ΜΑΘΗΜΑ 3ο : ΟΙ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Ένα σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς πραγματικούς συντελεστές έχει την ακόλουθη έκφραση στις καρτεσιανές συντεταγμένες του ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + \ldots + a_{n1}x_n \\ \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{1n}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

και για κάθε δεδομένη αρχική κατάσταση η λύση του εκφράζεται ως απεικόνιση του χρονικού άξονα στο χώρο των καταστάσεων που αναπαρίσταται στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$:

$$\phi_{x_o} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad \phi(0) = x_o \in \mathbb{R}^n .$$

Το σύστημα αυτό ορίζει ένα γραμμικό μετασχηματισμό στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

που συμβολικά σημειώνεται ως εξής:

$$\dot{\mathrm{X}} = \mathrm{A}\,\mathrm{X} .$$

Ζητούμενο είναι ο εντοπισμός κατάλληλων γραμμικών συντεταγμένων στις οποίες το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων αποκτά την απλούστερη έκφραση με δυνατότητα άμεσου προσδιορισμού των λύσεών του. Οι καρτεσιανές συντεταγμένες ορίζονται από μια προσανατολισμένη ορθοκανονική βάση του ευκλείδειου χώρου και τις κανονικές προβολές:

$$x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n .$$

Κάθε γραμμικός ισομορφισμός

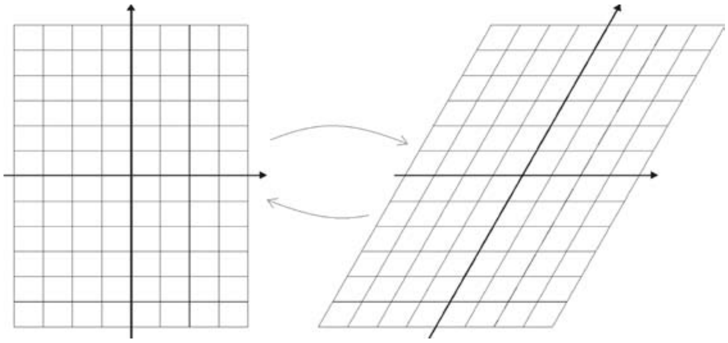
$$\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

μετατρέπει την ορθοκανονική βάση σε μια βάση όχι απαραίτητα ορθοκανονική, οπότε οι καρτεσιανές συντεταγμένες μετατρέπονται σε ένα άλλο σύστημα γραμμικών συντεταγμένων:

$$y_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad y_i = x_i \circ \psi^{-1}, \quad i = 1, \ldots, n ,$$

που ορίζονται από το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[rr, shift left, "\psi"] \arrow[dr, "x_i"'] & & \mathbb{R}^n \arrow[ll, shift left] \arrow[dl, "y_i"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$



Γραμμικός μετατροπή των καρτεσιανών συντεταγμένων στο ευκλείδειο επίπεδο.

Η διαδικασία προσδιορισμού των κατάλληλων γραμμικών συντεταγμένων που οδηγούν στην άμεση επίλυση των εξισώσεων καθορίζεται από τη φύση των ιδιοτιμών του γραμμικού μετασχηματισμού:

$$\dot{\mathrm{X}} = \mathrm{A}\,\mathrm{X}\,.$$

- Η πιο απλή εκδοχή προκύπτει όταν όλες οι ιδιοτιμές είναι απλές πραγματικές, οπότε ο ευκλείδειος χώρος διασπάται σε ευθύ άθροισμα μονοδιάστατων ιδιόχωρων:

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{E}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathrm{E}_{\lambda_n}$$

όπου

$$\mathrm{E}_{\lambda_i} = \left\{ \vec{\xi} \in \mathbb{R}^n \;/\; \mathrm{A}\,\vec{\xi} = \lambda_i \vec{\xi} \right\}, \quad i = 1,\ldots,n\,.$$

Έτσι, υπάρχει η δυνατότητα συγκρότησης μιας βάσης ιδιοδιανυσμάτων στην οποία ο γραμμικός μετασχηματισμός εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Σε αυτές τις γραμμικές συντεταγμένες οι διαφορικές εξισώσεις εκφράζονται ως εξής:

$$\dot{y}_i(t) = \lambda_i\, \dot{y}_i(t)\,, \quad i = 1,\ldots,n\,,$$

και προκύπτουν οι λύσεις:

$$y_i(t) = c_i\, e^{\lambda_i t}\,, \quad c_i \in \mathbb{R}\,, \quad i = 1,\ldots,n\,.$$

- Η αποσύζευξη των διαφορικών εξισώσεων και η άμεση επίλυσή τους είναι γενικότερα εφικτή όταν υπάρχει δυνατότητα διάσπασης του ευκλείδειου χώρου σε ευθύ άθροισμα ιδιόχωρων:

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{E}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathrm{E}_{\lambda_k}$$

όπου

$$\dim \mathrm{E}_{\lambda_1} + \ldots + \dim \mathrm{E}_{\lambda_k} = n$$

και

$$\mathrm{E}_{\lambda_i} = \left\{ \vec{\xi} \in \mathbb{R}^n \;/\; \mathrm{A}\,\vec{\xi} = \lambda_i \vec{\xi} \right\}, \quad i = 1,\ldots,k\,.$$

- Όταν η διάσπαση αυτή δεν είναι εφικτή τότε τα γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα δεν επαρκούν για τη συγκρότηση βάσης η οποία θα προκαλέσει αποσύζευξη των διαφορικών εξισώσεων. Συμπληρώσουμε τότε την οικογένειά τους με κατάλληλα επιλεγμένα διανύσματα ώστε να συγκροτηθεί βάση στην οποία να προκύψει τριγωνική έκφραση του πίνακα του μετασχηματισμού:

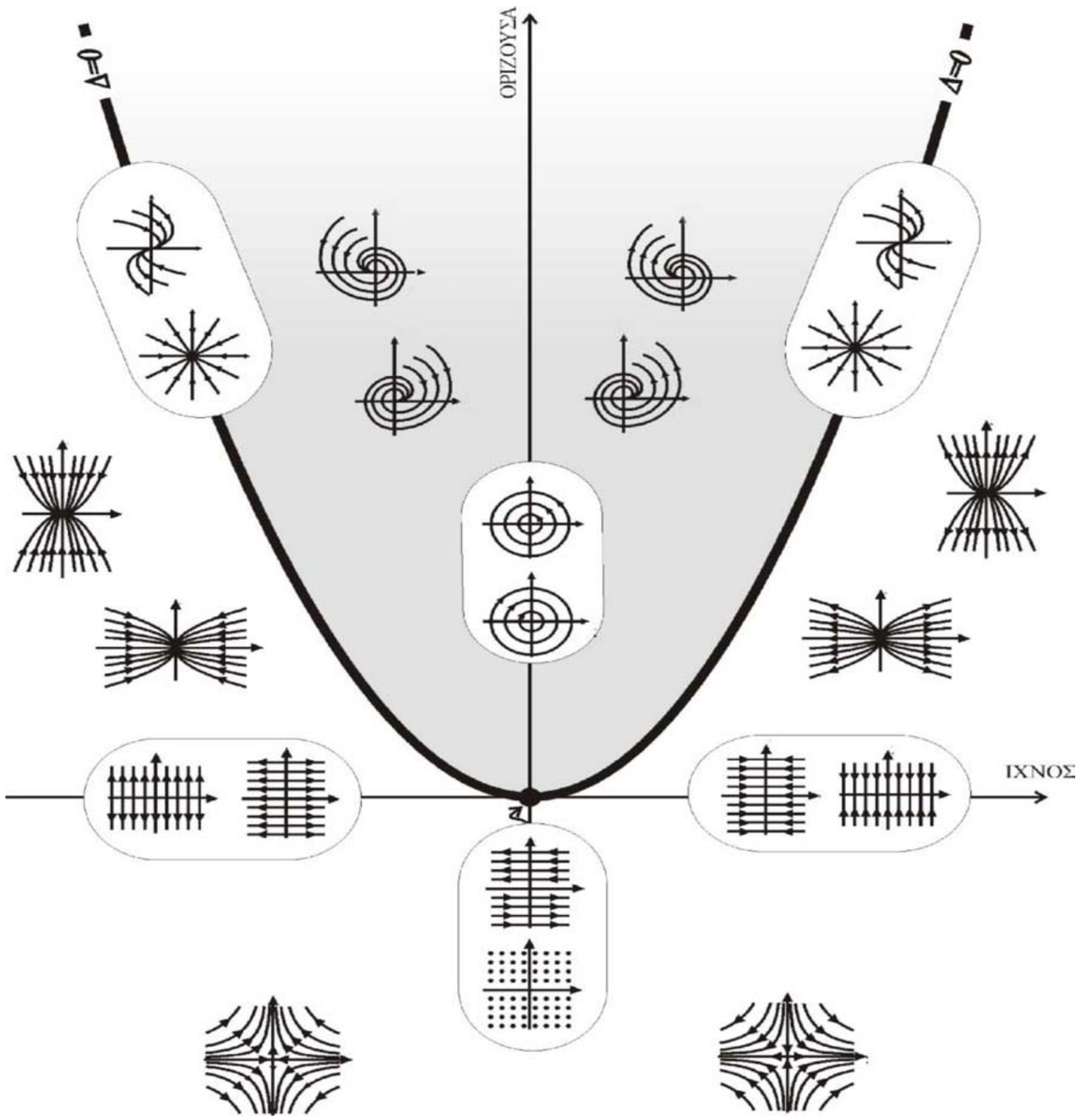
$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{11} & \cdots & a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Από τη βάση αυτή προκύπτουν γραμμικές συντεταγμένες που εξασφαλίζουν μερική αποσύζευξη των διαφορικών εξισώσεων, οπότε οι λύσεις τους προσδιορίζονται με διαδοχικές ολοκληρώσεις:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a'_{11}y_1 + a'_{21}y_2 + \ldots + a'_{n1}y_\mathrm{n} \\ \qquad \dot{y}_2 = a'_{21}y_2 + \ldots + a'_{n1}y_\mathrm{n} \\ \qquad\qquad \ddots \qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad \dot{y}_\mathrm{n} = a'_{n1}y_\mathrm{n} \end{cases}$$

- Όταν εμφανίζονται μιγαδικές ιδιοτιμές τότε προκειμένου να συγκροτηθεί βάση του ευκλείδειου χώρου στην οποία ο πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού να αποκτήσει πρόσφορη έκφραση για την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων, θέτουμε σε εφαρμογή τη διαδικασία κατασκευής των κανονικών μορφών *Jordan* που έχετε διδαχτεί στο μάθημα της Γραμμικής Άλγεβρας.

