ΜΑΘΗΜΑ 6ο : ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

(ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ LYAPUNOV)

Ο *Aleksandr Lyapunov* (1857-1918) έθεσε τις βάσεις της μαθηματικής θεωρίας της ευστάθειας που φέρει το όνομά του εμπνευσμένος από μια απλή φυσική διαπίστωση σύμφωνα με την οποία, αν με την πάροδο του χρόνου η ολική ενέργεια ενός συστήματος φθίνει συνεχώς τότε το σύστημα οδηγείται σε κατάσταση ισορροπίας. Αν οι τροχιές εξελίσσονται εξολοκλήρου στην περιοχή της κατάστασης ισορροπίας είναι θεμιτό να σκεφτούμε ότι πρόκειται για ευσταθή ισορροπία και αν με την πάροδο του χρόνου οι τροχιές τείνουν να καταλήξουν σε αυτήν τότε πρόκειται για ασυμπτωτικά ευσταθή ισορροπία.

Το σκεπτικό του *Lyapunov* υπαγορεύει ότι προκειμένου να αποφανθούμε για την ευστάθεια μιας κατάστασης ισορροπίας, αναζητούμε μια θετικά ορισμένη συνάρτηση ενεργητικού τύπου που μηδενίζεται στην κατάσταση ισορροπίας της οποίας η χρονική παράγωγος κατά μήκος των τροχιών είναι αρνητική στην περιοχή της κατάστασης ισορροπίας. Αν μια τέτοια συνάρτηση υπάρχει τότε λέμε ότι πρόκειται για *συνάρτηση Lyapunov*. Αλλά δεν είμαστε σίγουροι για την ύπαρξή της και έτσι η αναζήτηση αρχίζει με τη θεώρηση υποψήφιων συναρτήσεων *Lyapunov* των οποίων ελέγχουμε τη χρονικά φθίνουσα συμπεριφορά κατά μήκος των τροχιών στην περιοχή της κατάστασης ισορροπίας. Καλές υποψήφιες συναρτήσεις *Lyapunov* είναι οι *τετραγωνικές μορφές* (*quadratic forms*) και συγκεκριμένα οι θετικά ορισμένες συναρτήσεις που αποτελούν πρώτα ολοκληρώματα ενός ιδεατού συστήματος που κατά την εξέλιξή του διατηρεί σταθερή την ενέργειά του.

❖ Θεωρούμε ένα σύστημα αυτόνομων διαφορικών εξισώσεων στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1,...,x_n) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(x_1,...,x_n) \end{cases}.$$

Οι συναρτήσεις που ορίζουν αυτό το σύστημα υποτίθενται παραγωγίσιμες με συνεχείς παραγώγους:

$$f : \mathfrak{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n , \quad f(x) = \left(f_1(x),..., f_n(x) \right).$$

Αν το σημείο $p \in \mathfrak{U}$ αποτελεί κατάσταση ισορροπίας:

$$f(p) = 0 \ : \quad f_1(p) = ... = f_n(p) = 0 ,$$

τότε, για την απλούστευση των συμβολισμών, συνήθως μεταφέρουμε το σύστημα των αξόνων στην κατάσταση ισορροπίας έτσι ώστε $f(0) = 0$. Οι υποψήφιες συναρτήσεις *Lyapunov* είναι παραγωγίσιμες με συνεχείς παραγώγους, μηδενικές στην κατάσταση ισορροπίας και γνήσια θετικές γύρω της:

$$V : \mathfrak{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} , \quad V(0) = 0 , \quad V(x) > 0 .$$

Οι χρονικές τους παράγωγοι κατά μήκος των τροχιών της δυναμικής που ορίζεται από το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων υπολογίζονται ως εξής:

$$\frac{dV(x)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = < \nabla V, f(x) > = D_x V(f(x)) .$$

Αν υπάρχει τέτοια συνάρτηση που στην περιοχή της κατάστασης ισορροπίας είναι φθίνουσα ή γνησίως φθίνουσα τότε η κατάσταση ισορροπίας είναι αντίστοιχα ευσταθής ή ασυμπτωτικά ευσταθής. Η ευστάθεια της κατάστασης ισορροπίας ορίζεται ως εξής:

