ΜΑΘΗΜΑ 4^{o} : Η ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ Η ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ

Ο *Augustin Louis Cauchy* (1789-1857), στα μαθήματα που δίδασκε στην *Ecole Polytechnique* στο Παρίσι, δηλώνει ότι πρωταρχικό μέλημά μας δεν πρέπει να είναι ο προσδιορισμός της γενικής λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης, αλλά της λύσης εκείνης που πληροί μια δεδομένη αρχική συνθήκη. Έτσι, τέθηκε το ζήτημα που σήμερα είναι γνωστό ως ***Πρόβλημα του Cauchy***:

- *Με δεδομένη μια συνάρτηση*

$$f : \mathfrak{U} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

ορίζεται η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t)$$

και για κάθε δεδομένο σημείο $(x_o, t_o) \in \mathfrak{U}$ *τίθεται ως ζητούμενο η ύπαρξη και η μοναδικότητα λύσης της οποίας το γράφημα διέρχεται από αυτό το σημείο, δηλαδή που πληροί τη συνθήκη* $x(t_o) = x_o$.

Έτσι, η μελέτη μιας διαφορικής εξίσωσης δεν περιορίζεται στην αναζήτηση μιας παράγουσας, όπως απαιτούσε η έως τότε επικρατούσα αντίληψη, αλλά στον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος. Ο *Cauchy*, αναπτύσσοντας τις απειροστικές μεθόδους, απαντά στο πρόβλημά του υποθέτοντας ότι η συνάρτηση που υπεισέρχεται στη διαφορική εξίσωση και η παράγωγός της είναι συνεχείς και φραγμένες και έτσι αποδεικνύει την ύπαρξη λύσης μέσα από μια διαδικασία οριακής σύγκλισης. Στην απόδειξή του χρησιμοποιεί μια συνθήκη που απορρέει από το θεώρημα των *πεπερασμένων αυξήσεων* που ο ίδιος είχε δημιουργήσει και η οποία έμελε να γίνει γνωστή ως *συνθήκη του Lipschitz*. Ο *Rudolf Lipschitz* (1832-1903), ακολουθώντας το σκεπτικό του *Cauchy*, αντικαθιστά την υπόθεση της παραγωγισιμότητας της συνάρτησης του ρυθμού μεταβολής με την ασθενέστερη συνθήκη που φέρει το όνομά του. Ξέρουμε πλέον ότι η συνθήκη *Lipschitz* διασφαλίζει την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της λύσης στο πρόβλημα του *Cauchy*/.

Η θεωρία των διαφορικών εξισώσεων γίνεται τώρα πιο φιλόδοξη και η πορεία της καθορίζεται από τις μελέτες των *Lazarus Fuchs* (1833-1902), *Paul Painlevé* (1863-1933), *Emile Picard* (1856-1941) και του *Henri Poincaré* (1854-1912), ο οποίος επιδιώκοντας να δώσει απάντηση στο πρόβλημα της ευστάθειας του ηλιακού συστήματος, θέτει τις βάσεις της θεωρίας των *Δυναμικών Συστημάτων*.

Οι αντιξοότητες προσδιορισμού εκπεφρασμένων λύσεων των διαφορικών εξισώσεων που υπεισέρχονται στα προβλήματα της κίνησης των ουρανίων σωμάτων τον οδηγούν στη χάραξη μιας πορείας για την ποιοτική μελέτη τους. Ο στόχος του πλέον εστιάζεται, καταρχάς στη μελέτη των ιδιομορφιών των διαφορικών εξισώσεων και κατόπιν στην ασυμπτωτική συμπεριφορά τους και στην ευαισθησία τους απέναντι στις διαταραχές των αρχικών συνθηκών. Η θεωρία των *Cauchy* και *Lipschitz* είναι ανεπαρκής για την επίτευξη αυτού του στόχου που απαιτεί απαντήσεις καθολικής και όχι απλά τοπικής φύσης ως προς τη συμπεριφορά των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων κατά τη μεταβολή των αρχικών συνθηκών ή των τιμών των παραμέτρων. Οι τοπολογικές και οι γεωμετρικές ιδιότητες των συναρτησιακών χώρων κατέχουν πλέον εξέχοντα ρόλο στην επίτευξη αυτού του στόχου, με επίκεντρο το θεώρημα του *σταθερού σημείου* όπως το επεξεργάστηκε στο πλαίσιο των διαφορικών εξισώσεων ο *Picard* και το εφάρμοσε επιτυχώς ο *Ernst Lindelöf* (1870-1946). Έτσι, το θεώρημα της ύπαρξης και μοναδικότητας των *Cauchy-Lipschitz* αναφέρεται συχνά και ως θεώρημα των *Picard-Lindelöf*.

Αυτή η ντετερμινιστική αντίληψη της προβλεψιμότητας κυριάρχησε κατά τη διάρκεια του 19^{ου} αιώνα και, εξάπτοντας την περιέργεια της επιστημονικής έρευνας, λειτούργησε εποικοδομητικά για την ταξινόμηση, ερμηνεία και κατανόηση ενός τεράστιου πλήθους αστρονομικών, φυσικών, χημικών, βιολογικών φαινομένων. Χρειάζεται όμως να διευκρινίσουμε τη διαφορά του *μαθηματικού από* το *φυσικό ντετερμινισμό*. Ο μαθηματικός ντετερμινισμός δηλώνει ότι κάθε επαναλαμβανόμενο πείραμα με ακριβώς ίδιες αρχικές και ίδιες οριακές συνθήκες οφείλει να δώσει ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα και τότε το μαθηματικό πρότυπο του φυσικού φαινομένου που εκφράζεται με μια διαφορική εξίσωση χαρακτηρίζεται ως ντετερμινιστικό εφόσον πληρούται η συνθήκη *Cauchy-Lipschitz*. Ο φυσικός ντετερμινισμός δηλώνει ότι κάθε επαναλαμβανόμενο πείραμα με σχεδόν ίδιες αρχικές και σχεδόν ίδιες οριακές συνθήκες οφείλει να δώσει σχεδόν το ίδιο αποτέλεσμα. Συνεπώς, η *ευστάθεια* του φαινομένου αποτελεί ουσιώδες χαρακτηριστικό του φυσικού ντετερμινισμού και εδώ υπεισέρχεται ο *χρόνος απόκλισης* των αποτελεσμάτων κατά την επανάληψη ενός πειράματος.

1. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ CAUCHY ΚΑΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ PÉANO

- **Θεώρημα Péano:** Με δεδομένο $(t_o, x_o) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ και εφόσον η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σύνολο
$$[t_o - h,\ t_o + h]\times \overline{S}_{(x_o,\rho)} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,$$
τότε το πρόβλημα Cauchy διαθέτει λύση:
$$x : [t_o - \alpha, t_o + \alpha] \to \mathbb{R}^n,\quad x(t_o) = x_o,$$
όπου
$$\alpha = \min\{h,\ \rho / M\}$$
και
$$M \geq \max\left\{\| f(t,x)\| \in \mathbb{R} \,/\, (t,x) \in [t_o - h, t_o + h]\times \overline{S}_{(x_o,\rho)}\right\},\quad M > 0.$$

- **Πόρισμα:** Με δεδομένη μια συνεχή συνάρτηση
$$f : U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
στο ανοιχτό σύνολο U και ένα συμπαγές υποσύνολο $K \subset U$, τότε υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $(t_o, x_o) \in K$, το πρόβλημα Cauchy δέχεται λύση στο διάστημα $[t_o - \alpha, t_o + \alpha]$.

Σχόλια:

- Αν η f δεν είναι συνεχής τότε δεν διασφαλίζεται λύση στο πρόβλημα Cauchy.

- Αν η f είναι συνεχής και φραγμένη στο $[t_o - h, t_o + h]\times\mathbb{R}^n$ τότε το θεώρημα Péano ισχύει για $\alpha = h$.

- Η συνέχεια της f και μόνο αυτή δεν διασφαλίζει μοναδικότητα της λύσης που δίνει το θεώρημα Péano.

<u>Αποδεικτική διαδικασία (Tonelli):</u>

Συντάξτε αναλυτικά τα στάδια της αποδεικτικής διαδικασίας βασιζόμενοι στα στοιχεία που δόθηκαν στο μάθημα.

