ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ακαδημαϊκό έτος 2013-14

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Καθηγητής: Σ. Πνευματικός

ΜΑΘΗΜΑ 2

STONE - WEIERSTRASS

Ανασκόπηση κύριων σημείων της διδασκαλίας

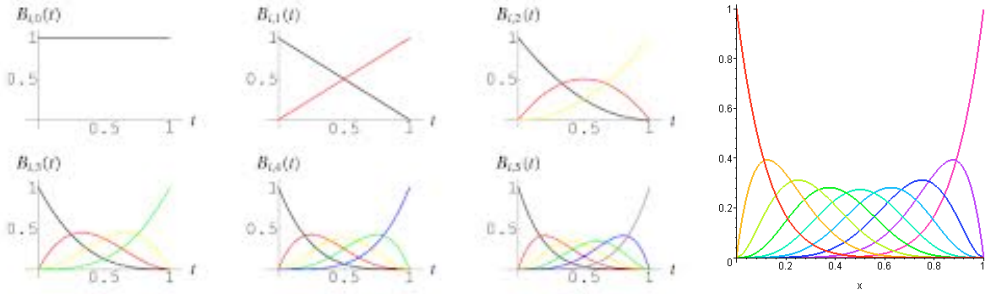
ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Σε κάθε συνάρτηση $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ προσαρτάται η πολυωνυμική ακολουθία *Bernstein*:

$$B_n(f)(x) = \sum_{i=1}^{n} f(i/n) B_{n,i}(x)$$

όπου

$$B_{n,i}(x) = C_n^i x^i (1-x)^{n-i}, \quad n \in \mathbb{N}.$$



➢ Θεώρημα *Bernstein-Weierstrass*:

- Αν $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ τότε $\lim_{n\to\infty} B_n(f)(x) = f(x)$ και η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.
- Αν $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ τότε $\lim_{n\to\infty} B_n'(f)(x) = f'(x)$ και η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

Ερώτημα 1. Εξηγείστε το πώς κατασκευάζεται η πολυωνυμική ακολουθία *Bernstein* $B_n(f)$, $n \in \mathbb{N}$.

Ερώτημα 2. Ποια είναι τα κύρια σημεία της απόδειξης του θεωρήματος *Bernstein-Weierstrass*;

Ερώτημα 3. Κατασκευάστε την πολυωνυμική ακολουθία *Bernstein* στις περιπτώσεις:

(i) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$, (ii) $f(x) = |x|$, $x \in [-1,+1]$,

(iii) $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in [-1,+1]$, (iv) $f(x) = 1/(x^2+1)$, $x \in [-1,+1]$.

- Θεώρημα *Stone-Weierstrass I* (*πραγματική εκδοχή*) :

  Έστω K συμπαγές υποσύνολο ενός μετρικού χώρου E και

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(\mathrm{K},\mathbb{R}) .$$

  Αν το $\mathcal{A}$ έχει δομή πραγματικής άλγεβρας $\left(: f,g \in \mathcal{A}\,,\, \lambda \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; f+g\,,\, f.g\,,\, \lambda f \in \mathcal{A}\right)$

  τότε οι ακόλουθες συνθήκες:

$$\text{(ι)}\;\; \forall x \in \mathrm{K}, \exists f \in \mathcal{A} : f(x) \neq 0\,, \quad \text{(ιι)}\;\; x,x' \in \mathrm{K}, x \neq x' \;\Rightarrow\; \exists f \in \mathcal{A} : f(x) \neq f(x')$$

  διασφαλίζουν (και αντίστροφα) ότι για την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης ισχύει:

$$\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{C}(\mathrm{K},\mathbb{R}) .$$

Ερώτημα 4. Ερμηνεύστε τις συνθήκες (ι) και (ιι) στην περίπτωση $\mathrm{K} = [a,b] \subset \mathbb{R}$.

Ερώτημα 5. Διαπιστώστε ότι η συνθήκη (ι) πληρούται πάντα όταν η άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι μοναδιαία.

Ερώτημα 6. Εξετάστε αν οι μοναδιαίες άλγεβρες $\mathcal{A}$ πληρούν πάντα τη συνθήκη (ιι).

Ερώτημα 7. Εξετάστε την περίπτωση της άλγεβρας των πολυωνύμων $\mathcal{A} = \mathcal{P}([\mathrm{a},\mathrm{b}],\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{C}([\mathrm{a},\mathrm{b}],\mathbb{R})$.

Ερώτημα 8. Διαπιστώστε ότι από το θεώρημα αυτό απορρέει το θεώρημα του *Weierstrass* του 1885.

Ερώτημα 9. Δώστε και άλλα παραδείγματα αλγεβρών $\mathcal{A}$ που πληρούν τις συνθήκες (ι) και (ιι).

Ερώτημα 10. Ποια είναι τα κύρια σημεία της απόδειξης του θεωρήματος *Stone-Weierstrass I* ;

- Θεώρημα *Stone-Weierstrass II* (*μιγαδική εκδοχή*) :

  Έστω K συμπαγές υποσύνολο ενός μετρικού χώρου E και

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(\mathrm{K},\mathbb{C}) .$$

  Αν το $\mathcal{A}$ έχει δομή μιγαδικής άλγεβρας $\left(: f,g \in \mathcal{A}\,,\, \lambda \in \mathbb{C} \;\Rightarrow\; f+g\,,\, f.g\,,\, \lambda f\right)$

  τότε οι ακόλουθες συνθήκες:

  (ι) $\forall x \in \mathrm{K}, \exists f \in \mathcal{A} : f(x) \neq 0$, (ιι) $x,x' \in \mathrm{K}, x \neq x' \;\Rightarrow\; \exists f \in \mathcal{A} : f(x) \neq f(x')$, (ιιι) $f \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \overline{f} \in \mathcal{A}$

  διασφαλίζουν (και αντίστροφα) ότι για την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης ισχύει:

$$\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{C}(\mathrm{K},\mathbb{C}) .$$

Ερώτημα 11. Το θεώρημα *Stone-Weierstrass I* απορρέει από το θεώρημα *Stone-Weierstrass II* ;

Ερώτημα 12. Ποια είναι τα κύρια σημεία της απόδειξης του θεωρήματος *Stone-Weierstrass II* ;

Ερώτημα 13. Εξετάστε την περίπτωση της άλγεβρας των μιγαδικών πολυωνύμων:

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathrm{K},\mathbb{C}) \subseteq \mathcal{C}(\mathrm{K},\mathbb{C}) \;\text{ όπου }\; \mathrm{K} = \left\{ z \in \mathbb{C} / |z| \leq 1 \right\} .$$

Ερώτημα 14. Εξετάστε στην περίπτωση $\mathrm{K} = \mathbf{S}^1 \subset \mathbb{C}$ την άλγεβρα:

$$\mathcal{A} = \left\{ \sum_{k=-n}^{k=+n} c_k e^{ikt} \,/\, c_k \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathcal{C}(\mathbf{S}^1,\mathbb{C}) .$$

Ερώτημα 15. Συμπεράνατε ότι κάθε συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ αποτελεί όριο ομοιόμορφης σύγκλισης μιας ακολουθίας τριγωνομετρικών πολυωνύμων:

$$T_n(t) = a_o + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kt + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kt\,, \quad n \in \mathbb{N} .$$