περίπου αυτά τέθηκαν σε μαθητές Λυκείου και σε φοιτητές του Πανεπιστημίου της Νίκαιας στη Γαλλία και, επίσης σε μαθητές και καθηγητές Λυκείων και σε φοιτητές του Πανεπιστημίου Πάτρας, στο πλαίσιο της συμμετοχής τους στις μαθησιακές δραστηριότητες της Εστίας Επιστημών Πάτρας.

Ο *Frédéric Pham*, αληθινός δάσκαλος των Μαθηματικών, καθηγητής στο Πανεπιστήμιο της Νίκαιας, έθεσε αυτά τα ερωτήματα που αναμφίβολα προκαλούν προβληματισμό ως προς το εφαρμοζόμενο εκπαιδευτικό σύστημα και τις διδακτικές προσεγγίσεις των Μαθηματικών. Οι προβληματισμοί αυτοί αποτελούν μέρος της σειράς που ο ίδιος δημιούργησε: *thèmes de réflexions - chemins de la découverte* και χρησιμοποιούνται στη σειρά μαθησιακών δραστηριοτήτων: *Μονοπάτια Ανακάλυψης της Εστίας Επιστημών Πάτρας*.

- Μια Γαλλίδα μαθήτρια μόλις είδε τα ερωτήματα είπε:
Αυτά δεν είναι Μαθηματικά, εδώ χρειάζεται να σκεφτώ!
- Μια Γαλλίδα φοιτήτρια, αφού ολοκλήρωσε τη μελέτη των ερωτημάτων, είπε:
Από τα σχολικά μου χρόνια είχα αποκτήσει τη συνήθεια να μαθαίνω πρώτα τη θεωρία και κατόπιν να ψάχνω την επιβεβαίωση σε κάποιο παράδειγμα. Τώρα όμως έμαθα να κάνω το αντίθετο, δηλαδή να ξεκινώ με πειραματισμούς που θα με οδηγήσουν στη θεωρία. Κατόπιν, να βγάζω τα συμπεράσματά μου που, ανάλογα με την περίπτωση, οδηγούν στην αποδοχή και χρήση μιας θεωρίας ή στην απόρριψή της. Αυτό το ανακάλυψα επεξεργαζόμενη τα εκθετικά όπου οι πειραματισμοί μου με υποχρέωναν να δίνω προσοχή στις μετρήσεις μου και στα γραφήματά μου. Πριν αντιληφθώ αυτή την ανάγκη, ήξερα εκ των προτέρων το αποτέλεσμα στο οποίο όφειλα να καταλήξω και έτσι μου αρκούσε να κάνω τις μετρήσεις μου στο περίπου. Τώρα ξέρω να εκτιμώ την ακρίβεια των μετρήσεων και να αναζητώ την ερμηνεία των φαινομένων στα καλοσχεδιασμένα γραφήματά μου.
- Μια Ελληνίδα φοιτήτρια, αφού μελέτησε τα ερωτήματα, είπε:
Κατάλαβα ότι πρωταρχικό μου μέλημα πρέπει να είναι το να μπορώ να θέτω στον εαυτό μου ερωτήματα και όχι να μαθαίνω προκατασκευασμένες απαντήσεις. Τα καλά ερωτήματα είναι που θα μου προκαλέσουν την ανάγκη να αναζητήσω και να κατανοήσω μια θεωρία ώστε στη συνέχεια να την χρησιμοποιήσω.
- Ένας Έλληνας καθηγητής, αφού επεξεργάστηκε τα ερωτήματα με συναδέλφους του, είπε:
Έτσι θα ήθελα να κάνω τη διδασκαλία στους μαθητές μου, αλλά κάτι τέτοιο δεν χωρά στις προδιαγραφές του εκπαιδευτικού μας συστήματος.
- Ένας Έλληνας Σύμβουλος, επιστημονικός καθοδηγητής των καθηγητών β'αθμιας Εκπαίδευσης, όταν είδε τα ερωτήματα, αποχώρησε λέγοντας:
*Ανεπίτρεπτο! Τι πράγματα είναι αυτά; Τα Μαθηματικά δεν έχουν σχέση με τον *Harry Potter*!*



Πράγματι, τα *Hobbit* και *Mordor* δεν έχουν σχέση με τον *Harry Potter* αλλά με τον *Lord of the Rings* !



Οι προαπαιτούμενες γνώσεις για την αντιμετώπιση των ερωτημάτων βασίζονται στη *σύγκριση μηκών* και στη *μέτρηση αναλογιών*. Η έννοια που υποκρύπτεται στα ερωτήματα και θέλουμε να αναδειχθεί σταδιακά μέσα από τη πειραματική αναζήτηση είναι αυτή των *εκθετικών συναρτήσεων*: οι ιδιότητές τους που μένουν αναλλοίωτες κατά τις αλλαγές κλίμακας των αξόνων, οι διαφορικές τους ιδιότητες, ο ορισμός και οι ιδιότητες του αριθμού e . Επίσης, η αναζήτηση της σωστής διαβάθμισης των αξόνων οδηγεί στη χρήση της έννοιας μιας *γεωμετρικής ακολουθίας* και στο νόημα της *γραμμικής προσέγγισης*.

