ΜΑΘΗΜΑ 2ο: ΕΞΕΛΙΚΤΙΚΗ ΡΟΗ ΣΤΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ

Οι Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις προσφέρουν τη δυνατότητα μαθηματικής μοντελοποίησης ενός πλήθους φυσικών, χημικών, βιολογικών, οικολογικών, οικονομικών συστημάτων που εξελίσσονται με την πάροδο του χρόνου και δηλώνονται με τον όρο *Δυναμικά Συστήματα*. Η *κατάσταση* ενός δυναμικού συστήματος χαρακτηρίζεται, κάθε χρονική στιγμή, από ένα πεπερασμένο ή άπειρο πλήθος παραμέτρων και οι προσβάσιμες καταστάσεις ορίζουν τον πεπερασμένης ή άπειρης διάστασης *χώρο καταστάσεων*. Αν σε μια δεδομένη χρονική στιγμή, π.χ. την αρχική στιγμή της παρατήρησης, η κατάσταση ενός δυναμικού συστήματος ορίζει μονοσήμαντα την εξέλιξή του στο χώρο των καταστάσεων, μελλοντική και παρελθούσα, τότε λέμε ότι πρόκειται για *ντετερμινιστικό* σύστημα.

Στην Κλασική Μηχανική, η *αρχή του ντετερμινισμού* του Νεύτωνα δηλώνει ότι η κατάσταση ενός σώματος ορίζεται, κάθε χρονική στιγμή, από τη θέση και την ταχύτητά του και η παρούσα κατάστασή του ορίζει μονοσήμαντα το μέλλον και το παρελθόν της εξέλιξής του. Στην Κβαντική Μηχανική, η *αρχή της απροσδιοριστίας* του *Heisenberg* υποδεικνύει ότι η παρούσα κατάσταση δεν ορίζει μονοσήμαντα ούτε το μέλλον ούτε το παρελθόν της εξέλιξης.

✓ Τα πειραματικά δεδομένα που προκύπτουν από τις παρατηρήσεις της συμπεριφοράς ενός δυναμικού συστήματος ορίζουν στο χώρο των καταστάσεων ένα *διανυσματικό πεδίο* που προσαρτά σε κάθε κατάσταση ένα διάνυσμα το οποίο υποδεικνύει την κατεύθυνση και το ρυθμό μεταβολής της εξέλιξης:

$$\mathcal{X} : \mathfrak{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,, \quad \mathcal{X}(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_n(x) \big)\,.$$

Το μαθηματικό πρότυπο που ορίζει την εξέλιξη στο χώρο των καταστάσεων εκφράζεται με ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{X}(x)\,, \quad x \in \mathfrak{U} \subseteq \mathbb{R}^n\,.$$

Εφόσον πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων, από κάθε σημείο του καρτεσιανού γινομένου του χρονικού άξονα με το χώρο των καταστάσεων διέρχεται μια μοναδική *ολοκληρωτική καμπύλη* ορισμένη από το γράφημα της αντίστοιχης λύσης και από την προβολή της στο χώρο των καταστάσεων προκύπτει η τροχιά που συναντά εφαπτομενικά τα αντίστοιχα διανύσματα του διανυσματικού πεδίου. Τα σημεία μηδενισμού του διανυσματικού πεδίου ορίζουν τις σημειακές τροχιές, δηλαδή τις *καταστάσεις ισορροπίας*:

$$\mathcal{X}(x_o) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi_{x_o}(t) = x_o\,, \quad \forall t \in \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}\,.$$

✓ Η **εξελικτική ροή** ενός δυναμικού συστήματος προσαρτά σε κάθε αρχική κατάσταση την κατάσταση στην οποία θα βρεθεί ή βρέθηκε το σύστημα οποιαδήποτε δεδομένη μελλοντική ή παρελθούσα χρονική στιγμή. Όταν οι λύσεις του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων που διέπουν την εξέλιξη στο χώρο των καταστάσεων ορίζονται σε όλο το χρονικό άξονα τότε, κάθε δεδομένη χρονική στιγμή, ορίζεται ο *μετασχηματισμός ροής* στο χώρο των καταστάσεων:

$$\mathfrak{g}^t : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}\,, \quad \mathfrak{g}^t(x_o) := \phi_{x_o}(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Η *αρχή του ντετερμινισμού* εκφράζεται τότε με τη συνθήκη:

$$\mathfrak{g}^{t+t'} = \mathfrak{g}^{t'} \circ \mathfrak{g}^t\,, \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}\,.$$ [1]

Η συνθήκη αυτή διασφαλίζει ότι το σύνολο των μετασχηματισμών ροής, εφοδιασμένο με την πράξη της σύνθεσης, αποκτά δομή αντιμεταθετικής ομάδας. Πρόκειται για τη *μονοπαραμετρική ομάδα* του δυναμικού συστήματος που τα στοιχεία της είναι αμφιδιαφορικοί μετασχηματισμοί του χώρου των καταστάσεων. Έτσι, ορίζεται ένας ομομορφισμός της προσθετικής ομάδας του χρονικού άξονα στην ομάδα των αμφιδιαφορομορφισμών του χώρου των καταστάσεων που προσαρτά σε κάθε χρονική στιγμή τον αντίστοιχο μετασχηματισμό ροής:

$$(\mathbb{R}, +) \to \big(\mathfrak{Diff}(\mathfrak{U}), \circ\big)\,.$$

Σχόλιο. Αν οι λύσεις του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων δεν ορίζονται σε όλο το χρονικό άξονα τότε λέμε ότι η εξελικτική ροή δεν είναι *πλήρης* και στην περίπτωση αυτή η μονοπαραμετρική ομάδα είναι *ψευδομάδα* που η δράση της περιορίζεται στα συμπαγή υποσύνολα του χώρου των καταστάσεων.

---

[1] **Ερώτημα 1:** Πώς θα σχολιάζατε το ότι η προαναφερόμενη συνθήκη εκφράζει την αρχή του ντετερμινισμού;
Τι είναι αυτό που διασφαλίζει την αμφιδιαφορισιμότητα των μετασχηματισμών ροής;

✓ Η **εξελικτική ροή** του δυναμικού συστήματος ορίζεται στο διευρυμένο χώρο καταστάσεων, δηλαδή στο καρτεσιανό γινόμενο του χρονικού άξονα με το χώρο των καταστάσεων, ως εξής:

$$\mathfrak{g} : \mathbb{R} \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{U} \,, \quad \mathfrak{g}(t, x_o) := \mathfrak{g}^t(x_o) \,.$$

Πρόκειται για διαφορίσιμη απεικόνιση ως προς το χρόνο που επαληθεύει τη σχέση:

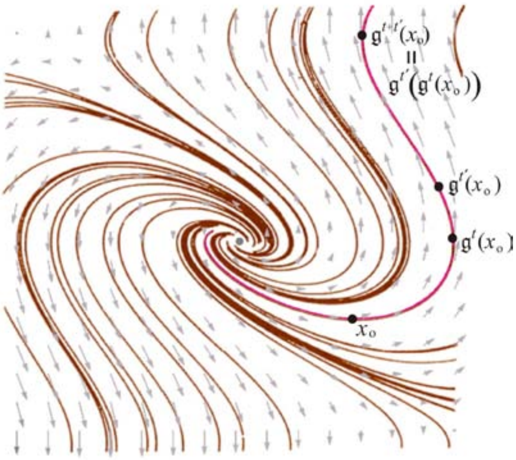
$$\partial_t \mathfrak{g}(t, x_o)\Big|_{t=t_o} = \mathcal{X}\left(\mathfrak{g}^{t_o}(x_o)\right), \quad x_o \in \mathfrak{U} \,.$$

Η τροχιά που ορίζεται από κάθε δεδομένη κατάσταση εκφράζεται τώρα ως εξής:

$$\mathcal{O}_{x_o} = \left\{ \mathfrak{g}(t, x_o) \in \mathfrak{U} \,/\, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad x_o \in \mathfrak{U} \,,$$

και τα σταθερά σημεία της εξελικτικής ροής ορίζουν τις καταστάσεις ισορροπίας:

$$\mathcal{X}(x_o) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{g}(t, x_o) = x_o \,, \quad \forall t \in \mathbb{R} \,.$$



Μια άποψη δυναμικής εξέλιξης σε δισδιάστατο χώρο καταστάσεων:
$\mathcal{X}(x) = \left(x_2(x_2 - 1)(x_2 - 2), sin(x_1 + x_2) \right)$.

Το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων δηλώνει ότι κάθε αρχική συνθήκη ορίζει μονοσήμαντα μια μοναδική τροχιά στο χώρο των καταστάσεων και σε αυτήν προσαρτάται η **χρονική ομάδα**:

$$\mathfrak{T}_{x_o} = \left\{ t \in \mathbb{R} \,/\, \mathfrak{g}(t, x_o) = x_o \right\}, \; x_o \in \mathfrak{U} \,.$$

Πρόκειται για τοπολογικά κλειστή υποομάδα της προσθετικής ομάδας $(\mathbb{R},+)$, άρα έχει μια από τις ακόλουθες τρεις μορφές: [2]

$$\mathfrak{T}_{x_o} = \{0\} \,, \quad \mathfrak{T}_{x_o} = \mathbb{R} \,, \quad \mathfrak{T}_{x_o} = \mathrm{T_o}\mathbb{Z} := \left\{ k\mathrm{T_o} \,/\, k \in \mathbb{Z} \right\}_{\mathrm{T_o} > 0} \,.$$

Η φύση κάθε τροχιάς δηλώνεται από τη φύση της χρονικής της ομάδας και ισχύουν τα εξής κριτήρια:

$\mathfrak{T}_{x_o} = \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{O}_{x_o}$ σημειακή τροχιά,

$\mathfrak{T}_{x_o} = \mathrm{T_o}\mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{O}_{x_o}$ περιοδική τροχιά,

$\mathfrak{T}_{x_o} = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{O}_{x_o}$ απεριοδική τροχιά.

✓ Η ταξινόμηση των δυναμικών συστημάτων ανάλογα με τη φύση των εξελικτικών τους ροών και των τροχιών τους στους χώρους καταστάσεων αποτελεί σπουδαίο ζητούμενο της μαθηματικής θεωρίας. Για το σκοπό αυτό χρειάζεται να εισαχθεί ένα κριτήριο ταξινόμησης, δηλαδή μια σχέση ισοδυναμίας, που να πληροί τα αξιώματα της ανακλαστικότητας, της συμμετρίας, της μεταβατικότητας, και έτσι προκύπτει ο διαμερισμός τους σε κλάσεις ισοδυναμίας.

