ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2011-12

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι

Καθηγητής: Σ. Πνευματικός

Μάθημα 1^{ο}

Η ΚΛΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΗΣΗ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ, ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ, ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Κάθε επιστημονική θεωρία, είτε αναφέρεται στο χρόνο και στο χώρο, είτε σε άλλη έννοια, διαμορφώνεται βασιζόμενη σε μαθηματικά πρότυπα που περιγράφουν και κωδικοποιούν τις παρατηρήσεις μας. Ένα μαθηματικό πρότυπο δεν μπορεί να πει τι είναι στην πραγματικότητα ο χρόνος και ο χώρος, όμως προσφέρει τις ορθολογικές του προβλέψεις οι οποίες επιζητούν την πειραματική τους επαλήθευση. Από την επαλήθευση αυτή κρίνεται η επάρκειά του και η ικανότητά του για την ερμηνεία της φυσικής πραγματικότητας.

Ο Νεύτωνας, το 1687, στο έργο του *Μαθηματικές Αρχές της Φυσικής Φιλοσοφίας*,[1] παρουσίασε το πρώτο μαθηματικό πρότυπο για το χρόνο και το χώρο. Στο πρότυπο αυτό, ο χρόνος και ο χώρος είναι διαχωρισμένοι μεταξύ τους και συνιστούν ένα υπόβαθρο στο οποίο διαδραματίζονται τα γεγονότα. Ένα *γεγονός* είναι κάτι που συμβαίνει σε κάποια συγκεκριμένη στιγμή στο χρόνο και σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο στο χώρο και η αντιληπτική ανάγκη απαιτεί τέσσερις πληροφορίες για τον εντοπισμό του, μια χρονική και τρεις χωρικές. Αλλά, σε αντίθεση με αυτό που πίστευαν στην αρχαιότητα, καμία στιγμή του χρόνου και κανένα σημείο του χώρου δεν ξεχωρίζει από τις άλλες στιγμές και τα άλλα σημεία ώστε να υπάρχει μια απόλυτα αποδεκτή αρχή ως προς την οποία να εντοπίζονται τα γεγονότα. Συνεπώς, το μαθηματικό πρότυπο του χρόνου και του χώρου οφείλει να ανταποκρίνεται στην ανυπαρξία αρχής. Το πρότυπο αυτό διαμορφώνεται με τη θεώρηση ενός τετραδιάστατου *αφινικού χώρου* που αναπαριστά το *χωροχρόνο*, πριν τη διάσπασή του σε χώρο και χρόνο. Κάθε σημείο του αναπαριστά ένα *γεγονός* και κανένα από αυτά δεν ξεχωρίζει από τα άλλα ώστε να εκληφθεί ως απόλυτη αρχή. Όπως το υπαγορεύει η κλασική μαθηματική θεωρία, σε αυτόν τον τετραδιάστατο αφινικό χώρο $\mathbb{E}^4$ υπόκειται ο τετραδιάστατος πραγματικός διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^4$.

---

[1] Isaac Newton, "Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica", 1687.

Ο πραγματικός αυτός διανυσματικός χώρος νοείται ως ο χώρος του οποίου τα τετραδιανύσματα εκτελούν τις χωροχρονικές μεταφορές μεταξύ των γεγονότων του αφινικού χωροχρόνου. Συγκεκριμένα, διαμέσου μιας αξιωματικά ορισμένης απεικόνισης, σε κάθε ζεύγος γεγονότων $\mathfrak{a},\mathfrak{b} \in \mathbb{E}^4$ προσαρτάται το διάνυσμα μεταφοράς $\vec{\upsilon}_{\mathfrak{ab}} \in \mathbb{R}^4$ και η μεταφορά αυτή δηλώνεται συμβολικά ως εξής:

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + \vec{\upsilon}_{\mathfrak{ab}} .$$

Ο *Stephen Hawking* λέει ότι[2] ο χρόνος θα μπορούσε απλοϊκά να νοηθεί σαν μια ανεξάρτητη γραμμή, κάτι σαν σιδηροδρομική γραμμή, που εκτείνεται επ’άπειρο προς τις δυο κατευθύνσεις και θεωρείται παντοτινός υπό την έννοια ότι είχε υπάρξει από πάντα και θα υπάρχει για πάντα. Από μαθηματική άποψη, ο *χρόνος* ορίζεται ως γραμμική απεικόνιση - *ως προβολή* - του τετραδιάστατου χώρου των χωροχρονικών μεταφορών στην πραγματική ευθεία που καλείται *χρονικός άξονας*:

$$\tau : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} .$$

Το *χρονικό διάστημα* μεταξύ δύο γεγονότων $\mathfrak{a}$ και $\mathfrak{b}$ προσμετράται με τον αριθμό:

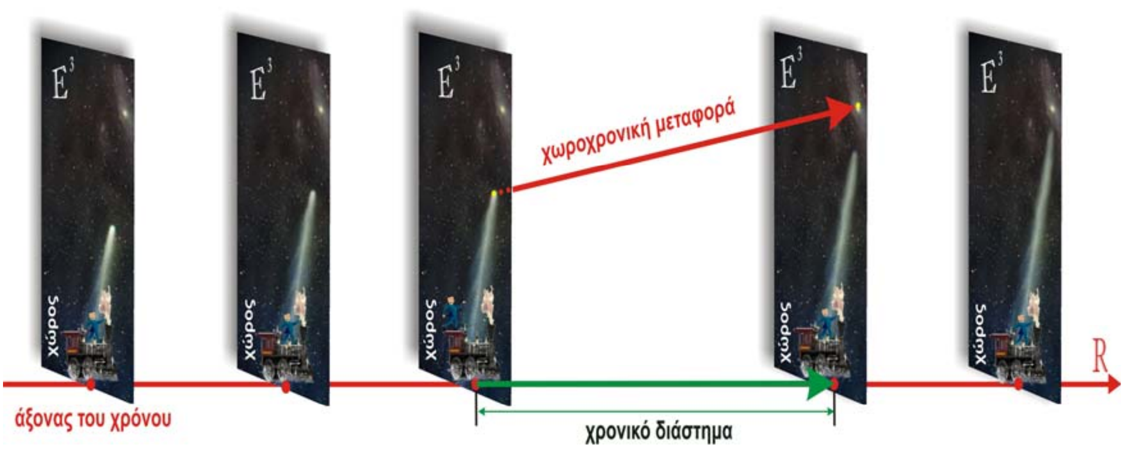
$$\tau(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) \equiv \tau(\vec{\upsilon}_{\mathfrak{ab}})$$

και τα γεγονότα αυτά καλούνται *ταυτόχρονα* όταν:

$$\tau(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) = 0 .$$

Οι χωροχρονικές μεταφορές που μεταφέρουν κάθε γεγονός σε ταυτόχρονό του συγκροτούν τον πυρήνα της προβολής των χωροχρονικών μεταφορών στο χρονικό άξονα:

$$\mathfrak{Ker}\,\tau = \left\{ \upsilon_{\mathfrak{ab}} \in \mathbb{R}^4 \;/\; \tau(\upsilon_{\mathfrak{ab}}) = 0 \right\} .$$



Μετάβαση από ένα γεγονός σε άλλο γεγονός μέσα στον κλασικό χώρο-χρόνο

[2] *Από το βιβλίο του Stephen Hawking: «The Universe in a Nutshell».*

Συνεπώς, κάθε χρονική στιγμή, τα ταυτόχρονα γεγονότα συγκροτούν έναν τρισδιάστατο αφινικό χώρο $\mathbb{E}^3$ στον οποίο υπόκειται ο πραγματικός διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^3$ και έτσι ο τετραδιάστατος χωροχρόνος διασπάται στο καρτεσιανό γινόμενο χώρου και χρόνου:

$$\mathbb{E}^4 = \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^1$$

στο οποίο υπόκειται το καρτεσιανό γινόμενο του αριθμητικού χώρου και του αριθμητικού χρόνου:

$$\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} .$$

Η αρχέγονη έννοια του χώρου, που για αιώνες θεωρείτο σαν υπόβαθρο στο οποίο λαμβάνουν χώρα τα φυσικά φαινόμενα, αποκτά έτσι μαθηματική υπόσταση όπως την υπέδειξε ο Νεύτωνας. Και ο χρόνος, που όπως πίστευαν διαπερνούσε το χώρο αφήνοντας τα ίχνη του, αποκτά μαθηματικό ορισμό. Και, κάθε γεγονός, αποκτά τη δική του τρισδιάστατη χωρική και μονοδιάστατη χρονική μαθηματική και αριθμητική υπόσταση. Ο τρισδιάστατος αριθμητικός χώρος είναι εφοδιασμένος με την ευκλείδεια δομή του και αυτή δίνει τη δυνατότητα αριθμητικής αποτίμησης των χωρικών αποστάσεων των ταυτόχρονων γεγονότων.[3] Ο όρος *ευκλείδεια δομή* υποδηλώνει την πραγματική διανυσματική δομή που αποδίδει σε κάθε σημείο διανυσματική υπόσταση και τη μετρική δομή που απορρέει από την ενδογενή πράξη του εσωτερικού γινομένου. Η πράξη αυτή αποδίδει σε κάθε ζεύγος διανυσμάτων έναν πραγματικό αριθμό διαμέσου μιας διγραμμικής απεικόνισης που απαιτείται να είναι συμμετρική και θετικά ορισμένη:

$$<,> : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} .$$

Έτσι, σε κάθε διάνυσμα του ευκλείδειου χώρου αποδίδεται το *μέτρο* του:

$$\| \vec{x} \| = < \vec{x}, \vec{x} >^{1/2}$$

και η *απόσταση* δυο σημείων προσμετράται ως εξής:

$$d(x,y) = \| \vec{x} - \vec{y} \| .$$

Σε κάθε ζεύγος μη μηδενικών διανυσμάτων αποδίδεται μονοσήμαντα το μέτρο της γωνίας τους:

$$\cos\theta = < \vec{x}, \vec{y} > / \| \vec{x} \| \| \vec{y} \|, \quad 0 \le \theta \le \pi ,$$

και έτσι ορίζεται η έννοια της ορθογωνιότητας στο χώρο των ταυτόχρονων γεγονότων:

$$< \vec{x}, \vec{y} > = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} \perp \vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad \| \vec{x} + \vec{y} \| = \| \vec{x} - \vec{y} \| .$$

[3] Στην Κλασική Μηχανική η ανυπαρξία τετραδιάστατης φυσικής μετρικής οφείλεται στην ανυπαρξία παγκόσμιας σταθεράς με διαστάσεις ταχύτητας όπως συμβαίνει με την ταχύτητα του φωτός στη Θεωρία της Σχετικότητας.

