## ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

**Ακαδημαϊκό έτος 2013-14**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΜΑΘΗΜΑ**

## ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

**Καθηγητής: Σ. Πνευματικός**

# ΜΑΘΗΜΑ 3

# SPLINE FUNCTIONS

**Ανασκόπηση κύριων σημείων της διδασκαλίας**

### ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΙΑΣ ΚΑΜΠΎΛΗΣ

Η αναζήτηση αλγορίθμων για την προσέγγιση μιας οποιασδήποτε καμπύλης από μια κατά τμήματα πολυωνυμική καμπύλη αποτέλεσε σε διάφορες εκφάνσεις πηγή προβληματισμού των μαθηματικών εδώ και πολλούς αιώνες. Τις πρόσφατες δεκαετίες, το ζήτημα αυτό αναδείχτηκε μείζονος σημασίας στο πεδίο της Πληροφορικής και των Εφαρμογών. Η Αριθμητική Ανάλυση, έχει θέσει στη διάθεσή μας πολλές μεθόδους πολυωνυμικών παρεμβολών, αλλά εδώ θα σταθούμε στις παρεμβολές τύπου spline που πραγματοποιούνται με τα στοιχεία του χώρου:

$$\mathbb{S}_m(\Delta_n)=\left\{\mathfrak{s}\in C^{m-1}([a,b],\mathbb{R})\,/\,\mathfrak{s}|_{[x_i,x_{i+1}]}\in\mathbb{P}_m[\mathbb{R}],\ i=0,\dots,n-1\right\},\quad \dim\mathbb{S}_m(\Delta_n)=m+n,$$

όπου $\Delta_n:\ a=x_o<x_1<\dots<x_{n-1}<x_n=b$ είναι ένας δεδομένος διαμερισμός του διαστήματος $[a,b]\subset\mathbb{R}$ και

$$\mathbb{P}_m[\mathbb{R}]=\left\{P(x)=a_o+a_1x+\dots+a_{m-1}x^{m-1}+a_mx^m\,/\,a_\ell\in\mathbb{R},\ \ell=0,1,\dots,m\right\},\quad m\in\mathbb{N}.$$

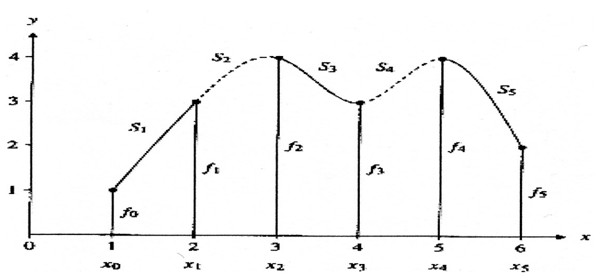
Τα στοιχεία αυτού του διανυσματικού χώρου καλούνται *spline functions* βαθμού *m* ως προς τον διαμερισμό $\Delta_n$ .

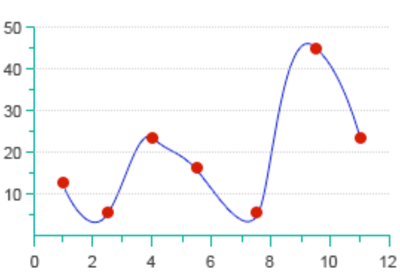
- Με δεδομένη μια συνάρτηση $f\in\mathcal{C}^r([a,b],\mathbb{R})$ , $r\geq 1$ , το πρόβλημα της παρεμβολής με μια συνάρτηση *spline* βαθμού *m*, συνίσταται στην επιλογή ενός διαμερισμού $\Delta_n$ του διαστήματος [*a,b*] και στην κατασκευή μιας συνάρτησης *spline* $\mathfrak{s}\in\mathbb{S}_m(\Delta_n)$ που πληροί τις συνθήκες παρεμβολής:

  $$\mathfrak{s}(x_i)=f(x_i),\ i=0,\dots,n,$$

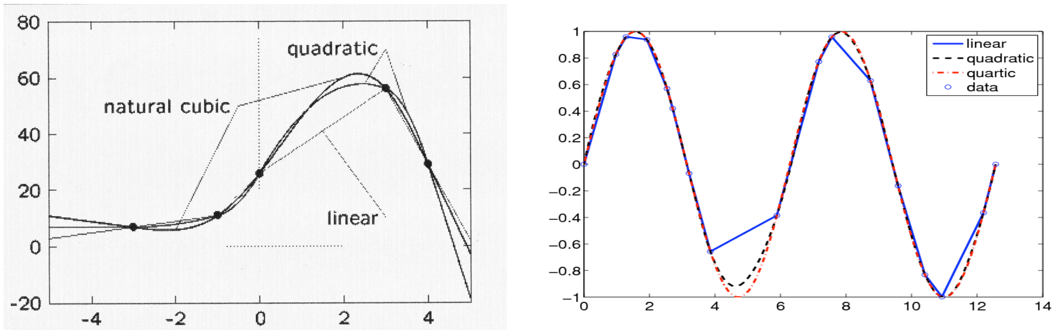
  έτσι ώστε να υπάρχει ανταπόκριση στο απαιτούμενο *σφάλμα προσέγγισης*:

  $$\|f^{(k)}-\mathfrak{s}^{(k)}\|_\infty=\max_{x\in[a,b]}|f^{(k)}(x)-\mathfrak{s}^{(k)}(x)|<\varepsilon,\ k=0,1,\dots,m-1.$$