[2] **Ερώτημα 2:** Ποιες είναι οι υποομάδες της προσθετικής ομάδας $(\mathbb{R},+)$;
Ποιος είναι ο λόγος που οι χρονικές ομάδες είναι τοπολογικά κλειστές;

Λέμε ότι δυο δυναμικά συστήματα έχουν ισοδύναμη δυναμική συμπεριφορά ή ταυτόσημες εξελικτικές ροές στο χώρο των καταστάσεών τους $\mathfrak{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, όταν υπάρχει αντιστρέψιμος μετασχηματισμός:

$$h : \mathfrak{U} \rightleftarrows \mathfrak{U}$$

τέτοιος ώστε:

$$h \circ \mathfrak{g}^t_{\mathrm{A}}(x_{\mathrm{o}}) = \mathfrak{g}^t_{\mathrm{B}} \circ h(x_{\mathrm{o}}) \,, \quad \forall x_{\mathrm{o}} \in \mathfrak{U} \,, \ \forall t \in \mathbb{R} \,,$$

δηλαδή:

$$h\Big(\mathfrak{g}_{\mathrm{A}}(t, x_{\mathrm{o}})\Big) = \mathfrak{g}_{\mathrm{B}}\big(t, h(x_{\mathrm{o}})\big) \,, \quad \forall x_{\mathrm{o}} \in \mathfrak{U} \,, \ \forall t \in \mathbb{R} \,.$$

Η συνθήκη αυτή βασίζεται στη φύση των αντίστοιχων μονοπαραμετρικών ομάδων:

$$\left\{ \mathfrak{g}^t_{\mathrm{A}} : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U} \right\}_{t\in\mathbb{R}} \quad \text{και} \quad \left\{ \mathfrak{g}^t_{\mathrm{B}} : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U} \right\}_{t\in\mathbb{R}}$$

και εκφράζεται με τη μεταθετικότητα των ακόλουθων διαγραμμάτων:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{U} & \xrightarrow{\mathfrak{g}^t_{\mathrm{A}}} & \mathfrak{U} \\ h\downarrow & & \downarrow h \\ \mathfrak{U} & \xrightarrow[\mathfrak{g}^t_{\mathrm{B}}]{} & \mathfrak{U} \end{array} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \,.$$

Όταν οι εξελικτικές ροές δυο δυναμικών συστημάτων είναι ισοδύναμες τότε οι τρο-χιές του ενός μετασχηματίζονται αμφιμονοσήμαντα στις τροχιές του άλλου ως εξής:

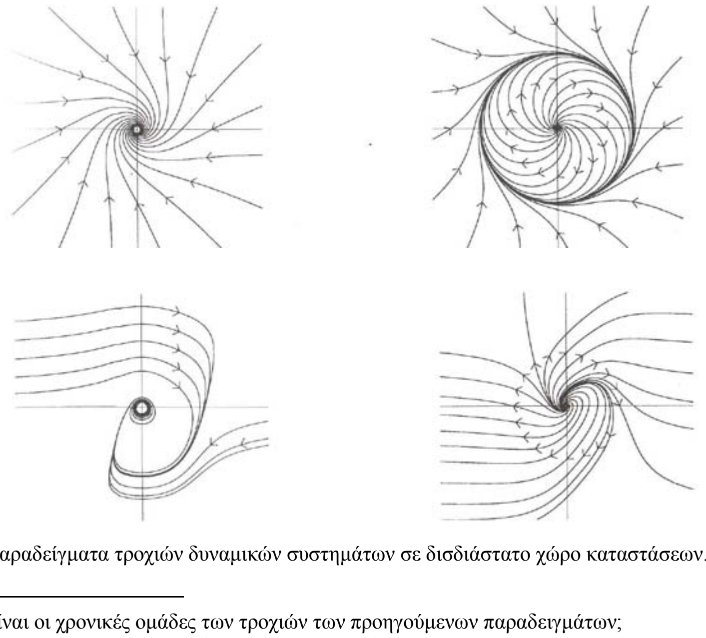
$$h\Big(\mathcal{O}_{x_{\mathrm{o}}}\Big) = \mathcal{O}'_{h(x_{\mathrm{o}})} \,, \quad \forall x_{\mathrm{o}} \in \mathfrak{U} \,.$$

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις ισοδυναμίας των εξελικτικών ροών που αφορούν στην τοπολογική, στη διαφορική και στην αλγεβρική φύση τους:

- **Τοπολογική ισοδυναμία**: $h \in \mathfrak{Hom}(\mathbb{R}^n)$ *Ομάδα ομοιομορφισμών* του $\mathbb{R}^n$,
- **Διαφορική ισοδυναμία**: $h \in \mathfrak{Diff}(\mathbb{R}^n)$ *Ομάδα διαφομορφισμών* του $\mathbb{R}^n$,
- **Γραμμική ισοδυναμία**: $h \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ *Ομάδα ισομορφισμών* του $\mathbb{R}^n$.

Προφανώς:

$$h \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) \ \Rightarrow \ h \in \mathfrak{Diff}(\mathbb{R}^n) \ \Rightarrow \ h \in \mathfrak{Hom}(\mathbb{R}^n) \,.$$



Παραδείγματα τροχιών δυναμικών συστημάτων σε δισδιάστατο χώρο καταστάσεων.[3]

[3] **Ερώτημα 3:** Ποιες είναι οι χρονικές ομάδες των τροχιών των προηγούμενων παραδειγμάτων;
Ποια πιστεύετε ότι είναι η τοπολογική σχέση των εξελικτικών τους ροών;

ΘΕΜΑΤΑ ΜΕΛΕΤΗΣ

1. Η τοπολογική ταξινόμηση των ροών της μονοδιάστατης γραμμικής δυναμικής.

Η μονοδιάστατη γραμμική δυναμική εκφράζεται στο χώρο καταστάσεων $\mathfrak{U}=\mathbb{R}$ με μια διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$\frac{dx}{dt}=\alpha x\,,\quad \alpha\in\mathbb{R}\,,$$

και απορρέει η εξελικτική ροή:

$$\mathfrak{g}_\alpha:\mathbb{R}\times\mathfrak{U}\to\mathfrak{U}\,,\quad \mathfrak{g}(t,x_o)=x_o e^{\alpha t}\,,\quad \alpha\in\mathbb{R}\,.$$

Η μονοπαραμετρική της ομάδα αποτελείται από τις μονοδιάστατες ομοθεσίες:

$$\mathfrak{g}_\alpha^t:\mathfrak{U}\to\mathfrak{U}\,,\quad \mathfrak{g}_\alpha^t(x_o)=x_o e^{\alpha t}\,,\quad t\in\mathbb{R}\,.$$

❖ Δυο μονοδιάστατες γραμμικές δυναμικές έχουν τοπολογικά ισοδύναμες εξελικτικές ροές:

$$\mathfrak{g}_{\alpha_i}:\mathbb{R}\times\mathfrak{U}\to\mathfrak{U}\,,\quad \mathfrak{g}_{\alpha_i}(t,x_o)=x_o e^{\alpha_i t}\,,\quad i=1,2\,,$$

όταν υπάρχει ομοιομορφισμός:

$$h:\mathfrak{U}\rightleftarrows\mathfrak{U}$$

τέτοιος ώστε:

$$h\big(\mathfrak{g}_{\alpha_1}(t,x_o)\big)=\mathfrak{g}_{\alpha_2}\big(t,h(x_o)\big)\,,\quad \forall x_o\in\mathfrak{U}\,,\ \forall t\in\mathbb{R}\,.$$

- Δείξτε ότι δυο μονοδιάστατες γραμμικές δυναμικές έχουν τοπολογικά ισοδύναμες εξελικτικές ροές:

$$\mathfrak{g}_{\alpha_i}:\mathbb{R}\times\mathfrak{U}\to\mathfrak{U}\,,\quad i=1,2\,,$$

αν και μόνο αν $\alpha_1\alpha_2>0$ και ταξινομείστε τοπολογικά τις μονοδιάστατες γραμμικές δυναμικές.

Σχόλιο. Αν $\alpha_1\alpha_2<0$ τότε δεν υπάρχει ομοιομορφισμός της πραγματικής ευθείας που αποκαθιστά την τοπολογική ισοδυναμία των εξελικτικών αυτών ροών αφού σε μια τέτοια περίπτωση θα πρέπει: $|h(0)|=+\infty$. Αν $\alpha_1\alpha_2>0$, η τοπολογική ισοδυναμία αποκαθίσταται διαμέσου του ομοιομορφισμού που ορίζεται ως εξής:

$$h:\mathfrak{U}\rightleftarrows\mathfrak{U}\,,\quad h(x)=\left|\begin{matrix}+|x|^{\alpha_2/\alpha_1} & ,\ x\ge 0\\ -|x|^{\alpha_2/\alpha_1} & ,\ x\le 0\end{matrix}\right.$$

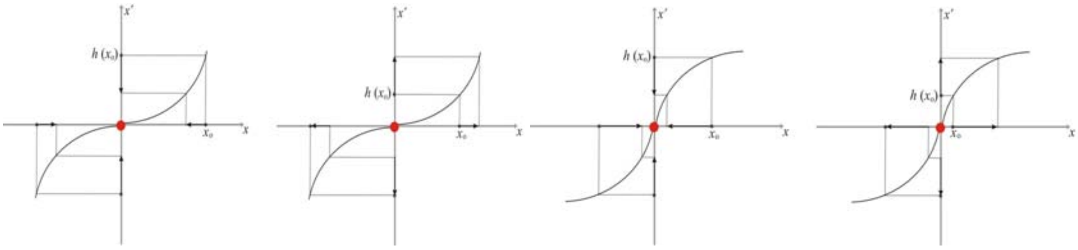
και τότε:

$$x\ge 0\quad\Rightarrow\quad h\big(\mathfrak{g}_1(t,x_o)\big)=\big(x_o e^{\alpha_1 t}\big)^{\alpha_2/\alpha_1}=x_o^{\alpha_2/\alpha_1}e^{\alpha_2 t}=\mathfrak{g}_2\big(t,h(x_o)\big)\,,$$

$$x\le 0\quad\Rightarrow\quad h\big(\mathfrak{g}_1(t,x_o)\big)=\big(-|x_o|e^{\alpha_1 t}\big)^{\alpha_2/\alpha_1}=-|x_o|^{\alpha_2/\alpha_1}\,e^{\alpha_2 t}=\mathfrak{g}_2\big(t,h(x_o)\big)\,.$$

Ο ομοιομορφισμός αυτός ταυτίζει τοπολογικά τις τροχιές ως εξής:

$$h\big(\mathcal{O}_{x_o}\big)=\mathcal{O}'_{h(x_o)}\,,\quad \forall x_o\in\mathfrak{U}\,.$$



$\alpha_1<\alpha_2<0$ $\qquad$ $0<\alpha_1<\alpha_2$ $\qquad$ $\alpha_2<\alpha_1<0$ $\qquad$ $0<\alpha_2<\alpha_1$

Ομοιομορφισμός τοπολογικής ταύτισης των ροών της μονοδιάστατης γραμμικής δυναμικής.

- Επαληθεύστε ότι ο ομοιομορφισμός αυτός ταυτίζει τις τροχιές των εξελικτικών ροών που ανήκουν σε ίδια κλάση τοπολογικής ισοδυναμίας:

$$h\left(\mathcal{O}_{x_o}\right) = \mathcal{O}'_{h(x_o)}, \quad \forall x_o \in \mathfrak{U},$$

δηλαδή:

$$h\left\{x_o e^{k_1 t} \in \mathfrak{U} \,/\, t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{h(x_o) e^{k_2 t} \in \mathfrak{U} \,/\, t \in \mathbb{R}\right\}, \quad \forall x_o \in \mathfrak{U}.$$

- Διαπιστώστε ότι ο ομοιομορφισμός αυτός δεν είναι αμφιδιαφορικός. Τι θα λέγατε για τη γραμμική ή διαφορική ταξινόμηση των εξελικτικών ροών της μονοδιάστατης γραμμικής δυναμικής;

- Προσδιορίστε τις χρονικές ομάδες των τροχιών της μονοδιάστατης γραμμικής δυναμικής.

- Επαληθεύστε ότι οι μετασχηματισμοί ροής της μονοδιάστατης γραμμικής δυναμικής ροής είναι αμφιδιαφορικοί και πληρούν τη συνθήκη:

$$\mathfrak{g}^{t+t'} = \mathfrak{g}^{t'} \circ \mathfrak{g}^{t}, \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}.$$

- Επαληθεύστε ότι αυτοί οι μετασχηματισμοί ροής συγκροτούν αντιμεταθετική ομάδα και διευκρινίστε τον ομομορφισμό της προσθετικής ομάδας του χρονικού άξονα στην ομάδα των αμφιδιαφορομορφισμών της πραγματικής ευθείας που σε κάθε χρονική στιγμή προσαρτά τον αντίστοιχο μετασχηματισμό ροής:

$$\left(\mathbb{R}, +\right) \to \left(\mathfrak{Diff}(\mathfrak{U}), \circ\right).$$

Σχόλιο. Οι εξελικτικές ροές της μονοδιάστατης γραμμικής δυναμικής διαμερίζονται σε τρεις κλάσεις τοπολογικής ισοδυναμίας που αντιστοιχούν στις περιπτώσεις: $\alpha > 0, \alpha = 0, \alpha < 0$. Ο γραμμικός και ο διαφορικός διαμερισμός οδηγούν σε μονομελείς κλάσεις ισοδυναμίας. Ο ομοιομορφισμός h δεν είναι αμφιδιαφορικός, αφού δεν παραγωγίζεται στο 0 όταν $0 < \alpha_2 < \alpha_1$ ή $\alpha_2 < \alpha_1 < 0$, αλλά και ο h^{-1} δεν παραγωγίζεται στο 0 όταν $0 < \alpha_1 < \alpha_2$ ή $\alpha_1 < \alpha_2 < 0$.

2. Έκρηξη της εξελικτικής ροής μιας μη γραμμικής μονοδιάστατης δυναμικής.

