ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ακαδημαϊκό έτος 2013-14

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Καθηγητής: Σ. Πνευματικός

ΜΑΘΗΜΑ 4

ASCOLI - ARZELA

Ανασκόπηση κύριων σημείων της διδασκαλίας

ΣΥΜΠΑΓΗ ΥΠΟΣΥΝΟΛΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΩΝ ΧΩΡΩΝ

Ο *Giulio Ascoli* (1843-1896) και ο *Cesare Arzelà* (1847-1912) έδωσαν με το θεώρημά τους τη δυνατότητα χαρακτηρισμού των συμπαγών συνόλων σε συναρτησιακούς χώρους, ανοίγοντας το δρόμο δε σημαντικές εφαρμογές στη Συναρτησιακή Ανάλυση, στη Θεωρία Τελεστών, στη θεωρία Διαφορικών και Ολοκληρωτικών Εξισώσεων.

- **Θεώρημα Heine-Borel**

Στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$: *Ένα σύνολο είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.*

- **Θεώρημα Bolzano-Weierstrass**

Στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$: *Κάθε φραγμένη ακολουθία διαθέτει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Ερώτημα 1. Ποια είναι η σχέση και η διαφορά των δυο προηγούμενων θεωρημάτων;
Ποιο είναι το σκεπτικό της απόδειξής τους; Ισχύουν γενικά στους μετρικούς χώρους;

Σε ένα τοπολογικό χώρο Ε, ένα υποσύνολο Σ καλείται ακολουθιακά συμπαγές αν κάθε ακολουθία σημείων του διαθέτει υπακολουθία συγκλίνουσα μέσα σε αυτό το σύνολο. Αν Ε είναι μετρικός χώρος τότε:

Σ συμπαγές $\Leftrightarrow$ Σ ακολουθιακά συμπαγές.

❖ Για να διατυπώσουμε το θεώρημα Ascoli-Arzelà χρειαζόμαστε τις εξής έννοιες (E μετρικός χώρος):

- Το ότι ένα σύνολο $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ είναι <u>*ισοσυνεχές*</u> στο σημείο $x_o \in E$ σημαίνει:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \rho > 0 :\ \forall f \in \mathcal{A},\ \ \forall x \in E,\ d(x,x_o) < \rho\ \Rightarrow\ | f(x) - f(x_o) | < \varepsilon ,$$

  και το ότι είναι <u>*ισοσυνεχές*</u> (ομοιόμορφα) στο E, σημαίνει:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \rho > 0 :\ \forall f \in \mathcal{A},\ \ \forall x, y \in E,\ d(x,y) < \rho\ \Rightarrow\ | f(x) - f(y) | < \varepsilon .$$

- Το ότι ένα σύνολο $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ είναι <u>*φραγμένο*</u> στο σημείο $x_o \in E$ σημαίνει:

$$\exists \mathrm{M} > 0 :\ | f(x_o) | \le \mathrm{M},\ \forall f \in \mathcal{A} ,$$

  και ότι είναι <u>*φραγμένο*</u> (ομοιόμορφα) στο E σημαίνει:

$$\exists \mathrm{M} > 0 :\ | f(x) | \le \mathrm{M},\ \ \forall x \in E , \forall f \in \mathcal{A} .$$

Ερώτημα 2. Εξετάστε αν τα ακόλουθα σύνολα είναι ισοσυνεχή και φραγμένα:

$$\mathcal{A}=\left\{f_n(x)=nx,\ n\in\mathbb{N},\ x\in[0,1]\right\},\quad \mathcal{A}=\left\{f_n(x)=x^n,\ n\in\mathbb{N},\ x\in[0,1]\right\},$$

$$\mathcal{A}=\left\{f_n(x)=\sin nx,\ n\in\mathbb{N},\ x\in[0,\pi]\right\},\quad \mathcal{A}=\left\{f_n(x)=\sin x/n,\ n\in\mathbb{N},\ x\in[0,\pi]\right\},$$

$$\mathcal{A}=\left\{f\in\mathcal{C}([\mathrm{a},\mathrm{b}],\mathbb{R})\,/\,\|f\|_\infty\le 1\right\},\quad \mathcal{A}=\left\{f\in\mathcal{C}^1([\mathrm{a},\mathrm{b}],\mathbb{R})\,/\,\|f'\|_\infty\le 1\right\},$$

$$\mathcal{A}=\left\{F(x)=\int_0^x f(t)\,dt,\ f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\ \|f\|_\infty\le 1\right\}.$$