*Σχήματα παρεμβολής με συναρτήσεις splines.*




*Σχήματα προσέγγισης μιας καμπύλης με γραμμικές, τετραγωνικές, κυβικές συναρτήσεις splines.* ($n$=5). ($n$=15).

**Ερώτημα 1**. Γιατί δεν αναζητούμε παρεμβολή τύπου spline της οποίας η τάξη παραγωγισιμότητας στους κόμβους της διαμέρισης $\Delta_n$ είναι ίδια με τον πολυωνυμικό της βαθμό $m$ ;

**Ερώτημα 2**. Ποια είναι η διαφορά της παρεμβολής τύπου spline από την παρεμβολή Lagrange;

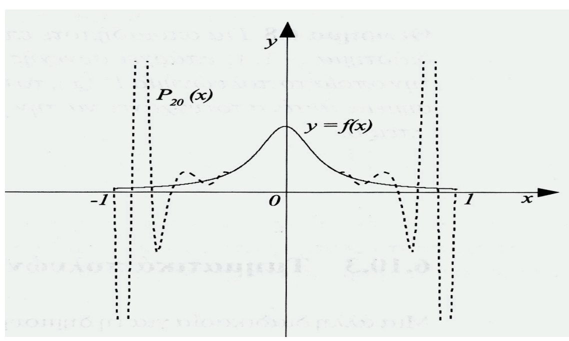
**Ερώτημα 3**. Εξετάστε τη μοναδικότητα της παρεμβολής τύπου Lagrange και της παρεμβολής τύπου spline.

**Ερώτημα 4**. Εξετάστε αν οι χώροι των συναρτήσεων splines πληρούν τη συνθήκη Haar.

**Ερώτημα 5**. Θυμηθείτε τον αλγόριθμο Sturm για το πλήθος των πραγματικών ριζών ενός πολυωνύμου.

**Ερώτημα 6**. Εξηγείστε με το φαινόμενο Runge την ανεπάρκεια της παρεμβολής Lagrange στην περίπτωση:

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \quad x \in [-1,+1].$$

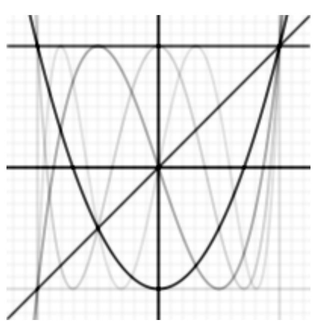



**Ερώτημα 7**. Διαπιστώστε την μη εμφάνιση του φαινομένου *Runge* όταν η παρεμβολή *Lagrange* στη συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος πραγματοποιηθεί στον διαμερισμό που ορίζεται από τις ρίζες του πολυωνύμου *Chebyshev* βαθμού $n$+1:

$$\mathrm{T}_{n+1}(x) = \cos\big((n+1)\arccos x\big), \quad x \in [-1,+1], \quad \rho_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right), \quad x_i = \frac{1}{2}\big(b+a+(b-a)\rho_i\big), \quad i = 0,1,\ldots,n.$$

Στην περίπτωση αυτού του διαμερισμού, αν $P_n(x)$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής του *Lagrange* τότε:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x), \quad \forall x \in [-1,+1].$$



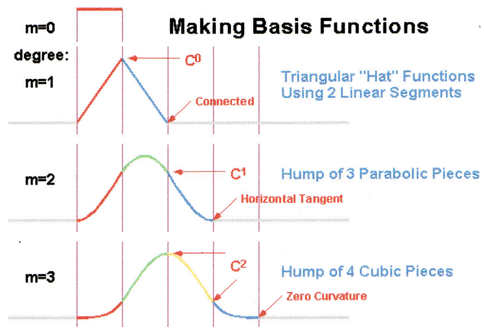
$$\mathrm{T}_0(x)=1,\ \mathrm{T}_1(x)=x,\ \mathrm{T}_2(x)=2x^2-1,\ \mathrm{T}_3(x)=4x^3-3x,\ \mathrm{T}_4(x)=8x^4-8x^2+1,\ \mathrm{T}_5(x)=16x^5-20x^3+5x.$$