Στο μονοδιάστατο χώρο καταστάσεων $\mathfrak{U} = \mathbb{R}$ θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dx}{dt} = x^2.$$

- Προσδιορίστε τις διαδοχικές καταστάσεις από τις οποίες διέρχεται η τροχιά που τη στιγμή $t = 0$ ξεκινά από την κατάσταση $x_o \in \mathfrak{U}$:

$$\phi_{x_o} : \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathfrak{U}, \quad \phi_{x_o}(t) = \ldots.$$

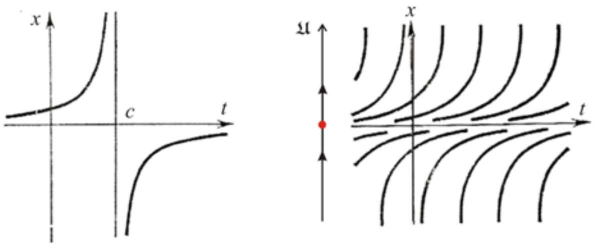
- Εξετάστε αν συγκροτείται μονοπαραμετρική ομάδα μετασχηματισμών ροής οι οποίοι, για κάθε δεδομένη χρονική στιγμή, αποδίδουν σε κάθε αρχική κατάσταση του συστήματος την κατάσταση στην οποία θα βρεθεί αυτή στιγμή:

$$\mathfrak{g}^t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \mathfrak{g}^t(x_o) := \ldots, \quad t \in \mathbb{R},$$

κατά τη συνθήκη:

$$\mathfrak{g}^{t+t'} = \mathfrak{g}^{t'} \circ \mathfrak{g}^{t}, \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}.$$

- Τι μπορείτε να πείτε για την εξελικτική ροή στο μονοδιάστατο χώρο καταστάσεων;



Γραφήματα λύσεων της διαφορικής εξίσωσης $\dot{x} = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Σχόλιο. Από την τυπική ολοκλήρωση αυτής της διαφορικής εξίσωσης προκύπτει:

$$x(t) = -\frac{1}{t-\mathrm{c}}\,, \quad \mathrm{c} \in \mathbb{R}\,,$$

Οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης προκύπτουν από τον περιορισμό αυτής της συνάρτησης στα διαστήματα $t < \mathrm{c}$ και $t > \mathrm{c}$ του χρονικού άξονα. Συγκεκριμένα, αν το εξελισσόμενο σύστημα βρίσκεται τη στιγμή $t = 0$ στην κατάσταση $x_{\mathrm{o}} \in \mathfrak{U}$, τότε η εξέλιξή του στο χώρο των καταστάσεων ορίζεται μονοσήμαντα σε ένα διάστημα του χρονικού άξονα από τη λύση:

$$\phi_{x_{\mathrm{o}}} : \mathrm{I}_{x_{\mathrm{o}}} \subset \mathbb{R} \to \mathfrak{U}\,, \quad \phi_{x_{\mathrm{o}}}(t) = \frac{x_{\mathrm{o}}}{1 - x_{\mathrm{o}}\, t}\,,$$

και στην έκφραση αυτή συμπεριλαμβάνεται η κατάσταση ισορροπίας $x_{\mathrm{o}} = 0$:

$$\phi_{x_{\mathrm{o}}}(t) = 0\,, \quad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

Η εξέλιξη εμφανίζει μια *εκρηκτική* συμπεριφορά αφού σε πεπερασμένο χρόνο οι τροχιές διαφεύγουν στο άπειρο! Προφανώς, οι τροχιές δεν θα είχαν δυνατότητα διαφυγής στο άπειρο αν ο χώρος των καταστάσεων ήταν συμπαγής. Οι λύσεις δεν ορίζονται σε όλο το χρονικό άξονα και δεν διασφαλίζεται η αμφιδιαφορισιμότητα των μετασχηματισμών ροής που προφανώς δεν πληρούν τη συνθήκη:

$$\mathfrak{g}^{t+t'} = \mathfrak{g}^{t'} \circ \mathfrak{g}^{t}\,, \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}\,.$$

3. Εξελικτική ροή μιας μονοδιάστατης μη γραμμικής δυναμικής.

Στο μονοδιάστατο χώρο καταστάσεων $\mathfrak{U} = \mathbb{R}$ θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dx}{dt} = \sin x\,.$$

- Προσδιορίστε τις διαδοχικές καταστάσεις από τις οποίες διέρχεται η τροχιά που τη στιγμή $t = 0$ ξεκινά από την κατάσταση $x_{\mathrm{o}} \in \mathfrak{U}$:

$$\phi_{x_{\mathrm{o}}} : \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathfrak{U}\,, \quad \phi_{x_{\mathrm{o}}}(t) = \ldots.$$

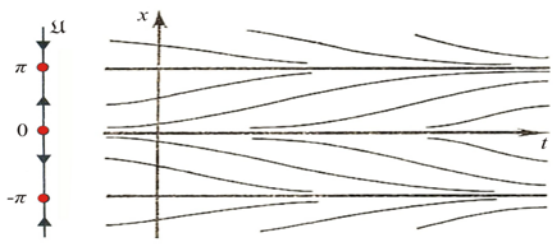
- Εξετάστε αν συγκροτείται μονοπαραμετρική ομάδα μετασχηματισμών ροής οι οποίοι, για κάθε δεδομένη χρονική στιγμή, αποδίδουν σε κάθε αρχική κατάσταση του συστήματος την κατάσταση στην οποία θα βρεθεί αυτή στιγμή:

$$\mathfrak{g}^{t} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad \mathfrak{g}^{t}(x_{\mathrm{o}}) := \ldots\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

  κατά τη συνθήκη:

$$\mathfrak{g}^{t+t'} = \mathfrak{g}^{t'} \circ \mathfrak{g}^{t}\,, \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}\,.$$

- Τι μπορείτε να πείτε για την εξελικτική ροή στο μονοδιάστατο χώρο καταστάσεων;



Τροχιές και γραφήματα λύσεων της διαφορικής εξίσωσης $\dot{x} = \sin x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$

Σχόλιο. Οι καταστάσεις ισορροπίας είναι $x_{\mathrm{o}} = k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$, και από κάθε δεδομένη κατάσταση διέρχεται μια μοναδική τροχιά προερχόμενη από την πλησιέστερη κατάσταση ισορροπίας που αντιστοιχεί σε άρτιο πολλαπλάσιο του π και κατευθυνόμενη στην πλησιέστερη κατάσταση ισορροπίας που αντιστοιχεί σε περιττό πολλαπλάσιο του π. Οι καταστάσεις ισορροπίας που αντιστοιχούν σε άρτιο πολλαπλάσιο του π είναι απωστικές και εκείνες που αντιστοιχούν σε περιττό πολλαπλάσιο του π είναι ελκτικές. Συγκροτείται αντιμεταθετική ομάδα μετασχηματισμών ροής αφού οι λύσεις ορίζονται σε όλο το χρονικό άξονα και προκύπτουν δυο τύποι χρονικής ομάδας:

$$\mathfrak{T}_{x_{\mathrm{o}} \neq k\pi} = \left\{ t \in \mathbb{R} \,/\, \mathfrak{g}^{t}(x_{\mathrm{o}}) = x_{\mathrm{o}} \right\} = \{0\}\,, \quad \mathfrak{T}_{x_{\mathrm{o}} = k\pi} = \left\{ t \in \mathbb{R} \,/\, \mathfrak{g}^{t}(k\pi) = k\pi \right\} = \mathbb{R}\,.$$

4. Εκρήξεις της εξελικτικής ροής της λογιστικής δυναμικής.

Στο μονοδιάστατο χώρο καταστάσεων $\mathfrak{U} = \mathbb{R}$ θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x)\,.$$

- Προσδιορίστε τις διαδοχικές καταστάσεις από τις οποίες διέρχεται η τροχιά που τη στιγμή $t = 0$ ξεκινά από την κατάσταση $x_o \in \mathfrak{U}$:

$$\phi_{x_o} : \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathfrak{U}\,, \quad \phi_{x_o}(t) = \ldots\,.$$

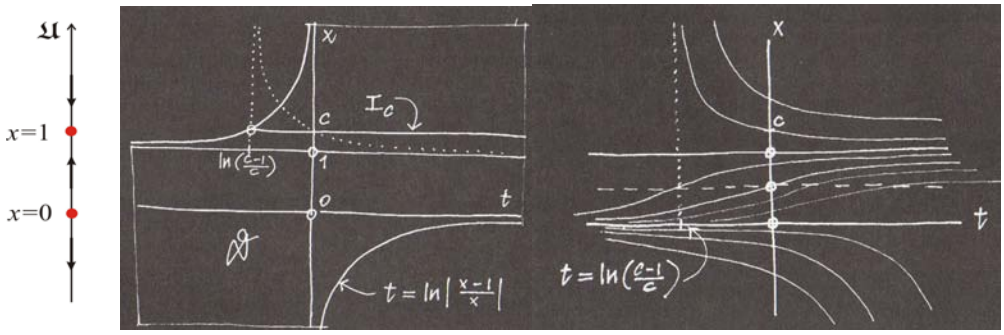
- Εξετάστε αν συγκροτείται μονοπαραμετρική ομάδα μετασχηματισμών ροής οι οποίοι, για κάθε δεδομένη χρονική στιγμή, αποδίδουν σε κάθε αρχική κατάσταση του συστήματος την κατάσταση στην οποία θα βρεθεί αυτή στιγμή:

$$\mathfrak{g}^t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad \mathfrak{g}^t(x_o) := \ldots\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

  κατά τη συνθήκη:

$$\mathfrak{g}^{t+t'} = \mathfrak{g}^{t'} \circ \mathfrak{g}^t\,, \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}\,.$$

- Τι μπορείτε να πείτε για την εξελικτική ροή στο μονοδιάστατο χώρο καταστάσεων;



Προσδιορισμός του μέγιστου χρονικού διαστήματος ορισμού των λύσεων και
του περιορισμένου πεδίου ύπαρξης της εξελικτικής ροής της διαφορικής εξίσωσης
$\dot{x} = x(1 - x)\,, \quad x \in \mathfrak{U} = \mathbb{R}\,.$

Σχόλιο. Κάθε αρχική κατάσταση $x_o \in \mathfrak{U}$ ορίζει τη λύση στο μέγιστο χρονικό διάστημα της ύπαρξής της ως εξής:

$$\phi_{x_o} : \mathrm{I}_{x_o} \subset \mathbb{R} \to \mathfrak{U}\,, \quad \phi_{x_o}(t) = \frac{x_o e^t}{1 - x_o + x_o e^t}\,.$$

Στην έκφραση αυτή συμπεριλαμβάνονται οι καταστάσεις ισορροπίας:

$$x_o = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_{x_o}(t) = 0\,, \quad \forall t \in \mathbb{R}\,, \quad \text{(απωστική ισορροπία)},$$

$$x_o = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi_{x_o}(t) = 1\,, \quad \forall t \in \mathbb{R}\,, \quad \text{(ελκτική ισορροπία)}.$$

Το μέγιστο χρονικό διάστημα ύπαρξης κάθε λύσης καθορίζεται από τις χρονικές στιγμές στις οποίες το γράφημά της δέχεται κατακόρυφη ασύμπτωτη, δηλαδή από τις ρίζες της εξίσωσης:

$$1 - x_o + x_o e^t = 0\,.$$

και η αρχική κατάσταση $x_o \in \mathfrak{U}$ τη στιγμή $t = 0$ καθορίζει αυτό το πεδίο ύπαρξης:

$$\mathfrak{D} = \left\{ (t, x_o) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{U} \,/\, x_o \in \mathfrak{U},\ t \in \mathrm{I}_{x_o} \right\}$$

όπου

$$x_o \in [0, 1] \quad \Rightarrow \quad \mathrm{I}_{x_o} = \mathbb{R}\,,$$

$$x_o < 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{I}_{x_o} = \left]-\infty, ln\big((x_o - 1)/x_o\big)\right[\,,$$

$$x_o > 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{I}_{x_o} = \left]ln\big((x_o - 1)/x_o\big), +\infty\right[\,.$$

Συνεπώς, οι λύσεις δεν ορίζονται σε όλο το χρονικό άξονα για όλες τις αρχικές συνθήκες και έτσι οι τροχιές έχουν δυνατότητα διαφυγής στο άπειρο σε πεπερασμένο χρόνο. Η εξελικτική ροή δεν ορίζεται σε όλο το χρονικό άξονα, ούτε διασφαλίζεται η αμφιδιαφορισιμότητα των μετασχηματισμών ροής στο χώρο των καταστάσεων:

$$\mathfrak{g}^t(x_o) = \frac{x_o e^t}{1 - x_o + x_o e^t}\,, \quad x_o \in \mathfrak{U}$$

και προφανώς δεν πληρούται η συνθήκη:

$$\mathfrak{g}^{t+t'} = \mathfrak{g}^{t'} \circ \mathfrak{g}^t\,, \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}\,.$$

- Εξετάστε την εγκυρότητα του ακόλουθου υπολογισμού:

$$\mathfrak{g}^{t'}\left(\mathfrak{g}^t(x_o)\right) = \frac{\mathfrak{g}^t(x_o)\, e^{t'}}{1 - \mathfrak{g}^t(x_o) + \mathfrak{g}^t(x_o)\, e^{t'}} =$$

$$= \frac{\dfrac{x_o e^t}{1 - x_o + x_o e^t}\, e^{t'}}{1 - \dfrac{x_o e^t}{1 - x_o + x_o e^t} + \dfrac{x_o e^t}{1 - x_o + x_o e^t}\, e^{t'}} = \frac{x_o\, e^t\, e^{t'}}{1 - x_o + x_o\, e^t\, e^{t'}} = \frac{x_o\, e^{t+t'}}{1 - x_o + x_o\, e^{t+t'}} = \mathfrak{g}^{t+t'}(x_o)\,.$$

5. Σάγματα και κόμβοι της δισδιάστατης γραμμικής δυναμικής.