Ερώτημα 3. Επιβεβαιώστε ότι ως προς την τοπολογία της απλής σύγκλισης στο συναρτησιακό χώρο $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$:

- *Η κλειστότητα κάθε ισοσυνεχούς συνόλου είναι σύνολο ισοσυνεχές στο συναρτησιακό χώρο* $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$.
- *Το όριο κάθε ισοσυνεχούς συγκλίνουσας ακολουθίας είναι συνάρτηση συνεχής στο Ε.*
- *Διαπιστώστε ότι για να συμπεράνουμε ότι το όριο είναι συνάρτηση συνεχής στο Ε αρκεί η σύγκλιση και η ισοσυνέχεια της ακολουθίας να ελεγχθούν στα σημεία ενός πυκνού υποσυνόλου του Ε.*

Ερώτημα 4. Αν *K* είναι συμπαγές υποσύνολο του μετρικού χώρου *E*, επιβεβαιώστε ότι στο χώρο $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$:

- *Η τοπολογία της απλής σύγκλισης και εκείνη της ομοιόμορφης σύγκλισης συμπίπτουν σε κάθε ισοσυνεχές υποσύνολο του συναρτησιακού χώρου* $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$.
- *Η σημειακή ισοσυνέχεια στο K συνεπάγεται την ομοιόμορφη ισοσυνέχεια στο K.*
- *Η σημειακή σύγκλιση κάθε ισοσυνεχούς ακολουθίας συνεπάγεται την ομοιόμορφη σύγκλιση στο K.*
- *Η σημειακή φραγή κάθε ισοσυνεχούς ακολουθίας συνεπάγεται την ομοιόμορφη φραγή στο K.*[1]

Ερώτημα 5. Αν *K* είναι συμπαγές υποσύνολο του μετρικού χώρου *E*, δείξτε ότι στο χώρο $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$:

- ***Κάθε ομοιόμορφα συγκλίνουσα ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στο K είναι ισοσυνεχής στο K.***
- ***Κάθε ισοσυνεχής φραγμένη ακολουθία στο K διαθέτει ομοιόμορφα συγκλίνουσα υπακολουθία στο K.***

I. Αν μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n(x),\ n\in\mathbb{N}$, συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση $f(x)$, $x\in K$, τότε η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής και μάλιστα ομοιόμορφα συνεχής στο συμπαγές *K*:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\rho_o>0:\ \forall x,y\in K,\ d(x,y)<\rho_o\ \Rightarrow\ |f(x)-f(y)|<\varepsilon/3\,.$$

Η ομοιόμορφη σύγκλιση της ακολουθίας υποδεικνύει, για το ίδιο *ε*, ότι:

$$\exists N\in\mathbb{N}:\ \forall x\in K,\ n>N\ \Rightarrow\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/3\,.$$

Συνεπώς, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και κάθε $x,y\in K$ ισχύει:

$$n>N,\ d(x,y)<\rho_o\ \Rightarrow\ |f_n(x)-f_n(y)|\le|f_n(x)-f(x)|+|f(x)-f(y)|+|f(y)-f_n(y)|<\varepsilon\,.$$

Οι συναρτήσεις $f_1,\dots,f_N$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο συμπαγές *K* οπότε, για το ίδιο *ε*, ισχύει:

$$\exists\rho_k>0:\ \forall x,y\in K,\ d(x,y)<\rho_k\ \Rightarrow\ |f_k(x)-f_k(y)|<\varepsilon,\ k=1,\dots,N\,.$$

---

[1] Η ισοσυνέχεια της ακολουθίας δηλώνει:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\rho>0:\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall x,y\in K,\ d(x,y)<\rho\ \Rightarrow\ |f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon\,.$$

Θεωρώντας το ανοιχτό κάλυμμα του συμπαγούς συνόλου *K* από τα σφαιρώματα $S(x,\rho),\ x\in K$, μπορούμε να βρούμε πεπερασμένο πλήθος σημείων $x_1,\dots,x_p\in K$ έτσι ώστε το *K* να επικαλύπτεται από τα σφαιρώματα $S(x_i,\rho),\ i=1,\dots,p$.
Η σημειακή φραγή της ακολουθίας σε κάθε ένα από αυτά τα σημεία επιτρέπει να επιλέξουμε:

$$\mathrm{M}=\max\{M_1,\dots,M_p\}\,,\quad M_i=\sup\{f_n(x_i)\in\mathbb{R}\ /\ n\in\mathbb{N}\},\ i=1,\dots,p\,.$$

