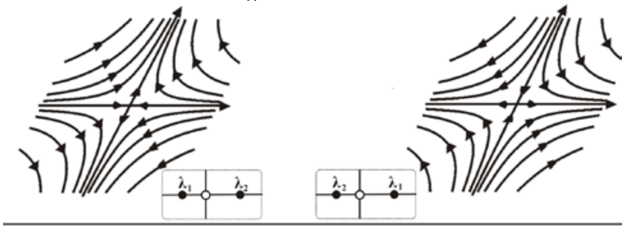
ΜΑΘΗΜΑ 5ο : ΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΙΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

(ΘΕΩΡΗΜΑ HARTMAN-GROBMAN)

Το θεώρημα των *D. M. Grobman* (1959) και *P. Hartman* (1960) δηλώνει ότι η εξελικτική ροή κάθε μη γραμμικής δυναμικής έχει τοπικά ίδια τοπολογική συμπεριφορά με εκείνη της γραμμικοποίησής της στην περιοχή των σημείων *υπερβολικής ισορροπίας*, δηλαδή των καταστάσεων ισορροπίας στις οποίες όλες οι ιδιοτιμές της γραμμικοποιημένης δυναμικής βρίσκονται εκτός του φανταστικού άξονα του μιγαδικού επιπέδου.

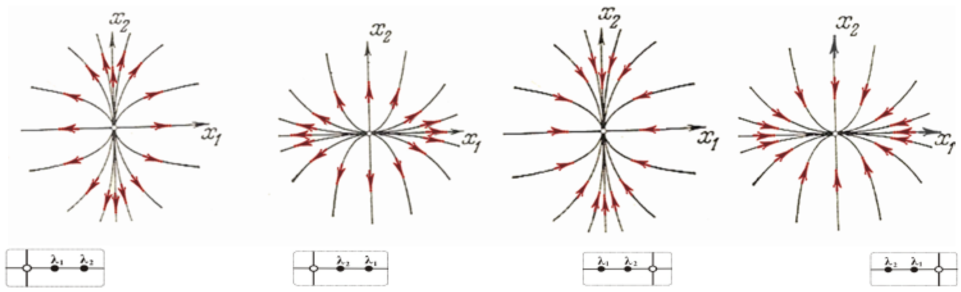
<u>Τροχιές της δισδιάστατης γραμμικής δυναμικής στην περιοχή των υπερβολικών καταστάσεων ισορροπίας</u>

Σάγματα - saddles



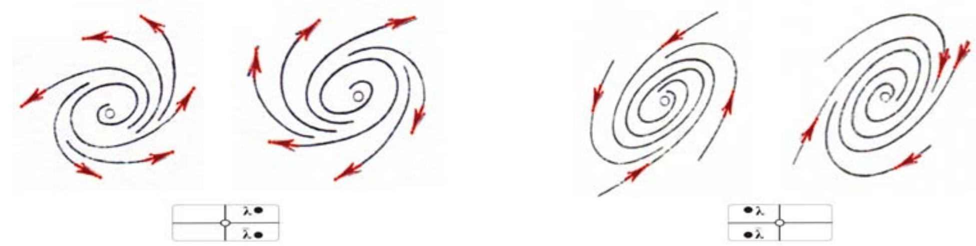
απωστικές ισορροπίες: ασταθείς κόμβοι
sources: unstable nodes

ελκτικές ισορροπίες: ευσταθείς κόμβοι
sinks: stable nodes



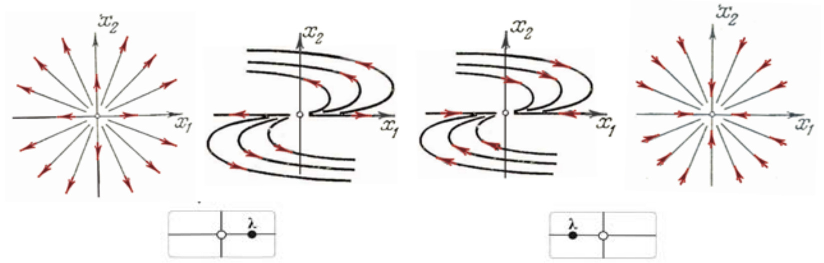
απωστικές ισορροπίες: ασταθείς εστίες
sources: unstable focus

ελκτικές ισορροπίες: ευσταθείς εστίες
sinks: stable focus



απωστικές ισορροπίες: ασταθείς εκφυλισμένοι κόμβοι
sources: unstable degenerate nodes

ελκτικές ισορροπίες: ευσταθείς εκφυλισμένοι κόμβοι
sinks: stable degenerate nodes



❖ Θεωρούμε ένα σύστημα αυτόνομων διαφορικών εξισώσεων στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1,...,x_n) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(x_1,...,x_n) \end{cases}.$$

Οι συναρτήσεις που ορίζουν αυτό το σύστημα υποτίθενται παραγωγίσιμες με συνεχείς παραγώγους:

$$f : \mathfrak{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n , \quad f(x) = \left(f_1(x),..., f_n(x) \right).$$

Θεωρούμε το διαφορικό αυτής της συνάρτησης στο σημείο $p \in \mathfrak{U}$, δηλαδή τη γραμμική απεικόνιση:

$$D_p f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n , \quad f(x) = \left(f_1(x),..., f_n(x) \right),$$

που εκφράζεται με τον ιακωβιανό πίνακα:

$$\left[D_p f \right] = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} f_1(p) & \cdots & \partial_{x_n} f_1(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} f_n(p) & \cdots & \partial_{x_n} f_n(p) \end{bmatrix}$$

Αν το σημείο $p \in \mathfrak{U}$ αποτελεί κατάσταση ισορροπίας:

$$f(p) = 0 \ : \quad f_1(p) = ... = f_n(p) = 0 ,$$

τότε θεωρούμε το γραμμικοποιημένο σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} f_1(p) & \cdots & \partial_{x_n} f_1(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} f_n(p) & \cdots & \partial_{x_n} f_n(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Η αρχή των αξόνων του ευκλείδειου χώρου αποτελεί κατάσταση ισορροπίας της δυναμικής που ορίζεται από αυτό το σύστημα των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων και η φύση της καθορίζεται από το φάσμα των ιδιοτιμών του ιακωβιανού πίνακα, δηλαδή από τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης:

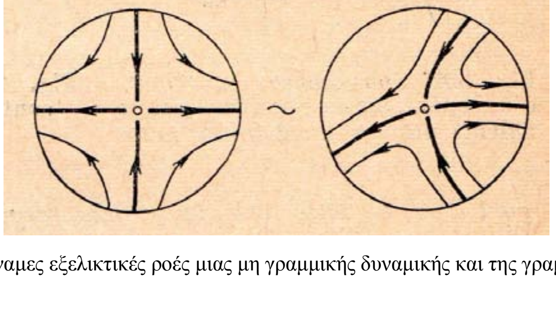
$$\begin{vmatrix} \partial_{x_1} f_1(p) - \lambda & \cdots & \partial_{x_n} f_1(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} f_n(p) & \cdots & \partial_{x_n} f_n(p) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Αν όλες οι ιδιοτιμές της γραμμικοποιημένης δυναμικής βρίσκονται εκτός του φανταστικού άξονα του μιγαδικού επιπέδου τότε λέμε ότι η κατάσταση ισορροπίας είναι *υπερβολική* και το θεώρημα *Hartman-Grobman* διασφαλίζει την ύπαρξη ομοιομορφισμού:

$$h : \mathfrak{U}_p \rightleftarrows \mathfrak{U}_0$$

όπου $\mathfrak{U}_p$ ανοιχτή περιοχή του σημείου υπερβολικής ισορροπίας και $\mathfrak{U}_0$ ανοιχτή περιοχή του $0 \in \mathbb{R}^n$, ο οποίος θέτει σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία τις τροχιές της μη γραμμικής δυναμικής με τις τροχιές της γραμμικοποιημένης δυναμικής:

$$h\left(\mathcal{O}_{x_o} \right) = \mathcal{O}'_{h(x_o)} , \quad \forall x_o \in \mathfrak{U}_p .$$



Τοπολογικά ισοδύναμες εξελικτικές ροές μιας μη γραμμικής δυναμικής και της γραμμικοποίησής της .

<u>Κατασκευή του ομοιομορφισμού του θεωρήματος Hartman-Grobman</u>

Ο ομοιομορφισμός αυτός αποκαθιστά τοπικά στην περιοχή κάθε υπερβολικής κατάστασης ισορροπίας την τοπολογική ισοδυναμία της εξελικτικής ροής της μη γραμμικής δυναμικής:

$$\mathfrak{g} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \mathfrak{g}(t,x) = \mathfrak{g}^t(x), \quad \forall t \in \mathbb{R} ,$$

με την εξελικτική ροή της γραμμικοποιημένης δυναμικής:

$$\hat{\mathfrak{g}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \hat{\mathfrak{g}}(t,x) = \hat{\mathfrak{g}}^t(x) = e^{tA}, \quad \forall t \in \mathbb{R} ,$$

και εκφράζεται ως εξής:

$$h(x) = e^{-tA} \circ h \circ \mathfrak{g}^t(x), \quad \forall x \in \mathfrak{U}_p .$$