Στο ευκλείδειο επίπεδο θεωρούμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων:

$$\left|\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \alpha x_2 \end{aligned}\right.$$

Για κάθε δεδομένη αρχική κατάσταση προκύπτει η αντίστοιχη λύση:

$$\phi_{x_o} : \mathbb{R} \to \mathfrak{U} = \mathbb{R}^2\,, \quad \phi_{x_o}(t) = \left(x_{01} e^t,\, x_{02} e^{\alpha t}\right), \quad x_o = (x_{01}, x_{02}) \in \mathfrak{U}\,.$$

Συνεπώς, η μονοπαραμετρική ομάδα αποτελείται από τους γραμμικούς ισομορφισμούς:

$$\mathfrak{g}^t : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}\,, \quad \mathfrak{g}^t(x_o) = \left(x_{01}\, e^t,\, x_{02}\, e^{\alpha t}\right), \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

και δρα στο δισδιάστατο χώρο καταστάσεων ως εξής:

$$\mathfrak{g}^t(x_o) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}.$$

Η μονοπαραμετρική ομάδα αποσυντίθεται σε ευθύ άθροισμα δυο μονοδιάστατων μονοπαραμετρικών ομάδων οι οποίες αποτελούνται αντίστοιχα από τις μονοδιάστατες ομοθεσίες λόγου e^t και $e^{\alpha t}$ της πραγματικής ευθείας και δρουν στον οριζόντιο και τον κατακόρυφο άξονα του ευκλείδειου επιπέδου.
Προφανώς πληρούται η συνθήκη:

$$\mathfrak{g}^{t+t'}(x_o) = \mathfrak{g}^{t'} \circ \mathfrak{g}^t(x_o)\,, \quad \forall x_o \in \mathfrak{U}\,, \ \forall t, t' \in \mathbb{R}\,.$$

Η εξελικτική ροή ορίζεται λοιπόν ως εξής:

$$\mathfrak{g} : \mathbb{R} \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}\,, \quad \mathfrak{g}(t, x_o) = \left(x_{01} e^t,\, x_{02} e^{\alpha t}\right),$$

και σε κάθε δεδομένη κατάσταση προσαρτάται η τροχιά:

$$\mathcal{O}_{x_o} = \left\{\mathfrak{g}(t, x_o) \in \mathfrak{U} \,/\, t \in \mathbb{R}\right\}, \quad x_o \in \mathfrak{U}\,.$$

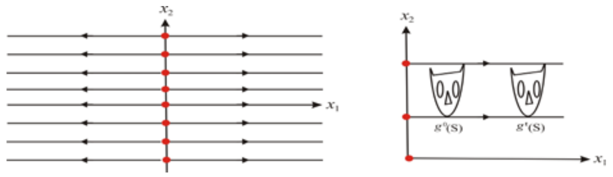
Οι τροχιές εξελίσσονται μέσα στις επίπεδες καμπύλες που ορίζονται ως εξής:

$$|\, x_2 \,| = c\, |\, x_1 \,|^{\alpha}\,.$$

Η αρχή των αξόνων αποτελεί τη μοναδική κατάσταση ισορροπίας για όλες τις τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ εκτός από την τιμή α=0 οπότε εμφανίζονται άπειρες άλλες καταστάσεις ισορροπίας.

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

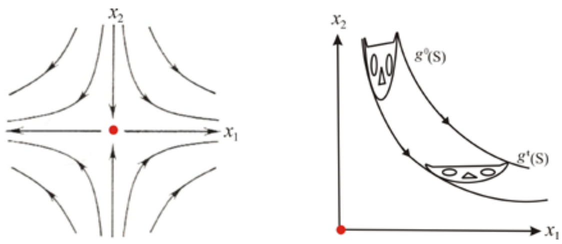
- $\alpha = \mathbf{0}$: Κάθε σημείο του κατακόρυφου άξονα αποτελεί κατάσταση ισορροπίας και εκατέρωθέν της εξέρχονται δυο ημιευθειακές τροχιές αντίθετης φοράς παράλληλες προς τον οριζόντιο άξονα.



$\alpha = 0$: Τροχιές και μετασχηματισμός ροής στο χώρο των καταστάσεων.

- $\alpha < \mathbf{0}$: **Σάγμα στην κατάσταση ισορροπίας.**

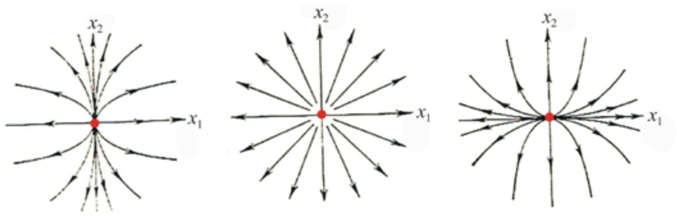
Η αρχή των αξόνων είναι η μοναδική κατάσταση ισορροπίας. Οι τέσσερις ημιάξονες είναι ευθύγραμμες τροχιές που οι δυο κατακόρυφες έλκονται από την κατάσταση ισορροπίας και οι δυο οριζόντιες απωθούνται από αυτήν. Όλες οι άλλες τροχιές είναι υπερβολικές και εξελίσσονται στα τέσσερα τεταρτημόρια του συστήματος των αξόνων. Η κατάσταση ισορροπίας γύρω από την οποία εξελίσσονται αυτές οι τροχιές καλείται *σάγμα*.



$\alpha < 0$: Τροχιές και μετασχηματισμός ροής στο χώρο των καταστάσεων .

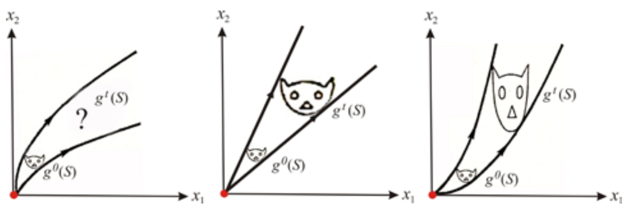
- $\alpha > \mathbf{0}$: **Κόμβος στην κατάσταση ισορροπίας.**

Η αρχή των αξόνων είναι η μοναδική κατάσταση ισορροπίας η οποία μάλιστα είναι απωστική. στην περίπτωση α=1 όλες οι τροχιές εξέρχονται ακτινικά από την κατάσταση ισορροπίας. Στις άλλες περιπτώσεις οι τέσσερις ημιάξονες είναι ευθύγραμμες τροχιές εξερχόμενες από την κατάσταση ισορροπίας και οι άλλες τροχιές είναι παραβολικές που εξέρχονται εφαπτομενικά προς τον κατακόρυφο άξονα όταν α<1 και εφαπτομενικά προς τον οριζόντιο άξονα όταν α>1. Η κατάσταση ισορροπίας γύρω από την οποία εξελίσσονται αυτές οι τροχιές καλείται *κόμβος*.



$0 < \alpha < 1$ $\qquad$ $\alpha = 1$ $\qquad$ $1 < \alpha$

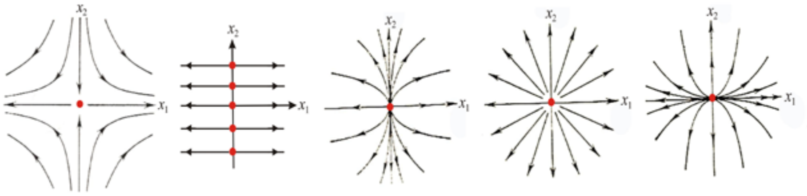
Τροχιές στο χώρο των καταστάσεων



$0 < \alpha < 1$ $\qquad$ $\alpha = 1$ $\qquad$ $1 < \alpha$

Μετασχηματισμοί ροής στο χώρο των καταστάσεων.
(Θα μπορούσατε να σχεδιάσετε την εικόνα που λείπει στους μετασχηματισμούς ροής;)

- Σχεδιάστε τις διαδοχικές παραμορφώσεις των τροχιών της εξελικτικής ροής για σταδιακές μεταβολές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$. Μπορείτε να εντοπίσετε σε ποιες τιμές της παραμέτρου αλλάζει η τοπολογική φύση των τροχιών της εξελικτικής ροής;



$\alpha < 0$ $\alpha = 0$ $0 < \alpha < 1$ $\alpha = 1$ $1 < \alpha$

- Προσδιορίστε τις τροχιές της εξελικτικής ροής του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}.$$

Σχόλιο. Η γραμμική αλλαγή των καρτεσιανών συντεταγμένων του ευκλείδειου επιπέδου:

$$y_1 = x_1 + x_2\,, \quad y_2 = x_1 - x_2\,,$$

προκαλεί αποσύζευξη των εξισώσεων και οδηγεί στο ισοδύναμο σύστημα:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 \\ \dot{y}_2 = -y_2 \end{cases}.$$

Για κάθε δεδομένη αρχική κατάσταση προκύπτει η αντίστοιχη λύση:

$$y_1(t) = y_1(0)e^{t}\,, \quad y_2(t) = y_2(0)e^{-t}\,,$$

και η επαναφορά στο αρχικό σύστημα συντεταγμένων δίνει το αποτέλεσμα:

$$x_1(t) = x_1(0)cht + x_2(0)sht\,, \quad x_2(t) = x_1(0)sht + x_2(0)cht\,.$$

Συνεπώς, η μονοπαραμετρική ομάδα συγκροτείται από τους γραμμικούς ισομορφισμούς:

$$\mathfrak{g}^t : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}\,, \quad \mathfrak{g}^t(x_o) = \left(x_{01}cht + x_{02}sht,\, x_{01}sht + x_{02}cht\right), \quad x_o = (x_{01}, x_{02}) \in \mathfrak{U} = \mathbb{R}^2\,,$$

που δρα στο χώρο των καταστάσεων ως εξής:

$$\mathfrak{g}^t(x_o) = \begin{bmatrix} cht & sht \\ sht & cht \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}.$$

Προφανώς πληρούται η συνθήκη:

$$\mathfrak{g}^{t+t'}(x_o) = \mathfrak{g}^{t'} \circ \mathfrak{g}^t(x_o)\,, \quad \forall x_o \in \mathfrak{U}\,, \ \forall t, t' \in \mathbb{R}\,.$$

Η εξελικτική ροή εκφράζεται λοιπόν ως εξής:

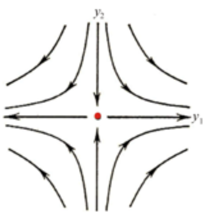
$$\mathfrak{g} : \mathbb{R} \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}\,, \quad \mathfrak{g}(t, x_o) = \left(x_{01}cht + x_{02}sht,\, x_{01}sht + x_{02}cht\right)$$

και σε κάθε δεδομένη αρχική κατάσταση προσαρτάται η τροχιά:

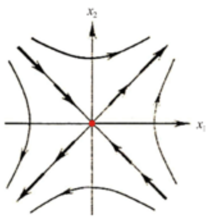
$$\mathcal{O}_{x_o} = \left\{\mathfrak{g}(t, x_o) \in \mathfrak{U} \,/\, t \in \mathbb{R}\right\}, \quad x_o \in \mathfrak{U}\,.$$

Προκύπτουν δυο τύποι χρονικών ομάδων:

$$\mathfrak{T}_{x_o=0} = \left\{t \in \mathbb{R} \,/\, \mathfrak{g}^t(0) = 0\right\} = \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \mathfrak{T}_{x_o \neq 0} = \left\{t \in \mathbb{R} \,/\, \mathfrak{g}^t(x_o) = x_o\right\} = \{0\}\,.$$



Τροχιές στο σύστημα συντεταγμένων (y_1, y_2)



Τροχιές στο σύστημα συντεταγμένων (x_1, x_2)

6. Περιοδικές τροχιές της δισδιάστατης γραμμικής δυναμικής.