Η γραφική αναπαράσταση της εξέλιξης ενός μεγέθους u ως *συνάρτησης* του χρόνου t , π.χ. της εξέλιξης ενός πληθυσμού, αποτελεί σύνηθες ζητούμενο των πραγματικών προβλημάτων. Θεωρώντας το χρόνο t ως *τεταγμένη* σε έναν οριζόντιο άξονα, διαβάζουμε την τιμή $u(t)$ ως *τεταγμένη* σε έναν κάθετο άξονα. Στο μέτρο όπου ο πληθυσμός είναι πολυπληθής και εφόσον οι αυξομειώσεις του δεν εμφανίζουν καταστροφικές ασυνέχειες, η πληθυσμιακή εξέλιξη μπορεί να αναπαρασταθεί με μια συνεχή καμπύλη. Η δυνατότητα μετάβασης από ένα διακριτό γράφημα σε συνεχή γραφική αναπαράσταση είναι σημαντικό θέμα.



Στον πρώτο προβληματισμό (γραφήματα της εξέλιξης των πληθυσμών *Hobbit* και *Mordor*), αποφύγαμε να διαβαθμίσουμε το χρονικό άξονα και να τοποθετήσουμε τον άξονα των τεταγμένων στα προτεινόμενα σχήματα. Εσείς πρέπει να επιλέξετε την κατάλληλη διαβάθμιση ώστε τα γραφήματα να αποκτήσουν νόημα. Πολλοί φοιτητές ξεπελάγησαν όταν αντιλήφθηκαν ότι η ίδια καμπύλη είναι δυνατό να αναπαριστά την εξέλιξη διαφορετικών πληθυσμών (*Hobbit* & *Mordor*)! Ορισμένοι δεν μπόρεσαν καν στον κόπο να εξετάσουν τα σχήματα 1 και 3 για την αναπαράσταση της εξέλιξης του πληθυσμού *Mordor*, γιατί τα είχαν ήδη επιλέξει ως ενδεχόμενη απάντηση στην εξέλιξη του πληθυσμού *Hobbit*! Άλλοι απάντησαν ότι και τα τέσσερα γραφήματα μπορούν να αποδώσουν την εξέλιξη και των δυο πληθυσμών αφού, όπως είπαν, υπάρχει ελευθερία επιλογής των διαβαθμίσεων των αξόνων! Πάντως, αν παρατηρήσετε προσεκτικά τα γραφήματα και πειραματιστείτε κάνοντας τις ακριβέστερες κατά το δυνατό μετρήσεις, σίγουρα οι διαπιστώσεις σας θα επιτρέψουν να καταλήξετε μέσα από συλλογισμούς σε αξιόπιστα συμπεράσματα που θα σας αποκαλύψουν την απάντηση.



Στον δεύτερο προβληματισμό (εξέλιξη ενός πληθυσμού με ετήσιο ρυθμό αύξησης 1%), θέλουμε να αναδειχθεί το νόημα της *γραμμικής προσέγγισης*. Μπορείτε να αρχίσετε με έναν απλό υπολογισμό:

1.1.2012 : ο πληθυσμός αποτελείται από $10^6 = 1000000$ άτομα.

1.1.2013 : ο πληθυσμός θα αποτελείται από $10^6 \times 1,01 = 1010000$ άτομα.

1.1.2011 : ο πληθυσμός αποτελείται από $10^6 : 1,01 \approx 990099$ άτομα.

Άρα, σε αυτή τη διαίτη ο πληθυσμός παρουσιάζει αύξηση περίπου 10 χιλιάδων ατόμων ετησίως, οπότε στο χρονικό αυτό διάστημα η αύξηση είναι ουσιαστικά γραμμική. Προκειμένου λοιπόν να σχεδιάσετε το γράφημα της πληθυσμιακής αύξησης σε αυτή τη διαίτη, είναι χρήσιμο να επιλέξετε μια διαβάθμιση του άξονα των τεταγμένων που θα καθιστά αναγνώσιμη την ετήσια πληθυσμιακή αύξηση των 10000 ατόμων. Θα δείτε μόνο ένα μέρος του γραφήματος της πληθυσμιακής αύξησης, αφού η αρχή των τεταγμένων θα βγει έξω από το φύλλο σχεδίασης, αλλά αυτό δεν σας πειράζει!

Έναν αιώνα αργότερα ο πληθυσμός θα έχει πολλαπλασιαστεί με $(1,01)^{100} \approx 2,704813$ και, σε αυτό το χρονικό διάστημα, η πληθυσμιακή εξέλιξη θα έχει εκτραπεί κατά πολύ από τη γραμμικότητα που απαιτεί διπλασιασμό του πληθυσμού! Θα ήταν πρακτικά αδύνατη η επανάληψη της προηγούμενης διαβάθμισης του άξονα των τεταγμένων κατά γεωμετρική πρόοδο λόγου 1,01, αφού αυτός ο λόγος είναι πάρα πολύ κοντά στο 1 και προκαλεί μη αναγνώσιμη ετήσια διαβάθμιση του άξονα των τεταγμένων. Αλλά, τίποτα δεν εμποδίζει να διαβαθμίσετε τον άξονα των τεταγμένων σε αιώνες και τότε θα διαπιστώσετε ότι η διαβάθμιση των τεταγμένων θα ακολουθεί γεωμετρική πρόοδο λόγου περίπου 2,7.



Ο επόμενος προβληματισμός οδηγεί στην πειραματική αναζήτηση του κεντρικού γεωμετρικού χαρακτηριστικού της πληθυσμιακής εξέλιξης. Μπορούμε να επανέλθουμε στα γραφήματα των σχημάτων 1, 2, 3, 4 και να εξετάσουμε σε ποια από αυτά διατηρείται σταθερό το μήκος του τμήματος HH' και σε ποια όχι; Εδώ χρειάζεται να χαράξουμε πολύ προσεκτικά την εφαιρομένη στα διάφορα σημεία της κάθε καμπύλης όπως το απαιτεί κάθε σωστή πειραματική διαδικασία. Κι αν δεν είμαστε σίγουροι, ας εξετάσουμε πάλι πειραματικά τη σταθερότητα του λόγου $MH/M'H'$! Έτσι, θα οδηγηθούμε σε μια εικασία που θα επιζητά την απόδειξή της!