Η τυπική κατασκευή αυτού του ομοιομορφισμού ξεκινά με την υπόθεση ότι τη δεδομένη στιγμή $t = 1$ είναι γνωστός ο τοπικός ομοιομορφισμός:

$$h_1(x) = e^{-A} \circ h_1 \circ \mathfrak{g}^{t=1}(x) .$$

Κατόπιν, για κάθε δεδομένη χρονική στιγμή, θέτουμε:

$$h_t(x) = e^{-tA} \circ h_1 \circ \mathfrak{g}^t(x)$$

και βλέπουμε ότι πρόκειται επίσης για τοπικό ομοιομορφισμό που πληροί τη συνθήκη:

$$h_t(x) = e^{-A} \circ h_t \circ \mathfrak{g}^{t=1}(x) .$$

$$[\ e^{-A} \circ h_t \circ \mathfrak{g}^1(x) = e^{-A} \circ e^{-tA} \circ h_1 \circ \mathfrak{g}^t \circ \mathfrak{g}^1(x) = e^{-tA} \circ e^{-A} \circ h_1 \circ \mathfrak{g}^t \circ \mathfrak{g}^1(x) = e^{-tA} \circ h_1 \circ \mathfrak{g}^t(x) = h_t(x)\ ] .$$

Στην περιοχή της κατάστασης ισορροπίας διαπιστώνουμε ότι $h_t = h_1$ και αυτό σημαίνει ότι η αναγωγική διαδικασία βασίζεται αποκλειστικά στον ομοιομορφισμό που ορίζεται τη στιγμή $t = 1$. Έτσι, ξεκινώντας από την αρχική κατάσταση $x(0)$ καταλήγουμε στην κατάσταση $y(1)$ διαμέσου αυτού του ομοιομορφισμού ακολουθώντας τις εξελικτικές ροές της μη γραμμικής δυναμικής και της γραμμικοποίησής της σύμφωνα με το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
x(0) \arrow[r, "\mathfrak{g}^t"] \arrow[d, "h_1"'] & x(t) \arrow[r, "\mathfrak{g}^{1-t}"] \arrow[d, "h_1"] & x(1) \arrow[d, "h_1"] \\
y(0) \arrow[r, "e^{tA}"'] & y(t) \arrow[r, "e^{(1-t)A}"'] & y(1)
\end{tikzcd}$$

Η αναδρομική σχέση σχηματίζεται ως εξής:

$$h_1^{(i+1)}(x) = e^{-A} \circ h_1^{(i)} \circ \mathfrak{g}^{t=1}(x), \quad i = 0,1,\ldots, \quad h_1^{(0)}(x) = x ,$$

και με την προϋπόθεση της σύγκλισης προκύπτει ο ζητούμενος ομοιομορφισμός που θέτει σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία τις τροχιές της μη γραμμικής δυναμικής με τις τροχιές της γραμμικοποίησής της:

$$h(x) = \lim_{n \to \infty} h_1^{(n)}(x), \quad \forall x \in \mathfrak{U}_p .$$

Ο ομοιομορφισμός αυτός δεν είναι γενικά αμφιδιαφορικός εκτός αν πληρούται επιπλέον μια συνθήκη *μη συντονισμού* των ιδιοτιμών της υπερβολικής κατάστασης ισορροπίας, όπως δηλώνεται από το θεώρημα του *Sternberg* (1958). Για την απόδειξη του θεωρήματος παραπέμπουμε στη βιβλιογραφία:

<u>Βιβλιογραφία:</u>

Vladimir Arnold, ***Ordinary Differential Equations***, Cambridge MIT Press, 1973.
J. Palis & W. De Melo, ***Geometric Theory of Dynamical Systems,*** Springer-Verlag, 1982**.**
Lawrence Perko, ***Differential Equations & Dynamical Systems,*** Springer-Verlag, 1991.
C. Robinson, ***Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, Chaos,*** CRC Press, 1999.
David Betounes, ***Differential Equations***, Springer-Verlag, 2001.
M. Hirsch, S. Smale, R.Devaney, ***Differential Equations & Dynamical Systems,*** Els. Ac. Press, 2003.
Stephen Wiggins, ***Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos,*** Springer, 2003.
James D. Meiss, ***Differential Dynamical Systems,*** Siam, 2007.

❖ **Παράδειγμα 1.** Στο ευκλείδειο επίπεδο θεωρούμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2 + x_1^2 \end{cases}$$

Η εξελικτική ροή αυτού του μη γραμμικού συστήματος εκφράζεται στο ευκλείδειο επίπεδο ως εξής:

$$\mathfrak{g} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 , \quad \mathfrak{g}(t, x_o) = \left(x_{01} e^{-t} , x_{02} e^{t} + \frac{1}{3} x_{01}^2 (e^{t} - e^{-2t}) \right) .$$

Η κατάσταση ισορροπίας εντοπίζεται στην αρχή των αξόνων και από τη γραμμικοποίηση προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

και απορρέει η έκφραση της εξελικτικής ροής της γραμμικοποιημένης δυναμικής:

$$\hat{\mathfrak{g}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 , \quad \hat{\mathfrak{g}}(t, x_o) = \left(x_{01} e^{-t} , x_{02} e^{t} \right) .$$

Η κατάσταση ισορροπίας είναι *σαγματική*, άρα *υπερβολική*, και το θεώρημα *Hartman-Grobman* δηλώνει την ύπαρξη ομοιομορφισμού που πληροί τη συνθήκη:

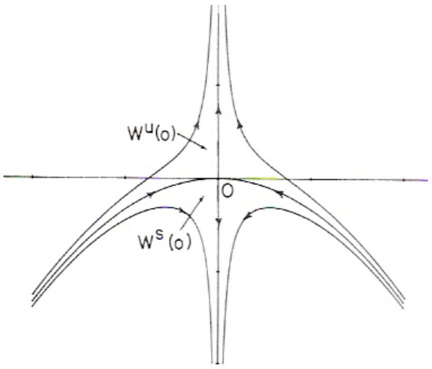
$$h \circ \mathfrak{g}^t (x_o) = \hat{\mathfrak{g}}^t \circ h(x_o)$$

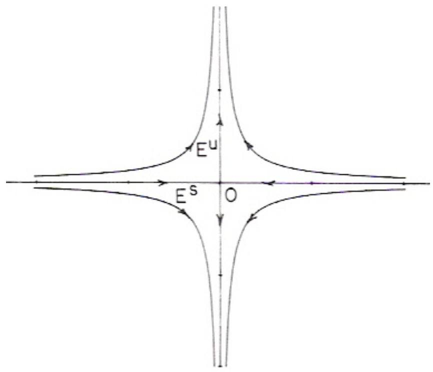
και ταυτίζει τις τροχιές της μη γραμμικής δυναμικής με τις τροχιές της γραμμικοποιημένης δυναμικής:

$$h\left(\mathcal{O}_{x_o} \right) = \mathcal{O}'_{h(x_o)} .$$

Στην προκειμένη περίπτωση ο ομοιομορφισμός αυτός δεν είναι μόνο τοπικός αλλά καθολικός:

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 , \quad h(x_1, x_2) = \left(x_1 , x_2 + x_1^2 /3 \right) .$$





Τροχιές της μη γραμμικής δυναμικής $\underset{h^{-1}}{\overset{h}{\rightleftarrows}}$ Τροχιές της γραμμικοποιημένης δυναμικής

Σχόλιο. Ο ομοιομορφισμός αυτός απορρέει από τη σχέση που ορίζεται τη στιγμή $t = 1$ ως εξής:

$$h_1(x_1, x_2) = e^{-A} \circ h\left(\mathfrak{g}^{t=1}(x_1, x_2) \right) = e^{-A} \circ h_1\left(e^{-1}x_1 , e x_2 + k x_1^2 \right) , \quad k = \frac{1}{3}(e - e^{-2}) .$$

Θέτοντας

$$h_1(x_1, x_2) = \left(\mathrm{A}(x_1, x_2), \mathrm{B}(x_1, x_2) \right)$$

προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A}(x_1, x_2) \\ \mathrm{B}(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & 1/e \end{bmatrix} \left[h_1\left(e^{-1}x_1 , e x_2 + k x_1^2 \right) \right]^T$$

δηλαδή

$$\left| \begin{array}{l} \mathrm{A}(x_1, x_2) = e \mathrm{A}\left(e^{-1}x_1 , e x_2 + k x_1^2 \right) \\ \mathrm{B}(x_1, x_2) = e^{-1} \mathrm{B}\left(e^{-1}x_1 , e x_2 + k x_1^2 \right) \end{array} \right.$$

Συνεπώς, από τον αναδρομικό τύπο:

$$h_1^{(i+1)}(x_1,x_2)=e^{-A}\circ h_1^{(i)}\circ \mathfrak{g}^1(x_1,x_2)\ ,\quad i=0,1,\ldots\ ,\quad h_1^{(0)}(x_1,x_2)=(x_1,x_2)\ .$$

προκύπτει:

$$\mathrm{A}^{(i+1)}(x_1,x_2)=e\mathrm{A}^{(i)}\left(e^{-1}x_1,\,ex_2+k\,x_1^2\right),\quad \mathrm{A}^{(0)}(x_1,x_2)=x_1\ ,\ i=0,1,\ldots$$

$$\mathrm{B}^{(i+1)}(x_1,x_2)=e^{-1}\mathrm{B}^{(i)}\left(e^{-1}x_1,\,ex_2+k\,x_1^2\right),\quad \mathrm{B}^{(0)}(x_1,x_2)=x_2\ ,\quad i=0,1,\ldots\ .$$

Ο $1^{ος}$ αναδρομικός τύπος οδηγεί απευθείας στο εξής αποτέλεσμα:

$$\mathrm{A}^{(0)}(x_1,x_2)=x_1\quad\Rightarrow\quad \mathrm{A}^{(1)}(x_1,x_2)=e\mathrm{A}^{(0)}\left(e^{-1}x_1,\,ex_2+k\,x_1^2\right)=e(e^{-1}x_1)=x_1\quad\Rightarrow\quad \mathrm{A}(x_1,x_2)=x_1\ .$$