Ο τρισδιάστατος ευκλείδειος χώρος εφοδιάζεται με το *ευκλείδειο σύστημα αναφοράς*, δηλαδή ένα τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων που ορίζεται από μια θετικά προσανατολισμένη ορθοκανονική βάση και το οποίο είναι κεντροθετημένο στην αρχή του ευκλείδειου χώρου. Έτσι προκύπτει το *καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων* που ορίζεται από τις τρεις ορθογώνιες προβολές:

$$x_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,, \quad i = 1,2,3\,.$$

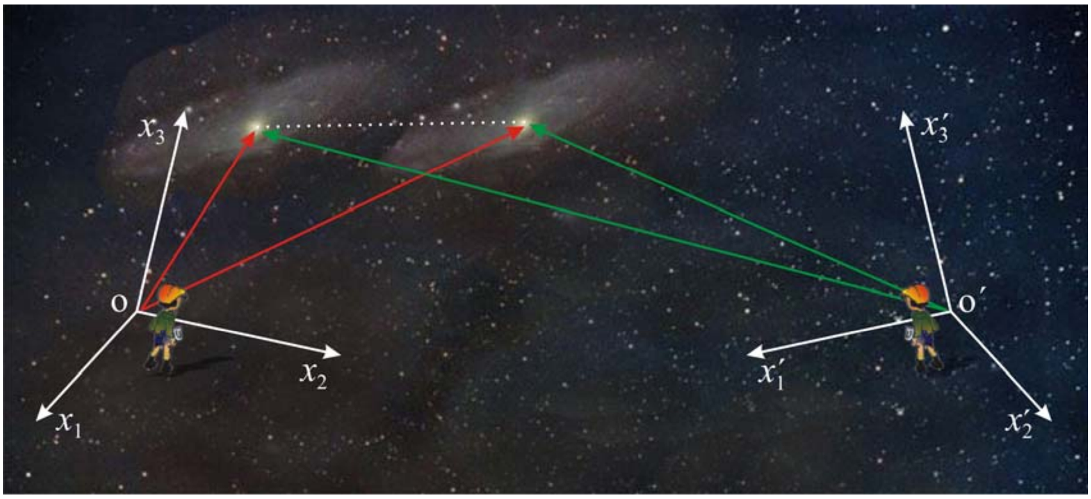
Οι προβολές αυτές αποδίδουν στα σημεία του χώρου των ταυτόχρονων γεγονότων τις αριθμητικές συντεταγμένες τους που επιτρέπουν τον εντοπισμό τους ως προς το ευκλείδειο σύστημα αναφοράς. Στο ευκλείδειο σύστημα αναφοράς το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων υπολογίζεται ως εξής:

$$<\vec{x},\vec{y}> = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \quad \Rightarrow \quad \|\vec{x}\| = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2}$$

και η χωρική απόσταση δυο ταυτόχρονων γεγονότων $\mathfrak{a} = (x,t)$ και $\mathfrak{b} = (y,t)$ προσμετράται ως εξής:

$$d(x,y) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \left((y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2\right)^{1/2}.$$

Στην Κλασική Μηχανική, τα συστήματα αναφοράς είναι χωρικής φύσης[4] και παραμένουν ανεπηρέαστα από το χρόνο ο οποίος έχει απόλυτη υπόσταση. Η αφινική φύση του χώρου υποδεικνύει ότι ένα *σύστημα αναφοράς*, δηλαδή ένα τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων ορισμένο από μια θετικά προσανατολισμένη ορθοκανονική βάση, μπορεί να κεντροθετηθεί οπουδήποτε στο χώρο. Οι παρατηρητές που βρίσκονται σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς αποδίδουν διαφορετικές αριθμητικές συντεταγμένες στα σημεία του χώρου, αλλά όταν υπολογίζουν τη σχετική απόσταση δυο ταυτόχρονων γεγονότων βρίσκουν ίδιο αριθμητικό αποτέλεσμα.



Εντοπισμός της απόστασης δυο σημείων στο χώρο από διαφορετικά συστήματα αναφοράς.

[4] Στη Θεωρία της Σχετικότητας, η φύση των συστημάτων αναφοράς είναι χωροχρονική και οι μετρήσεις επηρεάζονται από την κινητική τους κατάσταση όταν η ταχύτητά τους πλησιάζει την ταχύτητα του φωτός.

✓ Η μαθηματική δομή του κλασικού χωροχρόνου, που χαρακτηρίζεται από την αφινικότητά της, τη γραμμικότητα του χρόνου και την ευκλείδεια δομή του χώρου, καλείται *γαλιλαϊκή δομή*.

Οι φυσικοί και οι μαθηματικοί συμφωνούν στο ότι βασικό μέλημα είναι η αναζήτηση *συμμετριών* στη γαλιλαϊκή δομή του χώρο-χρόνου. Όμως, τι σημαίνει συμμετρία στη Φυσική και στα Μαθηματικά;

Για τη Φυσική, ειπώθηκε το εξής:[5] "Τελικά, για μας τους φυσικούς, η συμμετρία είναι μια φυσική ιδιότητα, μια υπόθεση που κάνουμε ότι υπάρχει κάτι, κάποιο μέγεθος, από το οποίο δεν εξαρτώνται οι φυσικοί νόμοι και το οποίο δεν είναι μετρήσιμο, δεν μπορούμε να το μετρήσουμε. Για μας τους φυσικούς αυτά που υπάρχουν είναι μόνο αυτά που μπορούμε να μετρήσουμε. Αυτός είναι ο ορισμός της ύπαρξης. Αν κάτι δεν μπορούμε να το μετρήσουμε, για μας δεν υπάρχει. Ποιες ιδιότητες του χώρου δεν μπορούμε να μετρήσουμε; Είναι προφανές ότι αν κάτι δεν μπορούμε να το μετρήσουμε τότε, όταν αλλάζουμε την τιμή του, οι εξισώσεις μας πρέπει να διατηρούνται αναλλοίωτες. Αν κάποιο μέγεθος δεν μετριέται, δεν πρέπει να εμφανίζεται μέσα στις εξισώσεις. Επομένως, αυτό θα το λέμε συμμετρία, αυτό που αφήνει τις εξισώσεις αναλλοίωτες. Με παραδείγματα θα το αντιληφθούμε καλύτερα. Ας πάρουμε την εξίσωση του Νεύτωνα. Η δύναμη είναι ανάλογη της επιτάχυνσης. Η εξίσωση αυτή έχει τις εξής ωραίες ιδιότητες: Πρώτα από όλα μπορώ να φανταστώ ότι κάνω μια μετατόπιση του συστήματος των συντεταγμένων, να πάω από τη θέση x στη θέση x' προσθέτοντας κάποιο σταθερό διάνυσμα $\vec{x}_o$. Αυτό δεν θα αλλάξει σε τίποτα την εξίσωση, αφού το x δεν υπεισέρχεται σ' αυτήν αλλά μόνο οι παράγωγοι του ως προς το χρόνο. Άρα έχω μια συμμετρία. Αυτό είναι η μαθηματική έκφραση. Από φυσική άποψη σημαίνει ότι δεν υπάρχει κάποιο πείραμα που να μου πει ποια είναι η αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Όλα τα σημεία είναι ίδια και κανένα δεν μπορεί να ξεχωρίσει ώστε να θεωρηθεί απόλυτη αρχή του χώρου. Γι' αυτό λέω ότι ο *χώρος είναι ομογενής*, όπου κι αν μετατοπιστώ ο χώρος είναι ίδιος. Αλλά και ο *χρόνος είναι ομογενής*, γιατί τίποτα δεν αλλάζει στην εξίσωση αν κάνω μια μετατόπιση στον άξονα του χρόνου από τη στιγμή t στη στιγμή t' προσθέτοντας κάποιο σταθερό αριθμό t_o. Το ίδιο ισχύει αν κάνω στροφές στο χώρο. Δεν υπάρχει κάποια διεύθυνση στο χώρο που να έχει κάτι διαφορετικό από τις άλλες. Όλες οι διευθύνσεις είναι ίδιες και γι' αυτό λέω ότι *ο χώρος είναι ισότροπος*. Όμως, οι εξισώσεις μας είναι δεύτερης τάξης και αυτό σημαίνει ότι μπορώ να βάλω στους μετασχηματισμούς και έναν όρο που να είναι πρώτου βαθμού ως προς το χρόνο, γιατί στη δεύτερη παραγώγιση αυτός ο όρος θα φύγει. Άρα, όχι μονάχα έχω αναλλοίωτο στις χρονικές και χωρικές μετατοπίσεις και στις χωρικές στροφές, αλλά και στην αλλαγή συντεταγμένων όταν το σύστημα αναφοράς εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ως προς το αρχικό σύστημα αναφοράς. Αυτό ονομάστηκε *Αρχή της Σχετικότητας* του Γαλιλαίου."