ΟΙ ΤΡΟΧΙΕΣ ΤΗΣ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ



Η δισδιάστατη γραμμική δυναμική εκφράζεται στο ευκλείδειο επίπεδο με ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς πραγματικούς συντελεστές ως εξής:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_1 x_1 + b_1 x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_2 x_1 + b_2 x_2 \end{cases}$$

Στις καρτεσιανές συντεταγμένες του ευκλείδειου επιπέδου θεωρούμε το γραμμικό μετασχηματισμό:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

και το διατυπώνουμε συμβολικά ως εξής:

$$\dot{\mathrm{X}}(t) = \mathrm{A}\,\mathrm{X}(t)\,.$$

Οι ιδιοτιμές κάθε γραμμικού μετασχηματισμού διατηρούνται αναλλοίωτες κατά την αλλαγή βάσης και ταυτίζονται με τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης:

$$\det\left(\mathrm{A}-\lambda\mathbf{I}_{\mathbb{R}^2}\right)=0\,.$$

Θεωρώντας την ορίζουσα και το ίχνος του γραμμικού μετασχηματισμού που επίσης διατηρούνται αναλλοίωτα κατά τις αλλαγές βάσης:

$$\det\mathrm{A}=\mathrm{a}_1\mathrm{b}_2-\mathrm{b}_1\mathrm{a}_2 \quad \text{και} \quad \mathrm{tr}\,\mathrm{A}=\mathrm{a}_1+\mathrm{b}_2$$

προκύπτει η ακόλουθη έκφραση της χαρακτηριστικής εξίσωσης:

$$\lambda^2-\left(\mathrm{tr}\,\mathrm{A}\right)\lambda+\det\mathrm{A}=0\,.$$

και η φύση των ιδιοτιμών καθορίζεται από το πρόσημο της διακρίνουσας:

$$\Delta(\mathrm{A})=(\mathrm{tr}\mathrm{A})^2-4\det\mathrm{A}\,.$$

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

- $\Delta(\mathrm{A})>0 \;\Rightarrow\;$ ιδιοτιμές $\lambda,\lambda'\in\mathbb{R},\ \lambda\neq\lambda'$,
- $\Delta(\mathrm{A})=0 \;\Rightarrow\;$ ιδιοτιμές $\lambda,\lambda'\in\mathbb{R},\ \lambda=\lambda'$,
- $\Delta(\mathrm{A})<0 \;\Rightarrow\;$ ιδιοτιμές $\lambda,\lambda'\in\mathbb{C},\ \lambda=\alpha+i\beta,\ \lambda'=\alpha-i\beta$.

☑ **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ $\mathbf{\Delta(A)>0}$** $\Rightarrow$ ιδιοτιμές $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R},\ \lambda_1\neq\lambda_2$.

Στην περίπτωση αυτή προκύπτουν δυο μονοδιάστατοι ιδιόχωροι:

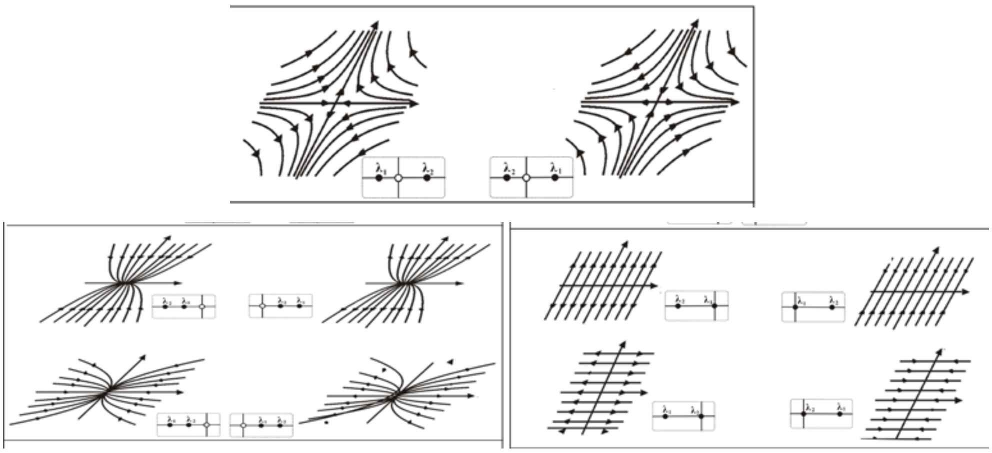
$$\mathrm{E}_{\lambda_i}=\left\{\vec{\xi}\in\mathbb{R}^2 / \mathrm{A}\,\vec{\xi}=\lambda_i\vec{\xi}\right\},\quad i=1,2\,,$$

και επιλέγοντας μια βάση ιδιοδιανυσμάτων ορίζεται ένα νέο σύστημα γραμμικών συντεταγμένων στο οποίο ο πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού αποκτά διαγώνια έκφραση:

$$\begin{bmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}.$$

Τώρα, χωρίς δυσκολία προκύπτουν οι λύσεις του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{cases}\dot{y}_1=\lambda_1 y_1\\ \dot{y}_2=\lambda_2 y_2\end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases}y_1(t)=c_1e^{\lambda_1 t}\\ y_2(t)=c_2e^{\lambda_2 t}\end{cases} \;\Rightarrow\; x(t)=c_1\vec{\xi}_1e^{\lambda_1 t}+c_2\vec{\xi}_2e^{\lambda_2 t}\,.$$



Πίνακας των τροχιών στην περίπτωση πραγματικών διακριτών ιδιοτιμών.

- Όταν οι ιδιοτιμές είναι ετερόσημες τότε η κατάσταση ισορροπίας είναι σαγματική.
- Όταν οι ιδιοτιμές είναι ομόσημες τότε η κατάσταση ισορροπίας είναι κομβική.
- Όταν κάποια από τις ιδιοτιμές είναι μηδενική τότε εμφανίζονται άπειρες συνευθειακές καταστάσεις ισορροπίας και οι άλλες τροχιές εξελίσσονται ευθύγραμμα εκατέρωθεν της κάθε κατάστασης ισορροπίας.

☑ **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ $\Delta(\mathrm{A}) = 0$** $\Rightarrow$ ιδιοτιμές $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R},\ \lambda = \lambda'$.

Διακρίνουμε δυο υποπεριπτώσεις ανάλογα με το αν ο ιδιόχωρος είναι δισδιάστατος ή μονοδιάστατος:

$$\mathrm{E}_\lambda = \left\{ \vec{\xi} \in \mathbb{R}^2 /\ \mathrm{A}\vec{\xi} = \lambda \vec{\xi} \right\}.$$

- Αν $dim\,\mathrm{E}_\lambda = 2$, ο γραμμικός μετασχηματισμός ορίζει στο ευκλείδειο επίπεδο μια ομοθεσία που έχει λόγο την τιμή της διπλής πραγματικής ιδιοτιμής και εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Οι λύσεις του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων προκύπτουν απευθείας ως εξής:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda\, x_1 \\ \dot{x}_2 = \lambda x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = x_{1o} e^{\lambda t} \\ x_2(t) = x_{2o} e^{\lambda t} \end{cases} \Rightarrow\ x(t) = x_o e^{\lambda t}.$$

- Αν $dim\,\mathrm{E}_\lambda = 1$, επιλέγουμε μια βάση αποτελούμενη από ένα ιδιοδιάνυσμα $\vec{\xi}$ και ένα διάνυσμα $\vec{\xi}'$ που προσδιορίζεται ως εξής:

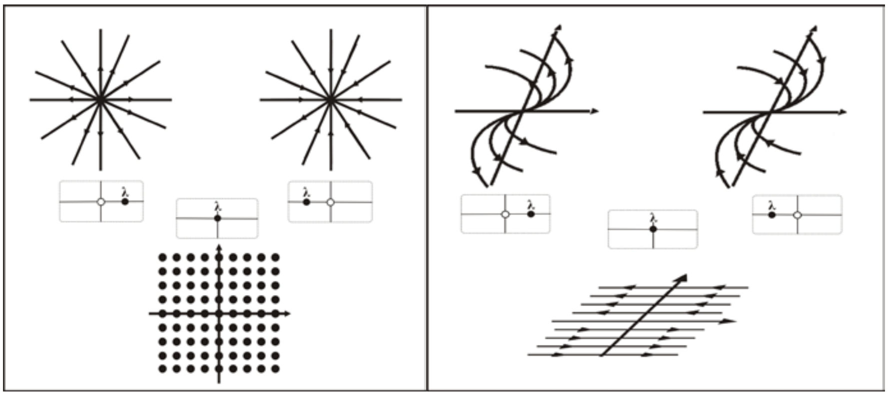
$$\mathrm{A}\vec{\xi}' = \vec{\xi} + \lambda \vec{\xi}'.$$

Η βάση αυτή ορίζει ένα νέο σύστημα γραμμικών συντεταγμένων στο οποίο ο πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού αποκτά τριγωνική έκφραση:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Οι λύσεις του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων προκύπτουν ως εξής:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda\, y_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 = \lambda y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = (c_1 t + c_2)\, e^{\lambda t} \\ y_2(t) = c_1 e^{\lambda t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \ldots \\ x_2(t) = \ldots \end{cases}$$



Πίνακας των τροχιών στην περίπτωση διπλής πραγματικής ιδιοτιμής.

Στην περίπτωση δισδιάστατου ιδιόχωρου:

- Όταν η ιδιοτιμή δεν είναι μηδενική τότε οι τροχιές απομακρύνονται ή πλησιάζουν ακτινικά την κατάσταση ισορροπίας.
- Όταν η ιδιοτιμή είναι μηδενική τότε κάθε σημείο του ευκλείδειου επιπέδου εκφράζει μια κατάσταση ισορροπίας.

Στην περίπτωση μονοδιάστατου ιδιόχωρου:

- Όταν η ιδιοτιμή δεν είναι μηδενική τότε οι τροχιές απομακρύνονται ή πλησιάζουν την κατάσταση ισορροπίας ασυμπτωτικά προς το μονοδιάστατο ιδιόχωρο.
- Όταν η ιδιοτιμή είναι μηδενική τότε εμφανίζονται άπειρες συνευθειακές καταστάσεις ισορροπίας και οι άλλες τροχιές εξελίσσονται ευθύγραμμα εκατέρωθεν κάθε κατάστασης ισορροπίας.