Ο $2^{ος}$ αναδρομικός τύπος οδηγεί στο εξής αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}^{(0)}(x_1,x_2)=x_2\quad &\Rightarrow\quad \mathrm{B}^{(1)}(x_1,x_2)=e^{-1}\mathrm{B}^{(0)}\left(e^{-1}x_1,\,ex_2+kx_1^2\right)=e^{-1}\left(ex_2+kx_1^2\right)=x_2+k\,e^{-1}x_1^2\\
&\Rightarrow\quad \mathrm{B}^{(2)}(x_1,x_2)=e^{-1}\mathrm{B}^{(1)}\left(e^{-1}x_1,\,ex_2+kx_1^2\right)=\ldots=x_2+k\,e^{-1}(1+e^{-3})x_1^2\\
&\Rightarrow\quad \mathrm{B}^{(3)}(x_1,x_2)=e^{-1}\mathrm{B}^{(2)}\left(e^{-1}x_1,\,ex_2+kx_1^2\right)=\ldots=x_2+k\,e^{-1}(1+e^{-3}+e^{-6})x_1^2\\
&\Rightarrow\quad \mathrm{B}^{(4)}(x_1,x_2)=e^{-1}\mathrm{B}^{(3)}\left(e^{-1}x_1,\,ex_2+kx_1^2\right)=\ldots=x_2+k\,e^{-1}(1+e^{-3}+e^{-6}+e^{-9})x_1^2\\
\Rightarrow\quad \ldots\quad &\Rightarrow\quad \mathrm{B}^{(n)}(x_1,x_2)=e^{-1}\mathrm{B}^{(n-1)}\left(e^{-1}x_1,\,ex_2+kx_1^2\right)=\ldots=x_2+k\,e^{-1}\left(1+e^{-3}+e^{-6}+e^{-9}+\ldots+e^{-3(n-1)}\right)x_1^2\\
&\Rightarrow\quad \mathrm{B}(x_1,x_2)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{B}^{(n)}(x_1,x_2)=x_2+\frac{k\,e^{-1}}{1-e^{-3}}x_1^2=x_2+x_1^2/3\ .
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$h\,(x_1,x_2)=\left(x_1,\,x_2+x_1^2/3\right)\quad \text{και}\quad h^{-1}\,(x_1,x_2)=\left(x_1,\,x_2-x_1^2/3\right).$$

Διαπιστώνουμε ότι:

$$h\circ\mathfrak{g}^t(x_1,x_2)=\left(e^{-t}x_1\,,\,e^t(x_2+x_1^2/3)\right)=\hat{\mathfrak{g}}^t\circ h(x_1,x_2)\ ..$$

Ο ομοιομορφισμός αυτός ταυτίζει τις τροχιές της μη γραμμικής δυναμικής με τις τροχιές της γραμμικοποιημένης δυναμικής, όχι μόνο τοπικά αλλά καθολικά στο ευκλείδειο επίπεδο. Διαπιστώνουμε ότι:

$E^s=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\ /\ x_2=0\right\}$ (Ευσταθής υπόχωρος της γραμμικοποιημένης δυναμικής)

$W^s=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\ /\ x_2=-x_1^2/3\right\}=h^{-1}(E^s)$ (Ευσταθής πολλαπλότητα της μη γραμμικής δυναμικής)

$E^u=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\ /\ x_2=0\right\}$ (Ασταθής υπόχωρος της γραμμικοποιημένης δυναμικής)

$W^u=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\ /\ x_1=0\right\}=h^{-1}(E^u)$ (Ασταθής πολλαπλότητα της μη γραμμικής δυναμικής)

$$\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\ /\ x_2=1/x_1\right\}=h\left(\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\ /\ x_2=1/x_1-x_1^2/3\right\}\right).$$

❖ **Παράδειγμα 2.** Στο ευκλείδειο επίπεδο θεωρούμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_1\\[2mm] \dfrac{dx_2}{dt}=-x_2+x_1^2\end{cases}$$

Η εξελικτική ροή αυτού του μη γραμμικού συστήματος εκφράζεται στο ευκλείδειο επίπεδο ως εξής:

$$\mathfrak{g}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\ ,\quad \mathfrak{g}(t,x_o)=\left(x_{01}e^t\,,\,x_{02}e^{-t}+\frac{1}{3}x_{01}^2(e^{2t}-e^{-t})\right).$$

Η κατάσταση ισορροπίας εντοπίζεται στην αρχή των αξόνων και από τη γραμμικοποίηση προκύπτει:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

και απορρέει η έκφραση της εξελικτικής ροής της γραμμικοποιημένης δυναμικής:

$$\hat{\mathfrak{g}}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\ ,\quad \hat{\mathfrak{g}}(t,x_o)=\left(x_{01}e^t\,,x_{02}e^{-t}\right).$$

Η κατάσταση ισορροπίας είναι *σαγματική*, άρα *υπερβολική*, και το θεώρημα *Hartman-Grobman* δηλώνει την ύπαρξη ομοιομορφισμού που στην περιοχή της ταυτίζει τοπολογικά τις δυο εξελικτικές ροές:

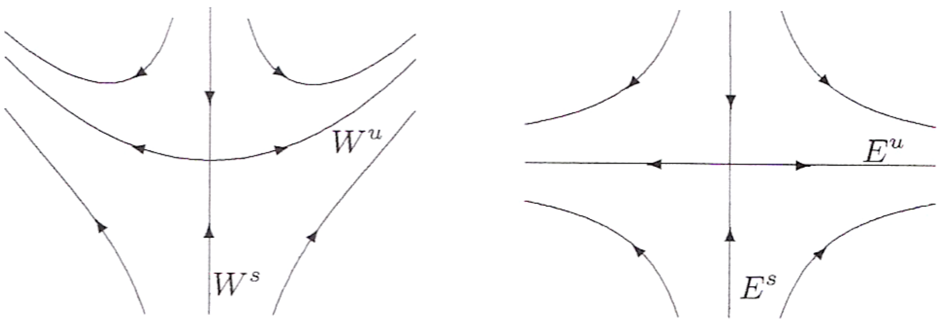
$$h\circ \mathfrak{g}^t(x_o) = \hat{\mathfrak{g}}^t \circ h(x_o)$$

μετατρέποντας τις τροχιές της μη γραμμικής δυναμικής στις τροχιές της γραμμικοποιημένης δυναμικής:

$$h\left(\mathcal{O}_{x_o}\right) = \mathcal{O}'_{h(x_o)} .$$

Στην προκειμένη περίπτωση ο ομοιομορφισμός αυτός δεν είναι μόνο τοπικός αλλά καθολικός:

$$h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad h(x_1,x_2) = \left(x_1,\, x_2 - x_1^2/3\right).$$



Τροχιές της μη γραμμικής δυναμικής $\underset{\xleftarrow[h^{-1}]{}}{\xrightarrow{h}}$ Τροχιές της γραμμικοποιημένης δυναμικής

Σχόλιο. Ο ομοιομορφισμός αυτός απορρέει από τη σχέση που ορίζεται τη στιγμή $t=1$ ως εξής:

$$h_1(x_1,x_2) = e^{-A}\circ h\left(\mathfrak{g}^{t=1}(x_1,x_2)\right) = e^{-A}\circ h_1\left(x_1 e,\, x_2 e^{-1} + k\,x_1^2\right), \quad k = \frac{1}{3}(e^2 - e^{-1}) .$$

Θέτοντας

$$h_1(x_1,x_2) = \left(\mathrm{A}(x_1,x_2), \mathrm{B}(x_1,x_2)\right)$$

προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A}(x_1,x_2) \\ \mathrm{B}(x_1,x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} \left[h_1\left(x_1 e,\, x_2 e^{-1} + k\,x_1^2\right) \right]^T$$

δηλαδή

$$\left| \begin{array}{l} \mathrm{A}(x_1,x_2) = e^{-1}\mathrm{A}\left(e x_1,\, e^{-1}x_2 + k\,x_1^2\right) \\ \mathrm{B}(x_1,x_2) = e\,\mathrm{B}\left(e x_1,\, e^{-1}x_2 + k\,x_1^2\right) \end{array} \right.$$

Συνεπώς, από τον αναδρομικό τύπο:

$$h_1^{(i+1)}(x_1,x_2) = e^{-A}\circ h_1^{(i)} \circ \mathfrak{g}^1(x_1,x_2)\ , \quad i = 0,1,\ldots, \quad h_1^{(0)}(x_1,x_2) = (x_1,x_2) .$$

προκύπτει:

$$\mathrm{A}^{(i+1)}(x_1,x_2) = e^{-1}\mathrm{A}^{(i)}\left(e x_1,\, e^{-1}x_2 + k\,x_1^2\right), \quad \mathrm{A}^{(0)}(x_1,x_2) = x_1\ , \ i = 0,1,\ldots$$

$$\mathrm{B}^{(i+1)}(x_1,x_2) = e\mathrm{B}^{(i)}\left(e x_1,\, e^{-1}x_2 + k\,x_1^2\right), \quad \mathrm{B}^{(0)}(x_1,x_2) = x_2\ , \quad i = 0,1,\ldots .$$

Ο $1^{ος}$ αναδρομικός τύπος οδηγεί απευθείας στο εξής αποτέλεσμα:

$$\mathrm{A}^{(0)}(x_1,x_2) = x_1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{A}^{(1)}(x_1,x_2) = e^{-1}\mathrm{A}^{(0)}\left(e x_1,\, e^{-1}x_2 + k\,x_1^2\right) = e^{-1}(e x_1) = x_1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{A}(x_1,x_2) = x_1 .$$