---

[5] *Γ. Ηλιόπουλος: "Η έννοια του χώρου στη Σύγχρονη Φυσική", Διάλογοι Φυσικής στην Εστία Επιστημών Πάτρας, Ιούλιος 2011,* www.eduscience.gr

Στα Μαθηματικά, το ζητούμενο των συμμετριών στο χώρο-χρόνο ανάγεται στον προσδιορισμό των γεωμετρικών μετασχηματισμών του που διατηρούν αναλλοίωτες τις χαρακτηριστικές του ιδιότητες. Ο Γαλιλαίος ήταν ο πρώτος που ανέδειξε αυτό τον προβληματισμό και έτσι οι μετασχηματισμοί που ανταποκρίνονται σε αυτή την απαίτηση καλούνται *γαλιλαϊκοί μετασχηματισμοί*.[6]

Στον αριθμητικό χώρο-χρόνο, οι γαλιλαϊκοί μετασχηματισμοί χαρακτηρίζονται από το ότι διατηρούν αμετάβλητες τις χρονικές αποστάσεις των γεγονότων, τις χωρικές αποστάσεις των ταυτόχρονων γεγονότων και τον προσανατολισμό του χώρου των ταυτόχρονων γεγονότων. Έτσι, οι γαλιλαϊκοί μετασχηματισμοί προκύπτουν από τη σύνθεση των χρονικών μεταφορών, των χωρικών μεταφορών, των χωρικών στροφών και των αδρανειακών μετακινήσεων στο χώρο. Κάθε γαλιλαϊκός μετασχηματισμός:

$$\mathfrak{g}:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\,,\quad \mathfrak{g}(x,t)=(x',\,t')\,,$$

εκφράζεται ως εξής:

$$\mathfrak{g}(x,t)=(S\,x+v_o t+x_o,\;t+t_o)$$

όπου οι συνιστώντες γεωμετρικοί μετασχηματισμοί ορίζονται ως εξής:

- *χρονική μεταφορά:* $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$

  $(x,t)\to(x,\,t+t_o)$ $\qquad t_o\in\mathbb{R}\,,$

- *χωρική μεταφορά:* $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$

  $(x,t)\to(x+x_o,\,t)$ $\qquad x_o\in\mathbb{R}^3\,,$

- *χωρική στροφή:* $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$

  $(x,t)\to(S\,x,\,t)$ $\qquad S\in\mathcal{SO}(3)\,,$

- *αδρανειακή μετατόπιση:* $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$

  $(x,t)\to(x+v_o t,\,t)$ $\qquad v_o\in\mathbb{R}^3\,.$

Το σύνολο των γαλιλαϊκών μετασχηματισμών, εφοδιασμένο με την πράξη της σύνθεσης, αποτελεί μη αντιμεταθετική ομάδα που καλείται *γαλιλαϊκή ομάδα* και κάθε στοιχείο της καθορίζεται από τις τιμές 10 παραμέτρων:

$$t_o\in\mathbb{R}\,,\quad x_o=(x_{o1},x_{o2,},x_{o3})\in\mathbb{R}^3\,,\quad v_o=(v_{o1},v_{o2,},v_{o3})\in\mathbb{R}^3\,,\quad S\in\mathcal{SO}(3)\,.$$

[6] Galileo Galilei : “ Discorsi e Dimostrazioni Matematica, intorno a due nuove scienze ”, 1638.

Η δράση της γαλιλαϊκής ομάδας στον αριθμητικό χώρο-χρόνο εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & v_{o1} \\ \cdot & S & \cdot & v_{o2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & v_{o3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{o1} \\ x_{o2} \\ x_{o3} \\ t_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ t' \end{bmatrix}.$$

Οι γαλιλαϊκοί μετασχηματισμοί μηδενικής χρονικής παραμέτρου συγκροτούν μια υποομάδα της γαλιλαϊκής ομάδας που δρα ισομετρικά στο χώρο των ταυτόχρονων γεγονότων διατηρώντας το χωρικό προσανατολισμό. Άρα πρόκειται για χωρικές στροφές ακολουθούμενες από χωρικές μεταφορές και χωρικές αδρανειακές μετατοπίσεις και εκφράζονται ως εξής:[7]

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & S & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{o1}t + x_{o1} \\ v_{o2}t + x_{o2} \\ v_{o3}t + x_{o3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}.$$

Κάθε χωρική στροφή εκτελείται γύρω από τον ιδιοάξονά της που προσανατολίζεται με την επιλογή ενός μοναδιαίου ιδιοδιανύσματος. Αυτό το ιδιοδιάνυσμα και δυο ακόμη κάθετα μεταξύ τους μοναδιαία διανύσματα του ορθογώνιου προς τον ιδιοάξονα επιπέδου, με κατάλληλη διάταξη, συγκροτούν μια θετικά προσανατολισμένη ορθοκανονική βάση στην οποία η χωρική στροφή, ακολουθούμενη από τη μεταφορά και την αδρανειακή μετατόπιση, εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{v}_{o1}t + \overline{x}_{o1} \\ \overline{v}_{o2}t + \overline{x}_{o2} \\ \overline{v}_{o3}t + \overline{x}_{o3} \end{bmatrix}.$$

Ο υπολογισμός της γωνίας στροφής προκύπτει από το ότι το ίχνος των πινάκων των γραμμικών μετασχηματισμών διατηρείται αναλλοίωτο κατά τις αλλαγές βάσης, άρα:

$$2\cos\theta + 1 = \mathfrak{tr}S \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = (\mathfrak{tr}S - 1)/2\,.$$

Ο προσανατολισμός της γωνίας στροφής προκύπτει από τη φορά του μοναδιαίου ιδιοδιανύσματος $\vec{\xi}$ που προσανατολίζει τον ιδιοάξονα περιστροφής και καθορίζεται από την ακόλουθη σχέση που ισχύει για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\zeta}$ του ορθογώνιου προς τον ιδιοάξονα επιπέδου:

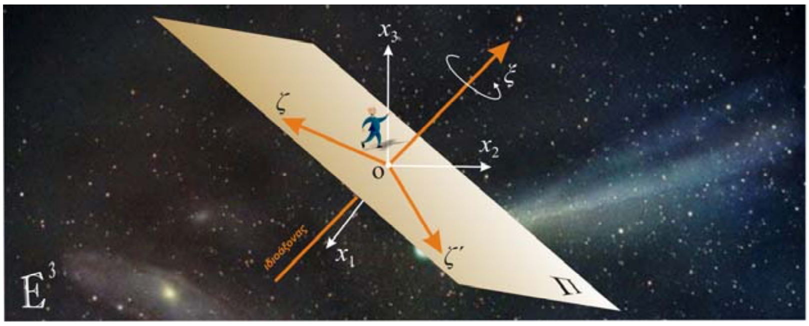
$$\sin\theta = \mathfrak{det}\left[\vec{\zeta}, S\vec{\zeta}, \vec{\xi}\right], \quad \vec{\zeta} \in \Pi\,.$$

[7] Κάθε *ισομετρία* αποσυντίθεται μονοσήμαντα σε ένα *ορθογώνιο μετασχηματισμό* ακολουθούμενο από μια *μεταφορά*. Οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί διατηρούν την *ορθοκανονικότητα* των βάσεων και αυτοί που επιπλέον διατηρούν τον *προσανατολισμό* είναι οι χωρικές στροφές, δηλαδή τα στοιχεία της ομάδας χωρικών στροφών που χαρακτηρίζονται ως εξής:

$$S \in \mathcal{SO}(3) \quad \Leftrightarrow \quad {}^{\mathrm{T}}S\,S = \mathbb{I} \;\;\&\;\; \mathfrak{det}S = 1\,.$$

Στο ευκλείδειο σύστημα αναφοράς του χώρου των ταυτόχρονων γεγονότων, ο πίνακας στροφής γύρω από τον άξονα που ορίζεται από το μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} (1-\cos\theta)\xi_1^2+\cos\theta & (1-\cos\theta)\xi_1\xi_2-(\sin\theta)\xi_3 & (1-\cos\theta)\xi_1\xi_3+(\sin\theta)\xi_2 \\ (1-\cos\theta)\xi_1\xi_2+(\sin\theta)\xi_3 & (1-\cos\theta)\xi_2^2+\cos\theta & (1-\cos\theta)\xi_2\xi_3-(\sin\theta)\xi_1 \\ (1-\cos\theta)\xi_1\xi_3-(\sin\theta)\xi_2 & (1-\cos\theta)\xi_2\xi_3+(\sin\theta)\xi_1 & (1-\cos\theta)\xi_3^2+\cos\theta \end{bmatrix}.$$



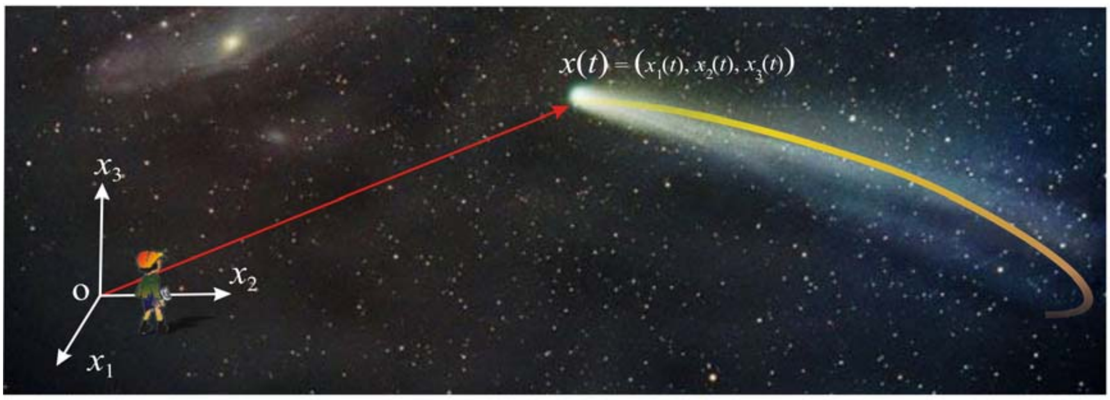
Μετασχηματισμός στροφής στο χώρο των ταυτόχρονων γεγονότων.