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής τότε το πρόβλημα του Cauchy ισοδυναμεί με την ολοκληρωτική εξίσωση:
$$x(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} f(s, x(s))\, ds.$$

2. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων:
$$x_n(t) = x_o \quad \text{όταν} \quad t \in [t_o,\ t_o + \alpha / n]$$
$$x_n(t) = x_o + \int_{t_o}^{t-\alpha/n} f(s, x_n(s))\, ds \quad \text{όταν} \quad t \in [t_o + k\alpha/n,\ t_o + (k+1)\alpha/n],\quad k = 1,\dots,n-1,$$
και επαληθεύοντας επαγωγικά στο $k,\ k < n$, ότι για κάθε $t, t' \in [t_o + k\alpha/n,\ t_o + (k+1)\alpha/n]$ ισχύει:
$$\| x_n(t) - x_o \| \leq M(k+1)\alpha/n \leq \rho$$
διαπιστώνουμε ότι οι όροι της είναι καλά ορισμένοι στο πεδίο ορισμού της f.

3. Διαπιστώνουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $t, t' \in [t_o + k\alpha/n,\, t_o + (k+1)\alpha/n]$ ισχύει:

$$\| x_n(t) - x_n(t') \| \;\leq\; M\,|t - t'|$$

και κατόπιν αποδεικνύουμε ότι η ανισότητα αυτή ισχύει για κάθε $t, t' \in [t_o,\, t_o + \alpha]$.

4. Συμπεραίνουμε ότι η οικογένεια των συναρτήσεων

$$\mathcal{A} = \{ x_n(t) \,/\, t \in [t_o,\, t_o + \alpha],\, n \in \mathbb{N} \}$$

είναι ισοσυνεχής και λαμβάνοντας υπόψη ότι η ακολουθία είναι φραγμένη:

$$\| x_n(t) - x_o \| \;\leq\; \rho\,, \quad \forall t \in [t_o,\, t_o + \alpha]\,,$$

μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Ascoli-Arzéla.

5. Το θεώρημα Ascoli-Arzéla διασφαλίζει τη συμπάγεια της κλειστότητας του συνόλου $\mathcal{A}$ στο συναρτησιακό χώρο των συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται στο $[t_o, t_o + \alpha]$ με τιμές στο $\mathbb{R}^n$, συνεπώς υφίσταται συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{n_k}(t))_{k\in\mathbb{N}}$ και το όριό της είναι μια συνεχής συνάρτηση

$$x : [t_o,\, t_o + \alpha] \to \mathbb{R}^n$$

που πληροί τη συνθήκη:

$$\| x(t) - x_o \| \;\leq\; \rho\,, \quad \forall t \in [t_o,\, t_o + \alpha]\,.$$

6. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο συμπαγές σύνολο $[t_o, t_o + h] \times \overline{S}_{(x_o,\rho)}$ και ότι η υπακολουθία $(x_{n_k}(t))_{k\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνεχή συνάρτηση $x(t)$, διαπιστώνουμε ότι:

$$\int_{t_o}^{t} f(s, x(s))\,ds = \operatorname*{Lim}_{k\to\infty} \int_{t_o}^{t} f(s, x_{n_k}(s))\,ds\,.$$

7. Από τη σχέση

$$x_{n_k}(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} f(s, x_{n_k}(s))\,ds - \int_{t-\alpha/n_k}^{t} f(s, x_{n_k}(s))\,ds\,,$$

λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\left| \int_{t_o-\alpha/n_k}^{t} f(s, x_{n_k}(s))\,ds \right| \leq M\alpha / n_k$$

και περνώντας στο όριο για $k \to \infty$, προκύπτει:

$$x(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} f(s, x(s))\,ds\,, \quad \forall t \in [t_o,\, t_o + \alpha]\,.$$

8. Συνοψίζοντας, έχουμε αποδώσει στην εξίσωση

$$\dot{x}(t) = f(t, x)\,, \quad x(t_o) = x_o\,,$$

μια λύση:

$$x^+ : [t_o,\, t_o + \alpha] \to \mathbb{R}^n\,, \quad x^+(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} f(s, x^+(s))\,ds\,, \quad \forall t \in [t_o,\, t_o + \alpha]\,,$$

και συμμετρικοποιώντας αποδίδεται στην εξίσωση:

$$\dot{x}(t) = -f(-t, x)\,, \quad x(-t_o) = x_o\,,$$

μια λύση:

$$x^- : [t_o - \alpha,\, t_o] \to \mathbb{R}^n\,, \quad x^-(t') = x_o + \int_{t_o}^{t'} f(s', x^-(s'))\,ds'\,, \quad \forall t' \in [t_o - \alpha,\, t_o]\,.$$

Συμπέρασμα: Η λύση που προσφέρει το θεώρημα Péano στο πρόβλημα του Cauchy ορίζεται από τη συνάρτηση

$$x:[t_o-\alpha,\ t_o+\alpha]\to\mathbb{R}^n$$

όπου

$$x(t)\equiv x^-(t)\quad \text{όταν}\quad t\in[t_o-\alpha,\ t_o]\qquad \text{και}\qquad x(t)\equiv x^+(t)\quad \text{όταν}\quad t\in[t_o,\ t_o+\alpha]\,.$$

9. Το πόρισμα του θεωρήματος Péano αποδεικνύεται θεωρώντας ένα συμπαγές σύνολο K' τέτοιο ώστε:

$$K\subset \overset{\circ}{K'}\subset K'\subset U$$

και $M>0$ τέτοιο ώστε:

$$M\geq \max\left\{\|f(t,x)\|\in\mathbb{R}\,/\,(t,x)\in K'\right\}.$$

Η απόσταση του K από το συμπλήρωμα του $\overset{\circ}{K'}$ μέσα στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^{n+1}$ ορίζεται ως εξής:

$$\delta=\inf\left\{d\big((t,x),(t',x')\big)\,/\,(t,x)\in K,(t',x')\in\mathbb{R}^{n+1}-\overset{\circ}{K'}\right\}$$

όπου

$$d\big((t,x),(t',x')\big)=\Big((t'-t)^2+\|x-x'\|^2\Big)^{1/2}$$

και η απόσταση αυτή είναι γνήσια θετική αφού το $\overset{\circ}{K'}$ είναι ανοιχτό και το K συμπαγές. Διαπιστώνουμε ότι για κάθε $(t_o,x_o)\in K$ ισχύει:

$$[t_o-\frac{\delta}{2\sqrt{2}},\ t_o+\frac{\delta}{2\sqrt{2}}]\times\overline{S}_{(x_o,a/2\sqrt{2})}\subset U$$

οπότε το συμπέρασμα προκύπτει με εφαρμογή του θεωρήματος Péano θέτοντας:

$$\alpha=\min\left\{\frac{\delta}{2\sqrt{2}},\frac{\delta}{M2\sqrt{2}}\right\}.$$

Προφανώς το α που καθορίζει το διάσημα ορισμού $[t_o-\alpha,\ t_o+\alpha]$ της λύσης του προβλήματος Cauchy εξαρτάται μόνο από το ανοιχτό σύνολο U και την επιλογή του συμπαγούς συνόλου K και του φράγματος M.

<u>Σχόλια στο θεώρημα Péano:</u>

- Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και φραγμένη στο $[t_o,t_o+h]\times\mathbb{R}^n$ τότε το θεώρημα Péano ισχύει για $\alpha=h$. Στην περίπτωση αυτή η διατύπωση της απόδειξης είναι απλούστερη και σας προτείνουμε να την συντάξετε.

- Αν η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής τότε δεν διασφαλίζεται οπωσδήποτε λύση στο πρόβλημα του Cauchy. Π.χ. Το πρόβλημα του Cauchy που ορίζεται από την ασυνεχή συνάρτηση

$$f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f:(t,x)\to f(t,x)\,,$$

όπου

$$f(t,x)=-1\quad \text{όταν}\quad t\leq 0\qquad \text{και}\qquad f(t,x)=1\quad \text{όταν}\quad t>0\,,$$

δεν δέχεται λύση για την αρχική συνθήκη $(0,0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, δηλαδή δεν υπάρχει $\alpha>0$ και διαφορίσιμη συνάρτηση

$$x:[0,\ \alpha]\to\mathbb{R}\,,\quad x:t\to x(t)\,,$$

τέτοια ώστε:

$$\dot{x}(t)=f(t,x)\quad \text{με}\quad x(0)=0\,.$$

Αν υπήρχε μια τέτοια λύση θα όφειλε να είχε τη μορφή $x(t) = t$ για $t > 0$ και κατ'επέκταση για $t \geq 0$.