Ο $2^{ος}$ αναδρομικός τύπος δεν οδηγεί σε σύγκλιση όμως, θέτοντας $x_1' = e x_1$, $x_2' = e^{-1}x_2 + k\,x_1^2$, προκύπτει:

$$\mathrm{B}^{(i+1)}(x_1,x_2) = e^{-1}\mathrm{B}^{(i)}\left(e^{-1}x_1,\, e x_2 - k e^{-1}x_1^2\right), \quad i = 0,1,\ldots ,$$

άρα

$$\begin{aligned} \mathrm{B}^{(0)}(x_1,x_2) = x_2 \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{B}^{(1)}(x_1,x_2) = e^{-1}\mathrm{B}^{(0)}\left(e^{-1}x_1,\, e x_2 - k e^{-1}x_1^2\right) = e^{-1}\left(e x_2 - k e^{-1}x_1^2\right) = x_2 - k e^{-2}x_1^2 \\ &\Rightarrow \quad \mathrm{B}^{(2)}(x_1,x_2) = e^{-1}\mathrm{B}^{(1)}\left(e^{-1}x_1,\, e x_2 - k e^{-1}x_1^2\right) = \ldots = x_2 - k e^{-2}x_1^2 - k e^{-5}x_1^2 = x_2 - k e^{-2}(1+e^{-3})x_1^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{B}^{(3)}(x_1,x_2) = e^{-1}\mathrm{B}^{(2)}\left(e^{-1}x_1,\, ex_2 - ke^{-1}x_1^2\right) = \ldots = x_2 - ke^{-2}(1+e^{-3}+e^{-6})x_1^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{B}^{(4)}(x_1,x_2) = e^{-1}\mathrm{B}^{(3)}\left(e^{-1}x_1,\, ex_2 - ke^{-1}x_1^2\right) = \ldots = x_2 - ke^{-2}(1+e^{-3}+e^{-6}+e^{-9})x_1^2$$

$$\Rightarrow \quad \ldots \quad \Rightarrow \quad \mathrm{B}^{(n)}(x_1,x_2) = e^{-1}\mathrm{B}^{(n-1)}\left(e^{-1}x_1,\, ex_2 - ke^{-1}x_1^2\right) = \ldots = x_2 - ke^{-2}\left(1+e^{-3}+e^{-6}+e^{-9}+\ldots e^{-3(n-1)}\right)x_1^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{B}(x_1,x_2) = \lim_{n\to\infty}\mathrm{B}^{(n)}(x_1,x_2) = x_2 - \frac{ke^{-2}}{1-e^{-3}}x_1^2 = x_2 - x_1^2/3\,.$$

Συνεπώς

$$h(x_1,x_2) = \left(x_1,\, x_2 - x_1^2/3\right) \quad \text{και} \quad h^{-1}(x_1,x_2) = \left(x_1,\, x_2 + x_1^2/3\right).$$

Διαπιστώνουμε ότι:

$$h \circ \mathfrak{g}^t(x_1,x_2) = \left(e^{-t}x_1,\, e^t(x_2 - x_1^2/3)\right) = \hat{\mathfrak{g}}^t \circ h(x_1,x_2)\,.$$

Ο ομοιομορφισμός αυτός ταυτίζει τις τροχιές της μη γραμμικής δυναμικής με τις τροχιές της γραμμικοποιημένης δυναμικής, όχι μόνο τοπικά αλλά καθολικά στο ευκλείδειο επίπεδο. Διαπιστώνουμε ότι:

$E^s = \left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x_2 = 0\right\}$ (Ευσταθής υπόχωρος της γραμμικοποιημένης δυναμικής)

$W^s = \left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x_2 = x_1^2/3\right\} = h^{-1}(E^s)$ (Ευσταθής πολλαπλότητα της μη γραμμικής δυναμικής)

$E^u = \left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x_2 = 0\right\}$ (Ασταθής υπόχωρος της γραμμικοποιημένης δυναμικής)

$W^u = \left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x_1 = 0\right\} = h^{-1}(E^u)$ (Ασταθής πολλαπλότητα της μη γραμμικής δυναμικής)

$$\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x_2 = 1/x_1\right\} = h\left(\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x_2 = 1/x_1 + x_1^2/3\right\}\right).$$

❖ **Παράδειγμα 3.** Στο ευκλείδειο επίπεδο θεωρούμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 \\[2mm] \dfrac{dx_2}{dt} = 4x_2 + x_1^2 \end{cases}$$

Η εξελικτική ροή αυτού του μη γραμμικού συστήματος εκφράζεται στο ευκλείδειο επίπεδο ως εξής:

$$\mathfrak{g} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, \quad \mathfrak{g}(t,x_o) = \left(x_{01}e^{2t},\, e^{4t}(x_{02} + t\,x_{01}^2)\right).$$

Η κατάσταση ισορροπίας εντοπίζεται στην αρχή των αξόνων και από τη γραμμικοποίηση προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

και απορρέει η έκφραση της εξελικτικής ροής της γραμμικοποιημένης δυναμικής:

$$\hat{\mathfrak{g}} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, \quad \hat{\mathfrak{g}}(t,x_o) = \left(x_{01}e^{2t},\, x_{02}e^{4t}\right).$$

Η κατάσταση ισορροπίας είναι *σαγματική*, άρα *υπερβολική*, και σύμφωνα με το θεώρημα *Hartman-Grobman* υπάρχει ομοιομορφισμός που στην περιοχή της ταυτίζει τοπολογικά τις δυο εξελικτικές ροές:

$$h \circ \mathfrak{g}^t(x_o) = \hat{\mathfrak{g}}^t \circ h(x_o)$$

μετατρέποντας τις τροχιές της μη γραμμικής δυναμικής στις τροχιές της γραμμικοποιημένης δυναμικής:

$$h\left(\mathcal{O}_{x_o}\right) = \mathcal{O}'_{h(x_o)}\,.$$

Σχόλιο. Στο παράδειγμα αυτό ο ομοιομορφισμός λειτουργεί μόνο τοπικά και χρειάζεται λίγο μεγαλύτερη προσοχή. Η απευθείας εφαρμογή της αναδρομικής σχέσης οδηγεί σε μια έκφραση:

$$h(x_1,x_2) = \left(x_1,\, x_2 + \phi(x_1,x_2)\right)$$

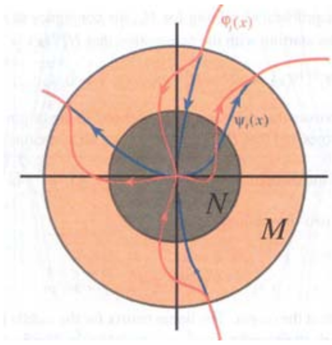
χωρίς όμως να διασφαλίζεται η σύγκλιση της αναδρομικής διαδικασίας προσδιορισμού του όρου $\phi(x_1,x_2)$.

Αλλά, το ότι το ζητούμενό μας είναι τοπικό οδηγεί στη θεώρηση μιας μη γραμμικής δυναμικής η οποία σε μια περιοχή της κατάστασης ισορροπίας ταυτίζεται με τη δοσμένη μη γραμμική δυναμική και πέρα από μια ευρύτερη περιοχή ταυτίζεται με τη γραμμικοποιημένη δυναμική:

$$\dot{x} = Ax + b(x)$$

Συγκεκριμένα, σε μια περιοχή της κατάστασης ισορροπίας ο όρος $b(x)$ λειτουργεί ως διαταραχή της γραμμικοποιημένης δυναμικής και πέρα από μια ευρύτερη περιοχή είναι μηδενικός, διασφαλίζοντας όμως ότι είναι διαφορίσιμος και φραγμένος. Η κατασκευή μιας τέτοιας συνάρτησης είναι κλασική (*bump function*) και στην απλή περίπτωσή μας πρόκειται για συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής που, για $0<\varepsilon<\delta$, πληροί τη συνθήκη:

$$b(\xi) = \left| \begin{array}{ll} \xi\,, & |\xi|<\varepsilon \\ 0\,, & |\xi|>\delta \end{array} \right.$$



Οι τροχιές της μη γραμμικής δυναμικής $\mathfrak{g}^t(x) = \psi_t(x)$ και της γραμμικοποίησής της $\hat{\mathfrak{g}}^t(x) = \varphi_t(x)$
θα ταυτιστούν τοπολογικά διαμέσου του ζητούμενου ομοιομορφισμού στην σκιασμένη περιοχή *N*.
Στο δακτύλιο *M* εξελίσσονται οι τροχιές της γραμμικής δυναμικής και της διαταραχής της
και πέρα από αυτόν η διαταραχή μηδενίζεται και οι τροχιές συμπίπτουν με εκείνες της γραμμικής δυναμικής.