Ο επόμενος προβληματισμός είναι μάλλον αποκαλυπτικός των προηγούμενων. Φυσικά, δεν πρόκειται για σύμπτωση και από εδώ ακριβώς αναδύεται το επιζητούμενο *κριτήριο εκθετικότητας* !

Ας θεωρήσουμε ότι η καμπύλη στο σχήμα 1 (ή το σχήμα 3) εκφράζει την εξέλιξη αυτού του πληθυσμού και έστω M το σημείο της καμπύλης που αντιστοιχεί στον πληθυσμό της 1.1.2012. Σε ένα μικρό χρονικό

διάστημα, η αύξηση (10 χιλιάδες άτομα ετησίως) είναι πρακτικά γραμμική και έτσι με εξαιρετική προσέγγιση μπορεί να αναπαρασταθεί γραφικά με την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο M . Η κλίση p αυτής της εφαπτομένης εκφράζει λοιπόν περίπου 10 χιλιάδες άτομα ετησίως, άρα 1 εκατομμύριο άτομα ανά αιώνα. Αφού η τεταγμένη του M είναι 10^6 άτομα, κατά συνέπεια το διάστημα $H'H$ θα έχει μήκος 1 αιώνα.

Ανάλογο σκεπτικό υποδεικνύει ότι ο ετήσιος ρυθμός αύξησης του πληθυσμού *Hobbit* είναι:

$$\tau = \sqrt[100]{2} - 1 \approx 0,007 = 7\% \text{ αφού } (1 + \tau)^{100} = 2.$$

Άλλωστε, μπορούμε να το διαπιστώσουμε και γεωμετρικά. Επιλέγοντας στην καμπύλη ένα οποιοδήποτε σημείο M , χαράζουμε εκεί την εφαπτομένη της και μετράμε την κλίση p παίρνοντας τον αιώνα ως μονάδα τετμημένων και την τεταγμένη του M ως μονάδα τεταγμένων και ένας απλός συλλογισμός δίνει $\tau = p/100$.



Το μονοπάτι που οδηγεί στη λύση είναι πλέον ανοιχτό, αφού τώρα είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε το κριτήριο της εκθετικότητας. Όπως στο πρόβλημα των πληθυσμών *Hobbit* και *Mordor*, έτσι σε πολλά προβλήματα της Οικονομίας, Βιολογίας, Χημείας, Φυσικής, κλπ, καλούμαστε να μελετήσουμε ένα μέγεθος u που εξαρτάται εκθετικά από ένα μέγεθος t . Όμως, τι σημαίνει “εκθετικά”;

Σημαίνει ότι:

Ο λόγος των τιμών του μεγέθους u δεν εξαρτάται παρά μόνο από την απομάκρυνση μεταξύ των τιμών της μεταβλητής t , δηλαδή ο λόγος $u(t_2)/u(t_1)$ εξαρτάται μόνο από τη διαφορά $t_2 - t_1$, ή με άλλα λόγια όποια και αν είναι τα ζεύγη (t_1, t_2) και (t'_1, t'_2) ισχύει:

$$t_2 - t_1 = t'_2 - t'_1 \Rightarrow u(t_2)/u(t_1) = u(t'_2)/u(t'_1).$$

Αυτή η μάλλον απλοϊκή αντίληψη της έννοιας της εκθετικής εξέλιξης είναι σημαντική για τους χρήστες των μαθηματικών και θα την αξιοποιήσουμε ως εφαλτήριο αναζήτησης και ανακάλυψης του νοήματος και των ιδιοτήτων της εκθετικής συνάρτησης.

Θα ονομάζουμε *εκθετική συνάρτηση* κάθε *συνεχή* συνάρτηση της οποίας ο λόγος των τιμών της δεν εξαρτάται παρά μόνο από την απομάκρυνση μεταξύ των τιμών της μεταβλητής της, δηλαδή ο λόγος $u(t_2)/u(t_1)$ εξαρτάται μόνο από τη διαφορά $t_2 - t_1$.

Διακρίνουμε δυο τύπους εκθετικών συναρτήσεων, αυτές που δηλώνουν την αύξουσα εκθετική εξέλιξη και αυτές που δηλώνουν τη φθίνουσα εκθετική εξέλιξη, αντίστοιχα:

$$t_2 > t_1 \Rightarrow \frac{u(t_2)}{u(t_1)} > 1 \quad \text{και} \quad t_2 > t_1 \Rightarrow \frac{u(t_2)}{u(t_1)} < 1.$$

Συμπέρασμα. Η φύση των εκθετικών συναρτήσεων δεν αλλοιώνεται όταν αλλάζουν οι κλίμακες των τετμημένων και των τεταγμένων ή η αρχή των συντεταγμένων. Έτσι, προκειμένου να αναγνωρίσουμε αν μια καμπύλη είναι γράφημα εκθετικής συνάρτησης δεν απαιτείται να γνωρίζουμε τη διαβάθμιση του άξονα των τετμημένων ούτε την επιλεγμένη μονάδα των τεταγμένων! Αρκεί να εφαρμόσουμε το κριτήριο της εκθετικότητας:

όποια και αν είναι τα ζεύγη (t_1, t_2) και (t'_1, t'_2) :

$$t_2 - t_1 = t'_2 - t'_1 \Rightarrow u(t_2)/u(t_1) = u(t'_2)/u(t'_1).$$



Τώρα μπορείτε να απαντήσετε στον αρχικό προβληματισμό, αλλά και σε πολλά ανάλογα ερωτήματα. Πείτε λοιπόν ποιες από τις καμπύλες 1, 2, 3, 4 είναι αποδεκτές ως γράφημα εκθετικής συνάρτησης και δώστε την απάντησή σας για τη γραφική αναπαράσταση των πληθυσμών *Hobbit* και *Mordor*.