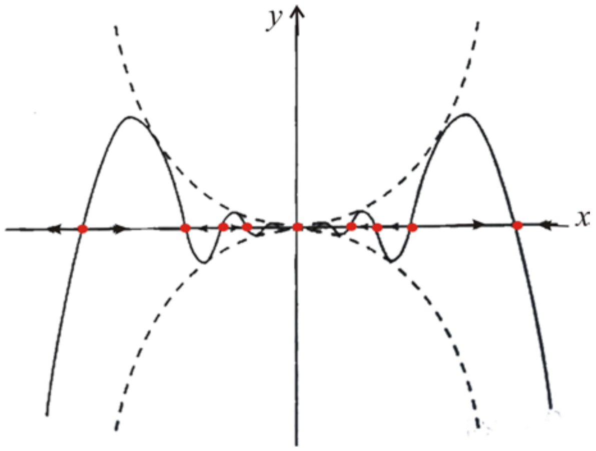
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \| x(0) \| < \delta \Rightarrow \| x(t) \| < \varepsilon, \forall t > 0$$

και η ασυμπτωτικότητα σημαίνει ότι επιπλέον ισχύει:

$$\| x(0) \| < \delta \ \Rightarrow \ \underset{t \to \infty}{Lim}\, x(t) = 0 .$$

Άσκηση. Προσδιορίστε τη φύση των καταστάσεων ισορροπίας της μονοδιάστατης δυναμικής που ορίζεται από τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = \left| \begin{array}{ll} -x^3 sin 1/x & \text{όταν } x \neq 0 \\ 0 & \text{όταν } x = 0 \end{array} \right.$$



Γράφημα της συνάρτησης του ρυθμού μεταβολής.
Η κατάσταση ισορροπίας $x = 0$ είναι ευσταθής αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθής.[1]

❖ **Θεώρημα Lyapunov.** Αν υπάρχει υποψήφια συνάρτηση *Lyapunov*:

$$V : \mathfrak{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

ορισμένη στην περιοχή μιας κατάστασης ισορροπίας $p \in \mathfrak{U}$ του συστήματος διαφορικών εξισώσεων:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad f(p) = 0,$$

τότε:

- $\dot{V}(x) \leq 0, \ \forall x \in \mathfrak{U} \quad \Rightarrow \quad p$ ευσταθής κατάσταση ισορροπίας
- $\dot{V}(x) < 0, \ \forall x \in \mathfrak{U}, x \neq p \quad \Rightarrow \quad p$ ασυμπτωτικά ευσταθής κατάσταση ισορροπίας
- $\dot{V}(x) > 0, \ \forall x \in \mathfrak{U}, x \neq p \quad \Rightarrow \quad p$ ασταθής κατάσταση ισορροπίας

❖ Αν υπάρχει υποψήφια συνάρτηση *Lyapunov* που πληροί κάποια από τις προϋποθέσεις:

$$\dot{V}(x) \leq 0, \ \forall x \in \mathfrak{U}, \quad \dot{V}(x) < 0, \ \forall x \in \mathfrak{U}, x \neq p, \quad \dot{V}(x) < 0, \ \forall x \in \mathfrak{U}, x \neq p,$$

τότε λέμε ότι πρόκειται για συνάρτηση *Lyapunov*. Η σπουδαιότητα του θεωρήματος του *Lyapunov* συνίσταται στο ότι ανάγει το ζήτημα της ευστάθειας σε μια αλγεβρική σχέση, αφήνοντας όμως σε μας το μέλημα της ανακάλυψης της συνάρτησης *Lyapunov*. Γενικά, οι συναρτήσεις *Lyapunov* εκφράζονται ως τετραγωνικές μορφές διαμέσου ενός συμμετρικού πίνακα με γνήσια θετικές ιδιοτιμές:

$$V(x) = x^T Q\, x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

---

[1] ***Σχόλιο.*** Η συνάρτηση που ορίζει το ρυθμό μεταβολής δέχεται παντού συνεχή παράγωγο και έτσι διασφαλίζεται η ύπαρξη και η μοναδικότητα των λύσεων της διαφορικής εξίσωσης. Οι καταστάσεις ισορροπίας είναι $x_o = 0$ και $x_k = 1/k\pi$, $k \in \mathbb{Z}^*$, και, εκτός από το σημείο $x_o = 0$ όλες οι άλλες καταστάσεις ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθείς. Για το σημείο $x_o = 0$, με δεδομένο ε>0, επιλέγουμε το μικρότερο $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $1/n_o\pi < \varepsilon$ και θέτοντας $\delta = 1/n_o\pi$, προκύπτει:

$$|x(0)| < \delta \ \Rightarrow \ x(t) \in [-1/n_o\pi, 1/n_o\pi], \forall t \geq 0 \ \Rightarrow \ |x(t)| < \varepsilon, \forall t \geq 0,$$