Θεωρούμε τώρα το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 4x_2 + b(x_1^2) \end{array} \right.$$

που προφανώς η εξελικτική του ροή ταυτίζεται με αυτή του αρχικού μη γραμμικού συστήματος για $x_1^2<\varepsilon$ και με εκείνη του γραμμικοποιημένου συστήματος για $x_1^2>\delta$. Προκύπτει:

$$x_1(t) = x_{01}e^{2t}$$

και

$$x_2(t) = e^{4t}\left(x_{02} + \int_0^t e^{-4s} b(x_{01}^2 e^{4s})\,ds\right) = e^{4t}\left(x_{02} + \mathfrak{B}(x_{01}^2, t)\right).$$

Αν $x_1^2(s)<\varepsilon$ τότε, για κάθε $s:\ 0<s<t$, ισχύει:

$$|x_{01}| < \sqrt{\varepsilon}\, e^{-2t} \quad \Rightarrow \quad b(x_1^2(s)) = x_1^2(s) \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{B}(x_{01}^2, t) = x_{01}^2 t\,.$$

Αν $x_1^2(s)>\delta$ τότε, για κάθε $s:\ 0<s<t$, ισχύει:

$$|x_{01}| > \sqrt{\delta} \quad \Rightarrow \quad b(x_1^2(s)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{B}(x_{01}^2, t) = 0\,.$$

Θέτοντας $t=1$ και γράφοντας $\mathfrak{B}(x_1^2) = \mathfrak{B}(x_1^2, 1)$, προκύπτει:

$$\mathfrak{B}(x_1^2) = \left| \begin{array}{ll} x_1^2\,, & |x_1| < \sqrt{\varepsilon}\, e^{-2} \\ 0\,, & |x_1| > \sqrt{\delta} \end{array} \right.$$

Τώρα, μπορούμε να ξεκινήσουμε την αναδρομική διαδικασία γράφοντας:

$$h_1(x_1, x_2) = e^{-A} \circ h_1\left(\mathfrak{g}^{t=1}(x_1, x_2)\right) = e^{-A} \circ h_1\left(e^2 x_1,\, e^4(x_2 + \mathfrak{B}(x_1^2)\right)$$

και θέτοντας

$$h_1(x_1, x_2) = \left(\mathrm{A}(x_1, x_2), \mathrm{B}(x_1, x_2)\right)$$

προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A}(x_1,x_2) \\ \mathrm{B}(x_1,x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2} & 0 \\ 0 & e^{-4} \end{bmatrix} \left[h_1\left(e^2 x_1,\, e^4(x_2+\mathfrak{B}(x_1^2))\right) \right]^T$$

άρα:

$$\mathrm{A}^{(i+1)}(x_1,x_2) = e^{-2}\mathrm{A}^{(i)}\left(e^2x_1,\, e^4(x_2+\mathfrak{B}(x_1^2))\right),\quad \mathrm{A}^{(0)}(x_1,x_2)=x_1,\ i=0,1,...$$

$$\mathrm{B}^{(i+1)}(x_1,x_2) = e^{-4}\mathrm{B}^{(i)}\left(e^2x_1,\, e^4(x_2+\mathfrak{B}(x_1^2))\right),\quad \mathrm{B}^{(0)}(x_1,x_2)=x_2,\ i=0,1,....$$

Ο 1$^{\text{ος}}$ αναδρομικός τύπος οδηγεί απευθείας στο εξής αποτέλεσμα:

$$\mathrm{A}^{(0)}(x_1,x_2)=x_1 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{A}^{(1)}(x_1,x_2)=e^{-2}\mathrm{A}^{(0)}\left(e^2x_1, e^4(x_2+\mathfrak{B}(x_1^2))\right)=e^{-2}(e^2x_1)=x_1 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{A}(x_1,x_2)=x_1.$$

Ο 2$^{\text{ος}}$ αναδρομικός τύπος οδηγεί στο εξής:

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}^{(0)}(x_1,x_2)=x_2 \quad&\Rightarrow\quad \mathrm{B}^{(1)}(x_1,x_2)=e^{-4}\mathrm{B}^{(0)}\left(e^2x_1, e^4(x_2+\mathfrak{B}(x_1^2))\right)=e^{-4}\left(e^4(x_2+\mathfrak{B}(x_1^2))\right)=x_2+\mathfrak{B}(x_1^2)\\
&\Rightarrow\quad \mathrm{B}^{(2)}(x_1,x_2)=e^{-4}\mathrm{B}^{(1)}\left(e^2x_1, e^4(x_2+\mathfrak{B}(x_1^2))\right)=...=x_2+\mathfrak{B}(x_1^2)+e^{-4}\mathfrak{B}(e^4x_1^2)\\
&\Rightarrow\quad \mathrm{B}^{(3)}(x_1,x_2)=e^{-4}\mathrm{B}^{(2)}\left(e^2x_1, e^4(x_2+\mathfrak{B}(x_1^2))\right)=...=x_2+\mathfrak{B}(x_1^2)+e^{-4}\mathfrak{B}(e^4x_1^2)+e^{-8}\mathfrak{B}(e^8x_1^2)\\
\Rightarrow\quad \ldots \quad&\Rightarrow\quad \mathrm{B}^{(N)}(x_1,x_2)=e^{-4}\mathrm{B}^{(N-1)}\left(e^2x_1, e^4(x_2+\mathfrak{B}(x_1^2))\right)=...=x_2+\sum_{n=0}^{N-1}e^{-4n}\mathfrak{B}(e^{4n}x_1^2)\\
&\Rightarrow\quad \mathrm{B}(x_1,x_2)=\lim_{N\to\infty}\mathrm{B}^{(N)}(x_1,x_2)=x_2+\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N-1}e^{-4n}\mathfrak{B}(e^{4n}x_1^2).
\end{aligned}$$

Αν θέταμε $\mathfrak{B}(x_1^2)=x_1^2$ τότε ο γενικός όρος της σειράς αθροίζεται στο Nx_1^2 και απειρίζεται όταν $N\to\infty$, αλλά έξω από μια ευρύτερη περιοχή της κατάστασης ισορροπίας η συνάρτηση $\mathfrak{B}(x_1^2)$ μηδενίζεται και αυτό σημαίνει ότι μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος της σειράς υπεισέρχεται στον προηγούμενο υπολογισμό. Έτσι, επιλέγοντας ένα N τέτοιο ώστε $e^{4N}x_1^2\geq\delta$ και συγκεκριμένα:

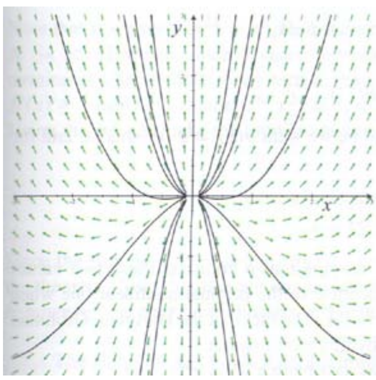
$$N(x_1)\geq(1/4)\,ln(\delta/x_1^2) \quad\Rightarrow\quad \mathfrak{B}(e^{4n}x_1^2)=0$$

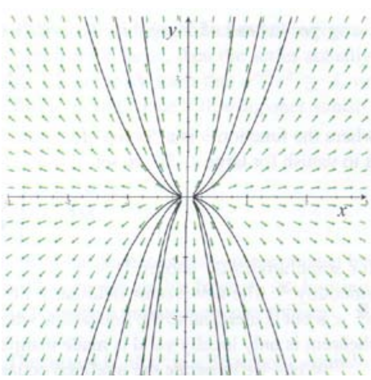
οπότε στην περιοχή της κατάστασης ισορροπίας προσδιορίζεται η 2$^{\eta}$ συνιστώσα του ζητούμενου ομοιομορφισμού:

$$\mathrm{B}(x_1,x_2)=x_2+\sum_{n=0}^{N(x_1)}e^{-4n}\mathfrak{B}(e^{4n}x_1^2).$$

Άρα, ο ομοιομορφισμός που στην περιοχή της κατάστασης ισορροπίας ταυτίζει τοπολογικά την εξελικτική ροή της μη γραμμικής δυναμικής με την εξελικτική ροή της γραμμικοποίησής της εκφράζεται ως εξής:

$$h(x_1,x_2)=\left(x_1,\ x_2+\sum_{n=0}^{N(x_1)}e^{-4n}\mathfrak{B}(e^{4n}x_1^2)\right).$$





Τροχιές της μη γραμμικής δυναμικής $\quad \underset{h^{-1}}{\overset{h}{\rightleftarrows}} \quad$ Τροχιές της γραμμικοποιημένης δυναμικής

Ο ομοιομορφισμός μετασχηματίζει τοπικά στην περιοχή της κατάστασης ισορροπίας τις τροχιές της μη γραμμικής δυναμικής στις τροχιές της γραμμικοποιημένης δυναμικής.

ΘΕΜΑΤΑ ΜΕΛΕΤΗΣ

❖ **1.** Στο ευκλείδειο επίπεδο θεωρούμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_1^2/2 - x_1x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1x_2 - x_2 \end{cases}$$

- Για κάθε μια από τις καταστάσεις ισορροπίας της δυναμικής που ορίζεται από αυτό το σύστημα εξετάστε τη δυνατότητα εφαρμογής του θεωρήματος *Hartman-Grobman* ώστε να μπορέσετε να αποφανθείτε για την τοπολογική συμπεριφορά των τροχιών στην περιοχή τους. Επιχειρείστε να συνθέσετε τις τοπικές πληροφορίες ώστε να σκιαγραφήσετε την καθολική συμπεριφορά των τροχιών στο ευκλείδειο επίπεδο.