Για κάθε $x\in K$, υπάρχει $i\in\{1,\dots,p\}$, τέτοιο ώστε $x\in S(x_i,\rho)$ οπότε $d(x,x_i)<\rho$ και έτσι προκύπτει η ομοιόμορφη φραγή:

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in K,\ |f_n(x)|\le|f_n(x)-f(x)|+|f(x_i)|<\varepsilon+M_i\le\varepsilon+M\,.$$

Επιλέγοντας $\rho = \min\{\rho_o, \rho_1, ..., \rho_N\}$, αποδεικνύεται η ισοσυνέχεια του συνόλου $\mathcal{A} = \{f_n : K \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\}$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \rho > 0:\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x, y \in K,\ d(x,y) < \rho\ \Rightarrow\ |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon .$$

II. Θυμηθείτε ότι κάθε συμπαγής μετρικός χώρος διαθέτει αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο[2] και θεωρείστε ένα τέτοιο πυκνό σύνολο $S = \{x_1, x_2, ...\} \subset K$. Βασισμένοι στο θεώρημα *Bolzano-Weierstrass*, από τη φραγμένη αριθμητική ακολουθία $f_n(x_1)$ εξάγουμε τη συγκλίνουσα υπακολουθία $f_{1,n}(x_1)$: $\lim f_{1,n}(x_1) = \ell_1$. Κατόπιν, από τη φραγμένη αριθμητική ακολουθία $f_{1,n}(x_2)$ εξάγουμε τη συγκλίνουσα υπακολουθία $f_{2,n}(x_2)$: $\lim f_{2,n}(x_2) = \ell_2$, για την οποία εύκολα θα διαπιστώσετε ότι $\lim f_{2,n}(x_1) = \ell_1$. Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία κατασκευάζουμε σε κάθε στάδιο τη συγκλίνουσα υπακολουθία:

$$f_{p,n}(x_p):\ \lim f_{p,n}(x_1) = \ell_1,\ \lim f_{p,n}(x_2) = \ell_2,\ ...,\ \lim f_{p,n}(x_p) = \ell_p,\quad p = 3,4,... .$$

Συγκροτείται έτσι από την αρχική ακολουθία μια αριθμήσιμη οικογένεια υπακολουθιών με τα προαναφερόμενα χαρακτηριστικά:

$$\begin{array}{l} f_{1,1}, f_{1,2}, f_{1,3}, ... \\ f_{2,1}, f_{2,2}, f_{2,3}, ... \\ f_{3,1}, f_{3,2}, f_{3,3}, ... \\ ...\ \ ...\ \ ...\ \ ... \\ f_{p,1}, f_{p,2}, f_{p,3}, ... \\ ...\ \ ...\ \ ...\ \ ... \end{array}$$

Η διαγώνια ακολουθία $f_{n,n}, n \in \mathbb{N}$, είναι υπακολουθία της δεδομένης αρχικής ακολουθίας $f_n, n \in \mathbb{N}$ και συγκλίνει στα σημεία του αριθμήσιμου πυκνού συνόλου $S = \{x_1, x_2, ...\} \subset K$. Αξιοποιώντας την υπόθεση της ισοσυνέχειας, θα καταλήξετε πλέον χωρίς μεγάλη δυσκολία στην ομοιόμορφη σύγκλιση αυτής της διαγώνιας υπακολουθίας $u_n = f_{n,n},\ n \in \mathbb{N}$ σε όλα τα σημεία του συμπαγούς συνόλου *K*.

Τώρα έχετε ουσιαστικά αποδείξει την απλουστευμένη εκδοχή του θεωρήματος *Ascoli-Arzelà* και με λίγη ακόμη προσπάθεια αποδεικνύεται η γενικευμένη εκδοχή τουλάχιστο στην περίπτωση που ο χώρος άφιξης είναι πλήρης. Στη βιβλιογραφία μπορείτε να αναζητήσετε την απόδειξη γενικότερης εκδοχής όπου ο χώρος αναχώρησης δεν είναι συμπαγής αλλά τοπικά συμπαγής.