και αυτό ισχύει γιατί τα άκρα του διαστήματος $[-1/n_o\pi, 1/n_o\pi]$ αποτελούν καταστάσεις ισορροπίας. Αν $x(0) \in]0, \delta[$, επιλέγουμε $n_o^* \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $1/n_o^*\pi < \varepsilon$ οπότε $|x(t)| > 1/n_o^*\pi$, $\forall t \in \geq 0$, άρα:

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) \neq 0.$$

Ο *Lyapunov*, το 1892, διατύπωσε το θεώρημά του για τα γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων:

$$\dot{\mathrm{X}} = \mathrm{AX}$$

δηλώνοντας ότι η κατάσταση της ισορροπίας τους είναι ασυμπτωτικά ευσταθής αν και μόνο αν:

$$\forall \mathrm{S} = \mathrm{S}^T > 0,\ \exists Q = Q^Y > 0\ :\ \mathrm{A}^T Q + Q\mathrm{A} + \mathrm{S} = 0\,,$$

και τότε προκύπτει η συνάρτηση *Lyapunov*:

$$V(x) = x^T Q\, x\,,\quad \forall x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Άσκηση. Εξετάστε τη δυνατότητα εφαρμογής αυτού του θεωρήματος στις εξής περιπτώσεις:

[1] $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ **[2]** $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ **[3]** $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **[4]** $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

- Το μεταγενέστερο θεώρημα των *Hartman* και *Grobman* (1960) δίνει τη δυνατότητα άμεσης αναγωγής του ζητήματος της ευστάθειας των καταστάσεων ισορροπίας κάθε μη γραμμικής δυναμικής στην γραμμικοποιημένη δυναμική, εφόσον πρόκειται για υπερβολικές καταστάσεις ισορροπίας. Στην περίπτωση αυτή όλες οι ιδιοτιμές της γραμμικοποιημένης δυναμικής βρίσκονται εκτός του φανταστικού άξονα και το πρόσημο του πραγματικού τους μέρους υπαγορεύει τη φύση της εκάστοτε κατάστασης ισορροπίας. Αν το πρόσημο του πραγματικού μέρους όλων των ιδιοτιμών είναι αρνητικό, η κατάσταση ισορροπίας είναι όχι μόνο ευσταθής αλλά ασυμπτωτικά ευσταθής. Άλλωστε, ευστάθεια χωρίς ασυμπτωτική ευστάθεια δεν υφίσταται παρά στις μη υπερβολικές καταστάσεις ισορροπίας όπου δεν έχει εφαρμογή το θεώρημα *Hartman-Grobman* και εκεί αποκτά ισχυρό ρόλο το θεώρημα *Lyapunov*, αλλά και το μεταγενέστερο θεώρημα *LaSalle* (1950).

Παράδειγμα 1. Θεωρούμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 - \rho x_1^2 x_2 \end{cases}$$

Το σύστημα αυτό, θέτοντας $x = x_1$ και $\dot{x} = x_2$, εκφράζεται με τη μονοδιάστατη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \rho x^2 \frac{dx}{dt} + x = 0\,.$$

Πρόκειται για εξίσωση αποσβενόμενων ταλαντώσεων στην περιοχή της κατάστασης ισορροπίας για $\rho > 0$ και μηδενίζοντας το συντελεστή απόσβεσης προκύπτει η συνάρτηση ενέργειας του ιδεατού διατηρητικού συστήματος η οποία εμφανίζεται ως υποψήφια συνάρτηση *Lyapunov*:

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\,.$$

Πρόκειται για συνάρτηση *Lyapunov* η οποία υπαγορεύει την ασυμπτωτική ευστάθεια της κατάστασης ισορροπίας αφού, εκτός της ισορροπίας, η χρονική της παράγωγος κατά μήκος των τροχιών είναι γνήσια αρνητική:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1 x_2 + x_2(-x_1 - \rho x_1^2 x_2) = -\rho x_1^2 x_2^2 < 0\,.$$

Ποιο από τα δυο σχήματα εκφράζει την ασυμπτωτική ισορροπία αυτού του παραδείγματος;

Παράδειγμα 2. Θεωρούμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1(x_2^2 - 1) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_2(x_1^2 + 1) \end{cases}$$

Η κατάσταση ισορροπίας είναι υπερβολική και χαρακτηρίζεται από τις δυο αρνητικές ιδιοτιμές, άρα πρόκειται για ασυμπτωτικά ευσταθή ελκτικό κόμβο, όπως υπαγορεύει το θεώρημα *Hartman-Grobman*. Στο ίδιο συμπέρασμα οδηγεί το θεώρημα *Lyapunov*, όπου η έκφραση της υποψήφιας συνάρτησης *Lyapunov* έχει ως εξής:

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + k x_2^2}{2}, \quad k > 0 .$$

Προκύπτει:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = x_1\dot{x}_1 + k x_2 \dot{x}_2 = 2x_1^2(x_2^2 - 1) - k x_2^2(x_1^2 + 1) = 2x_1^2 x_2^2 - 2x_1^2 - k x_1^2 x_2^2 - k x_2^2$$

και για $k = 2$ ορίζεται η συνάρτηση *Lyapunov* της οποίας η χρονική παράγωγος κατά μήκος των τροχιών υπαγορεύει την ασυμπτωτική ευστάθεια της ισορροπίας:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -2x_1^2 - 2x_2^2 < 0, \quad \forall (x_1, x_2) \neq (0,0).$$

Παράδειγμα 3. Θεωρούμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_2^3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1^3 \end{cases}$$

Η κατάσταση ισορροπίας δεν είναι υπερβολική και χαρακτηρίζεται από μια μηδενική διπλή ιδιοτιμή. Το θεώρημα *Hartman-Grobman* δεν έχει εφαρμογή. Το θεώρημα *Lyapunov* υποδεικνύει ότι η ισορροπία είναι ευσταθής αλλά όχι ασυμπτωτικά, αφού η υποψήφια συνάρτηση *Lyapunov*:

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_1^4 + x_2^4}{2}$$

έχει μηδενική χρονική παράγωγο κατά μήκος των τροχιών στην περιοχή της κατάστασης ισορροπίας:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -2x_1^3 x_2^3 + 2x_2^3 x_1^3 = 0 .$$

Οι τροχιές εξελίσσονται επάνω στις κλειστές καμπύλες που ορίζονται από τις εξισώσεις:

$$x_1^4 + x_2^4 = c, \quad c \in \mathbb{R} .$$

Παράδειγμα 4. Θεωρούμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -2x_2 + x_2 x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - x_1 x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1 x_2 \end{cases}$$

Η κατάσταση ισορροπίας δεν είναι υπερβολική και χαρακτηρίζεται από μια μηδενική και τις καθαρά φανταστικές ιδιοτιμές $\pm i$. Το θεώρημα *Hartman-Grobman* δεν έχει εφαρμογή. Το θεώρημα *Lyapunov* υπαγορεύει ότι η κατάσταση ισορροπίας είναι ευσταθής αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθής. Πράγματι, από την υποψήφια συνάρτηση *Lyapunov*:

$$V(x_1, x_2, x_3) = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_3^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{V}(x_1, x_2, x_3) = 2(c_1 - c_2 + c_3) x_1 x_2 x_3 + 2(c_2 - 2c_1) x_1 x_2 .$$

Έτσι προκύπτει η συνάρτηση *Lyapunov*:

$$V(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2>0\,,\quad \forall x\neq 0\,,\quad V(0)=0\,,$$

η οποία έχει μηδενική χρονική παράγωγο κατά μήκος των τροχιών στην περιοχή της ισορροπίας:

$$\dot V(x_1,x_2,x_3)=0\,.$$

Οι τροχιές εξελίσσονται στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς που ορίζονται από την εξίσωση:

$$x_1^2+2x_2^2+x_3^2=c^2\,,\quad c\in\mathbb{R}\,.$$

Παράδειγμα 5. Θεωρούμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=-2x_2+x_2x_3-x_1^3\\[2mm] \dfrac{dx_2}{dt}=x_1-x_1x_3-x_2^3\\[2mm] \dfrac{dx_3}{dt}=x_1x_2-x_3^3\end{cases}$$

Η κατάσταση ισορροπίας δεν είναι υπερβολική και χαρακτηρίζεται από μια μηδενική και τις καθαρά φανταστικές ιδιοτιμές $\pm i$. Το θεώρημα *Hartman-Grobman* δεν έχει εφαρμογή. Το θεώρημα *Lyapunov* υπαγορεύει την ασυμπτωτική ευστάθεια της κατάστασης ισορροπίας. Πράγματι, από την υποψήφια συνάρτηση *Lyapunov*:

$$V(x_1,x_2,x_3)=c_1x_1^2+c_2x_2^2+c_3x_3^2 \quad\Rightarrow\quad \dot V(x_1,x_2,x_3)=2(c_1-c_2+c_3)x_1x_2x_3+2(c_2-2c_1)x_1x_2-2\sum_{1,2,3}c_ix_i^4\,.$$

Έτσι προκύπτει η συνάρτηση *Lyapunov*:

$$V(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2>0\,,\quad \forall x\neq 0\,,\quad V(0)=0\,,$$