Σχόλιο. Η μη γραμμική δυναμική που ορίζεται από αυτό το σύστημα εμφανίζει τρεις καταστάσεις ισορροπίας και από τις αντίστοιχες γραμμικοποιήσεις προκύπτουν τα εξής συστήματα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων:

$\mathrm{A}(0,0)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Σάγμα: $\lambda_{1,2} = \pm 1$

$\mathrm{B}(1,1/2)$

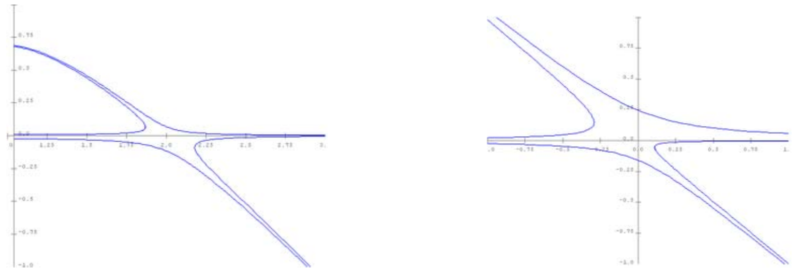
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Εστία: $\lambda_{1,2} = (-1 \pm i\sqrt{7})/4$

$\mathrm{C}(2,0)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Σάγμα: $\lambda_{1,2} = \pm 1$

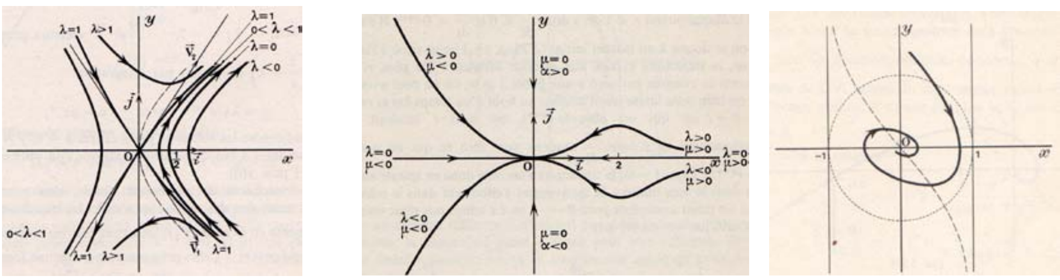


Τροχιές της μη γραμμικής δυναμικής και τροχιές της γραμμικοποιημένης δυναμικής στην περιοχή της ισορροπίας C.

❖ **2.** Στο ευκλείδειο επίπεδο θεωρούμε τα ακόλουθα συστήματα διαφορικών εξισώσεων:

$$[1]\ \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 - x_2^2 \end{cases} \qquad [2]\ \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_2 + x_1x_2 \end{cases} \qquad [3]\ \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 - x_2 + x_1^2x_2 \end{cases}$$

- Εξετάστε τη δυνατότητα εφαρμογής του θεωρήματος *Hartman-Grobman* ώστε να συμπεράνετε σε κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις την τοπολογική συμπεριφορά των τροχιών στην περιοχή της κατάστασης ισορροπίας που εντοπίζεται στην αρχή των αξόνων. Κατόπιν, προσδιορίστε και κατασκευάστε σε κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις τις τροχιές της μη γραμμικής δυναμικής και τις τροχιές της γραμμικοποίησής της και δοκιμάστε να αναπτύξετε την αναδρομική σχέση που οδηγεί στην κατασκευή του ομοιομορφισμού που διασφαλίζει την τοπική τοπολογική ταύτισή τους.



Σάγμα **Κόμβος** **Εστία**

Τροχιές στο ευκλείδειο επίπεδο των τριών μη γραμμικών συστημάτων.

Σχόλιο. Κάθε ένα από αυτά τα μη γραμμικά συστήματα εμφανίζει μια μόνο κατάσταση ισορροπίας εντοπισμένη στην αρχή των αξόνων του ευκλείδειου επιπέδου και από τις αντίστοιχες γραμμικοποιήσεις προκύπτει:

[1'] $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$ **[2']** $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$ **[3']** $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$

[1] Κατάσταση ισορροπίας: Σάγμα.

Γραμμικοποιημένο σύστημα: Ιδιοτιμές: $\lambda_1=-\sqrt{2},\ \lambda_2=\sqrt{2}$, Ιδιοδιανύσματα: $\vec{V}_1=\left(1,-\sqrt{2}\right),\ \vec{V}_2=\left(1,\sqrt{2}\right)$.

Το θεώρημα *Hartman-Grobman* δηλώνει την ύπαρξη ομοιομορφισμού που στην περιοχή της σαγματικής κατάστασης ισορροπίας ταυτίζει τις τροχιές της εξελικτικής ροής της μη γραμμικής δυναμικής με εκείνες της εξελικτικής ροής της γραμμικοποιημένης δυναμικής που εκφράζεται ως εξής:

$$\hat{\mathfrak{g}}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad \hat{\mathfrak{g}}(t,x_o)=\left(x_{01}e^{-t\sqrt{2}},x_{02}e^{t\sqrt{2}}\right).$$

Το σύστημα των μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων ανάγεται στην εξίσωση *Bernoulli*:

$$\frac{dx_2}{dx_1}+x_2=2\,(x_1/x_2)$$

και από την επίλυση της προκύπτουν οι καμπύλες στις οποίες εξελίσσονται οι τροχιές της εξελικτικής ροής:

$$C_\lambda:\ x_2^2=\lambda e^{-2x_1}+2x_1-1\ ,\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Διαπιστώνουμε ότι δύο τροχιές της μη γραμμικής δυναμικής κατευθύνονται προς την κατάσταση ισορροπίας κατά αντιστοιχία προς τις τροχιές της γραμμικοποιημένης δυναμικής που κατευθύνονται στην αρχή των αξόνων επάνω στον ιδιοάξονα της αρνητικής ιδιοτιμής, συγκροτώντας μια λεία καμπύλη που συναντά εφαπτομενικά αυτόν τον ιδιοάξονα στην κατάσταση ισορροπίας. Επίσης, δύο τροχιές απομακρύνονται από την κατάσταση ισορροπίας κατά αντιστοιχία προς τις τροχιές της γραμμικοποιημένης δυναμικής που απομακρύνονται από την αρχή των αξόνων επάνω στον ιδιοάξονα της θετικής ιδιοτιμής, συγκροτώντας μια λεία καμπύλη που συναντά εφαπτομενικά αυτόν τον ιδιοάξονα στην κατάσταση ισορροπίας. Οι υπόλοιπες τροχιές εξελίσσονται επίσης κατά αντιστοιχία προς τις τροχιές του γραμμικοποιημένου συστήματος και η αντιστοιχία αυτή, όπως και οι προηγούμενες, ορίζεται στην περιοχή της κατάστασης ισορροπίας από τον ομοιομορφισμό:

$$h(x_1,x_2)=e^{-tA}\circ h\circ\mathfrak{g}^t(x_1,x_2).$$

Επιχειρείστε να προσδιορίσετε την έκφραση της εξελικτικής ροής της μη γραμμικής δυναμικής τη στιγμή $t=1$ προκειμένου να κατασκευάσετε αυτό τον ομοιομορφισμό αναπτύσσοντας την αναδρομική σχέση:

$$h_1^{(i+1)}(x)=e^{-A}\circ h_1^{(i)}\circ\mathfrak{g}^{t=1}(x)\ ,\quad i=0,1,\ldots\ ,\ h_1^{(0)}(x)=x\ ,\quad h(x)=\lim_{n\to\infty}h_1^{(n)}(x).$$

[2] Κατάσταση ισορροπίας: Κόμβος.

Γραμμικοποιημένο σύστημα: Ιδιοτιμές: $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-2$, Ιδιοδιανύσματα: $\vec{V}_1=(1,0),\ \vec{V}_2=(0,1)$.

Το θεώρημα *Hartman-Grobman* εξασφαλίζει την ύπαρξη ομοιομορφισμού που στην περιοχή της κομβικής κατάστασης ισορροπίας ταυτίζει τις τροχιές της εξελικτικής ροής της μη γραμμικής δυναμικής με εκείνες της εξελικτικής ροής της γραμμικοποιημένης δυναμικής που εκφράζεται ως εξής:

$$\hat{\mathfrak{g}}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad \hat{\mathfrak{g}}(t,x_o)=\left(x_{01}e^{-t},x_{02}e^{-2t}\right).$$

Το σύστημα των μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων ανάγεται στην εξίσωση:

$$\frac{dx_2}{dx_1}=2(x_2/x_1)-x_2\quad\Rightarrow\quad x_2=\lambda x_1^2e^{-x_1}$$

από όπου προκύπτουν οι λύσεις:

$$x_1(t)=\mu e^{-t}\ ,\ x_2(t)=\ldots\ ,\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\ ,$$

και οι ειδικές λύσεις:

$$x_1(t)\equiv 0\quad \text{και}\quad x_2(t)=\alpha e^{-2t}\ ,\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

Διαπιστώνουμε ότι τέσσερις τροχιές της μη γραμμικής δυναμικής εξελίσσονται στους ημιάξονες όπως οι αντίστοιχες τροχιές της γραμμικοποιημένης δυναμικής κατευθυνόμενες προς την κατάσταση ισορροπίας. Οι υπόλοιπες τροχιές, στην περιοχή της κατάστασης ισορροπίας, εξελίσσονται κατά αντιστοιχία προς τις τροχιές του γραμμικοποιημένου συστήματος και η αντιστοιχία αυτή ορίζεται τοπικά από τον ομοιομορφισμό:

$$h(x_1,x_2)=e^{-tA}\circ h\circ\mathfrak{g}^t(x_1,x_2).$$

Επιχειρείστε να προσδιορίσετε την έκφραση της εξελικτικής ροής της μη γραμμικής δυναμικής τη στιγμή $t=1$ προκειμένου να κατασκευάσετε αυτό τον ομοιομορφισμό αναπτύσσοντας την αναδρομική σχέση:

$$h_1^{(i+1)}(x) = e^{-A} \circ h_1^{(i)} \circ \mathfrak{g}^{t=1}(x)\ ,\quad i = 0,1,\ldots\ ,\ h_1^{(0)}(x) = x\ ,\quad h(x) = \lim_{n\to\infty} h_1^{(n)}(x)\ .$$

[3] Κατάσταση ισορροπίας: Εστία.

Γραμμικοποιημένο σύστημα: Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = -1/2 + i\sqrt{3}/2,\quad \lambda_2 = -1/2 - i\sqrt{3}/2$.