- Η συνέχεια της f και μόνο αυτή δεν διασφαλίζει μοναδικότητα της λύσης που δίνει το θεώρημα Péano. Π.χ. Το πρόβλημα του Cauchy που ορίζεται από τη συνεχή συνάρτηση

$$f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(t,x) = \sqrt{x} \ \text{ όταν } \ x \geq 0 \quad \text{και} \quad f(t,x) = 0 \ \text{ όταν } \ x \leq 0,$$

με αρχική συνθήκη $(0,0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ δέχεται απειρία λύσεων που, για κάθε δεδομένο $c > 0$, ορίζονται ως εξής:

$$x(t) = 0 \ \text{ όταν } \ t \leq c \quad \text{και} \quad x(t) = \frac{1}{4}(t-c)^2 \ \text{ όταν } \ t \geq c.$$

- Αν το πρόβλημα του Cauchy διέθετε μοναδική λύση τότε κάθε συγκλίνουσα υπακολουθία της ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του θεωρήματος Péano θα συνέκλινε προς αυτή τη λύση και λαμβάνοντας υπόψη τη συμπάγεια της κλειστότητας του συνόλου

$$\mathcal{A} = \{x_n(t) / \ t \in [t_o, t_o + \alpha], n \in \mathbb{N}\}$$

η οποία υποδεικνύεται από το θεώρημα Ascoli-Arzéla, με εις άτοπο απαγωγή, διαπιστώνουμε ότι η ίδια η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ οφείλει να συγκλίνει ομοιόμορφα προς αυτή τη μοναδική λύση.

- Το διάστημα $[t_o - \alpha, t_o + \alpha]$ στο οποίο σύμφωνα με το θεώρημα Péano υφίσταται λύση

$$x : [t_o - \alpha, t_o + \alpha] \to \mathbb{R}^n, \quad x(t_o) = x_o,$$

του προβλήματος Cauchy δεν είναι το ευρύτερο δυνατό. Αν σε ένα ευρύτερο διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ υπάρχει λύση

$$y : I \to \mathbb{R}^n$$

τέτοια ώστε

$$y(t) \equiv x(t), \ \forall t \in [t_o - \alpha, t_o + \alpha],$$

τότε λέμε ότι πρόκειται για **επέκταση** της λύσης

$$x : [t_o - \alpha, t_o + \alpha] \to \mathbb{R}^n, \quad x(t_o) = x_o.$$

- Μια λύση του προβλήματος Cauchy ορισμένη σε ένα διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ η οποία δεν επιδέχεται επέκταση σε ευρύτερο διάστημα λέγεται **μέγιστη λύση**. Στηριζόμενοι στο αξίωμα επιλογής θα αποδείξουμε την ύπαρξη μέγιστων λύσεων και θα διαπιστώσουμε ότι οι λύσεις αυτές ορίζονται σε ανοιχτά διαστήματα του $\mathbb{R}$.

2. ΜΕΓΙΣΤΗ ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ CAUCHY

- **Θεώρημα μέγιστης λύσης:** Αν

$$f : U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

είναι συνεχής συνάρτηση σε ένα ανοιχτό υποσύνολο U του $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, τότε από κάθε σημείο $(t_o, x_o) \in U$ διέρχεται τουλάχιστο μια μέγιστη λύση του προβλήματος Cauchy:

$$\dot{x}(t) = f(t,x), \quad x(t_o) = x_o.$$

- **Πόρισμα:** Το διάστημα ορισμού κάθε μέγιστης λύσης του προβλήματος Cauchy είναι ανοιχτό.

Το θεώρημα μέγιστης λύσης προκύπτει από το θεώρημα Peano, το αξίωμα επιλογής και το ακόλουθο λήμμα:

- **Λήμμα επέκτασης:** Με δεδομένη μια συνεχή συνάρτηση

$$f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

σε ένα ανοιχτό υποσύνολο U του $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ και θεωρώντας ένα συμπαγές σύνολο $K \subset U$, υπάρχει $\beta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $(t_o, x_o) \in K$, κάθε λύση

$$x : I \to \mathbb{R}^n, \quad I \subset [t_o - \beta,\ t_o + \beta],$$

του προβλήματος Cauchy:

$$\dot{x}(t) = f(t, x), \quad x(t_o) = x_o,$$

είναι επεκτάσιμη στο διάστημα $[t_o - \beta, t_o + \beta]$.

<u>Αποδεικτικό σκεπτικό του λήμματος επέκτασης:</u>

Συντάξτε αναλυτικά τα στάδια της αποδεικτικής διαδικασίας βασιζόμενοι στα στοιχεία που δόθηκαν στο μάθημα.

10. Θεωρούμε ένα συμπαγές σύνολο K' τέτοιο ώστε:

$$K \subset \overset{\circ}{K'} \subset K' \subset U$$

και επιλέγουμε ένα φράγμα:

$$M \geq \max\left\{\left\| f(t, x) \right\| \in \mathbb{R} \,/\, (t, x) \in K'\right\}, \quad M > 0.$$

Συμβολίζουμε δ την απόσταση του συμπαγούς K από το συμπλήρωμα του $\overset{\circ}{K'}$ στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^{n+1}$. Από το θεώρημα Peano προκύπτει η ύπαρξη $\alpha > 0$ τέτοιου ώστε, για κάθε $(t_o, x_o) \in K$, το πρόβλημα Cauchy

$$\dot{x}(t) = f(t, x), \quad x(t_o) = x_o,$$

δέχεται τουλάχιστο μια λύση στο διάστημα $[t_o - \alpha,\ t_o + \alpha]$. Το ζητούμενο $\beta > 0$ είναι:

$$\beta = \min\left\{\alpha,\ \delta / \sqrt{1 + M^2}\right\}.$$

11. Έστω $(t_o, x_o) \in K$ και

$$x : I \to \mathbb{R}^n$$

μια λύση του προβλήματος Cauchy

$$\dot{x}(t) = f(t, x), \quad x(t_o) = x_o,$$

τέτοια ώστε:

$$t_o \in I \subset [t_o - \beta,\ t_o + \beta].$$

Θα δείξουμε την επεκτασιμότητα αυτής της λύσης στο διάστημα $[t_o, t_o + \beta]$ οπότε, με αντίστοιχο σκεπτικό, προκύπτει η επεκτασιμότητά της στο διάστημα $[t_o - \beta, t_o]$ άρα στο διάστημα $[t_o - \beta, t_o + \beta]$. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

$$I \cap [t_o, \infty[= [t_o, \tau[\qquad \text{όπου} \qquad t_o < \tau \leq t_o + \beta,$$

$$I \cap [t_o, \infty[= [t_o, \tau] \qquad \text{όπου} \qquad t_o \leq \tau < t_o + \beta.$$

12. Σημειώνουμε ότι:

$$t \in I \cap [t_o, \infty[\ \Rightarrow\ (t, x(t)) \in \overset{\circ}{K'}.$$

Πράγματι, το σύνολο

$$\Sigma = \left\{t \in I \cap [t_o, \infty[\ /\ \left(s, x(s)\right) \in K',\ \forall s \in [t_o, t]\right\}$$

αφενός είναι κλειστό αφού το K' είναι κλειστό, αφετέρου είναι ανοιχτό όπως προκύπτει από τον συλλογισμό:

$$\| x(t) - x_o \| \le \left\| \int_{t_o}^{t} f(s, x(s))\, ds \right\| \le \left| \int_{t_o}^{t} \| f(s, x(s)) \| ds \right| \le M \left| t - t_o \right| \le M\beta$$

οπότε

$$d\big((t, x(t)), (t_o, x_o)\big) = \left((t-t_o)^2 + \|x(t) - x_o\|^2\right)^{1/2} < \left(\beta^2 + \beta^2 M^2\right)^{1/2} = \beta\left(1 + M^2\right)^{1/2} \le \beta$$

και, επειδή $(t_o, x_o) \in K$:

$$t \in \Sigma \;\Rightarrow\; \big(t, x(t)\big) \in \overset{\circ}{K'} .$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $t_o \in \Sigma$ άρα $\Sigma \neq \varnothing$, η συνεκτικότητα του $I \cap [t_o, \infty[$ συνεπάγεται ότι $\Sigma = I \cap [t_o, \infty[$.