- Οι συναρτήσεις splines του χώρου $\mathbb{S}_m(\Delta_n)$, κατασκευάζονται με γραμμικό συνδυασμό των $m$+$n$ στοιχείων της αντίστοιχης κατάλληλα επιλεγμένης βάσης $\mathfrak{B}_1,\ldots,\mathfrak{B}_{m+n}$ και προσδιορισμό των πραγματικών συντελεστών του γραμμικού συνδυασμού από τους δεδομένους κόμβους του διαμερισμού $\Delta_n$ :

$$\mathfrak{s}\in\mathbb{S}_m(\Delta_n) \;\Rightarrow\; \mathfrak{s}(x)=c_1\mathfrak{B}_1(x)+\ldots+c_{m+n}\mathfrak{B}_{m+n}(x)\,,\; x\in[a,b]\,,\; c_1,\ldots,c_{m+n}\in\mathbb{R}\,.$$

**Ερώτημα 8**. Σχεδιάστε τις συναρτήσεις splines που συγκροτούν αντίστοιχα βάση των διανυσματικών χώρων:

$$\mathbb{S}_0(\Delta_n)\,,\; \mathbb{S}_1(\Delta_n)\,,\; \mathbb{S}_2(\Delta_n)\,,\; \mathbb{S}_3(\Delta_n)\,,\; n\in\mathbb{N}\,.$$




**Ερώτημα 9**. Θεωρούμε τις πραγματικές συναρτήσεις:

$$(\text{ι})\quad f(x)=\frac{1}{1+x}\,,\quad x\in[0,3]\,,\qquad (\text{ιι})\quad f(x)=x\,e^{-x}\,,\quad x\in[0,3]\,.$$

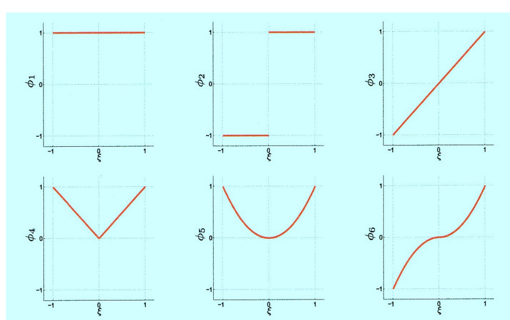
Επιλέξτε τον διαμερισμό που ορίζεται από τα σημεία $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, και υπολογίστε:

- Την αντίστοιχη γραμμική, τετραγωνική, κυβική συνάρτηση spline που προσεγγίζει τη συνάρτηση $f(x)$.
- Το αντίστοιχο σφάλμα προσέγγισης για κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις.
- Το αντίστοιχο σφάλμα προσέγγισης για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος:

$$\int_0^3 f(x)\,dx\,.$$

**Ερώτημα 10**. Εξετάστε το ενδιαφέρον που παρουσιάζει η παρεμβολή τύπου spline μειώνοντας την απαίτηση λειότητα στην τάξη $m$-$r_i$ στους εσωτερικούς κόμβους της διαμέρισης, $i$=1,...,$n$-1. Υπολογίστε τη διάσταση του διευρυμένου διανυσματικού χώρου των συναρτήσεων splines:

$$\dim\hat{\mathbb{S}}_m(\Delta_n)=m+1+r_1+\ldots+r_{n-1}\,,\quad m-r_i=-1,0,1,2,\ldots\,.$$



Βάση του χώρου $\hat{\mathbf{S}}_{m,r}(\Delta_n)$, $m$=2, $n$=2, $r\geq -1$ :

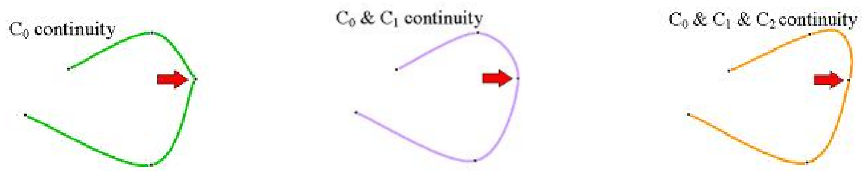
$\phi_1:\ \phi_1(\xi)=1,\ \ \xi\in[-1,+1]$, $\qquad \phi_2:\ \phi_2(\xi)=-1,\ \xi\in[-1,0]\,,\ \ \phi_2(\xi)=1,\ \xi\in[0,+1]$,

$\phi_3:\ \phi_3(\xi)=\xi\,,\ \ \xi\in[-1,+1]$, $\qquad \phi_4:\ \phi_4(\xi)=-\xi,\ \xi\in[-1,0]\,,\ \ \phi_4(\xi)=\xi,\ \xi\in[0,+1]$,

$\phi_5:\ \phi_5(\xi)=\xi^2\,,\ \xi\in[-1,+1]$, $\qquad \phi_6:\ \phi_6(\xi)=-\xi^2,\ \xi\in[-1,0]\,,\ \phi_6(\xi)=\xi^2,\ \xi\in[0,+1]$.