Ο *Frédéric Pham* που έθεσε τους προβληματισμούς στους φοιτητές του στο Πανεπιστήμιο της Νίκαιας είπε: “*Αλήθεια, πώς συμβαίνει εγώ, σχεδιαστής αυτών των καμπύλων, να είμαι βέβαιος ότι κανένας φοιτητής που θα κάνει σωστά τις μετρήσεις του δεν θα μπορέσει ποτέ να συναντήσει έστω και μια περίπτωση όπου οι καμπύλες 1 και 3 δεν θα ανταποκρίνονται στο κριτήριο της εκθετικότητας; Είναι ένα μυστικό και αν το βρείτε θα κατάλαβετε ότι δεν χρειάστηκε μεγάλη προσπάθεια για να επιτύχω το σκοπό μου!*”

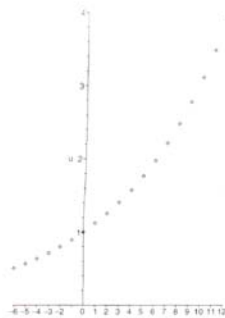
Στο πρώτο στάδιο της αναζήτησής σας, αν δεν γνωρίζατε το κριτήριο εκθετικότητας μάλλον θα παιδευτήκατε ψάχνοντας αυθαίρετα κατάλληλες διαβαθμίσεις των αξόνων και δοκιμάζοντας την ανταποκρισιμότητά τους στα δεδομένα της εξέλιξης των πληθυσμών *Hobbit* και *Mordor*. Όμως, ίσως αυτοί οι πειραματισμοί να ενδυνάμωσαν τη διάισθησή σας και κίνησαν την περιέργειά σας να ανακαλύψετε κάποιο γεωμετρικό κριτήριο που να μην επηρεάζεται από τις αλλαγές των διαβαθμίσεων. Ο επόμενος προβληματισμός μάλλον θα σας προκάλεσε την υποψία ή ίσως τη βεβαιότητα ύπαρξης ενός κριτηρίου εκθετικότητας. Τώρα, χρησιμοποιώντας αυτό το κριτήριο μπορείτε να οργανώσετε τις πειραματικές σας διεργασίες και μετρώντας προσεκτικά τα μήκη και υπολογίζοντας τους αντίστοιχους λόγους να απορρίψετε αρκετά γρήγορα τις καμπύλες 2 και 4 ως υποψήφια γραφήματα εκθετικής εξέλιξης. Αντίθετα, δεν θα μπορέσετε να απορρίψετε την υποψηφιότητα των καμπύλων 1 και 3 αφού όλες οι μετρήσεις σας σίγουρα ανταποκρίθηκαν στο κριτήριο της εκθετικότητας,

λαμβάνοντας υπόψη το πειραματικό σφάλμα. Όμως, όσες μετρήσεις και αν κάνετε, εσείς και οι συνάδελφοί σας, πάντα θα υπάρχουν άλλες που δεν θα προλάβετε να κάνετε, οπότε θα αποδεχτείτε αυτές τις καμπύλες με την πεποίθηση – ισχυρότατη χωρίς αμφιβολία – της πειραματικής αλήθειας, αλλά όχι της μαθηματικής αλήθειας.

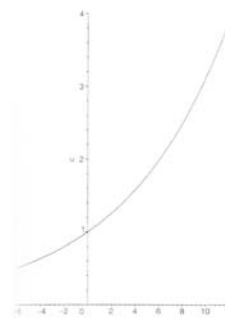


Η γραφική αναπαράσταση της εξέλιξης των πληθυσμών *Hobbit* και *Mordor* απαιτεί κάποιες διορθωτικές παρεμβάσεις που αφορούν στο πέρασμα από το διακριτό στο συνεχές. Για το σκοπό αυτό θα αρχίσουμε με ένα απλό παράδειγμα προκειμένου να αναδειχθεί ξεκάθαρα αυτή η διαδικασία.

Ένα κεφάλαιο τοκίζεται με σταθερό επιτόκιο, ας πούμε 12% το χρόνο. Έχουμε δυο θεωρήσεις ανάλογα με το αν η χρονική μεταβλητή είναι διακριτή ή συνεχής. Στην πρώτη, η εξέλιξη του κεφαλαίου προσμετράται σε σταθερά χρονικά διαστήματα, π.χ. την πρώτη μέρα κάθε χρόνου, οπότε προκύπτει το διακριτό γράφημα του σχήματος Α. Στην δεύτερη, το κεφάλαιο εξελίσσεται κάθε χρονική στιγμή και αφού στο τέλος της πρώτης χρονιάς θα έχει πολλαπλασιαστεί με 1,12, στο τέλος ενός μήνα πολλαπλασιάζεται με $(1,12)^{1/12} = 1,0094888$, στο τέλος μιας μέρας με $(1,12)^{1/365} = 1,0003105$, και έτσι προκύπτει το συνεχές γράφημα του σχήματος Β. Αυτή η διαδικασία υπολογισμού του αυξανόμενου κεφαλαίου από χρόνο σε μήνα, από μήνα σε μέρα, από μέρα σε ώρα, κλπ, μπορεί να επαναλαμβάνεται επ'άπειρο με ζητούμενο το στιγμιαίο υπολογισμό του.