13. Στην $1^η$ περίπτωση, η επεκτασιμότητα της λύσης στο διάστημα $[t_o, \tau]$ προκύπτει από τον εξής συλλογισμό:

Για κάθε $t \in [t_o, \tau[$ γνωρίζουμε ότι:

$$x(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} f(s, x(s))\, ds ,$$

όμως $(s, x(s)) \in K'$ και στο συμπαγές αυτό σύνολο η f είναι φραγμένη, συνεπώς υφίσταται το όριο:

$$x(\tau) = \operatorname*{Lim}_{t \to \tau} x(t) = x_o + \int_{t_o}^{\tau} f(s, x(s))\, ds .$$

Επιπλέον, αφού το K' είναι κλειστό, έχουμε ότι $(\tau, x(\tau)) \in K'$ και, συγκεκριμένα, λαμβάνοντας υπόψη το προηγούμενο σημείο της απόδειξης προκύπτει:

$$\tau < t_o + \beta \;\Rightarrow\; \big(\tau, x(\tau)\big) \in \overset{\circ}{K'} .$$

14. Στην $2^η$ περίπτωση, λαμβάνοντας υπόψη ότι η

$$x : [t_o, \tau] \to \mathbb{R}^n , \quad \tau \in [t_o, t_o + \beta[,$$

είναι λύση του προβλήματος:

$$\dot{x}(t) = f(t, x) , \quad x(t_o) = x_o ,$$

και διαφαλίζοντας από το θεώρημα Péano την ύπαρξη λύσης:

$$y : [\tau, \tau + \alpha] \to \mathbb{R}^n$$

στο πρόβλημα:

$$\dot{x}(t) = f(t, x) , \quad x(\tau) = x_\tau ,$$

προκύπτει η ζητούμενη επέκταση

$$z : [t_o, t_o + \beta] \to \mathbb{R}^n$$

που ορίζεται ως εξής:

$$z(t) = x(t) , \quad \forall t \in [t_o, \tau], \quad z(t_o) = x(t_o) = x_o ,$$

$$z(t) = y(t) , \quad \forall t \in [\tau, t_o + \beta], \; x(\tau) = x_\tau = y(\tau) , \quad (t_o + \beta \le \tau + \alpha).$$

Πράγματι, για κάθε $t \in [t_o, \tau]$, ισχύει:

$$z(t) = x(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} f(s, x(s))\, ds = x_o + \int_{t_o}^{t} f(s, z(s))\, ds$$

και ειδικότερα

$$x_\tau = x_o + \int_{t_o}^{\tau} f(s, z(s))\, ds$$

και επίσης, για κάθε $t \in [\tau, t_o + \beta]$, ισχύει:

$$z(t) = y(t) = x_\tau + \int_{\tau}^{t} f(s, y(s))\, ds = x_\tau + \int_{\tau}^{t} f(s, z(s))\, ds =$$

$$= x_o + \int_{t_o}^{\tau} f(s, z(s))\, ds + \int_{\tau}^{t} f(s, z(s))\, ds = x_o + \int_{t_o}^{t} f(s, z(s))\, ds$$

άρα πρόκειται για επέκταση της λύσης στο διάστημα $[t_o, t_o + \beta]$._

<u>Απόδειξη του θεωρήματος μέγιστης λύσης:</u>

Θεωρούμε τη λύση

$$x : I \to \mathbb{R}^n$$

του προβλήματος Cauchy:

$$\dot{x}(t) = f(t, x)\,, \quad x(t_o) = x_o\,,$$

και συμβολίζουμε $\mathcal{S}$ το σύνολο όλων των λύσεων αυτού του προβλήματος που περιοριζόμενες στο διάστημα I ταυτίζονται με τη δεδομένη αυτή λύση. Στο σύνολο $\mathcal{S}$ η σχέση:

«*Η λύση* $y : I_2 \to \mathbb{R}^n$ *είναι ευρύτερη της λύσης* $x : I_1 \to \mathbb{R}^n$ *αν και μόνο αν* $I_2 \supseteq I_1$ *και*

$$y(t) = x(t), \ \ \forall t \in I_1 .\text{»}$$

ορίζει μερική διάταξη και κάθε ολικά διατεταγμένο υποσύνολό του καλείται μια *αλυσίδα* μέσα στο $\mathcal{S}$. Αν $\mathcal{A}$ είναι μια αλυσίδα μέσα στο σύνολο $\mathcal{S}$ συμβολίζουμε:

$$a : I_a \to \mathbb{R}^n$$

τα στοιχεία της και I_a το αντίστοιχο διάστημα ορισμού τους και θέτουμε:

$$I = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} I_a \,.$$

Το I αποτελεί διάστημα της πραγματικής ευθείας αφού για κάθε $a \in \mathcal{A}$ ισχύει $t_o \in I_a$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$y : I \to \mathbb{R}^n$$

λαμβάνοντας από την αλυσίδα $\mathcal{A}$ τη λύση $a : I_a \to \mathbb{R}^n$ και θέτοντας $y(t) = a(t)$ για κάθε $t \in I_a$, σημειώνοντας ότι ο ορισμός αυτός δεν εξαρτάται από την επιλογή τη λύσης μέσα στην αλυσίδα $\mathcal{A}$. Από την κατασκευή αυτή προκύπτει μια λύση του προβλήματος Cauchy:

$$\dot{x}(t) = f(t, x)\,, \quad x(t_o) = x_o\,,$$

που αποτελεί άνω φράγμα της αλυσίδας $\mathcal{A}$. Κάθε στοιχείο της αλυσίδας $\mathcal{A}$ ταυτίζεται με τον περιορισμό αυτού του άνω φράγματος στο αντίστοιχο διάστημα ορισμού. Το Λήμμα του Zorn διασφαλίζει ότι το σύνολο $\mathcal{S}$ διαθέτει τουλάχιστο ένα μέγιστο στοιχείο, δηλαδή μη επεκτάσιμη λύση του προβλήματος Cauchy. Άρα, κάθε λύση του προβλήματος Cauchy:

$$\dot{x}(t) = f(t, x)\,, \quad x(t_o) = x_o\,,$$

προκύπτει από τον περιορισμό μιας μη επεκτάσιμης λύσης αυτού του προβλήματος. Το Αξίωμα Επιλογής, όπως είναι γνωστό από τη Θεωρία Συνόλων, είναι ισοδύναμο με το Λήμμα του Zorn:

Λήμμα Zorn: *Αν Ε είναι μη κενό μερικώς διατεταγμένο σύνολο του οποίου κάθε ολικά διατεταγμένο υποσύνολο διαθέτει άνω φράγμα τότε το σύνολο αυτό διαθέτει μέγιστο στοιχείο.*

Απόδειξη του πορίσματος: Αν

$$x : I \to \mathbb{R}^n$$

είναι μέγιστη λύση του προβλήματος Cauchy τότε το διάστημα I είναι ανοιχτό. Πράγματι, με την εις άτοπο απαγωγή υποθέτουμε ότι:

$$I \cap [t_o, \infty] = [t_o, \tau]\,, \quad \tau > t_o\,,$$

οπότε, αφού $(\tau, x(\tau)) \in U$, ακολουθώντας το τελευταίο στάδιο της απόδειξης του λήμματος επέκτασης, διαπιστώ-νουμε την ύπαρξη $\beta > 0$ και μιας επέκτασης της λύσης στο διάστημα $[t_o, t_o + \beta]$ που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεσή μας. Με ανάλογο συλλογισμό για το διάστημα $I \cap [-\infty, t_o]$ ολοκληρώνεται η απόδειξη του πορίσματος.

3. ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΛΥΣΗΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ CAUCHY

- **Συνθήκη Lipschitz:** Λέμε ότι μια συνάρτηση

$$f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,, \quad (t, x) \to f(t, x)\,,$$

πληροί τη συνθήκη Lipschitz ως προς τη μεταβλητή $x \in \mathbb{R}^n$ στο σύνολο U όταν υπάρχει σταθερά $k > 0$ τέτοια ώστε για κάθε ζεύγος σημείων (t, x) και (t, x') στο U να ισχύει:

$$\| f(t, x) - f(t, x') \| \le k \, \| x - x' \|.$$

Σχόλιο. Εδώ, η συνθήκη Lipschitz δεν διασφαλίζει ούτε διασφαλίζεται από τη συνέχεια της συνάρτησης:

Π.χ. Η συνεχής συνάρτηση $f(t, x) = \sqrt{|x|}$ δεν πληροί τη συνθήκη Lipschitz.

Η συνάρτηση $f(t, x) = x + g(t)$ με g ασυνεχή πληροί τη συνθήκη Lipschitz.

- **Τοπική συνθήκη Lipschitz:** Λέμε ότι μια συνάρτηση

$$f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,, \quad (t, x) \to f(t, x)\,,$$

όπου U ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, πληροί τοπικά τη συνθήκη Lipschitz ως προς τη μεταβλητή x στο U όταν κάθε σημείο $(t_o, x_o) \in U$ διαθέτει ανοιχτή περιοχή $V \subset U$ και υπάρχει σταθερά $k_v > 0$ τέτοια ώστε για κάθε ζεύγος σημείων (t, x) και (t, x') στο V να ισχύει:

$$\| f(t, x) - f(t, x') \| \le k_V \, \| x - x' \|.$$

Σχόλιο. Θα διαπιστώσουμε ότι η C^1-διαφορισιμότητα διασφαλίζει την τοπική συνθήκη Lipschitz. Προφανώς η τοπική συνθήκη Lipschitz είναι ασθενέστερη της συνθήκης Lipschitz.

- **Θεώρημα μοναδικότητας της μέγιστης λύσης:** Αν

$$f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

είναι συνεχής συνάρτηση σε ένα ανοιχτό υποσύνολο U του $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ που πληροί την τοπική συνθήκη Lipschitz ως προς τη μεταβλητή x στο U, τότε από κάθε σημείο $(t_o, x_o)\in U$ διέρχεται μια μοναδική μέγιστη λύση του προβλήματος Cauchy:

$$\dot{x}(t) = f(t,x), \quad x(t_o) = x_o .$$

<u>Αποδεικτικό σκεπτικό του θεωρήματος μοναδικότητας της μέγιστης λύσης:</u>

Γνωρίζουμε ήδη ότι το πρόβλημα Cauchy δέχεται τουλάχιστο μια μέγιστη λύση διερχόμενη από το δεδομένο σημείο $(t_o, x_o)\in U$. Έστω ότι από αυτό το σημείο διέρχονται δυο μέγιστες λύσεις:

$$x_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n \quad \text{και} \quad x_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n .$$

Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε $\tau \in I_1 \cap I_2$ τέτοιο ώστε $x_1(\tau) = x_2(\tau) = x_o'$. Σύμφωνα με την υπόθεση του θεωρήμα-τος υπάρχει ανοιχτή περιοχή V του (τ, x_o') μέσα στο U στην οποία ο περιορισμός της f είναι συνεχής και πληροί τη συνθήκη Lipschitz ως προς τη μεταβλητή x. Η συνέχεια των λύσεων διασφαλίζει την ύπαρξη $\varepsilon > 0$ τέτοιου ώστε:

$$(t, x_1(t)) \in V \ \text{ και } \ (t, x_2(t)) \in V, \quad \forall t \in]\tau-\varepsilon, \tau+\varepsilon[\subset I_1 \cap I_2 ,$$

και το λήμμα συνένωσης λύσεων που ακολουθεί υποδεικνύει ότι:

$$x_1(t) = x_2(t), \quad \forall t \in]\tau-\varepsilon, \tau+\varepsilon[.$$

Συνεπώς, το σύνολο

$$\Sigma = \{ t \in I_1 \cap I_2 \,/\, x_1(t) = x_2(t) \}$$

είναι ανοιχτό και επιπλέον είναι κλειστό αφού περιλαμβάνει το όριο κάθε συγκλίνουσας ακολουθίας σημείων του γεγονός που διασφαλίζεται από τη συνέχεια των λύσεων. Το σύνολο αυτό δεν είναι κενό αφού $t_o \in \Sigma$ άρα ταυτίζεται με το συνεκτικό σύνολο $I_1 \cap I_2$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

$$x_1(t) = x_2(t), \quad \forall t \in I_1 \cap I_2 ,$$

και επειδή πρόκειται για μέγιστες λύσεις προκύπτει ότι $I_1 = I_2$._

- **<u>Λήμμα συνένωσης λύσεων</u>:** Αν μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοιχτό υποσύνολο U του $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$:

$$f : U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

πληροί τη συνθήκη Lipschitz ως προς τη μεταβλητή x στο U και

$$x_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n, \quad x_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n ,$$

είναι δυο λύσεις του προβλήματος Cauchy:

$$\dot{x}(t) = f(t,x), \quad x(t_o) = x_o ,$$

τότε

$$x_1(t) = x_2(t), \quad \forall t \in I_1 \cap I_2 .$$

Απόδειξη: Έστω $t \in I_1 \cap I_2$ με $t \geq t_o$, (αντίστοιχα προκύπτει η περίπτωση $t \leq t_o$), οπότε:

$$x_1(t_o) - x_2(t_o) = 0 \quad \text{και} \quad \dot{x}_i(s) - f(s, x_i(s)) = 0, \quad \forall s \in [t_o, t], \quad i = 1,2 ,$$

και εφαρμόζοντας το πόρισμα του λήμματος Gronwall με $\delta = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ προκύπτει:

$$\|x_1(s) - x_2(s)\| \le 0 , \quad \forall s \in [t_o, t] ,$$

άρα

$$x_1(t) = x_2(t) , \quad \forall t \in I_1 \cap I_2 .\_$$

Σχόλιο. Το λήμμα Gronwall που ακολουθεί υπεισέρχεται στην απόδειξη του λήμματος συνένωσης λύσεων, συνεπώς στην απόδειξη της μοναδικότητας της μέγιστης λύσης, αλλά και σε ειδικά συμπεράσματα που αφορούν σε χαρακτηριστικά της μέγιστης λύσης του προβλήματος Cauchy.

- **<u>Λήμμα Gronwall</u>:** Με δεδομένες δυο συνεχείς συναρτήσεις:

$$\lambda : [a, b] \to \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \mu : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ όπου } \mu(t) \ge 0, \ \forall t \in [a, b] ,$$

αν μια συνεχής συνάρτηση

$$y : [a, b] \to \mathbb{R}$$

πληροί τη σχέση

$$y(t) \le \lambda(t) + \int_a^t \mu(s)y(s)ds , \quad \forall t \in [a, b] ,$$

τότε

$$y(t) \le \lambda(t) + \int_a^t \lambda(s)\mu(s)\, e^{\int_s^t \mu(r)dr} ds , \quad \forall t \in [a, b] .$$

Απόδειξη: Η συνάρτηση

$$z(t) = \int_a^t \mu(s)y(s)ds$$

δέχεται την παράγωγο

$$\dot{z}(t) = \mu(t)y(t)$$

οπότε, λαμβάνοντας υπόψη την ανισότητα της υπόθεσης και ότι $\mu(t) \ge 0$, προκύπτει:

$$\dot{z}(t) - \mu(t)z(t) = \mu(t)\big(y(t) - z(t)\big) \le \mu(t)\lambda(t) .$$

Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση

$$w(t) = z(t)\, e^{-\int_a^t \mu(s)ds}$$

προκύπτει:

$$\dot{w}(t) = \big(\dot{z}(t) - z(t)\mu(t)\big) e^{-\int_a^t \mu(s)ds} \quad \le \quad \mu(t)\lambda(t)\, e^{-\int_a^t \mu(s)ds}$$