Στο ευκλείδειο επίπεδο θεωρούμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων:

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 \end{array} \right.$$

Για κάθε δεδομένη αρχική κατάσταση προκύπτει η αντίστοιχη λύση:

$$\phi_{x_o} : \mathbb{R} \to \mathfrak{U} = \mathbb{R}^2 , \quad \phi_{x_o}(t) = \left(x_{01}\, cos\, t + x_{02}\, sin\, t,\ x_{02}\, cos\, t - x_{01}\, sin\, t \right), \quad x_o = (x_{01}, x_{02}) \in \mathfrak{U} .$$

Η μονοπαραμετρική ομάδα ταυτίζεται με την ομάδα στροφών του ευκλείδειου επιπέδου:

$$\mathfrak{g}^t : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U} , \quad \mathfrak{g}^t(x_o) = \left(x_{01}\, cos\, t + x_{02}\, sin\, t,\ x_{02}\, cos\, t - x_{01}\, sin\, t \right), \quad t \in \mathbb{R} ,$$

και δρα ως εξής:

$$\mathfrak{g}^t(x_o) = \begin{bmatrix} cos\, t & sin\, t \\ -sin\, t & cos\, t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} .$$

Προφανώς πληρούται η συνθήκη:

$$\mathfrak{g}^{t+t'}(x_o) = \mathfrak{g}^{t'} \circ \mathfrak{g}^t(x_o) , \quad \forall x_o \in \mathfrak{U} , \ \forall t, t' \in \mathbb{R} .$$

Η εξελικτική ροή ορίζεται ως εξής:

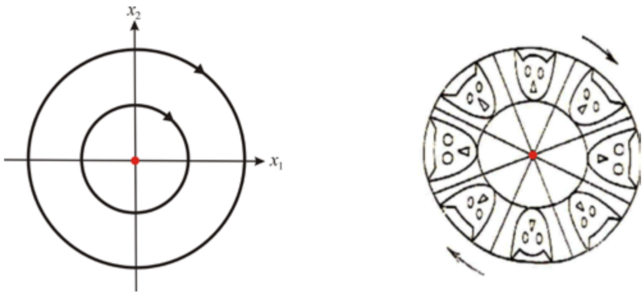
$$\mathfrak{g} : \mathbb{R} \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{U} , \quad \mathfrak{g}(t, x_o) = \left(x_{01}\, cos\, t + x_{02}\, sin\, t,\ x_{02}\, cos\, t - x_{01}\, sin\, t \right)$$

και σε κάθε δεδομένη κατάσταση προσαρτάται η τροχιά:

$$\mathcal{O}_{x_o} = \left\{ \mathfrak{g}(t, x_o) \in \mathfrak{U} \,/\, t \in \mathbb{R} \right\} , \quad x_o \in \mathfrak{U} .$$

Προκύπτουν δυο τύποι χρονικών ομάδων που δηλώνουν την ύπαρξη μιας κατάστασης ισορροπίας και την περιοδικότητα όλων των άλλων τροχιών:

$$\mathfrak{T}_{x_o=0} = \left\{ t \in \mathbb{R} \,/\, \mathfrak{g}(t, 0) = 0 \right\} = \mathbb{R} , \qquad \mathfrak{T}_{x_o \neq 0} = \left\{ t \in \mathbb{R} \,/\, \mathfrak{g}(t, x_o) = x_o \right\} = \left\{ 2\pi k \,/\, k \in \mathbb{Z} \right\} .$$



Κυκλικές τροχιές γύρω από την κατάσταση ισορροπίας και δράση της μονοπαραμετρικής ομάδας.

Σχόλιο. Το πέρασμα από τις καρτεσιανές στις πολικές συντεταγμένες:

$$x_1 = r\, cos\, \varphi , \quad x_2 = r\, sin\, \varphi , \quad r > 0, \ \varphi \in \mathbb{R} \ (mod\, 2\pi) ,$$

προκαλεί αποσύζευξη των εξισώσεων και οδηγεί στο σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r}(t) = 0 \\ \dot{\varphi}(t) = -1 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} r(t) = r_o \\ \varphi(t) = \varphi_o - t \end{array} \right.$$

από όπου προκύπτει:

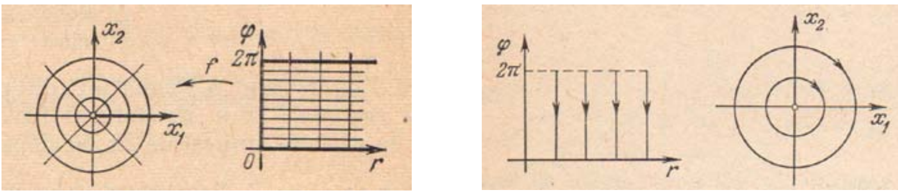
$$x_1(t) = r_o\, cos(\varphi_o - t) , \quad x_2(t) = r_o\, sin(\varphi_o - t) ,$$

άρα

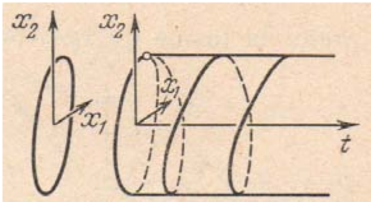
$$x_1(t) = x_1(0)\, cos\, t + x_2(0)\, sin\, t , \quad x_2(t) = x_2(0)\, cos\, t - x_1(0)\, sin\, t .$$

Το πέρασμα από τις καρτεσιανές στις πολικές συντεταγμένες πρέπει να είναι αντιστρέψιμο και αμφιδιαφορικό και αυτό διασφαλίζεται εξαιρώντας από το καρτεσιανό επίπεδο μια ημιευθεία, π.χ. το θετικό ημιάξονα, και κρατώντας από το πολικό επίπεδο τη θετική ημιζώνη $0 < \varphi < 2\pi$. Έτσι, σε αυτά τα περιορισμένα χωρία του ευκλείδειου επιπέδου, η αλλαγή των συντεταγμένων διατηρεί αμφιδιαφορικά ταυτόσημη τη δυναμική που ορίζεται από τα δυο συστήματα των διαφορικών εξισώσεων. Εντούτοις, τελικά η εξελικτική ροή ορίζεται σε όλο το χρονικό άξονα, καλύπτοντας όλα τα σημεία του ευκλείδειου επιπέδου, ως εξής:

$$\mathfrak{g} : \mathbb{R} \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}\,, \quad \mathfrak{g}(t, x_o) = \left(x_{01}\cos t + x_{02}\sin t,\ x_{02}\cos t - x_{01}\sin t\right)$$



Αμφιδιαφορική εναλλαγή καρτεσιανών και πολικών συντεταγμένων
και η μορφή των τροχιών στις πολικές και στις καρτεσιανές συντεταγμένες,



Τροχιά και γράφημα της λύσης για δεδομένη αρχική συνθήκη.

7. Σπειροειδείς τροχιές της δισδιάστατης γραμμικής δυναμικής.

Στο ευκλείδειο επίπεδο θεωρούμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \ \ x_1 + x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2 \end{cases}.$$

Για κάθε δεδομένη αρχική κατάσταση προκύπτει η αντίστοιχη λύση:

$$\phi_{x_o} : \mathbb{R} \to \mathfrak{U} = \mathbb{R}^2\,, \quad \phi_{x_o}(t) = e^t\left(x_{01}\cos t + x_{02}\sin t,\ x_{02}\cos t - x_{01}\sin t\right), \quad x_o = (x_{01}, x_{02}) \in \mathfrak{U}\,.$$

Η μονοπαραμετρική ομάδα συγκροτείται από τις στροφές και τις ομοθεσίες του ευκλείδειου επιπέδου:

$$\mathfrak{g}^t : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}\,, \quad \mathfrak{g}^t(x_o) = e^t\left(x_{01}\cos t + x_{02}\sin t,\ x_{02}\cos t - x_{01}\sin t\right), \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

και δρα ως εξής:

$$\mathfrak{g}^t(x_o) = e^t \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}.$$

Προφανώς πληρούται η συνθήκη:

$$\mathfrak{g}^{t+t'}(x_o) = \mathfrak{g}^{t'} \circ \mathfrak{g}^t(x_o)\,, \quad \forall x_o \in \mathfrak{U}\,,\ \forall t, t' \in \mathbb{R}\,.$$

Η εξελικτική ροή ορίζεται ως εξής:

$$\mathfrak{g} : \mathbb{R} \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}\,, \quad \mathfrak{g}(t, x_o) = e^t\left(x_{01}\cos t + x_{02}\sin t,\ x_{02}\cos t - x_{01}\sin t\right)$$

και σε κάθε δεδομένη κατάσταση προσαρτάται η τροχιά:

$$\mathcal{O}_{x_o} = \left\{\mathfrak{g}(t, x_o) \in \mathfrak{U} \,/\, t \in \mathbb{R}\right\}, \quad x_o \in \mathfrak{U}\,.$$

Προκύπτουν δυο τύποι χρονικών ομάδων που δηλώνουν την ύπαρξη μιας κατάστασης ισορροπίας και τη απεριοδικότητα όλων των άλλων τροχιών:

$$\mathfrak{T}_{x_o=0} = \left\{t \in \mathbb{R} \,/\, \mathfrak{g}(t, 0) = 0\right\} = \mathbb{R}\,, \qquad \mathfrak{T}_{x_o \neq k\pi} = \left\{t \in \mathbb{R} \,/\, \mathfrak{g}(t, x_o) = x_o\right\} = \{0\}\,.$$

Σχόλιο. Το πέρασμα από τις καρτεσιανές στις πολικές συντεταγμένες, με τους επιβεβλημένους περιορισμούς αμφιδιαφορικότητας, προκαλεί αποσύζευξη των εξισώσεων και οδηγεί στο σύστημα:

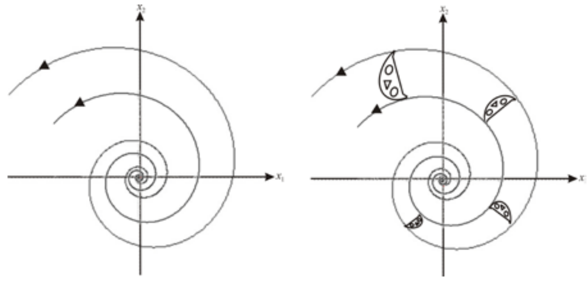
$$\begin{cases} \dot{r}(t) = r(t) \\ \dot{\varphi}(t) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r(t) = r_o e^t \\ \varphi(t) = \varphi_o - t \end{cases}$$

από όπου προκύπτει:

$$x_1(t) = r_o e^t cos(\theta_o - t) \ , \ \ x_2(t) = r_o e^t sin(\theta_o - t) \ ,$$

άρα

$$x_1(t) = x_1(0)e^t cos\,t + x_2(0)e^t sin\,t \ , \quad x_2(t) = x_2(0)e^t cos\,t - x_1(0)e^t sin\,t \ .$$



Σπειροειδείς τροχιές εξελισσόμενες γύρω από την κατάσταση ισορροπίας και δράση της μονοπαραμετρικής ομάδας.

8. Εμφάνιση οριακών κύκλων στο χώρο των καταστάσεων.