Σχήμα Α



Σχήμα Β

Διακριτή και συνεχής γραφική αναπαράσταση της ανατοκίζουσας εξέλιξης του κεφαλαίου.

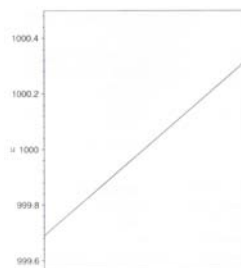
Όταν θελήσουμε να εκφραστεί μαθηματικά αυτή τη διαδικασία, ώστε να οριστεί η τιμή $u(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, προσκρούουμε σε ένα τεχνικό εμπόδιο που οφείλεται στο ότι οι πραγματικοί αριθμοί δεν είναι όλοι ρητοί! Η δυσκολία αυτή ξεπερνιέται υποθέτοντας τη συνάρτηση συνεχή και αυτό το δικαίωμα το έχουμε γιατί κάθε πραγματικός αριθμός μπορεί να προσεγγιστεί οσοδήποτε θέλουμε από ρητούς αριθμούς. Επίσης, προκειμένου να διευκολυνθούν οι συλλογισμοί μας, ενισχύουμε την υπόθεση της συνέχειας με την επιπλέον υπόθεση της παραγωγισιμότητας και αυτό χωρίς βλάβη της γενικότητας αφού άλλωστε οι εκθετικές συναρτήσεις είναι πράγματι παραγωγίσιμες.

Ας εξετάσουμε την εξέλιξη ενός κεφαλαίου που τοκίζεται με σταθερό ετήσιο επιτόκιο σε ένα μικρό χρονικό διάστημα, ας πούμε δυο ημερών, μεταξύ της ημέρας $j-1$ και την ημέρα $j+1$. Η συνάρτηση που εκφράζει την εξέλιξη του κεφαλαίου, σε αυτό το μικρό χρονικό διάστημα, προβλέπεται να είναι ουσιαστικά γραμμική και σε αυτό αντικατοπτρίζεται η παραγωγισιμότητά της (Σχήμα Γ). Αν για παράδειγμα τη μέρα j η τιμή της συνάρτησης είναι $u(j) = 1000$ €, η μεταβολή της σε αυτό το μικρό χρονικό διάστημα θα είναι ανάλογη προς τη μεταβολή της χρονικής μεταβλητής t , δηλαδή πρακτικά η αύξηση είναι γραμμική, με συντελεστή αναλογίας περίπου 0,31€ ανά μέρα. Μερικά χρόνια αργότερα, λίγο περισσότερα από 20, το κεφάλαιο θα έχει πολλαπλασιαστεί και αυτό θα μπορούσε να προβλεφθεί αφού ισχύει το *αναλλοίωτο της κλίμακας* των συναρτήσεων που το γράφημά τους πληροί το κριτήριο της εκθετικότητας:

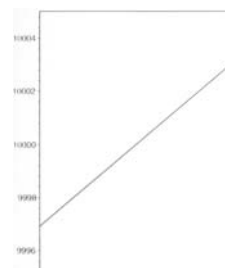
$$\text{ο λόγος } u(t_2)/u(t_1) \text{ εξαρτάται μόνο από τη διαφορά } t_2 - t_1.$$

Έτσι, για να σχεδιάσουμε αυτή την εξέλιξη (Σχήμα Δ) αρκεί να αντιγράψουμε το Σχήμα Γ πολλαπλασιάζοντας με 10 τους αριθμούς που δηλώνουν τις τεταγμένες, αφού για κάθε h ισχύει:

$$u(j') = 10u(j) \Rightarrow u(j'+h) = 10u(j+h).$$



Σχήμα Γ



Σχήμα Δ



Τώρα προχωρήστε πιο πέρα δίνοντας το νόμο που διέπει αυτή την εξέλιξη σε μορφή διαφορικής εξίσωσης, αφού πλέον είστε σε θέση να κάνετε την ακόλουθη μαθηματική δήλωση:

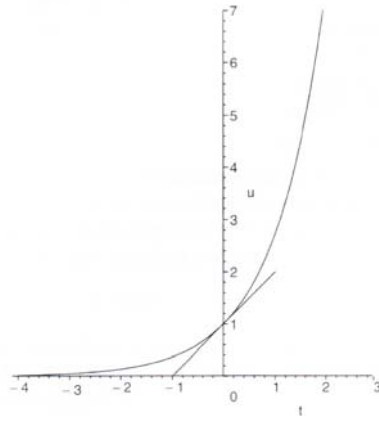
Το γράφημα μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης πληροί το κριτήριο της εκθετικότητας αν και μόνο αν ο λόγος της συνάρτησης προς την παράγωγό της είναι σταθερός και αυτό σημαίνει ότι, για κάποια πραγματική μη μηδενική σταθερά a , είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{dx}{dt} = ax. \quad (E_a).$$

Η διαφορική αυτή εξίσωση δέχεται για κάθε δεδομένη αρχική συνθήκη μια μοναδική λύση ορισμένη σε ολόκληρο το χρονικό άξονα:

$$x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x(t) = x_0 e^{at}, \quad x(0) = x_0.$$

Προφανώς, για κάθε σημείο $M = (t, x(t))$ του γραφήματος της λύσης, το αλγεβρικό μέτρο της *υφαπτομένης* $H \cdot H$ δεν εξαρτάται από την επιλογή αυτού του σημείου και ισούται με το $1/a$.