και, επειδή $w(a) = 0$, ολοκληρώνοντας προκύπτει:

$$w(t) \le \int_a^t \lambda(s)\mu(s)\, e^{-\int_a^s \mu(r)dr} ds .$$

Άρα

$$z(t) \le \int_a^t \lambda(s)\mu(s)\, e^{\int_s^t \mu(r)dr} ds$$

και καταλήγουμε στο συμπέρασμα λαμβάνοντας υπόψη ότι:

$$y(t) \le \lambda(t) + z(t) .$$

Σχόλιο. Αν στο λήμμα Gronwall η συνάρτηση $\lambda(t)$ είναι σταθερή τότε:

$$y(t) \le \lambda\, e^{\int_a^t \mu(r)dr}, \quad \forall t \in [a,b].$$

Πράγματι

$$y(t) \le \lambda + \lambda \int_a^t \mu(s) e^{\int_s^t \mu(r)dr} ds = \lambda \left(1 - \left[-e^{\int_s^t \mu(r)dr} \right]_a^t \right) = \lambda \left(1 - 1 + e^{\int_a^t \mu(r)dr} \right).$$

- **<u>Πόρισμα Gronwall</u>:** Έστω

$$f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοιχτό υποσύνολο U του $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ και

$$x_i : [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

διαφορίσιμες συναρτήσεις των οποίων το γράφημα είναι εγκλεισμένο στο U :

$$(t, x_i(t)) \in U, \ \forall t \in [a,b], \ i = 1,2,$$

τέτοιες ώστε για κάποια $\delta \ge 0$, $\varepsilon_i \ge 0$:

$$\|x_1(a) - x_2(a)\| \le \delta \quad \text{και} \quad \|\dot{x}_i(t) - f(t, x_i(t))\| \le \varepsilon_i, \ \forall t \in [a,b], \ i = 1,2.$$

Αν υπάρχει $k > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $t \in [a,b]$ και κάθε x, x' με $(t,x),(t,x') \in U$, ισχύει:

$$\| f(t,x) - f(t,x') \| \ \le \ k \, \|x - x'\|$$

τότε για κάθε $t \in [a,b]$ ισχύει:

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \le \delta e^{k(t-a)} + \frac{\varepsilon}{k}\left(e^{k(t-a)} - 1\right) \quad \text{όπου} \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Απόδειξη: Θέτουμε $w(t) = x_1(t) - x_2(t)$ και διαπιστώνουμε ότι:

$$\|\dot{w}(t)\| \le \|\dot{x}_1(t) - f(t, x_1(t))\| + \| f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t))\| + \| f(t, x_2(t)) - \dot{x}_2(t)\| \le \varepsilon_1 + k\|w(t)\| + \varepsilon_2,$$

οπότε ολοκληρώνοντας προκύπτει:

$$\|w(t)\| = \left\| w(a) + \int_a^t \dot{w}(u)du \right\| \le \|w(a)\| + \int_a^t \|\dot{w}(u)\| du \le \delta + \varepsilon(t-a) + \int_a^t k\|w(u)\| du.$$

Λαμβάνοντας υπόψη το λήμμα του Gronwall προκύπτει:

$$\|w(t)\| \le \delta + \varepsilon(t-a) + \int_a^t \delta + \varepsilon(s-a) k e^{k(t-s)} ds$$

και ολοκληρώνοντας κατά μέρη:

$$\|w(t)\| \le \delta e^{k(t-a)} + \frac{\varepsilon}{k}\left(e^{k(t-a)} - 1\right).$$

Το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας υποδεικνύει ότι από κάθε σημείο $(t_o, x_o) \in U$ διέρχεται μια μοναδική μέγιστη λύση:

$$\phi_{(t_o,x_o)} :]a_{(t_o,x_o)}, b_{(t_o,x_o)}[\to \mathbb{R}^n$$

τέτοια ώστε:

$$\dot{\phi}_{(t_o,x_o)}(t) = f\left(t, \phi_{(t_o,x_o)}(t)\right), \quad \phi_{(t_o,x_o)}(t_o) = x_o.$$

- **<u>Θεώρημα οριακών σημείων της μέγιστης λύσης</u>:** Αν

$$f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

είναι συνεχής συνάρτηση σε ένα ανοιχτό υποσύνολο U του $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ που πληροί την τοπική συνθήκη Lipschitz ως προς τη μεταβλητή x στο U, τότε τα οριακά σημεία της μέγιστης λύσης

$$x :]a, b[\to \mathbb{R}^n$$

του προβλήματος Cauchy:

$$\dot{x}(t) = f(t, x), \quad x(t_o) = x_o,$$

που προκύπτουν όταν $t \to a$ ή $t \to b$, ανήκουν στο σύνορο του συνόλου U.

Απόδειξη: Αν η μέγιστη λύση διαθέτει οριακό σημείο όταν $t \to a$ ή όταν $t \to b$ τότε αυτό οφείλει να ανήκει στην κλειστότητα του U αφού:

$$\{(t, x(t)) / t \in]a, b[\} \subset U.$$

Αν το οριακό σημείο ανήκε στο ανοιχτό σύνολο U και όχι στο σύνορό του τότε εύκολα διαπιστώνουμε ότι θα οδηγηθούμε στο αντιφατικό συμπέρασμα επεκτασιμότητας της μέγιστης λύσης στο οριακό αυτό σημείο.

Σχόλιο. Ακόμη και όταν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ αυτό δεν σημαίνει ότι κάθε μέγιστη λύση οφείλει να έχει ως πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Εντούτοις, στην περίπτωση αυτή δεν υφίστανται οριακά σημεία αφού

$$\partial(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) = \varnothing.$$

Για κάθε σημείο $(t_o, x_o) \in U$, η μοναδικότητα της διερχόμενης μέγιστης λύσης ορίζει σαφώς τα άκρα του διαστήματος ορισμού της διαμέσου των ημισυνεχών συναρτήσεων:

$$a : U \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \quad \text{και} \quad b : U \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Παραδείγματα.

1. Θεωρούμε το πρόβλημα Cauchy που ορίζεται από τη συνάρτηση:

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(t, x) = x^2, \quad (t_o, x_o) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Η μέγιστη λύση που διέρχεται από το σημείο $(t_o, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ είναι η $x(t) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$, ενώ η μέγιστη λύση που διέρχεται από το σημείο $(t_o, x_o) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ με $x_o > 0$ ή αντίστοιχα $x_o < 0$, ορίζεται στο διάστημα $]-\infty, t_o + 1/x_o[$ ή αντίστοιχα στο διάστημα $]t_o + 1/x_o, +\infty[$, ως εξής:

$$x(t) = \frac{x_o}{1 - (t - t_o)x_o}.$$

2. Θεωρούμε το πρόβλημα Cauchy που ορίζεται από τη συνάρτηση:

$$f : U =]0, +\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(t, x) = -\frac{1}{t^2}\cos\frac{1}{t}.$$

Η μέγιστη λύση που διέρχεται από το σημείο $(t_o, x_o) \in U$ είναι:

$$x :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x(t) = \sin\frac{1}{t} + \left(x_o - \sin\frac{1}{t_o}\right),$$

και διαθέτει άπειρα οριακά σημεία που ανήκουν στο σύνορο ∂U του πεδίου ορισμού της f.

<u>Σχόλια για την τοπική συνθήκη Lipschitz:</u>

- **<u>Πρόταση 1</u>:** Αν μια συνάρτηση

$$f : U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

ορισμένη σε ένα ανοιχτό υποσύνολο U του $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ είναι C^1-διαφορίσιμη ως προς τη μεταβλητή x τότε πληροί την τοπική συνθήκη Lipschitz ως προς αυτή τη μεταβλητή.