✓ Η απόδοση μαθηματικής υπόστασης στην έννοια της *κίνησης* στο χώρο απαιτεί τη θεώρηση ενός σημειακού γεωμετρικού προτύπου, ενός *υλικού σημείου*. Η *κίνηση* ενός υλικού σημείου εκφράζεται στον ευκλείδειο χώρο ως συνεχής απεικόνιση ορισμένη σ'ένα διάστημα του χρονικού άξονα:

$$x : \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 .$$

Κάθε χρονική στιγμή το υλικό σημείο καταλαμβάνει μια συγκεκριμένη θέση στον ευκλείδειο χώρο η οποία προσδιορίζεται με τις καρτεσιανές συντεταγμένες του στο ευκλείδειο σύστημα αναφοράς και εντοπίζεται με το διάνυσμα θέσης:

$$\vec{x}(t) = \left(x_1(t), x_2(t), x_3(t) \right).$$



Εντοπισμός της θέσης ενός υλικού σημείου κατά την κίνησή του στο χώρο.

Η *τροχιά* της κίνησης αναπαρίσταται με την προσανατολισμένη καμπύλη που ορίζεται από την εικόνα αυτής της απεικόνισης στον τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο και το γράφημά της εκφράζει την *εξέλιξη* της στον τετραδιάστατο αριθμητικό χώρο-χρόνο. Οι τροχιές που διαγράφονται στον ευκλείδειο χώρο δεν είναι απαραίτητα λείες, όμως για να οριστεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του υλικού σημείου χρειάζεται οι συνιστώσες συναρτήσεις της θέσης του να είναι τουλάχιστο δυο φορές παραγωγίσιμες με συνεχείς παραγώγους:

$$x_i : \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad i = 1,2,3 .$$

Η *ταχύτητα* με την οποία το υλικό σημείο διανύει την τροχιά του εκφράζεται, τη χρονική στιγμή $t \in \mathrm{I}$, με το εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο $x(t)$:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \left(\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t) \right)_{x(t)}$$

και, την ίδια στιγμή, η *επιτάχυνση* εκφράζεται με το διάνυσμα:

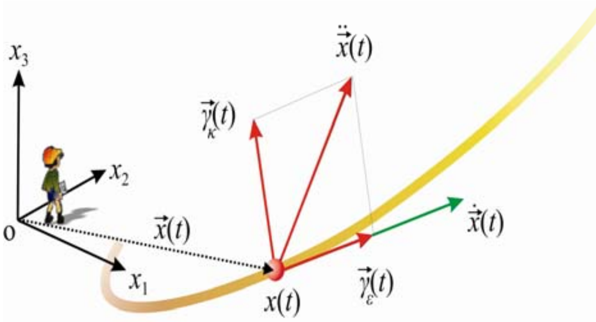
$$\ddot{\vec{x}}(t) = \left(\ddot{x}_1(t), \ddot{x}_2(t), \ddot{x}_3(t) \right)_{x(t)} .$$

Κάθε χρονική στιγμή, το διάνυσμα της επιτάχυνσης αποσυντίθεται στην *επιτρόχια* και την *κεντρομόλο* συνιστώσα του:

$$\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{\gamma}_\varepsilon(t) + \vec{\gamma}_\kappa(t)$$

όπου

$$\vec{\gamma}_\varepsilon(t) \,/\!/\, \dot{\vec{x}}(t) \quad \text{και} \quad \vec{\gamma}_\kappa(t) \perp \dot{\vec{x}}(t) .$$



Αποσύνθεση της επιτάχυνσης στην επιτρόχια και στην κεντρομόλο συνιστώσα της.

Αν η κεντρομόλος συνιστώσα της επιτάχυνσης είναι μηδενική: $\vec{\gamma}_\kappa \equiv 0$, τότε η τροχιά είναι ευθύγραμμη και αν επιπλέον η επιτρόχια συνιστώσα της είναι επίσης μηδενική: $\vec{\gamma}_\varepsilon \equiv 0$, τότε η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή:

$$x(t) = x_o + v_o t = (x_{o1} + v_{o1}t,\ x_{o2} + v_{o2}t,\ x_{o3} + v_{o3}t) , \quad x_o, v_o \in \mathbb{R}^3 .$$

Η κεντρομόλος επιτάχυνση προκαλεί καμπύλωση της τροχιάς, ενώ η επιτρόχια επιτάχυνση επιδρά αποτρεπτικά στην καμπύλωσή της. Με την προϋπόθεση μη μηδενισμού της ταχύτητας, η *καμπυλότητα* της τροχιάς προσμετράται κάθε στιγμή από την τιμή της συνάρτησης:

$$\kappa : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^+ , \quad \kappa(t) = \frac{\| \dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t) \|}{\| \dot{\vec{x}}(t) \|^3} .$$

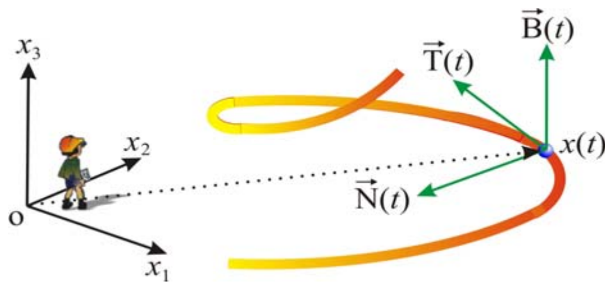
Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της καμπυλότητας τόσο εντονότερη είναι η καμπύλωση της τροχιάς και η κίνηση είναι ευθύγραμμη μόνο όταν η καμπυλότητα είναι παντού μηδενική. Κάθε χρονική στιγμή, εφόσον η καμπυλότητα δεν μηδενίζεται, ορίζεται η *στρέψη* της τροχιάς που προσμετράται κάθε στιγμή από την τιμή της συνάρτησης:

$$\tau : \mathrm{I} \to \mathbb{R} , \quad \tau(t) = \frac{< \dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t) \, , \dddot{\vec{x}}(t) >}{\| \dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t) \|^2} .$$

Όσο μεγαλύτερη είναι η απόλυτη τιμή της στρέψης τόσο εντονότερη είναι η εκτροπή της τροχιάς από το να είναι επίπεδη και η κίνηση είναι επίπεδη μόνο όταν η στρέψη είναι παντού μηδενική.

Η καμπυλότητα και η στρέψη είναι ενδογενή γεωμετρικά χαρακτηριστικά κάθε τροχιάς που δεν εξαρτώνται από την επιλογή της παραμέτρησής της στον ευκλείδειο χώρο.[8] Τα χαρακτηριστικά αυτά εμπεριέχονται στο *τρίεδρο Frenet* της τροχιάς, δηλαδή στο θετικά προσανατολισμένο τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων που, κάθε στιγμή, προσαρτάται στο αντίστοιχο σημείο της τροχιάς και, εφόσον εκεί δεν μηδενίζεται η καμπυλότητα, ορίζεται από τα μοναδιαία διανύσματα:

$$\vec{\mathrm{T}}(t) = \frac{\dot{\vec{x}}(t)}{\| \dot{\vec{x}}(t) \|} , \qquad \vec{\mathrm{N}}(t) = \vec{\mathrm{B}}(t) \times \vec{\mathrm{T}}(t) , \qquad \vec{\mathrm{B}}(t) = \frac{\dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t)}{\| \dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t) \|} .$$



Τρίεδρο Frenet σε κάποιο σημείο μιας τροχιάς στον τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο.

[8] Η καμπυλότητα και η στρέψη μιας τροχιάς, ως ενδογενή χαρακτηριστικά της, προσδιορίζονται διαμέσου ενός *μεταχρονισμού* του χρονικού άξονα, δηλαδή μιας κατάλληλης αναπαραμέτρησης της αριθμητικής του διαβάθμισης. που ορίζεται λαμβάνοντας υπόψη το μήκος του διανυθέντος τμήματος της τροχιάς από μια αρχική στιγμή t_o έως μια δεδομένη στιγμή t, θέτουμε:

$$t' = s(t) = \int_{t_o}^{t} \| \dot{\vec{x}}(u) \| \, du .$$

✓ Η Κλασική Μηχανική, ως ορθολογική θεωρία, θεμελιώνεται σε *αξιώματα* που δεν διαψεύδονται από τα πειραματικά δεδομένα της φυσικής πραγματικότητας. Τα θεμελιώδη αξιώματά της είναι η *Γαλιλαϊκή Αρχή της Σχετικότητας* και η *Νευτώνεια Αρχή του Ντετερμινισμού*.