☑ **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ $\Delta(A) < 0$** $\Rightarrow$ ιδιοτιμές $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C}$, $\lambda = \alpha + i\,\omega$, $\lambda' = \alpha - i\,\omega$.

Στην περίπτωση αυτή προκύπτουν δυο συζυγή μιγαδικά ιδιοδιανύσματα:

$$\vec{\zeta} = \vec{\zeta}_1 + i\,\vec{\zeta}_2\,, \quad \vec{\zeta}' = \vec{\zeta}_1 - i\,\vec{\zeta}_2\,.$$

Τα πραγματικά διανύσματα:

$$\vec{\xi}_1 = \vec{\zeta} + \vec{\zeta}' = 2\vec{\zeta}_1\,, \quad \vec{\xi}_2 = i(\vec{\zeta} - \vec{\zeta}') = -2\vec{\zeta}_2\,,$$

συγκροτούν μια βάση του ευκλείδειου επιπέδου που ορίζει ένα σύστημα γραμμικών συντεταγμένων στο οποίο ο γραμμικός μετασχηματισμός εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Όμως, για τον υπολογισμό των λύσεων του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων:

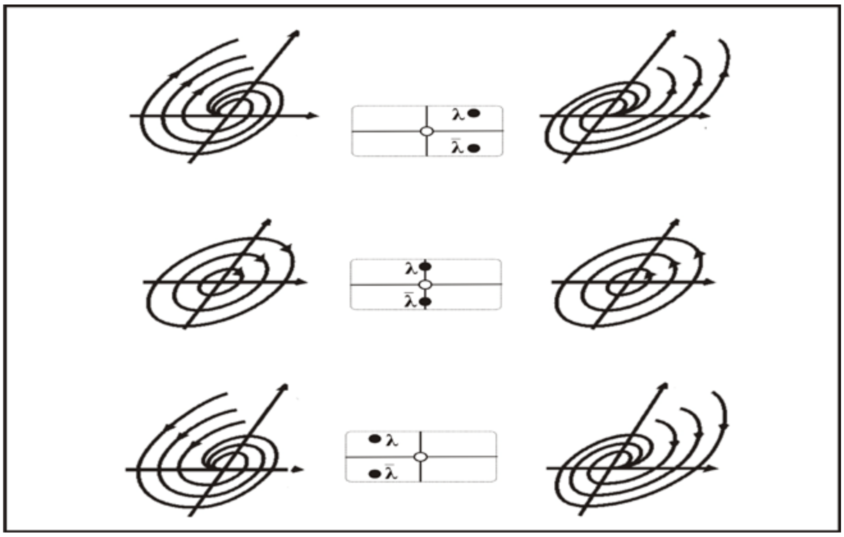
$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha\, y_1 - \omega y_2 \\ \dot{y}_2 = \omega y_1 + \alpha\, y_2 \end{cases}$$

χρειάζεται να εισαχθούν οι μη γραμμικές συντεταγμένες:

$$y_1 = r\cos\theta\,, \quad y_2 = r\sin\theta\,, \quad r > 0,\ \theta \in \mathbb{R}\ (mod\, 2\pi)\,.$$

Δεν πρόκειται πάντα για πολικές συντεταγμένες γιατί δεν ορίζονται απευθείας από το ορθοκανονικό σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων του ευκλείδειου επιπέδου, όμως προκύπτει:

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r(t) = r_o e^{\alpha t} \\ \theta(t) = \omega t + \theta_o \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = r_o e^{\alpha t}\cos(\omega t + \theta_o) \\ y_2(t) = r_o e^{\alpha t}\sin(\omega t + \theta_o) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \ldots \\ x_2(t) = \ldots \end{cases}$$



Πίνακας των τροχιών στην περίπτωση μιγαδικών ιδιοτιμών.

Σχόλιο. Στην περίπτωση αυτή των μιγαδικών ιδιοτιμών ορίζεται στο μιγαδικό επίπεδο ένας μιγαδικός γραμμικός μετασχηματισμός ο οποίος εκφράζεται στη βάση των συζυγών ιδιοδιανυσμάτων ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z_1(t) = z_1(0)e^{(\alpha + i\omega)t} \\ z_2(t) = z_2(0)e^{(\alpha - i\omega)t} \end{cases}$$

ΘΕΜΑΤΑ ΜΕΛΕΤΗΣ

1. Γεωμετρική κατασκευή των τροχιών της δισδιάστατης γραμμικής δυναμικής.

Θεωρούμε το σύστημα των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων διατυπωμένο στις καρτεσιανές συντεταγμένες του ευκλείδειου επιπέδου:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 + b_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = a_2 x_1 + b_2 x_2 \end{cases}.$$

Όπως διαπιστώσαμε υπάρχουν κατάλληλες γραμμικές συντεταγμένες στις οποίες το σύστημα αυτό αποκτά απλούστερη διατύπωση με δυνατότητα άμεσης επίλυσής του. Αυτές οι συντεταγμένες καθορίζονται από τις ιδιοδιευθύνσεις ή κατάλληλες διευθύνσεις που εμφανίζονται στο ευκλείδειο επίπεδο ανάλογα με τη φύση των ιδιοτιμών της γραμμικής δυναμικής και οδηγούν στις *κανονικές μορφές*:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 \\ \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda y_1 \\ \dot{y}_2 = \lambda y_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda y_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 = \lambda y_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha y_1 - \omega y_2 \\ \dot{y}_2 = \omega y_1 + \alpha y_2 \end{cases}.$$

- Όταν η γραμμική δυναμική έχει δυο πραγματικές διακριτές ιδιοτιμές τότε στο ευκλείδειο επίπεδο υπάρχει ένα σύστημα ιδιοαξόνων στο οποίο προκύπτει η *κανονική μορφή* των εξισώσεων:

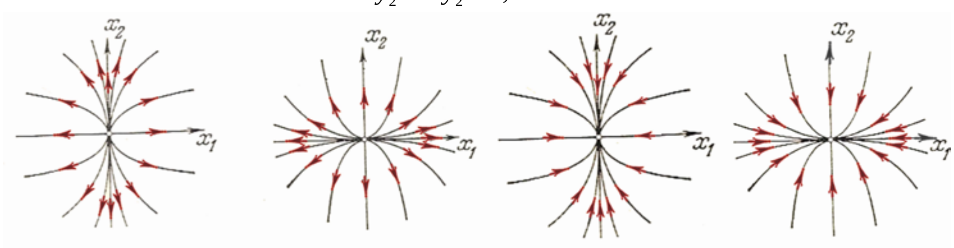
$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 \\ \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}.$$

Για το σχεδιασμό των τροχιών είναι προτιμότερο να εργαστούμε στις συντεταγμένες του συστήματος των ιδιοαξόνων παρά στις καρτεσιανές συντεταγμένες, γιατί η κανονική αυτή μορφή των εξισώσεων διατηρείται αναλλοίωτη κατά την αλλαγή:

$$y_1 \to -y_1 \quad \text{και} \quad y_2 \to -y_2 .$$

Συνεπώς, οι τροχιές οφείλουν να εμφανίζουν αξονική συμμετρία ως προς κάθε ιδιοάξονα παράλληλα προς τη διεύθυνση που ορίζει ο άλλος. Αν κάποια από τις ιδιοτιμές είναι μηδενική τότε κάθε σημείο του αντίστοιχου ιδιοάξονα αποτελεί κατάσταση ισορροπίας. Όλες οι άλλες τροχιές είναι ευθύγραμμες και εξελίσσονται κατά ζεύγη, ελκτικά ή απωστικά, εκατέρωθεν κάθε κατάστασης ισορροπίας. Αν δεν υπάρχει μηδενική ιδιοτιμή τότε η αρχή των αξόνων αποτελεί τη μοναδική κατάσταση ισορροπίας και τέσσερις ευθύγραμμες τροχιές, που έχουν φορέα τους αντίστοιχους ημιάξονες των ιδιοδιευθύνσεων, κατευθύνονται προς αυτήν ή απομακρύνονται προς το άπειρο ανάλογα με το πρόσημο της αντίστοιχης ιδιοτιμής. Για όλες τις άλλες τροχιές, η αξονική τους συμμετρία ως προς τους ιδιοάξονες, υποδεικνύει ότι αρκεί να κατασκευαστούν στο τεταρτημόριο: $y_1 > 0$, $y_2 > 0$ και εκεί διαπιστώνουμε ότι έχουν φορέα τα γραφήματα των εκθετικών συναρτήσεων:

$$y_2 = c\, y_2^{\lambda_2/\lambda_1} , \quad c > 0 .$$



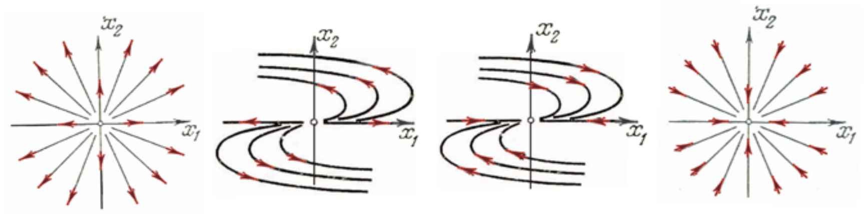
Τροχιές της γραμμικής δυναμικής στην περίπτωση απλών πραγματικών
μη μηδενικών ιδιοτιμών σε ορθοκανονικό σύστημα ιδιοαξόνων του ευκλείδειου επιπέδου.