Απόδειξη: Σε κάθε σημείο $(t,x)\in U$ θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$D_x f(t,x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

που εκφράζεται με τον ιακωβιανό πίνακα:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(t,x) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(t,x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(t,x) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(t,x) \end{bmatrix}$$

Η απεικόνιση που σε κάθε $(t,x)\in U$ προσαρτά την ευκλείδεια στάθμη:

$$\|D_x f(t,x)\| = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,x)\right)^2\right)^{1/2}$$

σύμφωνα με την υπόθεσή μας είναι συνεχής οπότε, θεωρώντας ένα σημείο $(t_o,x_o)\in U$ και μια συμπαγή περιοχή $V=[t_o-\varepsilon,\, t_o+\varepsilon]\times\overline{S}_\rho(x_o)$ μέσα στο U, υπάρχει $k>0$ τέτοιο ώστε:

$$(t,x)\in V \;\Rightarrow\; \|D_x f(t,x)\| \le k .$$

Αν τώρα τα σημεία (t,x) και (t,x') ανήκουν στο εσωτερικό της συμπαγούς περιοχής V τότε το θεώρημα πεπερασμένων αυξήσεων, εφαρμοσμένο στο σύνολο $\{t\}\times S_\rho(x_o)$, υποδεικνύει την ύπαρξη σημείων $z_i = x + c_i(x'-x)$, $0<c_i<1$, $i=1,\dots,n$, τέτοιων ώστε:

$$f_i(t,x) - f_i(t,x') = \left[D_x f_i(t,z_i)\right](x'-x) .$$

Συνεπώς

$$\left| f_i(t,x) - f_i(t,x')\right| \le \|D_x f_i(t,z_i)\|\|x'-x\| \le \|D_x f(t,z_i)\|\|x'-x\| \le k\|x'-x\|$$

και

$$\left| f(t,x) - f(t,x')\right| = \left(\sum_{i=1}^{n}\left| f_i(t,x) - f_i(t,x')\right|^2\right)^{1/2} \le k\sqrt{n}\,\|x'-x\| .$$

- **<u>Πρόταση 2</u>:** Αν μια συνεχής συνάρτηση

$$f : U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

ορισμένη σε ένα ανοιχτό υποσύνολο U του $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ πληροί την τοπική συνθήκη Lipschitz ως προς τη μεταβλητή x στο U, τότε για κάθε συμπαγές σύνολο $\Sigma\subset U$ υπάρχει σταθερά $k_\Sigma>0$ τέτοια ώστε για κάθε ζεύγος σημείων (t,x) και (t,x') στο Σ ισχύει:

$$\| f(t,x) - f(t,x')\| \;\le\; k_\Sigma \|x-x'\| .$$

Απόδειξη: Με την εις άτοπο απαγωγή υποθέτουμε την ύπαρξη συμπαγούς συνόλου $\Sigma \subset U$ για το οποίο δεν ισχύει ο ισχυρισμός της πρότασης, οπότε υπάρχει αριθμητική ακολουθία $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ που τείνει στο άπειρο και ακολουθίες $(t_i, x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ και $(t_i, x_i')_{i\in\mathbb{N}}$ σημείων του Σ τέτοιες ώστε:

$$\| f(t_i, x_i) - f(t_i, x_i') \| \;>\; k_i \|x_i - x_i'\|, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Επιλέγοντας, εφόσον είναι απαραίτητο, αντίστοιχες υπακολουθίες μπορούμε να θεωρήσουμε ότι:

$$\operatorname*{Lim}_{i\to\infty}(t_i, x_i) = (t_o, x_o) \quad \text{και} \quad \operatorname*{Lim}_{i\to\infty}(t_i, x_i') = (t_o, x_o')$$

και η τοπική συνθήκη Lipschitz ως προς την μεταβλητή x διασφαλίζει την ύπαρξη $k = k_{(t_o, x_o)} > 0$ και ανοιχτής περιοχής V του (t_o, x_o) έτσι ώστε, για κάθε (t, x) και (t, x') στο V, να πληρούται η σχέση:

$$\| f(t, x) - f(t, x') \| \;\le\; k\|x - x'\|.$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι, αν $(t_o, x_o') \in V$ τότε από μια τάξη και πέρα οι όροι των ακολουθιών ανήκουν στο V, άρα από την τάξη αυτή και πέρα προκύπτει η αντίφαση:

$$\| f(t_i, x_i) - f(t_i, x_i') \| \;\le\; k_i \|x_i - x_i'\|.$$

Συνεπώς $(t_o, y_o) \notin V$ και $\|x_o - x_o'\| = \delta > 0$ που σημαίνει ότι από μια τάξη και πέρα ισχύει $\|x_i - x_i'\| = \delta/2$

άρα:

$$\| f(t_i, x_i) - f(t_i, x_i') \| \;\ge\; k_i \|x_i - x_i'\| > k_i\delta/2$$

από όπου προκύπτει ότι:

$$\operatorname*{Lim}_{i\to\infty}\| f(t_i, x_i) - f(t_i, x_i') \| = \infty$$

που έρχεται σε αντίφαση με το ότι η συνεχής συνάρτηση f είναι φραγμένη στο συμπαγές σύνολο Σ._

- **Πόρισμα 1:** Αν

$$f : U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

είναι συνεχής συνάρτηση σε ένα ανοιχτό υποσύνολο U του $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ που πληροί την τοπική συνθήκη Lipschitz ως προς τη μεταβλητή x στο U και

$$x : I \to \mathbb{R}^n$$

είναι μέγιστη λύση του προβλήματος Cauchy:

$$\dot{x}(t) = f(t, x), \quad x(t_o) = x_o,$$

τότε, για κάθε συμπαγές σύνολο $\Sigma \subset U$ υπάρχουν $t_\Sigma^-, t_\Sigma^+ \in I$, $t_\Sigma^- < t_o < t_\Sigma^+$, τέτοια ώστε:

$$\big(t, x(t)\big) \notin \Sigma, \quad \forall t \in I - [t_\Sigma^-, t_\Sigma^+].$$

- **Πόρισμα 2:** Αν

$$f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

είναι συνεχής συνάρτηση και

$$x : I \to \mathbb{R}^n$$

είναι μέγιστη λύση του προβλήματος Cauchy:

$$\dot{x}(t) = f(t, x), \quad x(t_o) = x_o,$$

η οποία από μια χρονική στιγμή και πέρα εισέρχεται και παραμένει σε ένα συμπαγές σύνολο $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$, τότε:

$$[t_o, +\infty[\subset I .$$

Συντάξτε την απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος και των πορισμάτων του σύμφωνα με τα στοιχεία που δόθηκαν στο μάθημα

Παράδειγμα: Μέγιστες λύσεις των Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων.

Θεωρούμε το πρόβλημα Cauchy:

$$\dot{x}(t) = f(t,x)\,, \quad x(t_o) = x_o\,,$$

όπου

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,, \quad f(t,x) = A(t)x(t) + B(t)\,,$$

με $A : \mathbb{R} \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ συνεχείς και $(t_o, x_o) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Προφανώς, η συνάρτηση f είναι συνεχής ως προς (t,x) και πληροί την τοπική συνθήκη Lipschitz ως προς x, συνεπώς από κάθε σημείο $(t_o, x_o) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ διέρχεται μια μοναδική μέγιστη λύση η οποία, όπως θα διαπιστώσουμε, ορίζεται σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Αν οι απει-κονίσεις A και B είναι ορισμένες και συνεχείς σε ένα ανοιχτό διάστημα $]a,b[$ τότε η μέγιστη λύση ορίζεται σε αυτό το διάστημα και μπορεί να τείνει στο άπειρο εφόσον οι A και B δεν είναι φραγμένες. Στην περίπτωση $B \equiv 0$, το σύνολο των μεγίστων λύσεων της ομογενούς εξίσωσης:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

αποτελεί ένα n-διάστατο διανυσματικό υπόχωρο του πραγματικού διανυσματικού χώρου των συνεχών συναρτή-σεων $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ ή αντίστοιχα $\mathcal{C}(]a,b[, \mathbb{R}^n)$, συνεπώς η γνώση n γραμμικά ανεξάρτητων μεγίστων λύσεων αρκεί για τον προσδιορισμό όλων των μεγίστων λύσεων αυτής της εξίσωσης. Αν

$$x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n\,, \quad x_i(t) = \left(x_{i1}(t), \ldots, x_{in}(t)\right), \quad i = 1, \ldots, n\,,$$

είναι n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις διερχόμενες αντίστοιχα από τα σημεία $(t_o, x_{io}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, n$, τότε ορίζεται ο $n \times n$ *θεμελιώδης πίνακας* της ομογενούς εξίσωσης:

$$S(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{n1}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

που πληροί τη σχέση:

$$\dot{S}(t) = A(t)S(t)\,, \quad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

Η μοναδικότητα της μέγιστης λύσης που διέρχεται από κάθε δεδομένο σημείο του $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ διασφαλίζει τον μη μηδενισμό της ορίζουσας του θεμελιώδους πίνακα. Άλλωστε, ακόμη και αν δεν γνωρίζαμε ότι οι θεωρούμενες λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες, η συνθήκη $\det S(t_o) \neq 0$ είναι αρκετή για να διασφαλίσει την ανεξαρτησία τους και να συμπεράνουμε ότι πρόκειται για τον θεμελιώδη πίνακα της ομογενούς εξίσωσης.