Η Αρχή της Σχετικότητας πρωτοεμφανίστηκε με γλαφυρή περιγραφή στα κείμενα του Γαλιλαίου: "Μαζί με φίλους σας κλειστείτε στο εσωτερικό ενός πλοίου, εκεί όπου δεν υπάρχει δυνατότητα αντίληψης του εξωτερικού χώρου, και αφήστε να πετούν ολόγυρά σας πεταλούδες και άλλα πετούμενα, βάλτε μικρά ψάρια σ' ένα ενυδρείο και στην οροφή ένα δοχείο από όπου να πέφτουν στάλες νερού σε ένα μπουκάλι τοποθετημένο στο δάπεδο. Όταν το πλοίο είναι ακίνητο παρατηρείστε προσεκτικά πώς πετούν τα μικρά ζώα εξίσου άνετα προς όλες τις κατευθύνσεις, πώς κινούνται τα ψάρια εξίσου άνετα προς κάθε πλευρά, πώς όλες οι στάλες πέφτουν μέσα στο μπουκάλι. Και εσείς δεν θα χρειαστεί να καταβάλετε μεγαλύτερη ή μικρότερη προσπάθεια για να ρίξετε ένα αντικείμενο στον ένα ή τον άλλο φίλο σας που απέχουν εξίσου από εσάς ολόγυρά σας. Όταν το πλοίο αρχίσει να κινείται, όσο γρήγορα θέλετε, αρκεί η κίνηση να είναι ομαλή, δεν θα διακρίνετε την παραμικρή αλλαγή στις παρατηρήσεις σας ώστε να μπορέσετε να συμπεράνετε ότι το πλοίο πράγματι κινείται. Ο λόγος βρίσκεται στο ότι η κίνηση είναι κοινή για το πλοίο και ότι άλλο υπάρχει σε αυτό συμπεριλαμβανόμενου του αέρα."

Η Αρχή του Ντετερμινισμού πρωτοεμφανίστηκε με τη μορφή της θεμελιώδους εξίσωσης της κίνησης στο βιβλίο του Νεύτωνα *Μαθηματικές Αρχές της Φυσικής Φιλοσοφίας*. Εκεί δηλώνεται ότι αν σε μια χρονική στιγμή γνωρίζουμε τη θέση και την ταχύτητα ενός σώματος τότε μπορούμε να προβλέψουμε την εξελικτική του πορεία στο μέλλον και να μάθουμε το παρελθόν της. Έναν αιώνα αργότερα ο *Pierre Simon Laplace* έγραφε: "Πρέπει να αντιμετωπίζουμε την παρούσα κατάσταση του σύμπαντος ως αποτέλεσμα της προηγούμενης κατάστασής του και ως αιτία της επόμενης. Μια διάνοια που, σε μια δεδομένη στιγμή, θα γνώριζε όλες τις δυνάμεις που κινούν τη φύση και την αντίστοιχη κατάσταση των όντων που την αποτελούν, ενώ ταυτόχρονα θα ήταν τόσο ευρεία ώστε να μπορεί να αναλύει όλα τα δεδομένα, θα είχε τη δυνατότητα να συμπεριλάβει σε ένα σχήμα τόσο τις κινήσεις των μεγαλύτερων σωμάτων του σύμπαντος όσο και εκείνες των ελάχιστων ατόμων. Τίποτε δεν θα ήταν αβέβαιο για αυτήν, το μέλλον και το παρελθόν θα ήταν πάντα παρόντα μπροστά της."

Το γενικό σχήμα του επιστημονικού ντετερμινισμού, βασισμένο στη σχέση αιτίας και αποτελέσματος, αποδέχεται την επικράτηση της προδιαγεγραμμένης τάξης:

◊ **Αρχή του Ντετερμινισμού:** *Η θέση και η ταχύτητα ενός σώματος σε μια χρονική στιγμή ορίζουν μονοσήμαντα τη μελλοντική και παρελθούσα εξέλιξή του*.

Η αξιωματική αυτή αρχή αναφέρεται στην κίνηση ενός υλικού σημείου στο χώρο και διασφαλίζει την ύπαρξη μιας συνάρτησης ορισμένης στο καρτεσιανό γινόμενο του χώρου των θέσεων, του χώρου των ταχυτήτων και του χρονικού άξονα, με τιμές στο χώρο των θέσεων:

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

που, για κάθε δεδομένη αρχική θέση $x(t_o) \in \mathbb{R}^3$ και αρχική ταχύτητα $\dot{x}(t_o) \in \mathbb{R}^3$ του υλικού σημείου, ορίζει την κίνηση του στο χώρο ως λύση της *θεμελιώδους εξίσωσης*:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f(x, \dot{x}, t) \, .$$

- **Αρχή της Σχετικότητας:** *Υπάρχει μια κλάση προνομιούχων συστημάτων αναφοράς, των καλούμενων αδρανειακών συστημάτων αναφοράς, όπου οι γαλιλαϊκοί μετασχηματισμοί διατηρούν αναλλοίωτη τη θεμελιώδη εξίσωση της κίνησης.*

Η αξιωματική αυτή αρχή διασφαλίζει την ύπαρξη των αδρανειακών συστημάτων αναφοράς όπου οι γαλιλαϊκοί μετασχηματισμοί μετατρέπουν κάθε κίνηση που διέπεται από τη θεμελιώδη εξίσωση σε κίνηση που διέπεται από την ίδια εξίσωση αλλά με άλλες αρχικές συνθήκες.

Στην Κλασική Μηχανική, τα συστήματα αναφοράς παραμένουν ανεπηρέαστα από το χρόνο ο οποίος έχει απόλυτη υπόσταση και υπεισέρχεται σε αυτά ως παράμετρος για την καταγραφή των κινήσεων.

Ο Γαλιλαίος πρώτος δήλωσε ότι οι νόμοι της κίνησης είναι ίδιοι σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς και, λίγο αργότερα, ο Νεύτωνας έδωσε τη θεμελιώδη εξίσωση της κίνησης που ισχύει σε αυτά τα συστήματα αναφοράς. Η ανάγκη αξιωματικής εισαγωγής των αδρανειακών συστημάτων αναφοράς οφείλεται στην αδυναμία απόλυτης πειραματικής επαλήθευσης της ύπαρξής τους στη φυσική πραγματικότητα.

Η αξιωματική εισαγωγή της θεμελιώδους εξίσωσης, ως διαφορικής εξίσωσης 2^{ης} τάξης, καθορίζει την ορθολογική βάση ανάπτυξης μιας μαθηματικής θεωρίας της κίνησης ανταποκρινόμενης στα πειραματικά δεδομένα της φυσικής πραγματικότητας. Η συνάρτηση που υπεισέρχεται στη θεμελιώδη εξίσωση καθορίζεται από τα φυσικά δεδομένα και, εφόσον πληροί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων, ορίζει μονοσήμαντα την κίνηση, για κάθε δεδομένη αρχική θέση και ταχύτητα, σε ένα διάστημα του χρονικού άξονα.

Από τις Αρχές της Σχετικότητας και του Ντετερμινισμού, σε συνδυασμό με τους γαλιλαϊκούς μετασχηματισμούς, προκύπτουν οι εξής συνέπειες:

***Συνέπεια 1*: Χρονική ομογένεια.**

Οι νόμοι της φύσης παραμένουν αναλλοίωτοι στο πέρασμα του χρόνου και αυτό δηλώνεται μαθηματικά με το ότι οι γαλιλαϊκοί μετασχηματισμοί χρονικής μεταφοράς:

$$\mathfrak{g}(x,t) = (x,\, t + t_o)\,,\;\; t_o \in \mathbb{R}\,,$$

διασφαλίζουν ότι αν η θεμελιώδης εξίσωση αποδέχεται ως λύση την $x = \phi(t)$, θα αποδέχεται επίσης ως λύση την $x = \phi(t + t_o)$, για κάθε $t_o \in \mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση που ορίζει τη θεμελιώδη εξίσωση εξαρτάται έμμεσα και όχι άμεσα από το χρόνο, οπότε, με την προϋπόθεση ότι η κίνηση είναι αυτόνομη, χωρίς να επηρεάζεται από εξωτερικούς παράγοντες, ο χρόνος υπεισέρχεται στη θεμελιώδη εξίσωση ως παράμετρος και όχι ως ανεξάρτητη μεταβλητή. Όταν η κίνηση ενός συστήματος υλικών σημείων επηρεάζεται από εξωτερικούς παράγοντες, η επίδραση αυτή υποκαθίσταται από μια χρονική μεταβολή των παραμέτρων που επηρεάζουν τη θεμελιώδη εξίσωση και τότε ο χρόνος μπορεί να εμφανιστεί ως ανεξάρτητη μεταβλητή. Συνεπώς, στις αυτόνομες κινήσεις, η συνάρτηση αυτή ορίζεται στο καρτεσιανό γινόμενο του χώρου των θέσεων και του χώρου των ταχυτήτων και η θεμελιώδης εξίσωση διατυπώνεται ως εξής:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x,\dot{x})\,.$$

Η θεμελιώδης εξίσωση της κίνησης ενός υλικού σημείου αποσυντίθεται σε τρεις εξισώσεις που διατυπώνονται στα αδρανειακά συστήματα αναφοράς ως εξής:

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = f_i(x,\dot{x})\,,\quad i = 1,2,3\,,\qquad f(x,\dot{x}) = \left(f_1(x,\dot{x}),\, f_2(x,\dot{x}),\, f_3(x,\dot{x}) \right).$$

***Συνέπεια 2*: Χωρική ομογένεια.**

Ο χώρος είναι *ομογενής*, δηλαδή έχει παντού ίδιες φυσικές ιδιότητες και αυτό δηλώνεται μαθηματικά με το ότι οι γαλιλαϊκοί μετασχηματισμοί χωρικής μεταφοράς:

$$\mathfrak{g}(x,t) = (x + x_o,\, t)\,,\;\; x_o \in \mathbb{R}^3\,,$$

διασφαλίζουν ότι αν η θεμελιώδης εξίσωση αποδέχεται ως λύση την $x = \phi(t)$, θα αποδέχεται επίσης ως λύση την $x = \phi(t) + x_o$, για κάθε $x_o \in \mathbb{R}^3$.