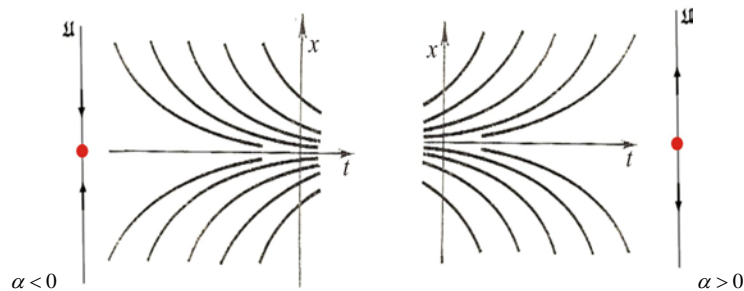


Γράφημα εκθετικής συνάρτησης.

Η διαφορική αυτή εξίσωση διαθέτει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- *Αναλλοίωτο κατά τη χρονική μεταφορά:*
Αν $x = x(t)$ είναι λύση της εξίσωσης (E_a) τότε, για οποιαδήποτε σταθερά t_0 , η $x = x(t - t_0)$ είναι επίσης λύση της εξίσωσης (E_a) .
- *Αναλλοίωτο κατά την αλλαγή χρονικής κλίμακας:*
Αν $x = x(t)$ είναι λύση της εξίσωσης (E_a) τότε, για οποιαδήποτε σταθερά $\lambda \neq 0$, η $x = x(\lambda t)$ είναι λύση της εξίσωσης $(E_{\lambda a})$.
- *Αναλλοίωτο κατά την αλλαγή κλίμακας των τεταγμένων:*
Αν $x = x(t)$ είναι λύση της εξίσωσης (E_a) τότε, για οποιαδήποτε σταθερά $c \neq 0$, η $x = c x(t)$ είναι επίσης λύση της εξίσωσης (E_a) .

Μπορείτε με αρκετά μεγάλη ακρίβεια να προσδιορίσετε γραφιστικά την τιμή της πραγματικής σταθεράς που υπεισέρχεται στην εκθετική συνάρτηση της οποίας το γράφημα δίνεται στο προηγούμενο σχήμα, αλλά και εκείνων που κατά την εκτίμησή σας εκφράζουν την εξέλιξη των πληθυσμών *Hobbit* και *Mordor* αρκεί να επιλέξετε μια διαβάθμιση των αξόνων.



Γραφήματα λύσεων της διαφορικής εξίσωσης $\dot{x} = ax$, $a \in \mathbb{R}$, και τροχιές στο μονοδιάστατο χώρο καταστάσεων.



Η διαφορική αυτή εξίσωση δέχεται για κάθε δεδομένη αρχική συνθήκη μια μοναδική λύση ορισμένη σε ολόκληρο το χρονικό άξονα και αυτό διασφαλίζεται από το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων. Εντούτοις, παρουσιάζει ενδιαφέρον να αναζητήσουμε απευθείας μια απλή απόδειξη για τη μοναδικότητα της λύσης της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης:

$$x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x(t) = x_0 e^{\alpha t}, \quad x(0) = x_0.$$

Στην περίπτωση $\alpha \neq 0$, μια αλλαγή της κλίμακας των τετμημένων και των τεταγμένων, θέτοντας:

$$t' = \alpha t, \quad x' = x/x_0, \quad x(0) = x_0,$$

επιτρέπει να διατυπώσουμε τη διαφορική εξίσωση και την αρχική συνθήκη ως εξής:

$$\frac{dx'}{dt'} = x', \quad x'(0) = 1,$$

και προκύπτει η έκφραση της λύσης:

$$x': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x'(t') = e^{t'}, \quad x'(0) = 1.$$

Ας υποθέσουμε την ύπαρξη μιας άλλης λύσης της διαφορικής αυτής εξίσωσης με την ίδια αρχική συνθήκη:

$$u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(0) = 1,$$

και θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$c(t') = u(t') / e^{t'}$$

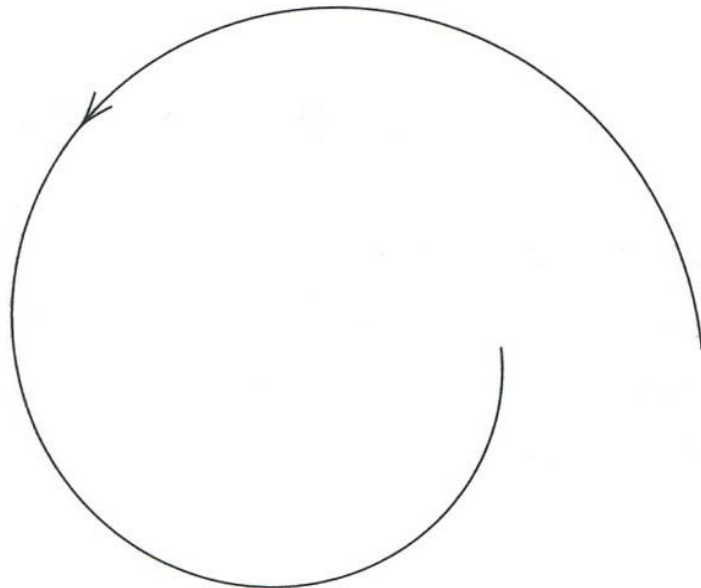
που είναι ορισμένη σε ολόκληρη την πραγματική ευθεία γιατί ο παρονομαστής της δεν μηδενίζεται. Ένας απλός υπολογισμός υποδεικνύει τον ταυτοτικό μηδενισμό της παραγώγου αυτής της συνάρτησης που, κατά συνέπεια, οφείλει να είναι σταθερή και η αρχική συνθήκη υπαγορεύει την τιμή της ίση προς 1, άρα $u(t') = e^{t'}, \forall t' \in \mathbb{R}$.