- **Θεώρημα Ascoli-Arzelà (απλουστευμένη εκδοχή) :**

Στο συναρτησιακό χώρο $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ *, όπου K συμπαγής μετρικός χώρος, κάθε φραγμένη ισοσυνεχής ακολουθία διαθέτει ομοιόμορφα συγκλίνουσα υπακολουθία. Ως προς την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης:*

αν $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ *τότε* : (i) $\mathcal{A}$ *συμπαγές* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ *κλειστό, φραγμένο και ισοσυνεχές.*

(ii) $\overline{\mathcal{A}}$ *συμπαγές* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ *φραγμένο και ισοσυνεχές.*

- **Θεώρημα Ascoli-Arzelà <u>(γενικευμένη εκδοχή)</u> :**

Στο συναρτησιακό χώρο $\mathcal{C}(K, E')$ *, εφοδιασμένο με την τοπολογία ομοιόμορφης σύγκλισης, όπου K συμπαγής μετρικός χώρος και E' μετρικός χώρος, αν* $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(K, E')$ *τότε* :

$$\overline{\mathcal{A}}\ \textit{συμπαγές} \Leftrightarrow \mathcal{A}\ \textit{ισοσυνεχές και}\ \overline{\mathcal{A}}(x)\ \textit{συμπαγές όπου}\ \mathcal{A}(x) = \left\{ f(x) \in E' \,/\, f \in \mathcal{A} \right\}.$$

- **Πόρισμα Ascoli-Arzelà :**

Στο συναρτησιακό χώρο $\mathcal{C}(K, K')$ *, εφοδιασμένο με την τοπολογία ομοιόμορφης σύγκλισης, όπου K και K' συμπαγείς μετρικοί χώροι, αν* $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(K, K')$ *τότε* :

$$\overline{\mathcal{A}}\ \textit{συμπαγές} \Leftrightarrow \mathcal{A}\ \textit{ισοσυνεχές.}$$

---

[2] Για δεδομένο $n \in \mathbb{N}$, θεωρώντας το ανοιχτό κάλυμμα του συμπαγούς συνόλου *K* από τα σφαιρώματα $S(x, 1/n),\ x \in K$, μπορούμε να βρούμε πεπερασμένο πλήθος σημείων $x_1, ..., x_p \in K$ έτσι ώστε το *K* να επικαλύπτεται από τα σφαιρώματα $S(x_i, 1/n),\ i = 1, ..., p$. Όταν το *n* διατρέχει το σύνολο των φυσικών αριθμών, τα κέντρα των αντίστοιχων σφαιρωμάτων που καλύπτουν το *K* συγκροτούν ένα αριθμήσιμο υποσύνολο Δ του *K*. Αν $y \in K$ και δοθεί ένα οποιοδήποτε ε>0, υπάρχει $n \in \mathbb{N}:\ 1/n < \varepsilon$ και $x_\ell \in \Delta:\ y \in S(x_\ell, 1/n)$, άρα για να πειστούμε ότι το αριθμήσιμο σύνολο Δ είναι πυκνό μέσα στο συμπαγές *K* αρκεί να αντιληφθούμε ότι $S(y, \varepsilon) \cap \Delta \neq \varnothing$.

❖ **<u>ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1</u>**

Με δεδομένη μια συνεχή συνάρτηση

$$\mathcal{K}:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$$

θεωρούμε την απεικόνιση

$$T:\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})\to\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})\,,\quad T(f)(x)=\int_0^1\mathcal{K}(x,t)\,f(t)\,dt\,.$$

Τότε:

$$\mathcal{A}\subset\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})\ \textit{φραγμένο}\ \Rightarrow\ \overline{T(\mathcal{A})}\subset\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})\ \textit{συμπαγές.}$$

Ερώτημα 6. Δείξτε ότι η προηγούμενη πρόταση απορρέει από το θεώρημα Ascoli-Arzelà.

❖ **<u>ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2</u>**

Με δεδομένη μια συνεχή συνάρτηση

$$f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$$

θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x(t))\,,\quad x_o=x(0)\,.$$

Το θεώρημα Peano, που θα δούμε στο μάθημα των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων, δηλώνει την ύπαρξη ε>0 που διασφαλίζει την ύπαρξη λύσης:

$$x:[0,\varepsilon]\to\mathbb{R}^n,\quad x(0)=x_o\,.$$

Ερώτημα 7. Δείξτε ότι η προηγούμενη πρόταση απορρέει από το θεώρημα Ascoli-Arzelà.