- Όταν η γραμμική δυναμική έχει διπλή πραγματική ιδιοτιμή τότε, εκτός από τη μηδενική περίπτωση ή την περίπτωση ομοθεσίας, υπάρχει μόνο μια ιδιοδιεύθυνση. Έτσι, συγκροτείται ένα σύστημα αξόνων αποτελούμενο από ένα ιδιοάξονα και έναν κατάλληλα επιλεγμένο άξονα, όπως ήδη αναφέρθηκε, και σε αυτό το σύστημα των γραμμικών συντεταγμένων προκύπτει η *κανονική μορφή Jordan*:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda y_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 = \lambda y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = (c_1 t + c_2)\, e^{\lambda t} \\ y_2(t) = c_1 e^{\lambda t} \end{cases}$$

Η αρχή των αξόνων αποτελεί τη μοναδική κατάσταση ισορροπίας και δυο ευθύγραμμες τροχιές, που έχουν ως φορέα τους ημιάξονες της ιδιοδιεύθυνσης, κατευθύνονται προς αυτήν ή απομακρύνονται προς το άπειρο ανάλογα με το πρόσημο της ιδιοτιμής. Όλες οι άλλες τροχιές έχουν φορέα τα γραφήματα των συναρτήσεων:

$$y_1 = \frac{1}{\lambda}\left(ln\,|y_2| + c\right) y_2 \quad \text{όπου} \quad c = -\frac{1}{\lambda} ln\,|c_1| + c_2/c_1\,, \;\; c_1 \neq 0\,.$$



Τροχιές της γραμμικής δυναμικής στην περίπτωση διπλής ιδιοτιμής σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

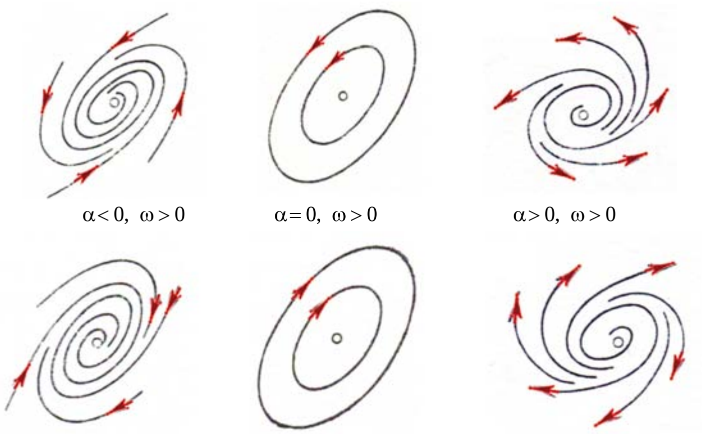
- Όταν η γραμμική δυναμική έχει μιγαδικές ιδιοτιμές:

$$\lambda = \alpha + i\,\omega, \quad \lambda' = \alpha - i\,\omega$$

τότε στο ευκλείδειο επίπεδο δεν εμφανίζονται ιδιοδιευθύνσεις αλλά υπάρχει ένα σύστημα γραμμικών συντεταγμένων στο οποίο προκύπτει η *κανονική μορφή*:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha\, y_1 - \omega y_2 \\ \dot{y}_2 = \omega y_1 + \alpha\, y_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} y_1(t) = r_o e^{\alpha t} \cos(\omega t + \theta_o) \\ y_2(t) = r_o e^{\alpha t} \sin(\omega t + \theta_o) \end{cases}$$

Η αρχή των αξόνων αποτελεί τη μοναδική κατάσταση ισορροπίας και ολόγυρά της εξελίσσονται ελλειπτικές ή σπειροειδείς τροχιές ανάλογα με το αν οι ιδιοτιμές είναι καθαρά φανταστικές ή όχι. Οι σπειροειδείς τροχιές πλησιάζουν απεριόριστα την κατάσταση ισορροπίας ή απομακρύνονται στο άπειρο ανάλογα με το αν το πραγματικό μέρος των συζυγών ιδιοτιμών είναι αρνητικό ή θετικό.



Τροχιές της γραμμικής δυναμικής στην περίπτωση μιγαδικών ιδιοτιμών στο ευκλείδειο επίπεδο.

- Κατασκευάστε τις τροχιές της εξελικτικής ροής της γραμμικής δυναμικής που ορίζεται στο ευκλείδειο επίπεδο από τα ακόλουθα συστήματα διαφορικών εξισώσεων:

[1] $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - 2x_2 \end{cases}$ **[2]** $\begin{cases} 2\dot{x}_1 = 3x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 2x_2 \end{cases}$

[3] $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - 3x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$ **[4]** $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - 3x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - x_2 \end{cases}$

Υπόδειξη.

[1] Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 2$, Ιδιοδιανύσματα: $\vec{\xi}_1 = (1,-4),\ \ \vec{\xi}_2 = (1,1)$.
Προκύπτουν γραμμικές συντεταγμένες στις οποίες το σύστημα εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -3y_1 \\ \dot{y}_2 = \ 2y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{-3t} \\ y_2(t) = c_2 e^{2t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} \\ x_2(t) = -4c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} \end{cases}$$

[2] Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 1/2,\ \lambda_2 = 3$, Ιδιοδιανύσματα: $\vec{\xi}_1 = (1,-2),\ \ \vec{\xi}_2 = (1,3)$.
Προκύπτουν γραμμικές συντεταγμένες στις οποίες το σύστημα εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1/2 \\ \dot{y}_2 = 3y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{t/2} \\ y_2(t) = c_2 e^{3t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{t/2} + c_2 e^{3t} \\ x_2(t) = -2c_1 e^{t/2} + 3c_2 e^{3t} \end{cases}$$

[3] Ιδιοτιμή: $\lambda = 1$, Ιδιοδιάνυσμα: $\vec{\xi} = (1,-1)$, Συμπληρωματικό διάνυσμα: $\vec{\xi}' = (-1/3,\ 0)$.
Προκύπτουν γραμμικές συντεταγμένες στις οποίες το σύστημα εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 = y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = (c_1 + c_2 t)\, e^{t} \\ y_2(t) = c_2\, e^{t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = 2(c_2 t + c_1 - c_2/3)e^{t} \\ x_2(t) = -2(c_2 t + c_1)e^{t} \end{cases}$$

[4] Ιδιοτιμές: $\lambda = 1 + i\sqrt{5},\ \lambda' = 1 - i\sqrt{5}$, Ιδιοδιανύσματα: $\vec{\zeta} = (2 + i\sqrt{5}, 3),\ \vec{\zeta}' = (2 - i\sqrt{5}, 3)$.
Τα διανύσματα $\vec{\xi}_1 = (2,3),\ \vec{\xi}_2 = (-\sqrt{5}, 0)$ ορίζουν γραμμικές συντεταγμένες στις οποίες το σύστημα εκφράζεται ως εξής:

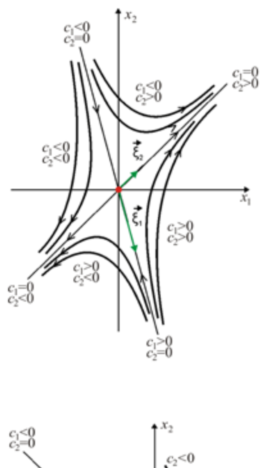
$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 - \sqrt{5} y_2 \\ \dot{y}_2 = \sqrt{5} y_1 + y_2 \end{cases}$$

Από το μετασχηματισμό $y_1 = r\sin\theta,\ \ y_2 = r\cos\theta$ προκύπτει:

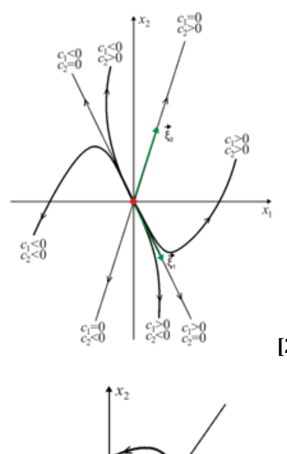
$$\begin{cases} \dot{r}(t) = r(t) \\ \dot{\theta}(t) = \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r(t) = r_o\, e^{t} \\ \theta(t) = \sqrt{5}\, t + \theta_o \end{cases} \Rightarrow \quad r = c\, e^{\theta/\sqrt{5}}$$

άρα

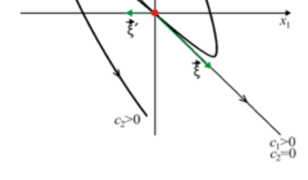
$$\begin{cases} y_1(t) = r_o\, e^{t} \cos(\sqrt{5}\,t + \theta_o) \\ y_2(t) = r_o\, e^{t} \sin(\sqrt{5}\,t + \theta_o) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = r_o\, e^{t} \left(2\cos(\sqrt{5}\,t + \theta_o) - \sqrt{5}\cos(\sqrt{5}\,t + \theta_o)\right) \\ x_2(t) = 2\, r_o\, e^{t} \sin(\sqrt{5}\,t + \theta_o) \end{cases}$$



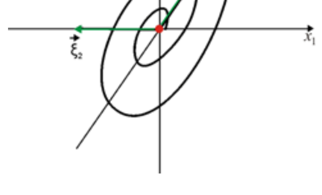
[1]



[2]



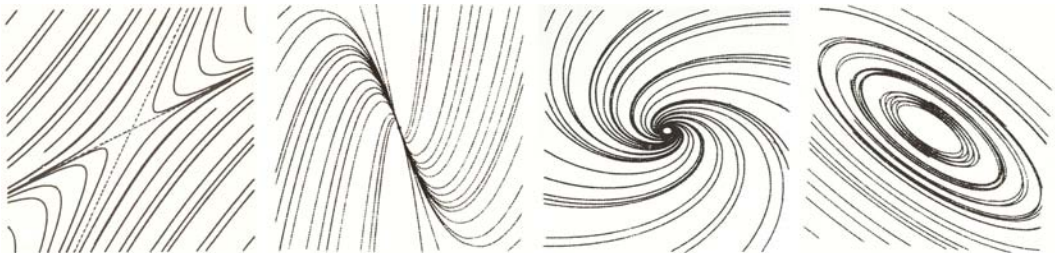
[3]



[4]

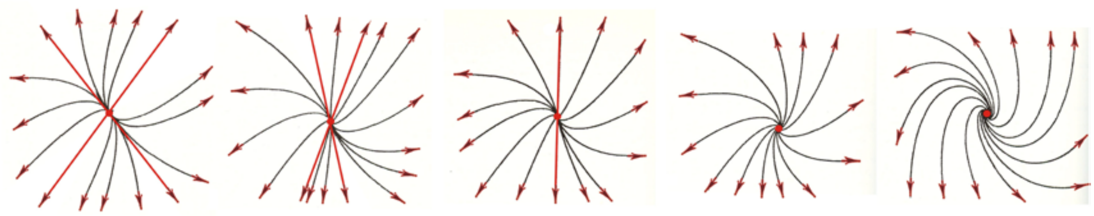
- Προσδιορίστε την αντιστοιχία των τροχιών που δίνονται στα ακόλουθα σχήματα με τα συστήματα των διαφορικών εξισώσεων που ορίζονται στο ευκλείδειο επίπεδο ως εξής:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 3x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 2x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}$$



- Κατασκευάστε τις τροχιές της δυναμικής που ορίζεται στο ευκλείδειο επίπεδο από το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου ρ και παρατηρείστε τη συνεχή παραμόρφωσή τους που οδηγεί από *κόμβο* σε *εστία*:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + \rho x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + (2+\rho/2)x_2 \end{cases} \qquad \rho \in \mathbb{R} .$$



$\rho = 0.5$ $\quad$ $\rho = 0.1$ $\quad$ $\rho = 0$ $\quad$ $\rho = -0.5$ $\quad$ $\rho = -2$

2. Τοπολογική ταξινόμηση των τροχιών της δισδιάστατης γραμμικής δυναμικής.