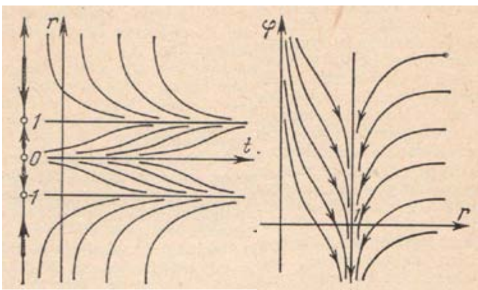
Στο ευκλείδειο επίπεδο θεωρούμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \ \ x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{cases} .$$

Το πέρασμα από τις καρτεσιανές στις πολικές συντεταγμένες, με τους επιβεβλημένους περιορισμούς αμφιδιαφορικότητας, προκαλεί αποσύζευξη των εξισώσεων και οδηγεί στο σύστημα:

$$\begin{cases} \dot{r}(t) = r(1 - r^2) \\ \dot{\varphi}(t) = -1 \end{cases}$$

Η πρώτη εξίσωση εμφανίζει ένα σημείο ασταθούς ισορροπίας $r(t) \equiv 0$ που απωθεί τις τροχιές προς τις καταστάσεις ευσταθούς ισορροπίας $r(t) \equiv 1$ και $r(t) \equiv -1$. Τα γραφήματα των λύσεων αυτής της μονοδιάστατης εξίσωσης έχουν ήδη δοθεί στο προηγούμενο μάθημα, όμως εδώ θα περιοριστούμε στο θετικό ημιεπίπεδο $r > 0$ και θα παρατηρήσουμε ότι με μια απλή στροφή αυτών των γραφημάτων προκύπτουν οι τροχιές του συστήματος στο πολικό επίπεδο, όπως ακριβώς υποδεικνύει η λύση της δεύτερης εξίσωσης $\varphi(t) = \varphi_o - t$.

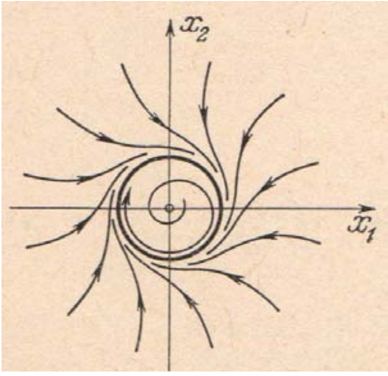


Γραφήματα των λύσεων της διαφορικής εξίσωσης $\dot{r}(t) = r(1 - r^2)$
και τροχιές του συστήματος των εξισώσεων σε πολικές συντεταγμένες.

Στο καρτεσιανό επίπεδο εμφανίζεται μια μοναδική κατάσταση ισορροπίας στην αρχή των αξόνων και μια περιοδική κυκλική τροχιά μοναδιαίας ακτίνας που αντιστοιχεί στο σημείο ισορροπίας $r = 1$:

$$x_1^2 + x_2^2 = 1 \, .$$

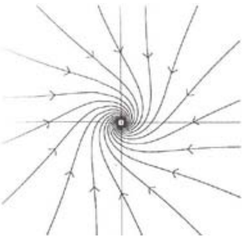
Η κυκλική αυτή τροχιά καλείται *οριακός κύκλος* της δυναμικής που ορίζεται από το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων στο ευκλείδειο επίπεδο. Η ονομασία αυτή οφείλεται στο ότι οι τροχιές που ξεκινούν από το εσωτερικό του με το πέρασμα του χρόνου κατευθύνονται στην εσωτερική περιέλιξή του και εκείνες που ξεκινούν έξω από αυτόν με το πέρασμα του χρόνου κατευθύνονται στην εξωτερική περιέλιξή του. Η πρόβλεψη ύπαρξης οριακών κύκλων σε μια δυναμική που ορίζεται από ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων αποτελεί ένα εξαιρετικά ενδιαφέρον ζήτημα με πολλές φυσικές εφαρμογές.



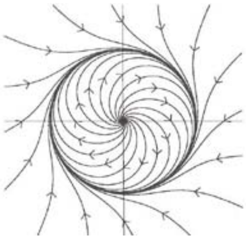
Τροχιές του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων στις καρτεσιανές συντεταγμένες
που περιελίσσονται εσωτερικά και εξωτερικά τον οριακό κύκλο.

- Εξετάστε για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου μ την ύπαρξη οριακών κύκλων στη δυναμική που ορίζεται στο ευκλείδειο επίπεδο από το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \ \ x_2 + x_1(\mu - x_1^2 - x_2^2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2(\mu - x_1^2 - x_2^2) \end{cases}.$$



$\mu = -1/2$

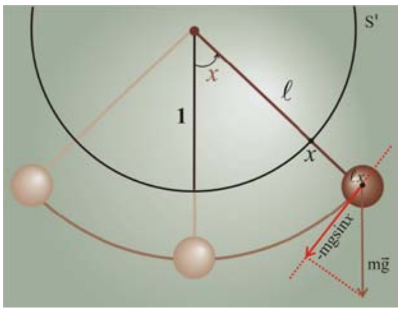


$\mu = 3/2$

9. Οι τροχιές του απλού επίπεδου εκκρεμούς στο χώρο των θέσεων και ταχυτήτων.

Το απλό επίπεδο εκκρεμές που εκτελεί την κίνησή του υπό την επίδραση του βάρους του, χωρίς επίδραση άλλων εξωτερικών δυνάμεων, υπακούει στην εξίσωση του Νεύτωνα:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \sin x \, .$$



Απλό επίπεδο εκκρεμές.

Σχόλιο. Η εξίσωση αυτή και κατά συνέπεια η κίνηση του εκκρεμούς είναι ανεξάρτητη της μάζας του.

Η εξίσωση του Νεύτωνα, όπως κάθε διαφορική εξίσωση 2ης τάξης, μπορεί να εκφραστεί ως σύστημα διπλάσιου πλήθους διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης και, στην προκειμένη περίπτωση, η εξίσωση του απλού επίπεδου εκκρεμούς εκφράζεται στο δισδιάστατο χώρο των θέσεων και των ταχυτήτων ως εξής:

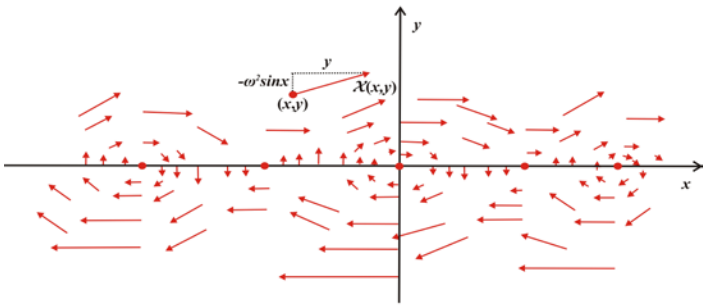
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = -\omega^2 \sin x \end{cases}$$

Κάθε αρχική θέση και αρχική ταχύτητα ορίζει μονοσήμαντα μια τροχιά στο επίπεδο των θέσεων και ταχυτήτων και κάθε χρονική στιγμή η θέση και η ταχύτητα του εκκρεμούς δηλώνεται με το αντίστοιχο σημείο της τροχιάς που καθορίζεται από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων:

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 , \quad \phi(t) = \big(x(t), y(t)\big) , \quad x(0) = x_o , \; y(0) = y_o .$$

Το σύστημα αυτών των εξισώσεων εκφράζεται στο ευκλείδειο επίπεδο με το διανυσματικό πεδίο:

$$\mathcal{X}(x, y) = \big(y, -\omega^2 \sin x\big) .$$



Το διανυσματικό πεδίο του απλού επίπεδου εκκρεμούς στο επίπεδο θέσεων και ταχυτήτων.

Η συνάρτηση ενέργειας προσμετρά σε κάθε σημείο του χώρου των θέσεων και ταχυτήτων το άθροισμα της δυναμικής και της κινητικής ενέργειας του εκκρεμούς και με προσέγγιση του διαστατικού παράγοντα $m\ell^2$, όπου m δηλώνει τη μάζα και ℓ το μήκος του εκκρεμούς, εκφράζεται ως εξής:

$$E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} , \quad E(x, y) = \omega^2 (1 - \cos x) + y^2 / 2 .$$

Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων που διέπει την κίνηση του εκκρεμούς στο χώρο των θέσεων και ταχυτήτων διατυπώνεται συνακόλουθα ως εξής:

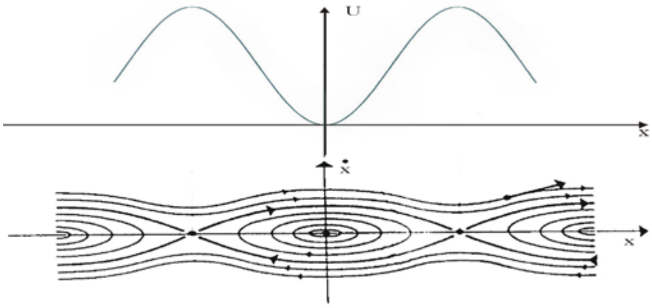
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial E}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{\partial E}{\partial x} \end{cases}$$

Τα σημεία του χώρου των θέσεων και ταχυτήτων στα οποία μηδενίζεται το διαφορικό της συνάρτησης ενέργειας ορίζουν τις καταστάσεις ισορροπίας του εκκρεμούς και τα σημεία αυτά αντιστοιχούν στα ακρότατα της συνάρτησης δυναμικού που ορίζεται στο χώρο των θέσεων:

$$U(x) = \omega^2 (1 - \cos x) .$$

Η αρχή διατήρησης της ενέργειας δηλώνει ότι κατά τη διάρκεια της εξέλιξης μιας τροχιάς στο επίπεδο των θέσεων και ταχυτήτων η ενέργεια του εκκρεμούς διατηρεί σταθερή τιμή, δηλαδή η συνάρτηση ενέργειας είναι ένα πρώτο ολοκλήρωμα των εξισώσεων της κίνησης του εκκρεμούς. Συνεπώς, όλες οι ισοενεργειακές τροχιές δεδομένης ενεργειακής τιμής E_o εμπεριέχονται στην ισοσταθμική καμπύλη που ορίζεται στο επίπεδο των θέσεων και ταχυτήτων από την εξίσωση:

$$\omega^2 (1 - \cos x) + y^2 / 2 = E_o / m\ell^2 .$$



Γράφημα της συνάρτησης δυναμικού και τροχιές του εκκρεμούς στο επίπεδο θέσεων-ταχυτήτων.

Στα σημεία μηδενισμού του διαφορικού της συνάρτησης ενέργειας οι αντίστοιχες ισοενεργειακές καμπύλες αυτοτέμνονται ορίζοντας έτσι τις καταστάσεις ισορροπίας και στην περιοχή όλων των άλλων σημείων τους είναι λείες, όπως ακριβώς δηλώνει το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- *Καταστάσεις ευσταθούς ισορροπίας*: $(x_o = 2k\pi,\ y_o = 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

  Στα σημεία αυτά η ενεργειακή τιμή είναι $E_o = 0$ και η συνάρτηση δυναμικού ελαχιστοποιείται:

  $$U'(x_o) = 0 \quad \text{και} \quad U''(x_o) > 0 .$$

- Για θετικές ενεργειακές τιμές έως $E_o = 2gm\ell$, οι ισοενεργειακές καμπύλες είναι ελλειπτικές ομοθετικές ως προς την κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας και κάθε μια από αυτές περιέχει μια τροχιά.

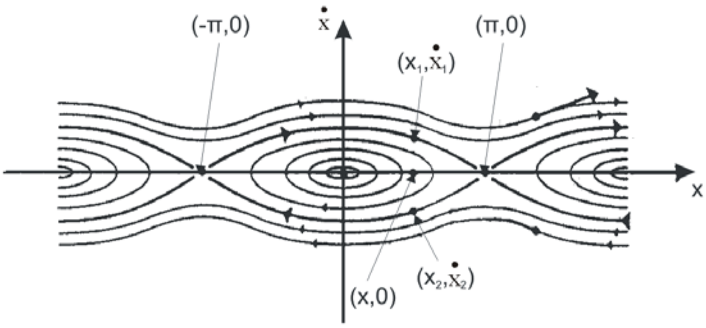
- Οι *καταστάσεις ασταθούς ισορροπίας*: $\left(x_o = (2k+1)\pi,\ y_o = 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

  Στα σημεία αυτά η ενεργειακή τιμή είναι $E_o = 2gm\ell$ και η συνάρτηση δυναμικού μεγιστοποιείται:

  $$U'(x_o) = 0 \quad \text{και} \quad U''(x_o) < 0 .$$

  Η ενεργειακή αυτή τιμή ορίζει μια κλειστή ισοενεργειακή καμπύλη που καλείται *διαχωριστική* και περιέχει τέσσερις τροχιές. Οι δυο είναι οι σημειακές καταστάσεις ασταθούς ισορροπίας και οι άλλες δυο εξελίσσονται σε ελλειπτικό τόξο κατευθυνόμενες αντίστοιχα σε αυτές τις καταστάσεις ισορροπίας στις οποίες καταλήγουν σε άπειρο χρόνο.