Το θεώρημα *Hartman-Grobman* εξασφαλίζει την ύπαρξη ομοιομορφισμού που στην περιοχή της εστιακής κατάστασης ισορροπίας ταυτίζει τις τροχιές της εξελικτικής ροής της μη γραμμικής δυναμικής με εκείνες της εξελικτικής ροής της γραμμικοποιημένης δυναμικής. Οι τροχιές της γραμμικοποιημένης δυναμικής εξελίσσονται σπειροειδώς γύρω από την εστιακή κατάσταση ισορροπίας και μπορούν να προσδιοριστούν περνώντας στις πολικές συντεταγμένες:

$$\begin{cases} \dot r = \alpha r \\ \dot\theta = \omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r(t) = r_o e^{\alpha t} \\ \theta(t) = \omega t + \theta_o \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = r_o e^{\alpha t}\cos(\omega t + \theta_o) \\ y_2(t) = r_o e^{\alpha t}\sin(\omega t + \theta_o) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \ldots \\ x_2(t) = \ldots \end{cases}$$

Το σύστημα των μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων εκφράζεται στις πολικές συντεταγμένες ως εξής:

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = -r(1 - r^2\cos^2\theta)\sin\theta \\ \dfrac{d\theta}{dt} = -1 - (1 - r^2\cos^2\theta)\sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

Οι τροχιές εξελίσσονται σπειροειδώς γύρω από την κατάσταση ισορροπίας και τείνουν προς αυτήν με την πάροδο του χρόνου:

$$t - t_o = -\int_{\theta_o}^{-\infty} \frac{d\theta}{1 + (1 - r^2\cos^2\theta)\sin\theta\cos\theta}\ .$$

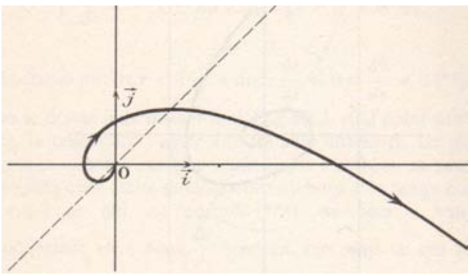
- Εξετάστε το τι διαφορετικό θα συμβεί αν θεωρήσουμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων:

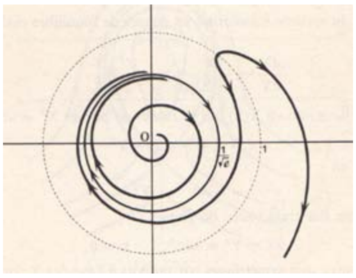
$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_2 + x_1 x_2 \end{cases}$$

❖ **3.** Εξετάστε τη σχέση της εξελικτικής ροής της δυναμικής που ορίζεται από τα ακόλουθα συστήματα διαφορικών εξισώσεων με εκείνη της γραμμικοποίησής τους στις καταστάσεις ισορροπίας:

[1] $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 + (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2 \end{cases}$$

[2] $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 + x_1 / ln(x_1^2 + x_2^2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2 + x_2 / ln(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$





Σχόλιο. Και τα δυο συστήματα εμφανίζουν μια μοναδική κατάσταση ισορροπίας που εντοπίζεται στην αρχή των αξόνων και εκεί, παρότι δεν ορίζεται η ιακωβιανή τους, η γραμμικοποίησή τους εκφράζεται με το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} \dot x_1 \\ \dot x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Το γραμμικό αυτό σύστημα εμφανίζει στην αρχή των αξόνων μια ελκτική εστιακή κατάσταση ισορροπίας που χαρακτηρίζεται από τις ιδιοτιμές $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$ και οι τροχιές του εξελίσσονται στη λογαριθμική σπείρα:

$$r = c e^{-\theta} \quad \Rightarrow \quad r(t) = r_o e^{-t}\ .$$

- Το 1ο μη γραμμικό σύστημα εκφράζεται στις πολικές συντεταγμένες ως εξής:

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = r(1+\cos\theta) \\ \dfrac{d\theta}{dt} = -(1+\sin\theta) \end{cases}.$$

και προκύπτει:

$$r = \frac{k}{1+\sin\theta} e^{\frac{2}{1+\tan(\theta/2)}}, \quad k>0 .$$

Οι τροχιές πηγάζοντας από την κατάσταση ισορροπίας εξελίσσονται ομοθετικά ως προς αυτήν και ακολουθώντας παραβολική εξέλιξη απομακρύνονται με την πάροδο του χρόνου προς το άπειρο υπακούοντας στο νόμο:

$$t - t_o = -\int_{\theta_o}^{\theta} \frac{d\theta}{1+\sin\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{1+\tan\theta/2} - \frac{2}{1+\tan\theta_o/2} = t - t_o .$$

- Το 2ο μη γραμμικό σύστημα εκφράζεται στις πολικές συντεταγμένες ως εξής:

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = r + \dfrac{r}{2lnr} \\ \dfrac{d\theta}{dt} = -1 \end{cases}.$$

και προκύπτει:

$$r\,|1+2lnr|^{-1/2} = ke^{-\theta}, \quad k>0 .$$

Συνεπώς, οι τροχιές εξελίσσονται υπακούοντας στο νόμο:

$$r(t)\,|1+2lnr(t)|^{-1/2} = ke^{-t+t_o}, \quad k>0 .$$

Για μια συγκεκριμένη αρχική συνθήκη προκύπτει η κυκλική περιοδική τροχιά:

$$r(t) = 1/\sqrt{e} .$$

Παρατηρούμε ότι:

$$r < 1/\sqrt{e} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr(t)}{dt} > 0, \qquad 1/\sqrt{e} < r < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dr(t)}{dt} < 0, \qquad r > 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dr(t)}{dt} > 0 .$$

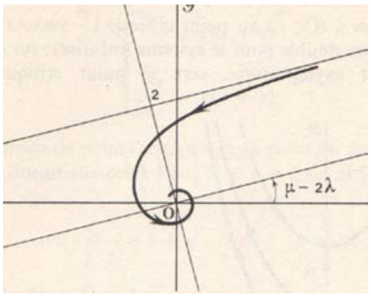
Στο εσωτερικό του δίσκου ακτίνας $r_o = e^{-1/2}$ οι τροχιές, πηγάζοντας από την κατάσταση ισορροπίας, εξελίσσονται σπειροειδώς και με την πάροδο του χρόνου περιελίσσονται εσωτερικά στην περιφέρεια του δίσκου. Στο εσωτερικό του δακτυλίου με ακτίνες $r_o = e^{-1/2}$ και $r_1 = 1$ οι τροχιές εξελίσσονται επίσης σπειροειδώς και με την πάροδο του χρόνου περιελίσσονται εξωτερικά στην περιφέρεια του δίσκου. Πέρα από αυτόν τον δακτύλιο οι τροχιές εξελίσσονται επίσης σπειροειδώς και με την πάροδο του χρόνου απομακρύνονται στο άπειρο. Η κατάσταση ισορροπίας που εντοπίζεται στην αρχή των αξόνων είναι ασταθής και η περιοδική τροχιά που εξελίσσεται στον κύκλο ακτίνας $r_o = e^{-1/2}$ αποτελεί ευσταθή οριακό κύκλο της δυναμικής. Στον κύκλο μοναδιαίας ακτίνας η συνθήκη $r(t_o) = 1$ και $\theta(t_o) = \theta_o$ δεν ορίζει μονοσήμαντα την εξέλιξη αφήνοντας ανοιχτό το ενδεχόμενο δυο κυκλικών τροχιών αντίθετης φοράς και αυτό οφείλεται στο ότι στα σημεία αυτού του κύκλου δεν πληρούται η συνθήκη μοναδικότητας των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων.

Συνεπώς, στην περιοχή της κατάστασης ισορροπίας, οι τροχιές της δυναμικής που ορίζεται από το 1ο σύστημα δεν έχουν ίδια συμπεριφορά με τις τροχιές της γραμμικοποίησής της, αλλά οι τροχιές της δυναμικής που ορίζεται από το 2ο σύστημα έχουν ίδια συμπεριφορά με τις τροχιές της γραμμικοποίησής της. Στην 1η περίπτωση η μη γραμμική δυναμική προκύπτει από μια διαταραχή ίδιας τάξης με τους όρους της γραμμικής δυναμικής, ενώ στη 2η περίπτωση η διαταραχή είναι αμελητέα ως προς αυτούς τους όρους. Τι ακριβώς λέει το θεώρημα *Hartman-Grobman*;

❖ **4.** Εξετάστε τη σχέση της εξελικτικής ροής της δυναμικής που ορίζεται από τα ακόλουθα συστήματα διαφορικών εξισώσεων με εκείνη της γραμμικοποίησής τους στις καταστάσεις ισορροπίας:

[1]
$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -2x_2 - x_1(x_1^2+x_2^2)^{1/2} \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 - x_2(x_1^2+x_2^2)^{1/2} \end{cases}$$

[2]
$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 - x_2 / ln(x_1^2+x_2^2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_2 + x_1 / ln(x_1^2+x_2^2) \end{cases}$$



Σχόλιο. Και τα δυο συστήματα εμφανίζουν μια μοναδική κατάσταση ισορροπίας που εντοπίζεται στην αρχή των αξόνων και εκεί, παρότι δεν ορίζεται η ιακωβιανή τους, η γραμμικοποίησή τους εκφράζεται αντίστοιχα ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i \qquad \lambda_{1,2} = -1$$

- Το $1^{ο}$ μη γραμμικό σύστημα εκφράζεται στις πολικές συντεταγμένες ως εξής:

$$\frac{dr}{dt} = -r^2, \quad \frac{d\theta}{dt} = 2,$$

και προκύπτει:

$$r(t) = \frac{1}{t+\lambda}, \qquad \theta(t) = 2t + \mu .$$

Οι τροχιές εξελίσσονται στις καμπύλες που ορίζονται από την πολική εξίσωση:

$$r = \frac{2}{\theta + 2\lambda - \mu} .$$

- Το $2^{ο}$ μη γραμμικό σύστημα, περνώντας στις πολικές συντεταγμένες, καταλήγει στα εξής:

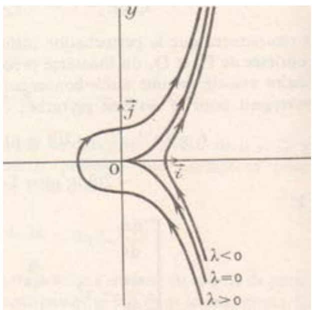
$$r(t) = \lambda e^{-t}, \qquad \theta(t) = -\frac{1}{2} ln\,|\,t - ln\lambda\,| - \mu ,$$

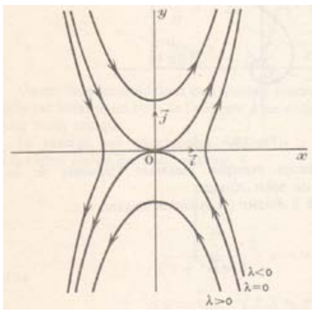
και οι τροχιές εξελίσσονται στις καμπύλες που ορίζονται από την πολική εξίσωση:

$$\theta = -\frac{1}{2} ln\,|\,ln r\,| - \mu .$$

❖ **5.** Εξετάστε τη σχέση της εξελικτικής ροής της δυναμικής που ορίζεται από τα ακόλουθα συστήματα διαφορικών εξισώσεων με εκείνη της γραμμικοποίησής τους στις καταστάσεις ισορροπίας:

$$\textbf{[1]} \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1^2 \end{cases} \qquad \textbf{[2]} \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1^3 \end{cases}$$





Σχόλιο. Και τα δυο συστήματα εμφανίζουν μια μοναδική κατάσταση ισορροπίας που εντοπίζεται στην αρχή των αξόνων και εκεί η γραμμικοποίησή τους εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Από την ολοκλήρωση των μη γραμμικών συστημάτων προκύπτει αντίστοιχα:

$$y^2 = \frac{2}{3}x^3 + \lambda \quad \text{και} \quad y^2 = \frac{1}{4}x^4 + \lambda .$$

- Το 1^{ο} μη γραμμικό σύστημα εμφανίζει ένα σημείο διακλάδωσης εντοπισμένο στην αρχή των αξόνων και εκεί εμφανίζεται μια *διαχωριστική* καμπύλη που συναντά αμφίπλευρα εφαπτομενικά τον οριζόντιο άξονα:

$$3x_2^2 = 2x_1^2 \quad (cusp).$$

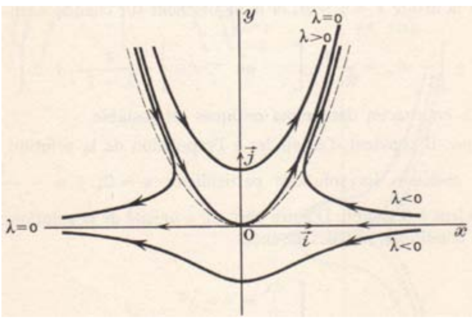
Η καμπύλη αυτή διαχωρίζει το επίπεδο σε δυο χωρία και επάνω της εξελίσσονται δυο τροχιές που, με την πάροδο του χρόνου, η μια κατευθύνεται προς την αρχή των αξόνων και η άλλη απομακρύνεται από αυτήν. Η αρχή των αξόνων αποτελεί ασταθή κατάσταση ισορροπίας. Εκατέρωθεν αυτής της *διαχωριστικής* καμπύλης οι τροχιές έχουν διαφορετική τοπική εξέλιξη, σαν να βρίσκονται από τη μια πλευρά στην περιοχή ενός κόμβου και από την άλλη πλευρά στην περιοχή ενός σάγματος.

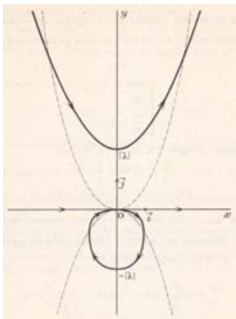
- Το 2^{ο} μη γραμμικό σύστημα εμφανίζει σαγματική κατάσταση ισορροπίας εντοπισμένη στην αρχή των αξόνων. Δυο ζεύγη τροχιών εξελίσσονται αντίστοιχα επάνω σε δυο παραβολές που συναντούν εφαπτομενικά τον ιδιοάξονα του γραμμικοποιημένου συστήματος ο οποίος ορίζεται από τη διπλή μηδενική ιδιοτιμή.

❖ **6.** Εξετάστε τη σχέση της εξελικτικής ροής της δυναμικής που ορίζεται από τα ακόλουθα συστήματα διαφορικών εξισώσεων με εκείνη της γραμμικοποίησής τους στις καταστάσεις ισορροπίας:

[1]
$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 - x_1^2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 x_2 \end{cases}$$

[2]
$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 + x_1^2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 x_2 \end{cases}$$





Σχόλιο. Και τα δυο συστήματα εμφανίζουν μια μοναδική κατάσταση ισορροπίας που εντοπίζεται στην αρχή των αξόνων και εκεί η γραμμικοποίησή τους εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- Το 1^{ο} μη γραμμικό σύστημα εκφράζεται ως εξής:

$$(x_2 - x_1^2)dx_2 = x_1 x_2 dx_1 \quad \Rightarrow \quad x_2\,dx_2 = x_1(x_1 dx_2 + x_2 dx_1)$$

και θέτοντας $x_1 x_2 = z$ προκύπτει:

$$x_2\,dx_2 = x_1\,dz \quad \Rightarrow \quad x_2^2\,dx_2 = z\,dz \quad \Rightarrow \quad x_2^3 = \frac{3}{2}x_1^2 x_2^2 + \lambda \quad \Rightarrow \quad x_1^2 = \frac{2}{3}\frac{x_2^3 - 3\lambda}{x_2^2} .$$

- Το 2^{ο} μη γραμμικό σύστημα εκφράζεται ως εξής:

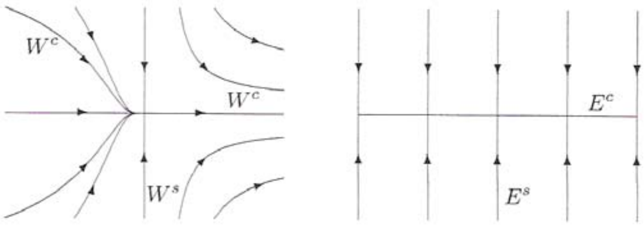
$$(x_2 + x_1^2)dx_2 = 2x_1 x_2 dx_1 \quad \Rightarrow \quad x_2\,dx_2 = x_1(x_2 dx_1 - x_1 dx_2) + x_1 x_2 dx_1$$

και θέτοντας $x_1 / x_2 = z$ προκύπτει:

$$dx_2 = x_1 x_2\,dz + z x_2 dx_1 \quad \Rightarrow \quad ln(x_2 / \lambda) = x_1 z \quad \Rightarrow \quad x_2\,ln(x_2 / \lambda) = x_1^2 .$$

❖ **7.** Εξετάστε τη σχέση της εξελικτικής ροής της δυναμικής που ορίζεται από τα ακόλουθα συστήματα διαφορικών εξισώσεων με εκείνη της γραμμικοποίησής τους στις καταστάσεις ισορροπίας:

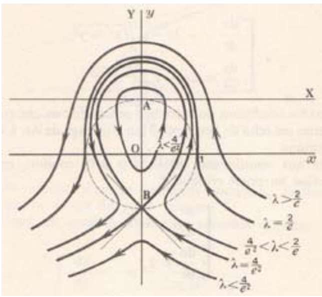
$$[1]\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1^2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_2 \end{cases} \qquad\qquad [2]\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1(x_1 + x_2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2(x_1 + x_2) \end{cases}$$

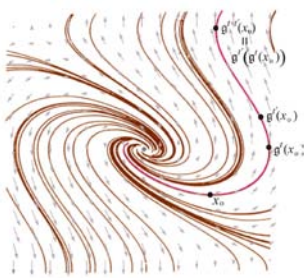


Τροχιές της δυναμικής που ορίζεται από το σύστημα [I] και της γραμμικοποίησής της στην κατάσταση ισορροπίας.

❖ **8.** Εξετάστε τη σχέση της εξελικτικής ροής της δυναμικής που ορίζεται από τα ακόλουθα συστήματα διαφορικών εξισώσεων με εκείνη της γραμμικοποίησής τους στις καταστάσεις ισορροπίας:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 1 - x_1^2 - x_2^2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2(x_2 - 1)(x_2 - 2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = sin(x_1 + x_2) \end{cases}$$





❖ **9.** Εξετάστε τη σχέση της εξελικτικής ροής της δυναμικής που ορίζεται από τα ακόλουθα συστήματα διαφορικών εξισώσεων με εκείνη της γραμμικοποίησής τους στις καταστάσεις ισορροπίας:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_2 + x_3^2 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_3 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_2 + x_1^2 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_3 + x_1^2 \end{cases}$$

❖ **10.** Εξετάστε τη σχέση της εξελικτικής ροής της δυναμικής που ορίζεται από τα ακόλουθα συστήματα διαφορικών εξισώσεων με εκείνη της γραμμικοποίησής τους στις καταστάσεις ισορροπίας:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \alpha(x_2 - x_1) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = cx_2 - x_1x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1x_2 - bx_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \sigma(x_2 - x_1) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \rho x_1 - x_1x_3 - x_2 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1x_2 - bx_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \alpha(x_2 - x_1) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = (c-\alpha)x_1 - x_1x_3 + cx_2 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1x_2 - bx_3 \end{cases}$$

(Lu system) **(Lorenz system)** **(Chen system)**