8. Αναζητώντας το μέλλον και το παρελθόν της τροχιάς μιας κίνησης.

Στο σχήμα φαίνεται, σε σμίκρυνση 1000:1, η τροχιά που διέγραψε ένα σωματίδιο, με τη φορά που υποδεικνύει το βέλος, από το μεσημέρι έως τα μεσάνυχτα της ίδιας μέρας. Οι δυνάμεις που προκαλούν την κίνησή του μας είναι άγνωστες, αλλά διαπιστώνουμε ότι η τροχιά του εξελίσσεται σε ένα επίπεδο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα και η ακτινική ταχύτητά του είναι κάθε στιγμή ανάλογη προς την απόστασή του από ένα συγκεκριμένο άγνωστο σε μας σημείο του επιπέδου της κίνησης.

- Θέλουμε να μάθουμε το μέλλον και το παρελθόν της τροχιάς αυτού του σωματιδίου. Μπορείτε να μας βοηθήσετε;



- Θέλουμε να σχεδιάσουμε το διάνυσμα της ταχύτητάς του στις διαδοχικές ωριαίες θέσεις. *Μπορείτε να μας βοηθήσετε;*
- Θέλουμε να μάθουμε το μήκος της τροχιάς και την καμπυλότητά της σε αυτό το 12ωρο. *Πιστεύετε ότι είναι εφικτό;*
- Τα μεσάνυχτα της ίδιας μέρας βλέπουμε ένα άλλο σωματίδιο να περνά από κάποιο άλλο σημείο αυτού του επιπέδου και να κινείται υπό την επίδραση των ίδιων δυνάμεων, στο ίδιο επίπεδο και με τα ίδια χαρακτηριστικά της γωνιακής και ακτινικής ταχύτητας του αρχικού σωματιδίου. Θέλουμε να μάθουμε το μέλλον και το παρελθόν της τροχιάς της κίνησής του; *Πιστεύετε ότι είναι εφικτό;*

Σχόλιο. Η σταθερότητα της γωνιακής ταχύτητας του σωματιδίου υποδεικνύει ότι οι ωριαίες διαδοχικές θέσεις του έχουν μεταξύ τους σταθερή γωνιακή απόκλιση ($2\pi/12$). Επίσης, αν $r(t)$ δηλώνει την απόσταση του σωματιδίου τη στιγμή t από το σημείο O (που δεν έχουμε ακόμη εντοπίσει), το ότι η ακτινική ταχύτητα dr/dt είναι ανάλογη προς την απόσταση $r(t)$ υπαγορεύει ότι οι διαδοχικές τιμές αυτής της απόστασης σχηματίζουν μια γεωμετρική πρόοδο. Άρα, οι ωριαίες διαδοχικές θέσεις του σωματιδίου αντιστοιχούν σε μια γεωμετρική ακολουθία σημείων στο επίπεδο της κίνησης. Οι πληροφορίες αυτές επιτρέπουν να εντοπίσουμε τις μελλοντικές και παρελθούσες ωριαίες διαδοχικές θέσεις του σωματιδίου (εφόσον υπολογίσουμε το λόγο της γεωμετρικής ακολουθίας). Με το ίδιο σκεπτικό, θα εντοπίσουμε τις διαδοχικές θέσεις του κάθε μισή ώρα, κάθε τέταρτο της ώρας, κάθε λεπτό, κ.ο.κ., και έτσι θα σχεδιάσουμε τη μελλοντική αλλά και παρελθούσα εξέλιξη της τροχιάς του. Πώς όμως θα εντοπιστεί το σημείο O και πώς θα ανακαλύψουμε το λόγο της γεωμετρικής ακολουθίας των ωριαίων αποστάσεων από το O ; Αξιοποιώντας τα πειραματικά-σχεδιαστικά δεδομένα του 12ωρου τμήματος της τροχιάς και κάνοντας απλούς συλλογισμούς!

Το διάνυσμα της ταχύτητας \vec{v} του σωματιδίου είναι εφαπτόμενο στην τροχιά σε κάθε σημείο της και στις καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) του επιπέδου της κίνησης αποσυντίθεται στις συνιστώσες dx/dt και dy/dt . Στις πολικές συντεταγμένες:

$$x = r \cos \theta \quad \text{και} \quad y = r \sin \theta$$

έχουμε:

$$dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \quad \text{και} \quad dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta$$

και προκύπτει:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{n} + r \frac{d\theta}{dt} \vec{\tau}$$