- Πέρα από την ενεργειακή τιμή $E_o = 2gm\ell$, οι ισοενεργειακές καμπύλες δεν είναι πλέον κλειστές και κάθε μια από αυτές περιέχει μια μόνο τροχιά που εκφράζει διαρκή περιστροφική κίνηση του εκκρεμούς γύρω από το σημείο πρόσδεσής του. Συνεπώς, εκατέρωθεν της διαχωριστικής η τοπολογική φύση των τροχιών του εκκρεμούς στο επίπεδο θέσεων και ταχυτήτων είναι διαφορετική.



Τροχιές του εκκρεμούς στο επίπεδο θέσεων και ταχυτήτων.
Η προβολή των σημείων κάθε τροχιάς στον άξονα των θέσεων ή των ταχυτήτων δίνει την αντίστοιχη θέση και ταχύτητα του εκκρεμούς σε κάθε δεδομένη χρονική στιγμή.

Σχόλιο. Το απλό επίπεδο εκκρεμές ανήκει στην κατηγορία των συστημάτων ενός βαθμού ελευθερίας, δηλαδή των συστημάτων που η κίνησή τους διέπεται από τη μονοδιάστατη εξίσωση του Νεύτωνα:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{F}(x), \quad x \in \mathbb{R} .$$

Τα συστήματα ενός βαθμού ελευθερίας διαθέτουν συνάρτηση δυναμικού που ορίζεται ως εξής:

$$U(x) = -\int_{x_o}^{x} \mathrm{F}(u)\,du$$

και η συνάρτηση ενέργειας ορίζεται στο επίπεδο των θέσεων και ταχυτήτων ως εξής:

$$E : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad E(x,\dot{x}) = U(x) + \frac{1}{2} m\dot{x}^2\,.$$

Η αρχή διατήρησης της ενέργειας δηλώνει ότι κατά τη διάρκεια της εξέλιξης σε κάθε μια τροχιά στο επίπεδο των θέσεων και ταχυτήτων η συνάρτηση ενέργειας διατηρεί σταθερή τιμή και κατά συνέπεια η τιμή αυτή έχει ήδη καθοριστεί από την αρχική θέση και αρχική ταχύτητα $x_o = x(t_o)$ και $v_o = \dot{x}(t_o)$:

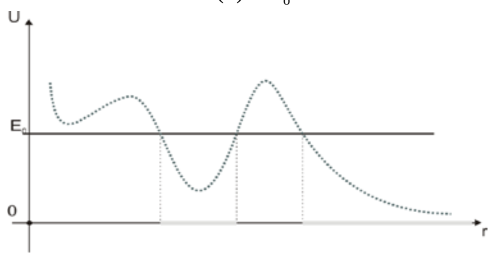
$$\mathrm{E}_o = U(x_o) + \frac{1}{2} m v_o^2\,.$$

Έτσι, κάθε ενεργειακή τιμή ορίζει στο επίπεδο των θέσεων και ταχυτήτων μια ισοενεργειακή καμπύλη:

$$U(x) + \frac{1}{2} m\dot{x}^2 = \mathrm{E}_o$$

και από εδώ ορίζεται το πεδίο επιτρεπτής κίνησης:

$$U(x) \le \mathrm{E}_o\,.$$

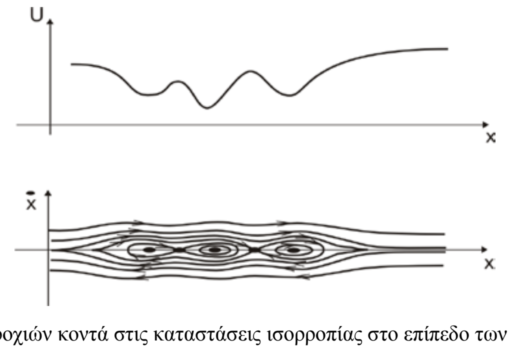


Γράφημα συνάρτησης δυναμικού και πεδίο επιτρεπτής κίνησης για δεδομένη ενεργειακή τιμή.

Οι ισοενεργειακές καμπύλες, σύμφωνα με το θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων, είναι λείες στην περιοχή κάθε σημείου τους στο οποίο δεν μηδενίζεται το διαφορικό της συνάρτησης ενέργειας. Οι καμπύλες αυτές ίσως εμφανίζουν αυτοτομές, όμως το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων δηλώνει ότι από κάθε σημείο του επιπέδου των θέσεων και ταχυτήτων διέρχεται μόνο μια τροχιά. Συνεπώς, κάθε ισοενεργειακή καμπύλη αποτελείται από μια ή ενδεχομένως περισσότερες τροχιές ίδιας ενεργειακής τιμής και ο προσδιορισμός τους ανάγεται στον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος:

$$\frac{1}{\sqrt{2/m}} \int_{x_o}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{E}_o - U(x)}} = t - t_o\,.$$

Οι θέσεις ελαχιστοποίησης της συνάρτησης δυναμικού ορίζουν τις καταστάσεις ευσταθούς ισορροπίας και αυτό σημαίνει ότι οι αρχικές συνθήκες που είναι αρκετά γειτονικές σε αυτή την κατάσταση ορίζουν τροχιές που εξελίσσονται εξολοκλήρου στην περιοχή της. Οι θέσεις μεγιστοποίησης της συνάρτησης δυναμικού ορίζουν τις καταστάσεις ασταθούς ισορροπίας και αυτό σημαίνει ότι οι αρχικές συνθήκες που είναι αρκετά γειτονικές σε αυτή την κατάσταση ορίζουν τροχιές που απομακρύνονται από την περιοχή της. Στην περίπτωση σημείου καμπής εμφανίζεται μια κατάσταση ιδιάζουσας ισορροπίας και αυτό σημαίνει ότι οι αρχικές συνθήκες που είναι αρκετά γειτονικές σε αυτή την κατάσταση ορίζουν τροχιές που άλλες απομακρύνονται και άλλες εξελίσσονται εξολοκλήρου στην περιοχή της. Έτσι, η ποιοτική συμπεριφορά των τροχιών κοντά στις καταστάσεις ισορροπίας γίνεται αμέσως αντιληπτή από το γράφημα της συνάρτησης δυναμικού.



Η συμπεριφορά των τροχιών κοντά στις καταστάσεις ισορροπίας στο επίπεδο των θέσεων και ταχυτήτων των συστημάτων ενός βαθμού ελευθερίας γίνεται αντιληπτή από το γράφημα της συνάρτησης δυναμικού.

- Προσπαθήστε να προσδιορίσετε τις τροχιές του απλού επίπεδου εκκρεμούς στο επίπεδο θέσεων και ταχυτήτων επιχειρώντας να υπολογίσετε απευθείας το ολοκλήρωμα:

$$\frac{1}{\sqrt{2/m}}\int_{x_o}^{x}\frac{dx}{\sqrt{E_o-\omega^2(1-\cos x)}}=t-t_o\,.$$

Σχόλιο. Το εγχείρημά σας θα είναι δύσκολο αλλά αξίζει να δοκιμάσετε και να ψάξετε στη βιβλιογραφία !

- Η συνάρτηση ενέργειας του απλού επίπεδου εκκρεμούς ορίζεται ως εξής:

$$E(x,y)=\omega^2(1-\cos x)+y^2/2\,.$$

  - Προσδιορίστε το τετραγωνικό μέρος του αναπτύγματος *Taylor* αυτής της συνάρτησης στις καταστάσεις ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας του απλού επίπεδου εκκρεμούς.
  - Γραμμικοποιείστε στις καταστάσεις ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας του απλού επίπεδου εκκρεμούς το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων που διέπει την κίνησή του.
  - Προσδιορίστε τις τροχιές των αντίστοιχων γραμμικών συστημάτων στο επίπεδο των θέσεων και ταχυτήτων του απλού επίπεδου εκκρεμούς.

Σχόλιο. Στην περιοχή των καταστάσεων της ευσταθούς και της ασταθούς ισορροπίας στο επίπεδο θέσεων και ταχυτήτων το τετραγωνικό μέρος της συνάρτησης ενέργειας είναι αντίστοιχα το εξής:

$$E(x,y)=\frac{y^2}{2}+\omega^2\frac{x^2}{2}\quad\text{και}\quad E(x,y)=\frac{y^2}{2}-\omega^2\frac{x^2}{2}\,.$$

Οι ισοενεργειακές καμπύλες ορίζονται αντίστοιχα στο επίπεδο θέσεων και ταχυτήτων από τις εξισώσεις:

$$y^2+\omega^2x^2=2E_o\quad\text{και}\quad y^2-\omega^2x^2=2E_o\,.$$

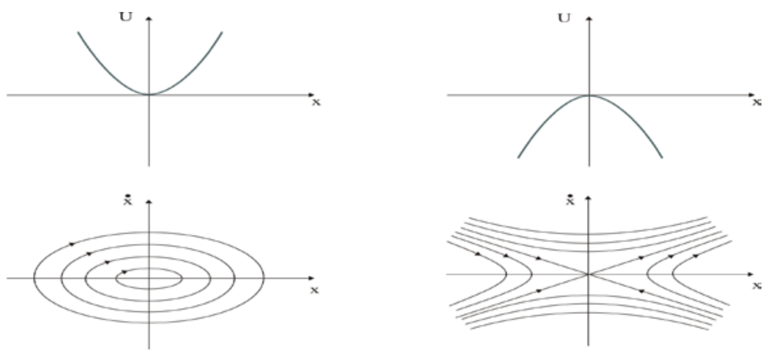
Από το σύστημα των εξισώσεων που διέπουν την κίνηση του εκκρεμούς στο επίπεδο θέσεων και ταχυτήτων:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\partial E}{\partial y}\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{\partial E}{\partial x}\end{cases}$$

προκύπτουν αντίστοιχα στις καταστάσεις ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας τα εξής γραμμικά συστήματα:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-\omega^2x\end{cases}\qquad\qquad\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=\omega^2x\end{cases}$$

Στην κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας οι τροχιές εξελίσσονται γύρω της διαγράφοντας ομοθετικές ελλείψεις και στην κατάσταση ασταθούς ισορροπίας οι τροχιές εξελίσσονται γύρω της διαγράφοντας ομοθετικές υπερβολές έχοντας ως ασυμπτώτους τις ευθείες $y=\pm\omega x$ που ορίζουν τις διαχωριστικές ισοενεργειακές καμπύλες.



Τα τοπικά τετραγωνικά πρότυπα των συναρτήσεων δυναμικού ενός βαθμού ελευθερίας
και η αντίστοιχη συμπεριφορά των τροχιών στο επίπεδο θέσεων και ταχυτήτων
στην περιοχή των σημείων ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας.

- Αποδείξτε ότι στις καταστάσεις ισορροπίας του απλού επίπεδου εκκρεμούς υπάρχει τοπικό σύστημα συντεταγμένων στο οποίο η συνάρτηση ενέργειας εκφράζεται τοπικά ως εξής:

  - Στην περιοχή της κατάστασης ευσταθούς ισορροπίας: $\mathrm{E}(x,y)=\frac{y^2}{2}+\omega^2\frac{x^2}{2}$
  - Στην περιοχή της κατάστασης ασταθούς ισορροπίας: $\mathrm{E}(x,y)=\frac{y^2}{2}-\omega^2\frac{x^2}{2}$

Σχόλιο. Στην πραγματικότητα το ζητούμενο αφορά μόνο στη συνάρτηση δυναμικού:

$$U(x)=\omega^2(1-\cos x)\ .$$

Στη συνάρτηση αυτή μπορεί να εφαρμοστεί το Λήμμα του *Morse*:

Λήμμα του Morse. *Κάθε συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής που είναι τουλάχιστο δυο φορές παραγωγίσιμη, σε κατάλληλες τοπικές συντεταγμένες επικεντρωμένες στα σημεία ελαχιστοποίησης ή μεγιστοποίησής της, αποκτά την αντίστοιχη τετραγωνική έκφραση:* $\pm\,x^2$.