Βάση του χώρου $\hat{\mathbf{S}}_{2,-1}(\Delta_2):\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4,\phi_5,\phi_6$ - Βάση του χώρου $\hat{\mathbf{S}}_{2,0}(\Delta_2):\phi_1,\phi_3,\phi_4,\phi_5,\phi_6$ - Βάση του χώρου $\hat{\mathbf{S}}_{2,1}(\Delta_2):\phi_1,\phi_3,\phi_5,\phi_6$ .

**Ερώτημα 11**. Κατασκευάστε ένα παράδειγμα που να ανταποκρίνεται στο προηγούμενο ερώτημα.




**Ερώτημα 12**. Μελετήστε τις ιδιότητες του χώρου των *κυβικών συναρτήσεων splines του Hermite* :

$$\mathbb{H}_3(\Delta_n) = \left\{ \mathfrak{s} \in C^1[a,b] \,;\, \mathfrak{s}\big|_{[x_i,x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3[\mathbb{R}],\ i = 0,\dots,n-1 \right\}.$$

- Διαπιστώστε ότι:

$$\dim \mathbb{H}_3(\Delta_n) = 2n+2\,.$$

- Θεωρώντας τον διαμερισμό $\Delta_n:\ a = x_o < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, διαπιστώστε ότι:

$$\mathrm{A}_i, \mathrm{B}_i \in \mathbb{H}_3(\Delta_n)\ :\begin{cases} \mathrm{A}_i(x_j) = \delta_{ij},\ \mathrm{B}'_j(x_j) = 0 \\ \mathrm{B}_i(x_j) = 0, \quad \mathrm{B}'_i(x_j) = \delta_{ij} \end{cases} \quad 0 \le i,j \le n \ \Rightarrow\ \left\{ \mathrm{A}_i, \mathrm{B}_i \,/\, i = 0,1,\dots,n \right\}\ \textit{βάση του}\ \mathbb{H}_3(\Delta_n)\,.$$

- Διαπιστώστε ότι:

$$\mathfrak{s} \in \mathbb{H}_3(\Delta_n) \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{s}(x) = \sum_{i=0}^{n} \Big[ \mathfrak{s}(x_i)\mathrm{A}_i(x) + \mathfrak{s}'(x_i)\mathrm{B}_i(x) \Big]\,.$$

- Αν $f \in C^1[a,b]$ και $\Delta_n:\ a = x_o < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, δείξτε ότι υπάρχει μοναδική $\mathfrak{s} \in \mathbb{H}_3(\Delta_n)$ τέτοια ώστε:

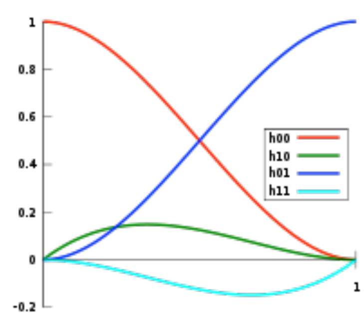
$$\mathfrak{s}(x_i) = f(x_i)\,,\ \mathfrak{s}'(x_i) = f'(x_i)\,, \quad i = 0,\dots,n\,,$$

  και

$$\mathfrak{s}(x) = \sum_{i=0}^{n} [\, f(x_i)\mathrm{A}_i(x) + f'(x_i)\mathrm{B}_i(x)]\,.$$

- Διαπιστώστε ότι αν $f \in C^4[a,b]$ τότε το σφάλμα της προσέγγισης είναι:

$$\| f - \mathfrak{s} \|_\infty < \frac{h^4}{384} \| f^{(4)} \|_\infty \ \text{όπου}\ h = \max_{[a,b]} |x_{i+1} - x_i|\,.$$




*Τα 4 βασικά πολυώνυμα του Hermite.*

**Ερώτημα 13**. Αν $f \in C^m[a,b]$ και $\Delta_n$ είναι διαμέριση του διαστήματος $[a,b]$, αναζητείστε την παρεμβαλλόμενη συνάρτηση spline $\mathfrak{s} \in \mathbb{S}_m(\Delta_n)$, στην περίπτωση $m = 3$, υπολογίζοντας την ορθογώνια προβολή της δεδομένης συνάρτησης στο χώρο $\mathbb{S}_m(\Delta_n)$ ως προς το εσωτερικό γινόμενο:

$$< f, g > = \int_a^b f''(x) g''(x)\, dx\,.$$