Θεωρούμε δυο γραμμικά δυναμικά συστήματα που η εξέλιξή τους στο ευκλείδειο επίπεδο διέπεται αντίστοιχα από τις γραμμικές εξισώσεις:

$$\dot{\mathrm{X}}(t) = \mathrm{A}_i \mathrm{X}(t) , \quad i = 1,2 ,$$

με αντίστοιχες μονοπαραμετρικές ομάδες:

$$\left\{ \mathfrak{g}_i^t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, t \in \mathbb{R} \right\} , \quad i = 1,2 .$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της τοπολογικής ισοδυναμίας, οι δυναμικές που ορίζονται από δυο δυναμικά συστήματα είναι τοπολογικά ισοδύναμες αν και μόνο αν υπάρχει ομοιομορφισμός:

$$h : \mathbb{R}^2 \rightleftarrows \mathbb{R}^2$$

τέτοιος ώστε:

$$h \circ \mathfrak{g}_1^t(x_0) = \mathfrak{g}_2^t \circ h(x_0) , \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^2 , \ \forall t \in \mathbb{R} .$$

Αν ο ομοιομορφισμός που αποκαθιστά την τοπολογική ισοδυναμία είναι γραμμικός ή αμφιδιαφορικός τότε αντίστοιχα λέμε ότι οι δυναμικές είναι γραμμικά ή διαφορικά ισοδύναμες.

- Επιλέξτε (*i*) γραμμικούς ισομορφισμούς, (*ii*) αμφιδιαφορομορφισμούς, (*iii*) ομοιομορφισμούς του ευκλείδειου επιπέδου και αφήστε τους να μετασχηματίσουν την εξελικτική ροή της δυναμικής:

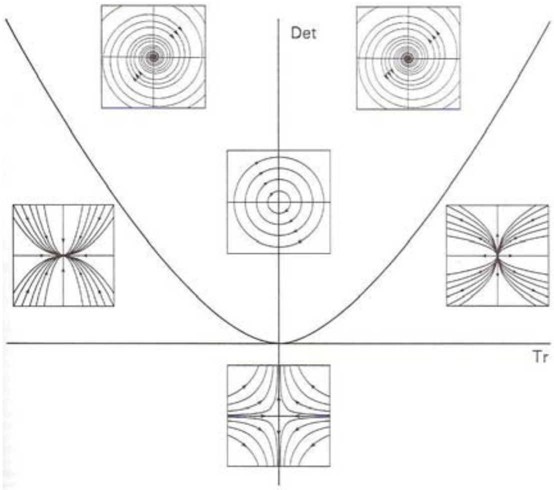
$$\mathfrak{g}^t(x_o) = e^t x_o , \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^2 , \ \forall t \in \mathbb{R} ,$$

ως εξής:

$$h^{-1} \circ \mathfrak{g}^t \circ h(x_0) , \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^2 , \ \forall t \in \mathbb{R} .$$

Ποιο είναι το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων που ορίζουν την εξελικτική ροή η οποία προκύπτει από αυτούς τους μετασχηματισμούς; Σχεδιάστε στο ευκλείδειο επίπεδο τις τροχιές της εξελικτικής ροής πριν και μετά το μετασχηματισμό της.

- Εντάξτε σε κλάσεις τοπολογικής ισοδυναμίας τις εξελικτικές ροές της γραμμικής δυναμικής των οποίων οι τροχιές παρατίθενται στον ακόλουθο πίνακα. Θα μπορούσατε, σε κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις να προσδιορίστε την έκφραση του αντίστοιχου συστήματος διαφορικών εξισώσεων;



- Πιστεύετε ότι οι γραμμικές δυναμικές που έχουν μεταξύ τους ίδιες ιδιοτιμές έχουν ίδια εξελικτική ροή και ίδιες τροχιές στο ευκλείδειο επίπεδο; Εντοπίστε τη διαφορά των τροχιών στο ευκλείδειο επίπεδο που προκύπτουν από τα συστήματα των γραμμικών εξισώσεων:

$$[\mathrm{I}]\ \begin{cases}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = -x_1\end{cases} \text{ και } \begin{cases}\dot{x}_1 = 2x_2\\ \dot{x}_2 = -2x_1\end{cases} \qquad [\mathrm{II}]\ \begin{cases}\dot{x}_1 = x_1\\ \dot{x}_2 = x_2\end{cases} \text{ και } \begin{cases}\dot{x}_1 = x_1 + x_2\\ \dot{x}_2 = x_2\end{cases}$$

- Είναι σημαντικό να κατανοήσουμε σε βάθος τα εξής θεωρήματα:

Θεώρημα. Οι εξελικτικές ροές που προκύπτουν από δυο γραμμικές δυναμικές στο ευκλείδειο επίπεδο είναι διαφορικά ισοδύναμες αν και μόνο αν είναι γραμμικά ισοδύναμες.

Σχόλιο. Το θεώρημα δεν. υπονοεί ότι κάθε αμφιδιαφορομορφισμός που αποκαθιστά τη διαφορική ισοδυναμία των εξελικτικών ροών είναι οπωσδήποτε γραμμικός ισομορφισμός. Όμως, θεωρώντας το διαφορικό ενός τέτοιου αμφιδιαφορομορφισμού θα μπορούσατε να αντιληφθείτε το σκεπτικό της απόδειξης. Πρόκειται για αποτέλεσμα που ισχύει και για την πολυδιάστατη γραμμική δυναμική.

Θεώρημα. Δυο γραμμικές δυναμικές με πραγματικές διακριτές ιδιοτιμές ορίζουν γραμμικά ισοδύναμες εξελικτικές ροές αν και μόνο αν έχουν ίδιες ιδιοτιμές.

Απόδειξη. Κάθε γραμμική δυναμική με απλές πραγματικές ιδιοτιμές αποσυντίθενται σε μονοδιάστατες γραμμικές δυναμικές. Συνεπώς, οι γραμμικές δυναμικές που έχουν ίδιες διακριτές πραγματικές ιδιοτιμές δε μπορούν παρά να αποσυντεθούν στις ίδιες μονοδιάστατες γραμμικές δυναμικές. Αντίστροφα, αν οι δυο γραμμικές δυναμικές είναι γραμμικά ισοδύναμες τότε οι τελεστές τους ταυτίζονται με αλλαγή βάσης άρα έχουν ίδιες ιδιοτιμές απλές ή όχι.

Παράδειγμα γραμμικά ισοδύναμων εξελικτικών ροών της γραμμικής δυναμικής στο ευκλείδειο επίπεδο.
(Άραγε, ποιοι είναι οι ισομορφισμοί ταύτισης των εξελικτικών ροών του παραδείγματος;)

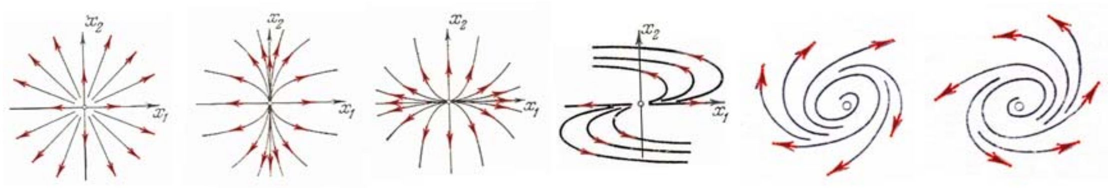
- **Κριτήρια τοπολογικής ταξινόμησης της δισδιάστατης γραμμικής δυναμικής.**

☑ Οι γραμμικές δυναμικές στο ευκλείδειο επίπεδο των οποίων οι ιδιοτιμές είναι θετικές ή έχουν θετικό πραγματικό μέρος ορίζουν τοπολογικά ισοδύναμες εξελικτικές ροές με αυτή της δυναμικής:

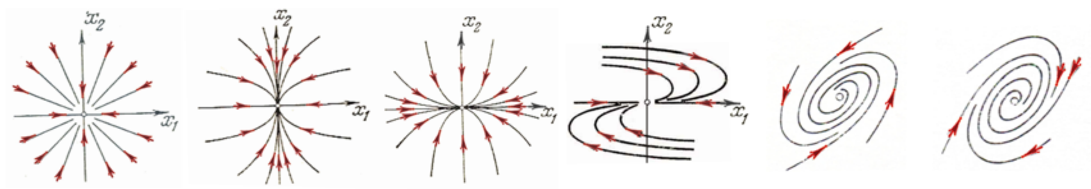
$$\dot{x} = x \,,\; x \in \mathbb{R}^2 .$$

☑ Οι γραμμικές δυναμικές στο ευκλείδειο επίπεδο των οποίων οι ιδιοτιμές είναι αρνητικές ή έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος ορίζουν τοπολογικά ισοδύναμες εξελικτικές ροές με αυτή της δυναμικής:

$$\dot{x} = -x \,,\; x \in \mathbb{R}^2 .$$



Τοπολογικά ισοδύναμες γραμμικές δυναμικές στο ευκλείδειο επίπεδο.
(Ιδιοτιμές με θετικό πραγματικό μέρος)



Τοπολογικά ισοδύναμες γραμμικές δυναμικές στο ευκλείδειο επίπεδο.
(Ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος)

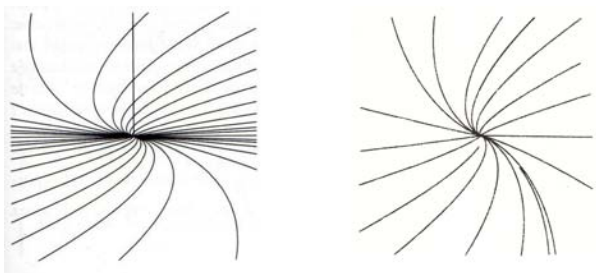
Σχόλιο. Το κριτήριο αυτό με μια γενικότερη διατύπωση ισχύει στους πολυδιάστατους ευκλείδειους χώρους. Η κατασκευή του ομοιομορφισμού που αποκαθιστά την τοπολογική ισοδυναμία βασίζεται στη χρήση της *συνάρτησης Liapounov* που διδάσκεται στο πλαίσιο του μαθήματος των Δυναμικών Συστημάτων.