Απόδειξη. Με μετατόπιση των αξόνων μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση αποκτά το τοπικό ακρότατό της στην αρχή των αξόνων: $f(0)=0$ και εφαρμόζουμε το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού:

$$f(x)=\int_0^x df=\int_0^x f'(\xi)\,d\xi=x\int_0^1 f'(tx)\,dt=x\,\mathrm{A}(x)\ .$$

και προκύπτει:

$$f'(0)=0\quad\Rightarrow\quad \mathrm{A}(0)=0\ .$$

Εφαρμόζουμε πάλι το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού:

$$f(x)=x\,\mathrm{A}(x)=x^2\,\mathrm{B}(x)\ .$$

και προκύπτει:

$$f''(0)\neq 0\quad\Rightarrow\quad \mathrm{B}(0)\neq 0\ .$$

Έτσι ορίζεται ο τοπικός αμφιδιαφορομορφισμός:

$$\psi:\mathbb{R}_{,0}\to\mathbb{R}_{,0}\ ,\quad \psi(x)=\mathrm{x}=\pm\,x\,|\,\mathrm{B}(x)\,|^{1/2}$$

που οδηγεί στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων στο οποίο η συνάρτηση αποκτά τετραγωνική έκφραση:

$$f\circ\psi^{-1}(\mathrm{x})=\pm\,\mathrm{x}^2\ .$$

Ερώτημα: Ερμηνεύεστε την εφαρμογή αυτού του λήμματος στη συνάρτηση δυναμικού του απλού επίπεδου εκκρεμούς σε συνδυασμό με το ανάπτυγμά της σε δυναμοσειρά:

$$U(x)=\ \omega^2\frac{x^2}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2x^{2n-2}}{(2n)!}\ .$$

- Όταν κατά την κίνηση του εκκρεμούς ληφθούν υπόψη οι τριβές με το περιβάλλον μέσο τότε υπάρχει απώλεια ενέργειας και το πρόβλημα γίνεται δυσχερέστερο, εκτός αν η σχέση της τριβής με την ταχύτητα είναι γραμμική. Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση του Νεύτωνα διατυπώνεται ως εξής:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-m\omega^2\sin x+\rho\frac{dx}{dt}$$

όπου ρ συμβολίζει το σταθερό θετικό συντελεστή τριβής. Η εξίσωση αυτή και κατά συνέπεια η κίνηση του εκκρεμούς εξαρτάται από τη μάζα του την οποία όμως σε αυτό το θέμα μελέτης θα τη θεωρήσουμε μοναδιαία. Στο επίπεδο των θέσεων και ταχυτήτων προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-\omega^2\sin x+\rho y\end{cases}$$

Το σύστημα αυτό εκφράζεται στο ευκλείδειο επίπεδο με το διανυσματικό πεδίο:

$$\mathcal{X}(x,y)=\left(y,-\omega^2\sin x+\rho y\right).$$

- Ποια πιστεύετε ότι είναι η φύση των καταστάσεων ισορροπίας στο επίπεδο θέσεων και ταχυτήτων:

$$(x = k\pi,\ y = 0)\ ,\ k \in \mathbb{Z}\ .$$

- Διαπιστώστε ότι η τιμή της συνάρτησης ενέργειας που υφίσταται στην περίπτωση ρ=0, φθίνει με την πάροδο του χρόνου κατά μήκος κάθε τροχιάς στο επίπεδο θέσεων και ταχυτήτων:

$$E(x, y) = \omega^2(1 - \cos x) + y^2/2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dt}(x(t), y(t)) = -\rho\, y^2 \le 0\ .$$

- Διαπιστώστε ότι η εξελικτική ροή έχει σμικρυντική συμπεριφορά, δηλαδή με την πάροδο του χρόνου προκαλείται σμίκρυνση των εμβαδών κατά τους μετασχηματισμούς ροής στο επίπεδο θέσεων και ταχυτήτων και η σμίκρυνση αυτή αποτιμάται από την απόκλιση του διανυσματικού πεδίου:

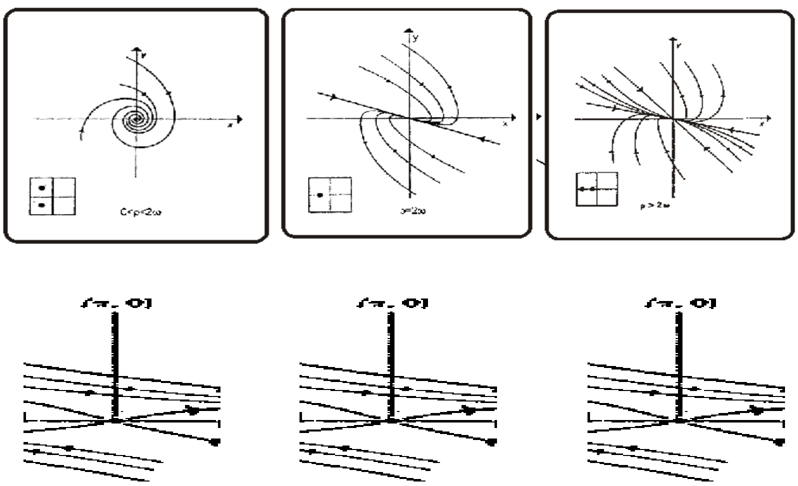
$$div\mathcal{X}(x, y) = div\left(y, -\omega^2 \sin x + \rho y\right) = -\rho < 0\ .$$

- Προσδιορίστε τις τροχιές και την εξελικτική ροή της γραμμικοποιημένης δυναμικής στην περιοχή των καταστάσεων ισορροπίας στο επίπεδο θέσεων και ταχυτήτων.
- Διαπιστώστε ότι η μορφή των τροχιών της γραμμικοποιημένης δυναμικής στην περιοχή των καταστάσεων ισορροπίας δεν εξαρτάται από το συντελεστή τριβής στην περίπτωση των περιττών τιμών του *k* και εξαρτάται από αυτόν στην περίπτωση των άρτιων τιμών του *k*.
- Ποια πιστεύετε ότι είναι η σχέση της εξελικτικής ροής της μη γραμμικής δυναμικής με εκείνη της γραμμικοποιημένης δυναμικής στην περιοχή των καταστάσεων ισορροπίας;

Σχόλιο. Ίσως να μην μπορέσετε να αποφανθείτε με βεβαιότητα για τη φύση των καταστάσεων ισορροπίας, αλλά σημασία έχει να αναρωτηθείτε για το πώς θα την αναγνωρίσουμε. Ίσως ακόμη να μην μπορέσετε να αποφανθείτε με βεβαιότητα για τη σμικρυντική συμπεριφορά της εξελικτικής ροής αφού δεν την γνωρίζετε, αλλά σημασία έχει να αναρωτηθείτε για την πληροφορία που σας παρέχει η αρνητική απόκλιση του διανυσματικού πεδίου που εκφράζει τη δυναμική. Πάντως, εύκολα θα διαπιστώσετε ότι η γραμμικοποιημένη δυναμική στις καταστάσεις ισορροπίας (0,0) και (π,0) δίνεται αντίστοιχα από τα συστήματα των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & -\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

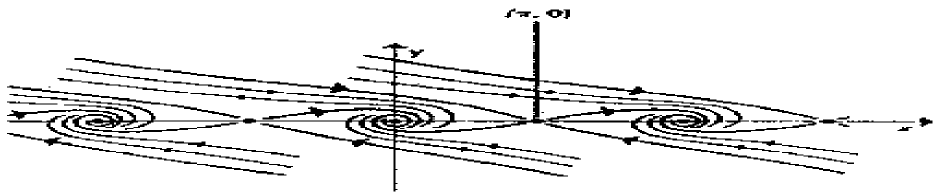
Επιχειρείστε να προσδιορίσετε απευθείας τις λύσεις και την εξελικτική ροή αυτής της γραμμικής δυναμικής, αλλά παρολαυτά αναρωτηθείτε για το πώς θα αντλήσετε χρήσιμες πληροφορίες από τη φύση των ιδιοτιμών των δυο πινάκων και την εξάρτησή τους από τον συντελεστή τριβής. Θα καταλήξετε στην ακόλουθη απάντηση:



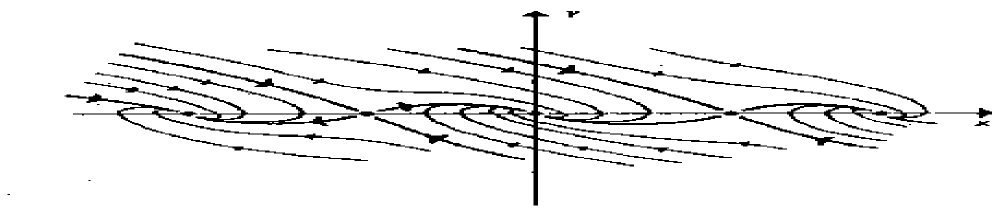
Τροχιές της γραμμικοποιημένης δυναμικής στις καταστάσεις ισορροπίας.

Ποια όμως είναι η σχέση των τροχιών της δυναμικής που εξετάζουμε με τις τροχίες της γραμμικοποιημένης δυναμικής στην περιοχή των καταστάσεων ισορροπίας; Μάλλον δεν θα μπορέσετε να απαντήσετε με βεβαιότητα, αλλά ένα σημαντικό θεώρημα, γνωστό ως *θεώρημα γραμμικοποίησης του Hartman*, δίνει την απάντηση δηλώνοντας την ύπαρξη αμφιδιαφορικής αλλαγής συντεταγμένων στην περιοχή αυτών των καταστάσεων ισορροπίας που δίνει τη δυνατότητα στο διανυσματικό πεδίο της μη γραμμικής δυναμικής να αποκτήσει γραμμική έκφραση.

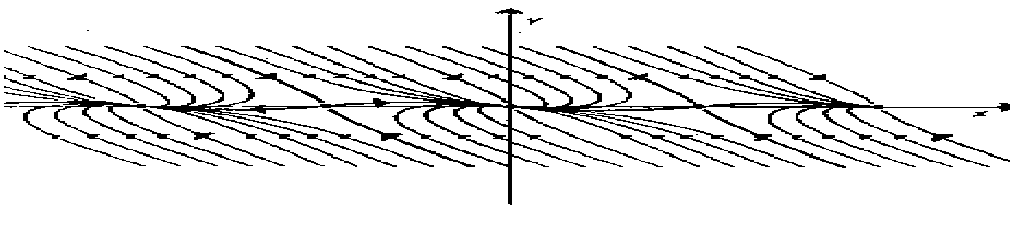
Οι τοπικές πληροφορίες ως προς τη συμπεριφορά των τροχιών της γραμμικοποιημένης δυναμικής στην περιοχή των καταστάσεων ισορροπίας μπορούν πλέον να συντεθούν ώστε να σχηματιστεί ποιοτικά η καθολική συμπεριφορά τους στο επίπεδο των θέσεων και ταχυτήτων. Με δεδομένο το μήκος του εκκρεμούς, άρα της σταθεράς ω, διαπιστώνουμε ότι, αν ο συντελεστής τριβής ρ είναι μεγαλύτερος από 2ω, το εκκρεμές χωρίς να εκτελέσει ταλαντώσεις καταλήγει σε άπειρο χρόνο απευθείας στην κατάσταση ισορροπίας (0,0). Αν ο συντελεστής ρ είναι μικρότερος του 2ω, το εκκρεμές εκτελώντας αποσβεννόμενες ταλαντώσεις καταλήγει σε άπειρο χρόνο στην κατάσταση ισορροπίας (0,0) η οποία χαρακτηρίζεται ως *ελκυστής* της δυναμικής. Η *λεκάνη* του ελκυστή αποτελείται από όλα τα σημεία του επιπέδου των θέσεων και ταχυτήτων εκτός από τη *σαγματική* κατάσταση ισορροπίας (π,0) και τις τέσσερες έντονα σημειωμένες τροχιές που όλες μαζί σχηματίζουν τη *διαχωριστική* καμπύλη. Με την πάροδο του χρόνου, οι δυο από αυτές τις τροχιές απομακρύνονται και οι άλλες δυο κατευθύνονται προς την κατάσταση (π,0). Όταν οι αρχικές συνθήκες ληφθούν στη λεκάνη τότε οι αντίστοιχες τροχιές κατευθύνονται στον ελκυστή (0,0).



$0<\rho<2\omega$



$\rho=2\omega$



$\rho>2\omega$

Οι τροχιές του απλού επίπεδου εκκρεμούς στο επίπεδο θέσεων και ταχυτήτων
όταν λαμβάνεται υπόψη η τριβή