***Συνέπεια 3*: Χωρική ισοτροπία.**

Ο χώρος είναι *ισότροπος*, δηλαδή δεν διαθέτει κάποια προνομιούχο διεύθυνση και αυτό δηλώνεται μαθηματικά με το ότι οι γαλιλαϊκοί μετασχηματισμοί χωρικής στροφής:

$$\mathfrak{g}(x,t) = (Sx,\, t)\,,\;\; S \in \mathcal{SO}(3)\,,$$

διασφαλίζουν ότι αν η θεμελιώδης εξίσωση αποδέχεται ως λύση την $x=\phi(t)$, θα αποδέχεται επίσης ως λύση την $x=S\circ\phi(t)$, για κάθε $S\in\mathcal{SO}(3)$. Συνεπώς, η συνάρτηση που ορίζει τη θεμελιώδη εξίσωση πληροί τη συνθήκη:

$$f(S\,x,\,S\,\dot{x})=S\circ f(x,\dot{x})\,,\quad \forall S\in\mathcal{SO}(3)\,.$$

***Συνέπεια 4*: Αδρανειακή κίνηση.**

Οι γαλιλαϊκοί μετασχηματισμοί αδρανειακής μετατόπισης:

$$\mathfrak{g}(x,t)=(x+v_o t,\,t)\,,\quad v_o\in\mathbb{R}^3\,,$$

υποδεικνύουν ότι η θεμελιώδης εξίσωση διατηρείται άθικτη στα συστήματα αναφοράς που κινούνται ευθύγραμμα ομαλά ως προς κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Αυτό σημαίνει ότι κάθε σύστημα αναφοράς που κινείται ευθύγραμμα ομαλά ως προς κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς είναι και αυτό αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Συγκεκριμένα, αν κάποια χρονική στιγμή, η θέση ενός υλικού σημείου καταγράφεται σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς $\Re$ ως εξής:

$$x(t)=\left(x_1(t),x_2(t),x_3(t)\right)$$

και, την ίδια στιγμή, καταγράφεται σε ένα σύστημα αναφοράς $\Re'$ που κινείται ευθύγραμμα ομαλά ως προς το $\Re$ ως εξής:

$$x'(t)=\left(x_1'(t),x_2'(t),x_3'(t)\right),$$

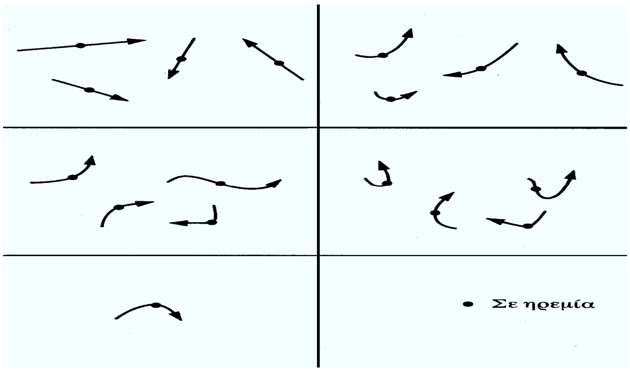
τότε προκύπτει:

$$x_i'(t)=x_i(t)+v_{oi}t\ \Rightarrow\ \dot{x}_i'(t)=\dot{x}_i(t)+v_{oi}\ \Rightarrow\ \ddot{x}_i'(t)=\ddot{x}_i(t)\,,\quad i=1,2,3\,.$$

Συνεπώς, η θεμελιώδης εξίσωση της κίνησης έχει ίδια έκφραση σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Δυο παρατηρητές που βρίσκονται σε αδρανειακά συστήματα αναφοράς και καταγράφουν μια συγκεκριμένη κίνηση, ο καθένας στο δικό του σύστημα αναφοράς, κάθε χρονική στιγμή, της αποδίδουν διαφορετική θέση και διαφορετική ταχύτητα αλλά ίδια επιτάχυνση και έτσι δηλώνουν ότι η κίνηση διέπεται από την ίδια θεμελιώδη εξίσωση. Αν όμως κάποιος από αυτούς βρίσκεται σε μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς τότε αντιλαμβάνεται και ερμηνεύει διαφορετικά την επιτάχυνση άρα την κίνηση και για το λόγο αυτό διαφωνεί για τη μορφή της συνάρτησης η οποία ορίζει τη θεμελιώδη εξίσωση που διέπει την κίνηση. [9]

[9] Σε ένα σύστημα αναφοράς που εκτελεί π.χ. ευθύγραμμη επιταχυνόμενη κίνηση ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, η μορφή της θεμελιώδους εξίσωσης αλλοιώνεται αφού ισχύει:

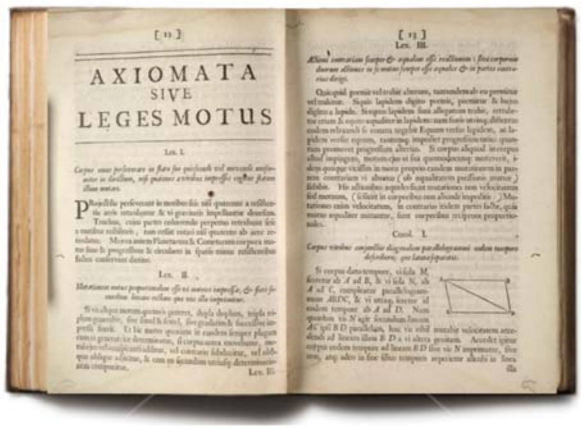
$$x_i'(t)=x_i(t)+v_i(t)t\ \Rightarrow\ \dot{x}_i'(t)=\dot{x}_i(t)+v_i(t)+\dot{v}_i(t)t\ \Rightarrow\ \ddot{x}_i'(t)=\ddot{x}_i(t)+2\dot{v}_i(t)+\ddot{v}_i(t)t\,,\ i=1,2,3\,.$$



Αδρανειακό σύστημα αναφοράς *Μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς*

Τροχιές κινήσεων όπως τις αντιλαμβάνεται ένας αδρανειακός και ένας μη αδρανειακός παρατηρητής.

✓ Οι *Μαθηματικές Αρχές της Φυσικής Φιλοσοφίας* είναι αναμφίβολα το σημαντικότερο έργο στην ιστορία της Επιστήμης και το επιστημονικό θεμέλιο της σύγχρονης κοσμοαντίληψης. Ο Νεύτωνας, στο πρώτο από τα τρία βιβλία που συγκροτούν αυτό το έργο, έδωσε τους νόμους της κίνησης, θέτοντας έτσι τα θεμέλια της Κλασικής Μηχανικής. Το δεύτερο βιβλίο αποτελεί προέκταση του πρώτου και εκεί τίθενται οι βάσεις της θεωρίας των κινήσεων των ρευστών. Στο τρίτο βιβλίο δίνει το νόμο της παγκόσμιας έλξης και, εφαρμόζοντας τους νόμους της κίνησης στη φυσική πραγματικότητα, καταλήγει στο συμπέρασμα ότι *υπάρχει μια δύναμη βαρύτητας που ασκείται σε όλα τα σώματα ανάλογη προς τις ποσότητες της ύλης που περιέχουν*.


AXIOMATA
SIVE
LEGES MOTUS

Lex. I.

Lex. II.

Lex. III.

Ο Νεύτωνας έδωσε τους νόμους της Κλασικής Μηχανικής βασισμένος στην έννοια της *δύναμης* που, από φυσική άποψη, εισάγεται ως πρωταρχική έννοια και εκφράζει το αίτιο της μεταβολής της κίνησης. Η σχέση αιτίας και αποτελέσματος καθορίζεται από τη θεμελιώδη εξίσωση της κίνησης που αποτελεί τη μαθηματική έκφραση της ντετερμινιστικής συμπεριφοράς μέσα στη φυσική πραγματικότητα. Λέει ο Νεύτωνας: *"Όλο το μέλημα της φιλοσοφίας φαίνεται να συνίσταται στο εξής: από τα φαινόμενα των κινήσεων αναζητείστε τις δυνάμεις της φύσης και, κατόπιν, από τις δυνάμεις αποδείξτε τα άλλα φαινόμενα."*

Ο Νεύτωνας, στο βιβλίο του *Μαθηματικές Αρχές της Φυσικής Φιλοσοφίας*, διατύπωσε τους νόμους της κίνησης ως εξής: [10]

◊ **1^{ος} Νόμος: *Αρχή της αδράνειας.***

LEX I. “ Corpus omne perfeverare in ftatu fuo quiefcendi vel movendi uniformiter in directum, nifi quatennus illud a viribus impreffi cogitur ftatum suum mutare.”

- *Every body continues -perseveres- in its state of rest, or of uniform motion in a right line, unless it is compelled to change that state by forces impressed upon it.*
- *Κάθε σώμα διατηρείται στην κατάσταση ακινησίας ή της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης, εκτός αν εξαναγκαστεί σε μεταβολή αυτής της κατάστασης από ασκούμενες σε αυτό δυνάμεις.*

◊ **2^{ος} Νόμος: Εξίσωση της κίνησης.**

LEX II. “ Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.”

- *The change of motion is proportional to the motive force impressed; and is made in the direction of the right line in which that force is impressed.*
- *Η μεταβολή της κίνησης είναι ανάλογη προς την ασκούμενη κινητήρια δύναμη και συντελείται στην ευθύγραμμη κατεύθυνση στην οποία ασκείται η δύναμη.*

◊ **3^{ος} Νόμος: Αρχή δράσης-αντίδρασης.**

LEX III. “Actioni contrariam simper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actions in se mutuo simper esse aequales et in partes contrarias dirigi.”