η οποία έχει γνήσια αρνητική χρονική παράγωγο κατά μήκος των τροχιών στην περιοχή της ισορροπίας:

$$\dot V(x_1,x_2,x_3)=-2(x_1^4+x_2^4+x_3^4)<0\,,\quad \forall x\neq 0\,.$$

ΘΕΜΑΤΑ ΜΕΛΕΤΗΣ

❖ **1.** Στο ευκλείδειο επίπεδο θεωρούμε τη δυναμική που ορίζεται από το σύστημα των εξισώσεων:

$$\begin{bmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Προσδιορίστε τη φύση της ισορροπίας αυτής της γραμμικής δυναμικής και κατόπιν εξετάστε την ενδεχόμενη αλλοίωση που θα υποστεί στις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις διαταραχής:

[1] $$\begin{bmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-x_1^3-x_1x_2^2\\ -x_2^3-x_2x_1^2\end{bmatrix}$$

[2] $$\begin{bmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_1^3+x_1x_2^2\\ x_2^3+x_2x_1^2\end{bmatrix}$$

[3] $$\begin{bmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-x_1x_2\\ x_1^2\end{bmatrix}$$

Σχόλιο. [1] ασυμπτωτική ευστάθεια, [2] αστάθεια, [3] μη ασυμπτωτική ευστάθεια. Lyapunov: $V(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$.

❖ **2.** Επιχειρείστε να προσδιορίσετε μια συνάρτηση *Lyapunov* για κάθε ένα από τα ακόλουθα συστήματα διαφορικών εξισώσεων και να συνάγετε τη φύση της κάθε κατάστασης ισορροπίας:

[1] $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -3x_2 - x_1^3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 3x_1 - x_2^3 \end{cases}$$

[2] $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 x_2^2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2^2 \end{cases}$$

[3] $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_2 + x_1^3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2^3 \end{cases}$$

[4] $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2 - 2x_1 x_2^2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2 - x_2^3 \end{cases}$$

[5] $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -2x_1 x_2^2 - x_1^5 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_2^3 - x_2^5 \end{cases}$$

[6] $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_1^2/2 - x_1 x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 x_2 - x_2 \end{cases}$$

❖ **3.** Προσδιορίστε τη φύση της ισορροπίας της γραμμικοποίησης της δυναμικής που ορίζεται από το ακόλουθο σύστημα και κατόπιν εξετάστε την ενδεχόμενη αλλοίωση που θα υποστεί από τη διαταραχή:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_1 x_2^2 + x_3^2 - x_1^3 \\ x_3^3 - x_2^3 \\ -x_1 x_3 - x_3 x_1^2 - x_2 x_3^2 - x_3^5 \end{bmatrix}$$

❖ **4.** Προσδιορίστε τη φύση της ισορροπίας της γραμμικοποίησης της δυναμικής που ορίζεται από το ακόλουθο σύστημα και κατόπιν εξετάστε την ενδεχόμενη αλλοίωση που θα υποστεί από τη διαταραχή:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 x_3 - x_1^3 \\ x_1 x_3 - x_2^3 \\ x_1 x_2 - x_3^3 \end{bmatrix}$$

❖ **4.** Προσδιορίστε τη φύση της ισορροπίας της γραμμικοποίησης της δυναμικής που ορίζεται από το ακόλουθο σύστημα και κατόπιν εξετάστε την ενδεχόμενη αλλοίωση που θα υποστεί από τη διαταραχή:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \sigma(x_2 - x_1) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = r x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1 x_2 - b x_3 \end{cases}$$

Σχόλιο. Πρόκειται για το σύστημα του Edward Lorenz (1963) στο οποίο υπεισέρχονται τρεις παράμετροι. Εξετάστε πρώτα τη φύση της ισορροπίας της γραμμικοποιημένης δυναμικής ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

και συγκεκριμένα ανάλογα με τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης:

$$\lambda^2 + (\sigma+1)\lambda + \sigma(1-r) = 0 \,.$$

Για τον προσδιορισμό της φύσης της ισορροπίας της μη γραμμικής δυναμικής θα χρειαστεί να ανακαλύψετε τη συνάρτηση:

$$V(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{2\sigma} + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^2}{2} \,.$$

Εύκολα θα συμπεράνετε ότι: $r < 1, b > 0 \Rightarrow$ ασυμπτωτική ευστάθεια.

Δύσκολα θα συμπεράνετε ότι: $r = 1 \Rightarrow$ ασυμπτωτική ευστάθεια.