Άσκηση. Αποδείξτε ότι η μέγιστη λύση του προβλήματος Cauchy:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)\,, \quad x(t_o) = x_o\,,$$

με $A :]a,b[\to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $B :]a,b[\to \mathbb{R}^n$ συνεχείς, ορίζεται στο διάστημα $]a,b[\subset \mathbb{R}$.

4. ΟΛΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{f}(\mathbf{t}, \mathbf{x})$$

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

η οποία ορίζεται από τη συνεχή συνάρτηση

$$f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

που πληροί την τοπική συνθήκη Lipschitz ως προς τη μεταβλητή $x \in \mathbb{R}^n$ στο ανοιχτό χωρίο U του $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας υποδεικνύει ότι από κάθε σημείο $(t_o, x_o) \in U$ διέρχεται μια μοναδική μέγιστη λύση:

$$\phi_{(t_o,x_o)} :]a_{(t_o,x_o)}, b_{(t_o,x_o)}[\to \mathbb{R}^n$$

τέτοια ώστε:

$$\dot{\phi}_{(t_o,x_o)}(t) = f\left(t, \phi_{(t_o,x_o)}(t)\right), \quad \phi_{(t_o,x_o)}(t_o) = x_o .$$

Για κάθε σημείο $(t_o, x_o) \in U$, η μοναδικότητα της διερχόμενης μέγιστης λύσης ορίζει σαφώς τα άκρα του διαστήματος ορισμού της διαμέσου των ημισυνεχών συναρτήσεων:

$$a : U \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \quad \text{και} \quad b : U \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} .$$

Ο όρος **ολική λύση** της διαφορικής εξίσωσης $\dot{x} = f(t, x)$ δηλώνει την απεικόνιση

$$\phi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n, \quad \phi(t_o, x_o, t) = \phi_{(t_o,x_o)}(t) ,$$

που ορίζεται στο σύνολο

$$\mathcal{D} = \left\{(t_o, x_o, t) \ / \ (t_o, x_o) \in U, \ t \in]a_{(t_o,x_o)}, b_{(t_o,x_o)}[\right\} .$$

- **Θεώρημα ολικής λύσης:** Αν

$$f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

είναι συνεχής συνάρτηση που πληροί την τοπική συνθήκη Lipschitz ως προς τη μεταβλητή $x \in \mathbb{R}^n$ στο χωρίο U του $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, τότε το πεδίο ορισμού $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ της ολικής λύσης $\phi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ της εξίσωσης $\dot{x} = f(t, x)$ είναι σύνολο ανοιχτό και η ολική λύση είναι συνεχής σε κάθε σημείο του.

- **Η περίπτωση των αυτόνομων εξισώσεων:**

Πρόκειται για τις εξισώσεις της μορφής:

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

όπου

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

είναι συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοιχτό σύνολο $U \subset \mathbb{R}^n$ για την οποία υποθέτουμε ότι πληροί την τοπική συνθήκη Lipschitz, γεγονός που διασφαλίζει την ύπαρξη και μοναδικότητα μέγιστης λύσης:

$$\phi_{(t_o,x_o)} :]a_{(t_o,x_o)}, b_{(t_o,x_o)}[\to \mathbb{R}^n, \quad \phi_{(t_o,x_o)}(t_o) = x_o .$$

Στην περίπτωση των αυτόνομων εξισώσεων η ολική λύση

$$\phi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n , \quad \phi(t_o, x_o, t) = \phi_{(t_o, x_o)}(t) ,$$

όπου

$$\mathcal{D} = \left\{ (t_o, x_o, t) \ / \ (t_o, x_o) \in \mathbb{R} \times U, \ t \in]a_{(t_o,x_o)}, b_{(t_o,x_o)}[\right\} ,$$

διαθέτει τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\phi(t_o, x_o, t) = \phi(0, x_o, t - t_o) , \quad \forall (t_o, x_o) \in \mathbb{R} \times U ,$$

και

$$]a_{(t_o,x_o)}, b_{(t_o,x_o)}[\ = \ ]a_{(0,x_o)} + t_o, \ b_{(0,x_o)} + t_o[, \quad \forall (t_o, x_o) \in \mathbb{R} \times U .$$

Συνεπώς, η ολική λύση της αυτόνομης εξίσωσης εκφράζεται ως εξής:

$$\phi(t_o, x_o, t) = \psi(x_o, t - t_o)$$

όπου η συνάρτηση

$$\psi(x_o, \tau) = \phi(0, x_o, \tau)$$

ορίζεται στο σύνολο

$$\mathcal{E} = \left\{ (x_o, \tau) \in U \times \mathbb{R} \,/\, \tau \in]a_{(0,x_o)}, b_{(0,x_o)} \right\} .$$

- **Σχόλιο. Γεωμετρική ερμηνεία της ολικής λύσης:**

Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

που πληροί την τοπική συνθήκη Lipschitz ως προς τη μεταβλητή $x \in \mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ και υποθέτουμε ότι η ολική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

είναι ορισμένη σε ολόκληρο το χώρο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$:

$$\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n , \quad \phi(t_o, x_o, t) = \phi_{(t_o, x_o)}(t) .$$

Τότε, για κάθε $t, t' \in \mathbb{R}$ προκύπτει ο ομοιομορφισμός:

$$\phi_{t,t'} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n , \quad \phi_{t,t'}(x) = \phi(t, x, t') ,$$

και αν επιπλέον η συνάρτηση f είναι C^r-διαφορίσιμη τότε πρόκειται για αμφιδιαφόριση κλάσης C^r, $r \geq 1$.

Στην περίπτωση των αυτόνομων εξισώσεων

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

έχουμε ότι:

$$\phi_{t,t'} = \phi_{0,t'-t} , \quad \forall t, t' \in \mathbb{R} .$$

Για κάθε $t \in \mathbb{R}$, προκύπτει λοιπόν ο ομοιομορφισμός:

$$\Phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n , \quad \Phi_t(x) = \phi_{0,t}(x) ,$$

που όπως διαπιστώνουμε διαθέτει την ιδιότητα:

$$\Phi_{t+t'}(x) = \left(\Phi_t \circ \Phi_{t'}\right)(x) , \quad \forall x \in \mathbb{R}^n , \quad \forall t, t' \in \mathbb{R} .$$

Συνεπώς, προκύπτει ένας ομομορφισμός

$$\Phi : \left(\mathbb{R}^n , +\right) \to \left(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n), \circ\right), \quad \Phi(t) = \Phi_t ,$$

της προσθετικής ομάδας $\left(\mathbb{R}^n,+\right)$ στην ομάδα $\left(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n),\circ\right)$ των ομοιομορφισμών του $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένη με την πράξη της σύνθεσης. Αν επιπλέον η συνάρτηση f είναι C^r-διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^n$ τότε προκύπτει ο ομομορ-φισμός της προσθετικής ομάδας $\left(\mathbb{R}^n,+\right)$ στην ομάδα $\left(\mathrm{Diff}^r(\mathbb{R}^n),\circ\right)$ των C^r-αμφιδιαφορίσεων του $\mathbb{R}^n$, $r \geq 1$:

$$\Phi : \left(\mathbb{R}^n , +\right) \to \left(\mathrm{Diff}^r(\mathbb{R}^n), \circ\right), \quad \Phi(t) = \Phi_t ,$$

και ορίζεται η μονοπαραμετρική ομάδα της αυτόνομης διαφορικής εξίσωσης:

$$\left\{\Phi_t\right\}_{t\in\mathbb{R}} \subset \mathrm{Diff}^r(\mathbb{R}^n) .$$

Παραμετρική περίπτωση: Αν

$$f : U \times U' \subset (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

είναι συνεχής συνάρτηση που πληροί την τοπική συνθήκη Lipschitz ως προς τη μεταβλητή $x \in \mathbb{R}^n$ στο χωρίο U του $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, τότε το πεδίο ορισμού

$$\mathcal{D} = \bigcup_{p\in U'} \mathcal{D}_p \times \{p\}$$

της καθολικής λύσης

$$\phi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n , \quad \phi(t_o, x_o, t, p) = \phi_p(t_o, x_o, t) ,$$

της διαφορικής εξίσωσης

$$\dot{x} = f(t, x, p)$$

είναι σύνολο ανοιχτό και η καθολική λύση συνεχής.