- Αποφανθείτε για τη γραμμική και τοπολογική ισοδυναμία των εξελικτικών ροών της δυναμικής που ορίζεται από τα ακόλουθα συστήματα εξισώσεων και σχεδιάστε τις τροχιές τους:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = \;\; x_1 + x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = \;\; x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 \end{cases}$$

- Σχεδιάστε τις τροχιές της δυναμικής που ορίζεται στο ευκλείδειο επίπεδο από την κανονική μορφή *Jordan* του γραμμικού συστήματος διαφορικών εξισώσεων με διπλή πραγματική ιδιοτιμή: (Ι) $\lambda = 1/10$, (ΙΙ) $\lambda = -1/10$, και εντοπίστε τις διαφορές με την περίπτωση: $\lambda = 0$. Αποφανθείτε για την τοπολογική ισοδυναμία των εξελικτικών τους ροών.

- Στο επόμενο σχήμα δίνονται σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων του ευκλείδειου επιπέδου οι τροχιές δυο άγνωστων γραμμικών δυναμικών συστημάτων. Μπορείτε να αναγνωρίσετε τη φύση των ιδιοτιμών τους; Είναι εφικτός ο προσδιορισμός τους; Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου στα οποία η εφαπτομένη των τροχιών είναι κάθετη στην εμφανιζόμενη ιδιοδιεύθυνση;



- Αποφανθείτε για τη γραμμική και τοπολογική ισοδυναμία των εξελικτικών ροών της δυναμικής που ορίζεται από τα ακόλουθα συστήματα εξισώσεων και σχεδιάστε τις τροχιές τους:

[1] $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 \\ 2\dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$

[2] $\begin{cases} 2\dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 \\ 2\dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ 4\dot{x}_2 = x_1 + 4x_2 \end{cases}$

[3] $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$ $\begin{cases} 2\dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 \\ 2\dot{x}_2 = 2x_1 - x_2 \end{cases}$

- Αποφανθείτε για τη γραμμική και τοπολογική ισοδυναμία των εξελικτικών ροών της δυναμικής που ορίζεται από τα ακόλουθα συστήματα εξισώσεων και σχεδιάστε τις τροχιές τους:

[I] $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2 \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ 9\dot{x}_2 = -8x_1 + 18x_2 \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ 9\dot{x}_2 = -10x_1 + 18x_2 \end{cases}$

II] $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$ $\begin{cases} 10\dot{x}_1 = 10x_1 + 9x_2 \\ 10\dot{x}_2 = 9x_1 + 10x_2 \end{cases}$ $\begin{cases} 10\dot{x}_1 = 10x_1 + 11x_2 \\ 10\dot{x}_2 = 11x_1 + 10x_2 \end{cases}$

- Προσδιορίστε τις τιμές της παραμέτρου α στις οποίες η εξελικτική ροή του καθενός από τα ακόλουθα συστήματα εξισώσεων αλλάζει τοπολογικό τύπο:

[I] $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = \alpha x_2 \end{cases}$ [II] $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \alpha x_1 \end{cases}$.

- Διαπιστώστε ότι κάθε γραμμική διαφορική εξίσωση $2^{ης}$ τάξης με σταθερούς συντελεστές:

$$\ddot{x} = ax + b\dot{x}$$

ανάγεται στο ακόλουθο σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = ax_1 + bx_2 \end{cases}$$

  - Για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων *a* και *b*, αποφανθείτε για τη γραμμική και τοπολογική ισοδυναμία των αντίστοιχων εξελικτικών ροών στο ευκλείδειο επίπεδο.
  - Για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων *a* και *b*, αποφανθείτε για τη γραμμική και τοπολογική ισοδυναμία, ή μη, της δυναμικής που ορίζεται στο ευκλείδειο επίπεδο από την εξίσωση $\ddot{x}=a\dot{x}+bx$ με εκείνη που ορίζεται από την εξίσωση $\ddot{x}=x$ ή την εξίσωση $\ddot{x}=-x$.

- Αποφανθείτε για την ορθότητα ή όχι των ακόλουθων ισχυρισμών που αφορούν στη γραμμική δυναμική που ορίζεται στο ευκλείδειο επίπεδο ή στην πραγματική ευθεία:

1. Οι γραμμικές δυναμικές που έχουν ίδιες ιδιοτιμές είναι:
(*i*) γραμμικά, (*ii*) διαφορικά, (*iii*) τοπολογικά ισοδύναμες.

2. Οι τοπολογικά ισοδύναμες γραμμικές δυναμικές είναι διαφορικά ισοδύναμες.

3. Οι διαφορικά ισοδύναμες γραμμικές δυναμικές είναι γραμμικά ισοδύναμες.

4. Οι γραμμικές δυναμικές που έχουν καθαρά φανταστικές ιδιοτιμές είναι:
(*i*) γραμμικά, (*ii*) διαφορικά, (*iii*) τοπολογικά ισοδύναμες.

- Εξετάστε και αποδείξτε τη (*i*) γραμμική, (*ii*) διαφορική, (*iii*) τοπολογική ισοδυναμία, ή μη, της δυναμικής που ορίζεται στην πραγματική ευθεία από τη διαφορική εξίσωση $\dot{x}=x$ με εκείνη που ορίζεται από τη διαφορική εξίσωση $\dot{x}=2x$.

- Εξετάστε και αποδείξτε τη (*i*) γραμμική, (*ii*) διαφορική, (*iii*) τοπολογική ισοδυναμία, ή μη, της δυναμικής που ορίζεται στην πραγματική ευθεία από τη διαφορική εξίσωση $\dot{x}=x$ με εκείνη που ορίζεται από τη διαφορική εξίσωση $\dot{x}=x+1$.

- Εξετάστε και αποδείξτε τη (*i*) γραμμική, (*ii*) διαφορική, (*iii*) τοπολογική ισοδυναμία, ή μη, της δυναμικής που ορίζεται στο ευκλείδειο επίπεδο από τη διαφορική εξίσωση $\ddot{x}=x$ με εκείνη που ορίζεται από τη διαφορική εξίσωση $\ddot{x}=2x$.

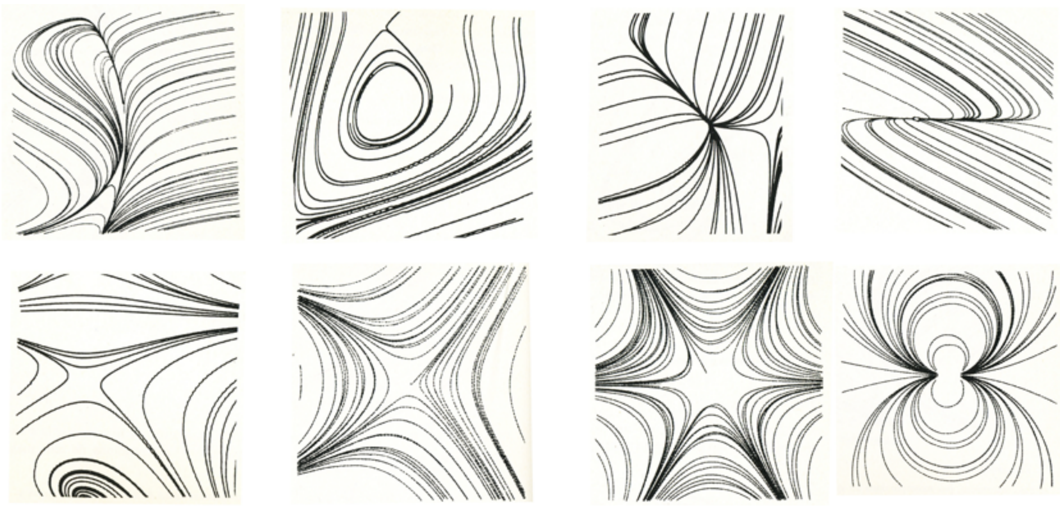
- Εξετάστε και αποδείξτε τη (*i*) γραμμική, (*ii*) διαφορική, (*iii*) τοπολογική ισοδυναμία, ή μη, της δυναμικής που ορίζεται στο ευκλείδειο επίπεδο από τη διαφορική εξίσωση $\ddot{x}=x$ με εκείνη που ορίζεται από τη διαφορική εξίσωση $\ddot{x}=x+1$.

- Εξετάστε και αποδείξτε τη (*i*) γραμμική, (*ii*) διαφορική, (*iii*) τοπολογική ισοδυναμία, ή μη, της δυναμικής που ορίζεται στο ευκλείδειο επίπεδο από τη διαφορική εξίσωση $\ddot{x}=x$ με εκείνη που ορίζεται από τη διαφορική εξίσωση $\ddot{x}=a\dot{x}+bx$ για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων a και b.

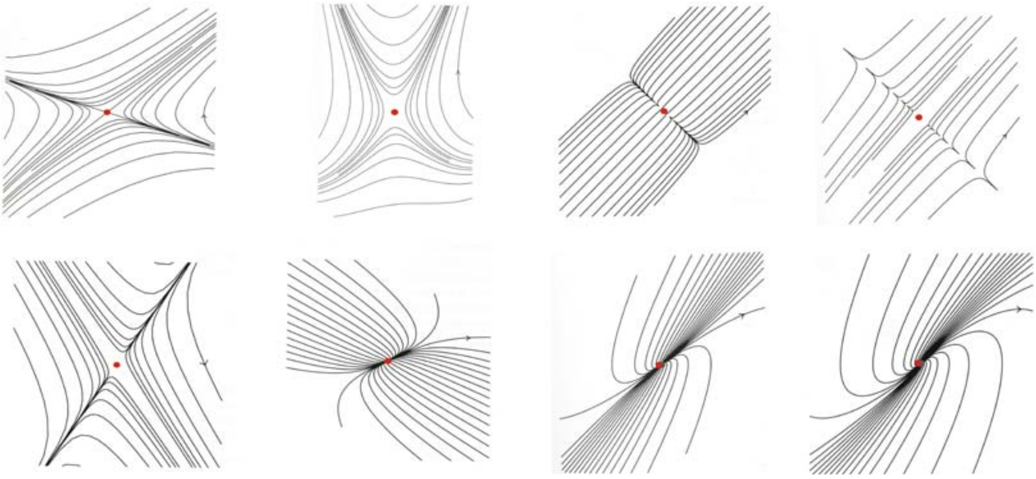
3. Αναγνώριση των τροχιών της δισδιάστατης γραμμικής δυναμικής.