- *To every action there is always opposed an equal reaction: or, the mutual actions of two bodies upon each other are always equal, and directed to contrary parts.*
- *Σε κάθε δράση αντιστοιχεί πάντοτε μια αντιτιθέμενη ίση αντίδραση: ή οι αμοιβαίες δράσεις δυο σωμάτων, μεταξύ του ενός και του άλλου, είναι πάντα ίσες και κατευθύνονται αντίθετα η μια προς την άλλη.*

---

[10] Ο Νεύτωνας έγραψε τους νόμους στα Λατινικά με τίτλο: *AXIOMATA SIVE LEGES MOTUS*
Μετάφραση στα Αγγλικά από τον Andrew Motte (1729): *AXIOMS OR LAWS OF MOTION*

1^{ος} Νόμος. Ο νόμος αυτός ανταποκρίνεται στη γαλιλαϊκή αρχή της σχετικότητας και αποτελεί τη νευτώνεια πρόταση αξιωματικής εισαγωγής των αδρανειακών συστημάτων αναφοράς. Σύμφωνα με αυτό το νόμο, ένα σύστημα αναφοράς χαρακτηρίζεται ως αδρανειακό από το ότι, αν σε ένα σώμα δεν ασκείται δύναμη ή αν η συνισταμένη των ασκούμενων δυνάμεων είναι μηδενική τότε, σε αυτό το σύστημα αναφοράς, η καταγραφόμενη ταχύτητά του σώματος είναι σταθερή, χωρίς να γίνεται διάκριση από την κατάσταση ακινησίας. Τα συστήματα αναφοράς στα οποία δεν ισχύει αυτή η αξιωματική απαίτηση δεν ανήκουν στην κλάση των αδρανειακών συστημάτων αναφοράς.

Όταν ένας παρατηρητής τοποθετημένος σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς βρίσκει ότι ένα σώμα ηρεμεί τότε ένας άλλος παρατηρητής, τοποθετημένος σε οποιοδήποτε άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, δηλαδή κινούμενο ευθύγραμμα ομαλά ως προς το πρώτο, βρίσκει ότι το ίδιο σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα, άρα και οι δυο, βασιζόμενοι σε αυτό το νόμο, συμπεραίνουν ότι δεν ασκείται επάνω του κάποια δύναμη. Το συμπέρασμα αυτό δεν είναι αποδεκτό από τους παρατηρητές που βρίσκονται σε μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

Ο Νεύτωνας διατυπώνει στα κείμενά του αυτή την αξιωματική απαίτηση και από την περιγραφή του προκύπτει ότι ο όρος *αδρανειακή κίνηση* συμπεριλαμβάνει όχι μόνο τη μεταφορική αλλά και την στροφική κίνηση των σωμάτων:

“*Τα βλήματα διατηρούν την κίνησή τους εφόσον δεν επιβραδύνονται από την αντίσταση του αέρα ή δεν ωθούνται προς τα κάτω από τη δύναμη της βαρύτητας. Μια σβούρα, τα μέρη της οποίας με τη συνοχή τους εκτρέπονται συνεχώς από τις ευθύγραμμες κινήσεις, δεν παύει να περιστρέφεται εκτός αν επιβραδυνθεί από τον αέρα. Τα μεγαλύτερα σώματα, των πλανητών και των κομητών, ενώ βρίσκουν πιο μικρή αντίσταση σε πιο ελεύθερους χώρους, διατηρούν τη μεταφορική και στροφική κίνησή τους για μεγαλύτερο χρόνο.*”.

Συνεπώς, κατά την κίνηση ενός σώματος χωρίς την επίδραση κάποιας δύναμης, τα συστατικά του στοιχεία δεν εκτελούν οπωσδήποτε όλα ευθύγραμμη ομαλή κίνηση αλλά ενδεχομένως εκτελούν και ομαλή στροφική κίνηση. Ο πρώτος νόμος μπορεί να διατυπωθεί για τα υλικά σημεία ως εξής:

Αν σε ένα υλικό σημείο δεν ασκείται δύναμη ή αν η συνισταμένη των ασκούμενων σε αυτό δυνάμεων είναι μηδενική τότε η καταγραφόμενη κίνηση στα αδρανειακά συστήματα αναφοράς είναι ευθύγραμμη ομαλή χωρίς διάκριση από την κατάσταση ακινησίας:

$$\vec{\mathrm{F}} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{x}}(t) = \textit{σταθερά}, \quad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

2ος Νόμος. Ο νόμος αυτός ανταποκρίνεται στη νευτώνεια αρχή του ντετερμινισμού και προϋποθέτει την ισχύ του πρώτου νόμου που διασφαλίζει την ύπαρξη των αδρανειακών συστημάτων αναφοράς. Δηλώνει ότι, στα αδρανειακά συστήματα αναφοράς, η καταγραφόμενη επιτάχυνση κάθε σώματος είναι ανάλογη της ασκούμενης σε αυτό δύναμης. Έτσι, υποδηλώνεται ο διανυσματικός χαρακτήρας της δύναμης και ορίζεται η *μάζα* ως συντελεστής αναλογίας της δύναμης προς την επιτάχυνση.[11]

Ο Νεύτωνας γράφει στα κείμενά του:

"Αν κάποια δύναμη προκαλεί μια κίνηση, η διπλάσια δύναμη προκαλεί το διπλάσιο αυτής της κίνησης, η τριπλάσια το τριπλάσιο, είτε η δύναμη αυτή ασκείται πλήρως και διαμιάς, είτε βαθμιαία και διαδοχικά. Και εάν το σώμα κινείτο προηγουμένως, αυτή η κίνηση, καθώς έχει πάντα την ίδια κατεύθυνση με την παράγουσα δύναμη, προστίθεται ή αφαιρείται από την προηγούμενη κίνηση, ανάλογα με το αν συμβαδίζουν μεταξύ τους ή είναι αντίθετες ή πλάγιες η μια προς την άλλη, έτσι ώστε να παράγεται μια νέα κίνηση που αποτελεί συνδυασμό των δυο κατευθύνσεων.".

Όμως, εφόσον πρόκειται για ένα σώμα, σε ποιο σημείο του θα ασκηθεί η συνισταμένη δύναμη ώστε να ισχύσει αυτός ο νόμος; Ο Νεύτωνας απαντά, αλλά το ερώτημα δεν τίθεται αν ο νόμος διατυπωθεί αναφορικά προς τα υλικά σημεία ως εξής:

Στα αδρανειακά συστήματα αναφοράς, η δύναμη που ασκείται σε ένα υλικό σημείο προκαλεί σε αυτό ανάλογη επιτάχυνση και η κίνησή του διέπεται από τη θεμελιώδη εξίσωση:

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{\mathrm{F}} \,.$$

Η διαφορική αυτή εξίσωση αποσυντίθεται στις τρεις συνιστώσες εξισώσεις:

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = \mathrm{F}_1 \,, \qquad m\frac{d^2x_2}{dt^2} = \mathrm{F}_2 \,, \qquad m\frac{d^2x_3}{dt^2} = \mathrm{F}_3 \,.$$

Η θεμελιώδης εξίσωση που δίνεται από το δεύτερο νόμο δεν βρίσκεται σε αντίφαση με τον πρώτο νόμο αφού στα αδρανειακά συστήματα αναφοράς ισχύει:

$$\vec{\mathrm{F}} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_o + v_o t \,, \qquad x_o, v_o \in \mathbb{R}^3 \,.$$

[11] Έως την εποχή του Νεύτωνα, η έννοια της μάζας ως *ποσότητα της ύλης* (*quantitas materiae*) που περιέχεται σε ένα σώμα παρέμενε ασαφής τουλάχιστο ως προς τη μετρησιμότητά της. Πάντως, ήταν αντιληπτό ότι η μάζα αποτελεί *μέτρο της αδράνειας* της ύλης και για το λόγο αυτό καλείται *αδρανειακή μάζα* και θεωρείται σταθερή και ανεξάρτητη από την ταχύτητα του σώματος. Εντούτοις, ο ορισμός της και η δυσκολία αποσαφήνισής της προκάλεσαν μακρόχρονες αντιπαραθέσεις και επιστημολογικούς προβληματισμούς.

3ος Νόμος. Ο νόμος αυτός, παρότι απλός στη διατύπωσή του, δεν είναι τόσο ευνόητος. Ο Νεύτωνας δήλωνε ότι "*Σε κάθε δράση υπάρχει πάντα μια ίση αντίδραση*" και αυτό σημαίνει ότι για κάθε δύναμη στη φύση υπάρχει πάντα μια ίση και αντίθετη δύναμη. Γράφει στα κείμενά του: *"Οποιοδήποτε σώμα έλκει ή πιέζει κάποιο άλλο, έλκεται ή πιέζεται εξίσου από αυτό. Εάν πιέσεις μια πέτρα με το δάκτυλό σου, το δάκτυλο πιέζεται εξίσου από την πέτρα. Ένα άλογο που τραβά μια πέτρα δεμένη με ένα σχοινί έλκεται εξίσου από την πέτρα, αφού το τεντωμένο σχοινί, καθώς πάει να χαλαρώσει ή να λυθεί, τραβά το άλογο προς την πέτρα με την ίδια δύναμη που τραβά την πέτρα προς το άλογο.".*

Πρόκειται για *νόμο δυνάμεων* και όχι για *νόμο κίνησης* όπως συμβαίνει με τους δυο πρώτους νόμους οι οποίοι συσχετίζουν τη δύναμη με την κίνηση. Ο νόμος αυτός εισάγει τις *δυνάμεις αλληλεπίδρασης* που ασκούνται μεταξύ των σωμάτων και δηλώνει ότι μεταξύ δυο σωμάτων ασκούνται αμοιβαίες αντίρροπες δυνάμεις ίδιου μέτρου. Η πλέον σημαντική συνέπειά του είναι η αλληλοαναίρεση των δυνάμεων αλληλεπίδρασης στο εσωτερικό κάθε συστήματος σωμάτων.