όπου \vec{n} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα του ημιάξονα OM , δηλαδή το διάνυσμα με συντεταγμένες $(\cos \theta, \sin \theta)$ και $\vec{\tau}$ το μοναδιαίο διάνυσμα που προκύπτει από το προηγούμενο με θετική στροφή κατά γωνία $\pi/4$, δηλαδή το διάνυσμα με συντεταγμένες $(-\sin \theta, \cos \theta)$. (Σκεφτείτε αν πραγματικά έχετε κατανοήσει τι σημαίνει το πέρασμα στις πολικές συντεταγμένες!). Έτσι, το διάνυσμα της ταχύτητας αποσυντίθεται κατά μοναδικό τρόπο σε άθροισμα ενός διανύσματος με φορέα τον ημιάξονα OM (ακτινική συνιστώσα) και ενός διανύσματος με φορέα ορθογώνιο προς τον ημιάξονα OM (εφαπτομενική συνιστώσα στον τριγωνομετρικό κύκλο των πολικών συντεταγμένων). Η γωνιακή ταχύτητα $d\theta/dt$ είναι ίση με $\pi/6$ ακτίνια ανά ώρα (σταθερή) και στο 12ωρο, από το μεσημέρι ως τα μεσάνυχτα, συμπληρώθηκε μια πλήρη περιστροφή, δηλαδή η γωνία μεταβλήθηκε κατά 2π ακτίνια. Έτσι, μπορούμε να σχεδιάσουμε το διάνυσμα της ταχύτητας, εφαπτόμενο στην τροχιά με ορθοακτινική συνιστώσα $r d\theta/dt$. Η ακτινική του συνιστώσα είναι $dr/dt = -ar$ όπου $a = (\ln 2)/12 = 0,058$ αφού, μετρώντας στο σχήμα, διαπιστώνουμε ότι στο 12ωρο η απόσταση r μειώνεται στο μισό, άρα $e^{-12a} = 1/2$. (Είναι προφανές;).

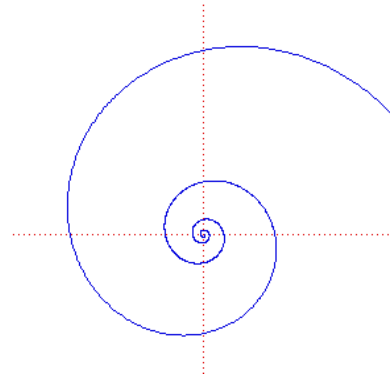
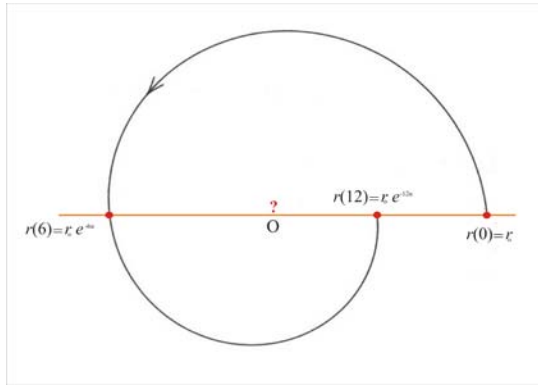
Με το σκεπτικό που σχεδιάσαμε την πλήρη τροχιά του σωματιδίου μπορούμε να κατασκευάσουμε την τροχιά οποιουδήποτε σωματιδίου που κινείται σε αυτό το επίπεδο υπακούοντας στον ίδιο νόμο, έχοντας ίδια γωνιακή ταχύτητα και ίδιο συντελεστή αναλογίας μεταξύ της ακτινικής ταχύτητας και της απόστασής τους από το σημείο O . Κάθε τέτοιο σωματίδιο πλησιάζει σπειροειδώς το σημείο O κατά τρόπο ώστε η απόσταση r να μειώνεται στο μισό κάθε φορά που συμπληρώνεται μια πλήρης περιστροφή. Μετρώντας τη γωνία θ σε ακτίνια, η σπειροειδής αυτή τροχιά εκφράζεται στις πολικές συντεταγμένες ως εξής:

$$r = r_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\theta/2\pi}.$$

Το σημείο O όπως έχει αποκαλυφθεί από πολύ νωρίς και αποτελεί όριο μιας γεωμετρικής ακολουθίας σημείων στο επίπεδο της κίνησης! Το εντοπίσατε; Αν όχι, προσέξτε το αρχικό σχήμα και κατασκευάστε με γεωμετρικό σκεπτικό ένα σύστημα εξισώσεων με δυο αγνώστους που θα το λύσετε εύκολα!

Συγκεκριμένα, προσδιορίστε τους συντελεστές του ακόλουθου συστήματος διαφορικών εξισώσεων έτσι ώστε οι λύσεις του να εκφράζουν ακριβώς τις τροχιές των σωματιδίων της προηγούμενης μελέτης:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 \\ \dot{x}_2 = b_1 x_1 + b_2 x_2 \end{cases}$$



9. Το τρένο που δεν ήξερε πότε θα φτάσει στον προορισμό του.

Ένα τρένο κινείται επάνω σε μια ευθύγραμμη σιδηροδρομική γραμμή και κατευθύνεται από μια πόλη Α προς μια πόλη Β οι οποίες απέχουν μεταξύ τους 100 χλμ. Ο μηχανοδηγός ρυθμίζει την ταχύτητα του τρένου, σε χιλιόμετρα ανά ώρα, έτσι ώστε, κάθε χρονική στιγμή, να ισούται αριθμητικά με την απόσταση, σε χιλιόμετρα, που απομένουν να διανύσει ως το τέλος της διαδρομής. Π.χ. όταν το τρένο βρίσκεται 10 χλμ πριν την πόλη Β να έχει ταχύτητα 10 χλμ την ώρα, όταν βρίσκεται 500 μέτρα πριν την πόλη Β να έχει ταχύτητα 0,5 χλμ την ώρα, κ.ο.κ.

- Πόσος χρόνος θα χρειαστεί για να διανυθεί το τελευταίο χιλιόμετρο;
- Πόσο θα μειωθεί σε μια ώρα η απόσταση που απομένει έως την πόλη Β;
- Σε πόσο χρόνο το τρένο θα φτάσει στον προορισμό του;

Σχόλιο. Ουδέν !