- Στο επόμενο σχήμα δίνονται οι τροχιές τριών δισδιάστατων δυναμικών συστημάτων από τα οποία μόνο ένα είναι γραμμικό. Μπορείτε να το αναγνωρίσετε;

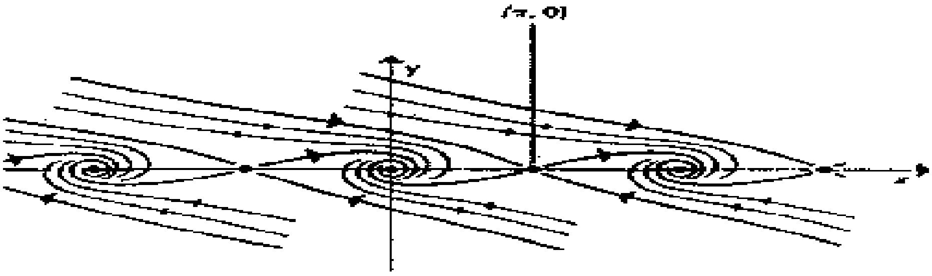
- Θα μπορούσατε να αποφανθείτε για το αν οι τροχιές που εμφανίζονται στα ακόλουθα σχήματα διέπονται από γραμμική δυναμική;

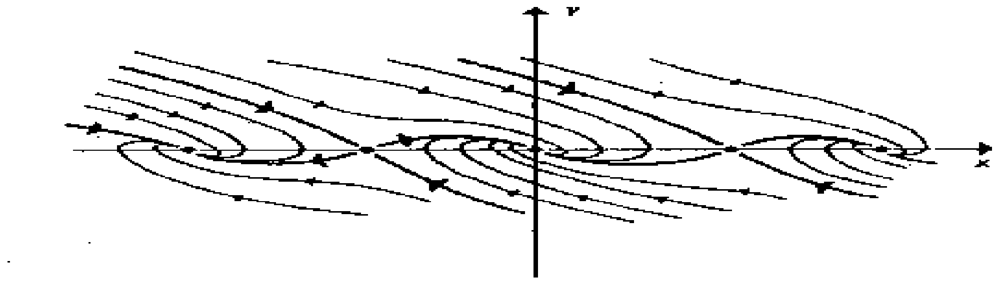


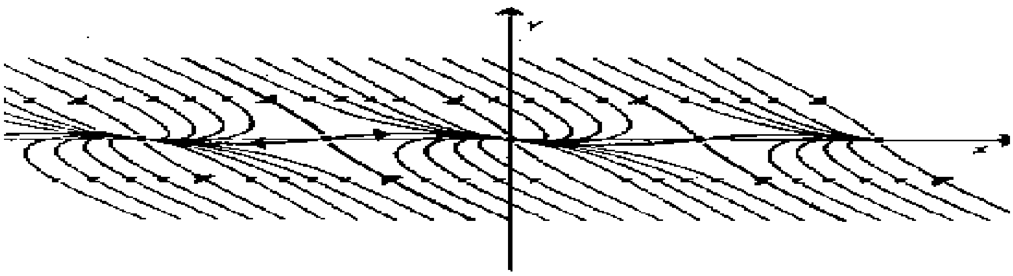
- Οι τροχιές που παρατίθενται στα ακόλουθα σχήματα διανύονται με ταχύτητες αρκετά ομαλές χωρίς απότομες μεταβολές κατά την εξέλιξη, μπορείτε να τις συμπληρώσετε και να εντοπίσετε αυτές που διέπονται από γραμμική δυναμική;



- Στα ακόλουθα σχήματα εμφανίζονται τροχιές μιας δυναμικής που ορίζεται στο ευκλείδειο επίπεδο. Μπορείτε να αποφανθείτε για το αν πρόκειται για γραμμική δυναμική; Αν ναι, εντοπίστε τους διαφορετικούς τοπολογικούς τύπους τροχιών που εξελίσσονται στην περιοχή των καταστάσεων ισορροπίας και αποφανθείτε για τη φύση των ιδιοτιμών τους.







4. Τροχιές της τρισδιάστατης γραμμικής δυναμικής.

Η τρισδιάστατη γραμμική δυναμική εκφράζεται στον ευκλείδειο χώρο με ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς πραγματικούς συντελεστές ως εξής:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

και για κάθε δεδομένη αρχική κατάσταση η λύση του εκφράζεται ως απεικόνιση του χρονικού άξονα στο χώρο των καταστάσεων που αναπαρίσταται στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$:

$$\phi_{x_o} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \phi(0) = x_o \in \mathbb{R}^3 .$$

Στον τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο ορίζεται ο γραμμικός μετασχηματισμός:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

που συμβολίζεται ως εξής:

$$\dot{\mathrm{X}} = \mathrm{A}\,\mathrm{X} .$$

Οι ιδιοτιμές κάθε γραμμικού μετασχηματισμού διατηρούνται αναλλοίωτες κατά την αλλαγή βάσης και ταυτίζονται με τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης η οποία, σε αυτή τη διάσταση, είναι κυβική και κατά συνέπεια έχει τρεις πραγματικές ρίζες ή μια πραγματική και δυο συζυγείς μιγαδικές ρίζες:

$$\mathfrak{det}\left(\mathrm{A} - \lambda \mathbf{I}_{\mathbb{R}^3}\right) = 0 .$$

☑ Η πιο απλή εκδοχή προκύπτει όταν όλες οι ιδιοτιμές είναι απλές πραγματικές, οπότε ο ευκλείδειος χώρος διασπάται σε ευθύ άθροισμα μονοδιάστατων ιδιόχωρων:

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{E}_{\lambda_1} \oplus \mathrm{E}_{\lambda_2} \oplus \mathrm{E}_{\lambda_3}$$

όπου

$$\mathrm{E}_{\lambda_i} = \left\{ \vec{\xi} \in \mathbb{R}^3 \,/\, \mathrm{A}\,\vec{\xi} = \lambda_i \vec{\xi} \right\} .$$

Η συγκρότηση βάσης ιδιοδιανυσμάτων είναι λοιπόν εφικτή και σε μια τέτοια βάση ο πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού είναι διαγώνιος:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} .$$

Στις γραμμικές συντεταγμένες που ορίζονται από αυτή τη βάση, το σύστημα των εξισώσεων διατυπώνεται ως εξής:

$$\dot{y}_i(t) = \lambda_i\, y_i(t) , \quad i = 1,2,3,$$

και προκύπτουν οι λύσεις:

$$y_i(t) = c_i\, e^{\lambda_i t} , \quad c_i \in \mathbb{R} , \quad i = 1,2,3 .$$

Επανερχόμενοι στις καρτεσιανές συντεταγμένες προσδιορίζεται η ζητούμενη έκφραση των λύσεων:

$$x_i(t) = \dots , \quad i = 1,2,3 .$$

Η μονοπαραμετρική ομάδα που δρα στον τρισδιάστατο χώρο καταστάσεων διασπάται σε ευθύ άθροισμα τριών μονοδιάστατων μονοπαραμετρικών ομάδων και η εξελικτική ροή καθορίζεται από τα πρόσημα των αντίστοιχων τριών πραγματικών απλών ιδιοτιμών.

- Αναζητείστε ένα σύστημα τριών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων και σχεδιάστε τις τροχιές του στον τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο γνωρίζοντας ότι οι λύσεις του είναι της μορφής:

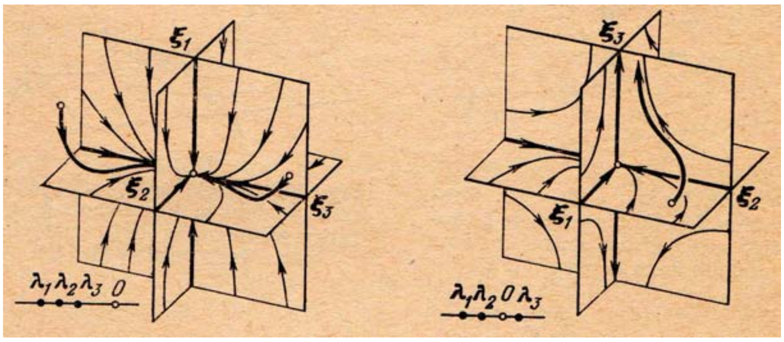
$$x_i(t) = c_i\, e^{\lambda_i t}\,,\quad c_i \in \mathbb{R}\,,\quad i = 1,2,3\,,$$

όπου

$$\text{i)}\;\; \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0\,,\quad \text{ii)}\;\; 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3\,,$$

$$\text{iii)}\;\; \lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3\,,\quad \text{iv)}\;\; \lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3\,,$$

$$\text{v)}\;\; \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 = 0\,,\quad \text{vi)}\;\; 0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3\,,\quad \text{vii)}\;\; \lambda_1 < \lambda_2 = 0 < \lambda_3\,.$$



☑ Η εκδοχή δυο μιγαδικών ιδιοτιμών και μιας πραγματικής ιδιοτιμής:

$$\alpha \pm i\omega \in \mathbb{C} \quad \text{και} \quad \lambda_o \in \mathbb{R}$$

αντιμετωπίζεται με τη διαδικασία *Jordan* που οδηγεί στη συγκρότηση μιας βάσης του τρισδιάστατου ευκλείδειου χώρου αποτελούμενης από ένα ιδιοδιάνυσμα και δυο κατάλληλα επιλεγμένα διανύσματα στην οποία ο γραμμικός μετασχηματισμός εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\omega & 0 \\ \omega & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

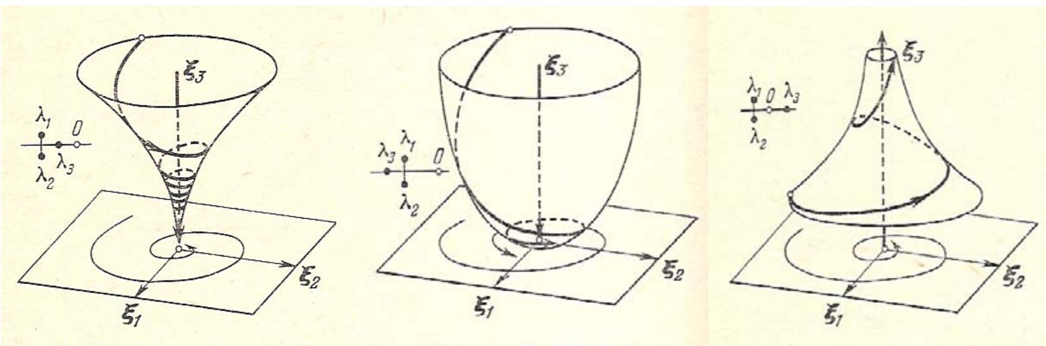
Στις γραμμικές συντεταγμένες που ορίζονται από αυτή τη βάση, το σύστημα των εξισώσεων διατυπώνεται ως εξής:

$$\left|\begin{array}{l} \dot{y}_1 = \alpha\, y_1 - \omega\, y_2 \\ \dot{y}_2 = \omega\, y_1 + \alpha\, y_2 \\ \dot{y}_3 = \lambda_o\, y_3 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} y_1(t) = r_o\, e^{\alpha t} \cos(\omega t + \theta_o) \\ y_2(t) = r_o\, e^{\alpha t} \sin(\omega t + \theta_o) \\ y_3(t) = c\, e^{\lambda_o t} \end{array}\right.$$

και προκύπτουν οι λύσεις:

$$x_i(t) = \ldots\,,\quad i = 1,2,3\,.$$

- Διαπιστώστε ότι στην περίπτωση αυτή εμφανίζονται οι εξής εκδοχές εξελικτικής ροής στον τρισδιάστατο χώρο καταστάσεων και οι αντίστοιχες τους με αντίθετη φορά ροής:



☑ Η εκδοχή μιας διπλής και μιας απλής πραγματικής ιδιοτιμής οδηγεί στην εμφάνιση ενός δισδιάστατου και ενός μονοδιάστατου ιδιόχωρου ή στην εμφάνιση δυο μονοδιάστατων ιδιόχωρων οπότε, συγκροτείται μια βάση αποτελούμενη από δυο ιδιοδιανύσματα και ένα κατάλληλα επιλεγμένο διάνυσμα στην οποία ο γραμμικός μετασχηματισμός εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Στις γραμμικές συντεταγμένες που ορίζονται από αυτή τη βάση, το σύστημα των εξισώσεων διατυπώνεται ως εξής:

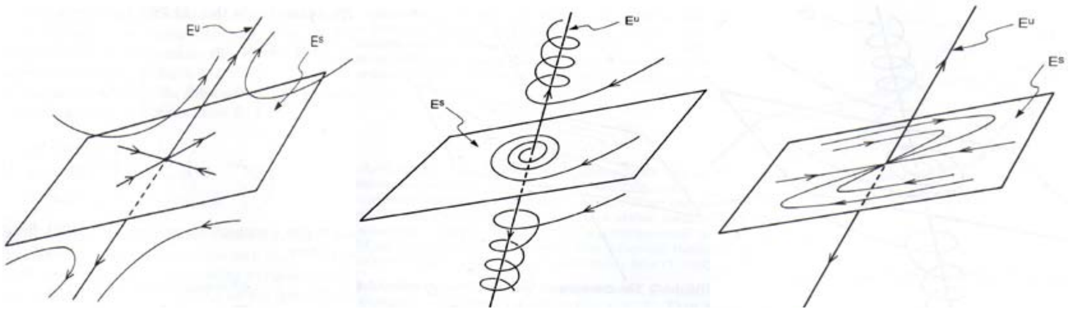
$$\left| \begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda\, y_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 &= \lambda\, y_2 \\ \dot{y}_3 &= \lambda_o y_3 \end{aligned} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} y_1(t) &= (c_1 t + c_2)\, e^{\lambda t} \\ y_2(t) &= c_1 e^{\lambda t} \\ y_3(t) &= c_3 e^{\lambda_o t} \end{aligned} \right.$$

και προκύπτουν οι λύσεις:

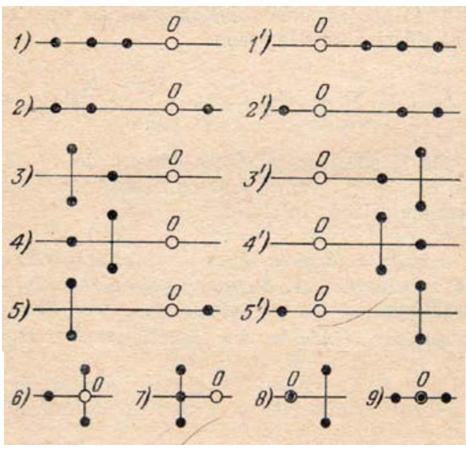
$$x_i(t) = \dots, \quad i = 1,2,3\,.$$

- Στα ακόλουθα σχήματα εμφανίζεται η διαδικασία σταδιακής κατασκευής των τροχιών της εξελικτικής ροής τριών γραμμικών περιπτώσεων στον τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο. Μπορείτε να αναγνωρίσετε τη φύση των αντίστοιχων ιδιοτιμών και να ερμηνεύσετε το ότι οι ιδιόχωροι διατηρούνται αναλλοίωτοι από την εξελικτική ροή; Επιχειρείστε να κατασκευάσετε τις τροχιές της δυναμικής που ορίζεται στον τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο από τα συστήματα εξισώσεων:

$$\left| \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 \\ \dot{x}_3 &= 2x_3 \end{aligned} \right. \qquad \left| \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_3 &= 2x_3 \end{aligned} \right. \qquad \left| \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2 \\ \dot{x}_3 &= 2x_3 \end{aligned} \right.$$



- Στον ακόλουθο πίνακα επιχειρούμε να ταξινομήσουμε ανάλογα με τη φύση των ιδιοτιμών τη συμπεριφορά της γραμμικής δυναμικής στον τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο. Δώστε τις αντίστοιχες κανονικές εκφράσεις των συστημάτων διαφορικών εξισώσεων που ορίζουν αυτές τις δυναμικές και σχεδιάστε συνοπτικά τη μορφή των τροχιών της εξελικτικής τους ροής στην περιοχή της κατάστασης ισορροπίας. Ο πίνακας αυτός είναι πλήρης;



- **Κριτήρια τοπολογικής ταξινόμησης της τρισδιάστατης γραμμικής δυναμικής.**

☑ Δυο γραμμικές δυναμικές στον τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο που δεν έχουν μηδενικές ιδιοτιμές ή ιδιοτιμές με μηδενικό πραγματικό μέρος ορίζουν τοπολογικά ισοδύναμες εξελικτικές ροές αν και μόνο αν έχουν ίδιο πλήθος θετικών ιδιοτιμών και ίδιο πλήθος αρνητικών ιδιοτιμών ή γενικότερα έχουν ίδιο πλήθος ιδιοτιμών με θετικό πραγματικό μέρος και ίδιο πλήθος ιδιοτιμών με αρνητικό μέρος.

☑ Οι γραμμικές δυναμικές στον τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο των οποίων οι ιδιοτιμές έχουν θετικό πραγματικό μέρος ορίζουν τοπολογικά ισοδύναμες εξελικτικές ροές με αυτή της δυναμικής:

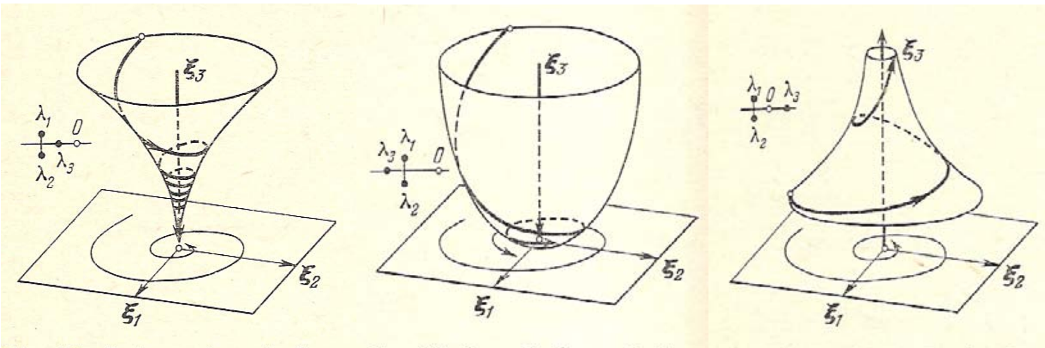
$$\dot{x} = x\,,\ x \in \mathbb{R}^3\,.$$

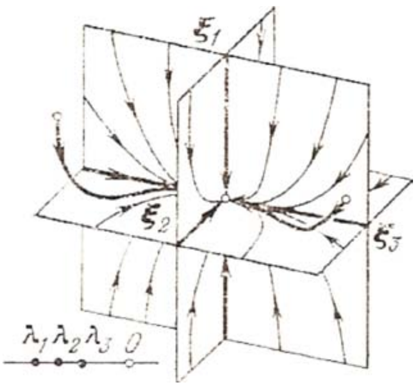
☑ Οι γραμμικές δυναμικές στον τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο των οποίων οι ιδιοτιμές έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος ορίζουν τοπολογικά ισοδύναμες εξελικτικές ροές με αυτή της γραμμικής δυναμικής:

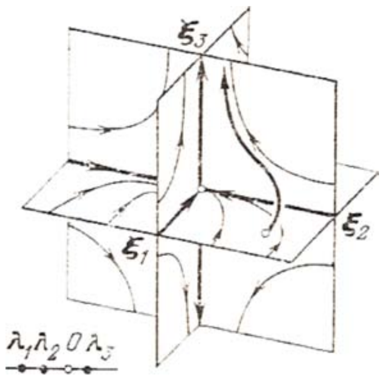
$$\dot{x} = -x\,,\ x \in \mathbb{R}^3\,.$$

Σχόλιο. Τα κριτήρια αυτά της τοπολογικής ισοδυναμίας των εξελικτικών ροών της γραμμικής δυναμικής ισχύουν γενικά στους πολυδιάστατους ευκλείδειους χώρους. Η κατασκευή του ομοιομορφισμού που αποκαθιστά την τοπολογική ισοδυναμία βασίζεται στη χρήση της *συνάρτησης Liapounov* που διδάσκεται στο πλαίσιο του μαθήματος των Δυναμικών Συστημάτων.

- Αποφανθείτε για το ποιες από τις γραμμικές δυναμικές των οποίων οι τροχιές δίνονται στα ακόλουθα σχήματα ορίζουν τοπολογικά ισοδύναμες εξελικτικές ροές στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$:







ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:

Ordinary Differential Equations, Vladimir Arnold, Cambridge MIT Press, 1973.

Differential Equations & Dynamical Systems, M.Hirsch, S. Smale, R.Devaney, Els. Ac. Press, 2003.

Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Stephen Wiggins, Springer, 2003.

Differential Dynamical Systems, James D. Meiss, Siam, 2007.