Έτσι, δυο ή περισσότερα υλικά σημεία, ας πούμε N υλικά σημεία που συγκροτούν ένα σύστημα, αλληλεπιδρούν ανά δύο μεταξύ τους με αμοιβαίες αντίρροπες δυνάμεις ίδιου μέτρου και συμβολίζοντας $\vec{f}_{ij}$ την ασκούμενη δύναμη στο *i*-οστό υλικό σημείο από το *j*-οστό υλικό σημείο, ισχύει:

$$\vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji} = 0\,.$$

Συνεπώς, η συνολικά ασκούμενη δύναμη στο *i*-οστό υλικό σημείο από τα υπόλοιπα $N-1$ υλικά σημεία του συστήματος προσμετράται ως εξής:

$$\vec{f}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{f}_{ij} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} f_{ij}\,\vec{e}_{ij}$$

όπου $\vec{e}_{ij}$ δηλώνει το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα που ορίζεται από το *i*-οστό προς το *j*-οστό υλικό σημείο και $f_{ij} = f_{ji}$ το μέτρο της δύναμης αλληλεπίδρασης για κάθε ζεύγος υλικών σημείων. Έτσι προκύπτει η αλληλοαναίρεση των δυνάμεων αλληλεπίδρασης στο εσωτερικό κάθε συστήματος:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{f}_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{f}_{ij} = 0\,.$$

Αν στα υλικά σημεία ενός συστήματος δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις αλλά μόνο οι εσωτερικές δυνάμεις αλληλεπίδρασης, λέμε ότι πρόκειται για *κλειστό σύστημα*. Στην πραγματικότητα δεν υπάρχουν κλειστά συστήματα αφού όλα τα σώματα αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με δυνάμεις, ακόμη και αν αυτές είναι πρακτικά αμελητέες. Όμως, η θεώρηση κλειστών συστημάτων προσφέρει εννοιολογική και πρακτική δυνατότητα διαχωρισμού ενός συστήματος από το υπόλοιπο περιβάλλον.

Ο τρίτος νόμος προκάλεσε μια σειρά εννοιολογικών δυσχερειών όπως αυτή που αφορά στη δράση μιας δύναμης από απόσταση και στην πρόκληση αντίστοιχης αντίδρασης. Αφού οι δυνάμεις δεν δρουν ακαριαία στο χώρο, οφείλουμε να αναρωτηθούμε για το τι συμβαίνει στο ενδιάμεσο χρονικό διάστημα έως ότου ένα σώμα αντιδράσει στην παρουσία ενός άλλου υπακούοντας σε αυτό το νόμο. Πάντως, η πλέον σημαντική συνέπειά του είναι η αλληλοαναίρεση των δυνάμεων αλληλεπίδρασης στο εσωτερικό κάθε συστήματος. Η πηγή και η δράση των εσωτερικών δυνάμεων, το αίτιο και το αποτέλεσμα, βρίσκονται μέσα στο θεωρούμενο σύστημα, ενώ οι εξωτερικές δυνάμεις που δρουν στο σύστημα έχουν την προέλευσή τους έξω από αυτό. Όμως, μια εξωτερική δύναμη που δρα σε ένα σύστημα, σε κάποια από τα συστατικά του στοιχεία, μπορεί να είναι εσωτερική δύναμη άλλου συστήματος. Ένα σύστημα στο οποίο δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, σύμφωνα με τον πρώτο νόμο, κινείται χωρίς επιτάχυνση, άρα η συνισταμένη των εσωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική. Αυτό σημαίνει ότι πίσω από τον πρώτο νόμο βρίσκεται ο τρίτος νόμος, όπως επίσης βρίσκεται πίσω και από τον δεύτερο νόμο. Ο πρώτος και δεύτερος νόμος δεν επαρκούν χωρίς τον τρίτο νόμο, γιατί το να πούμε ότι ένα *σώμα* κινείται με σταθερή ή όχι ταχύτητα είναι ασαφές αφού τα συστατικά του στοιχεία ίσως έχουν διαφορετικές από αυτό ταχύτητες και επιταχύνσεις. Η ασάφεια αυτή αίρεται όταν αναδιατυπώσουμε τους νόμους αναφερόμενοι στο *αδρανειακό κέντρο* ενός σώματος ή ενός συστήματος σωμάτων.

Ο όρος *σύστημα σημειακών μαζών* δηλώνει ένα μαθηματικό πρότυπο αποτελούμενο από N υλικά σημεία με αντίστοιχες προσαρτημένες μάζες m_i, $i=1,\ldots,N$. Κάθε σημειακή μάζα εντοπίζεται στον ευκλείδειο χώρο, κάθε χρονική στιγμή, με το αντίστοιχο διάνυσμα θέσης $\vec{r}_i(t)$, $i=1,\ldots,N$. Το *αδρανειακό κέντρο* ή *κέντρο μάζας* ενός συστήματος σημειακών μαζών είναι έννοια *ενδογενής*, δηλαδή ανεξάρτητη από την επιλογή της αρχής του συστήματος αναφοράς ως προς το οποίο θεωρούνται τα διανύσματα θέσης των σημειακών μαζών. Το διάνυσμα που ορίζει κάθε στιγμή τη θέση του αδρανειακού κέντρου είναι ο σταθμικός μέσος των διανυσμάτων θέσης των σημειακών μαζών του συστήματος με σταθμικούς συντελεστές $m_i/\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}=m_1+\ldots+m_N$, $i=1,\ldots,N$:

$$\vec{r}(t)=\frac{1}{\mathfrak{m}}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{r}_i(t)\,.$$

Το αδρανειακό κέντρο είναι το σημείο όπου προσομοιώνεται η μέση κίνηση του συστήματος των σημειακών μαζών, σα να ήταν συγκεντρωμένη εκεί όλη η μάζα του και σα να ασκούνταν εκεί αθροισμένες όλες οι ασκούμενες εξωτερικές δυνάμεις στις σημειακές του μάζες. Στο αδρανειακό κέντρο προσαρτάται η ταχύτητα και η επιτάχυνση όπως καταγράφεται στο ευκλείδειο σύστημα αναφοράς:

$$\dot{\vec{r}}(t)=\frac{1}{\mathfrak{m}}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\dot{\vec{r}}_i(t) \quad \text{και} \quad \ddot{\vec{r}}(t)=\frac{1}{\mathfrak{m}}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\ddot{\vec{r}}_i(t)\,.$$

Ο τρίτος νόμος, υπαγορεύοντας την αλληλοαναίρεση των εσωτερικών δυνάμεων αλληλεπίδρασης κάθε συστήματος σημειακών μαζών, διασφαλίζει την ισχύ του πρώτου και του δεύτερου νόμου για τα συστήματα σημειακών μαζών:

- *Όταν σε ένα σύστημα σημειακών μαζών δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις ή όταν η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στις σημειακές μάζες είναι μηδενική τότε το αδρανειακό τους κέντρο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ή παραμένει ακίνητο.*

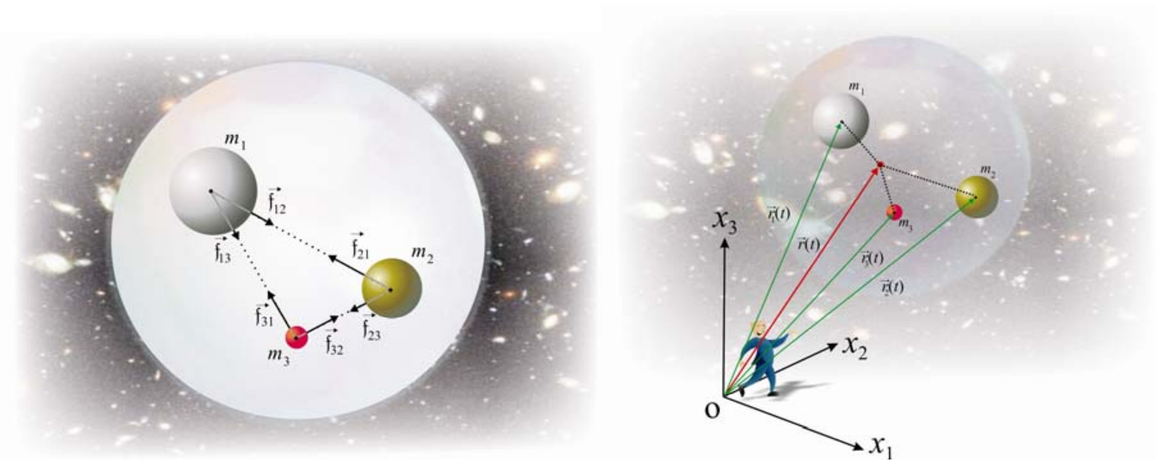
- *Στα αδρανειακά συστήματα αναφοράς, η συνολική δύναμη που ασκείται σε ένα σύστημα σημειακών μαζών προκαλεί στο αδρανειακό του κέντρο ανάλογη επιτάχυνση και η κίνησή του διέπεται από τη θεμελιώδη εξίσωση*:

$$\mathrm{m}\,\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{\mathrm{F}}_1 + \ldots + \vec{\mathrm{F}}_N\,.$$

Ο Νεύτωνας είχε οδηγηθεί με γεωμετρική συλλογιστική στο εξής πόρισμα:[12]

"Το κοινό κέντρο βάρους δυο ή περισσοτέρων σωμάτων δεν μεταβάλλει την κατάσταση της κίνησης ή της ακινησίας του εξαιτίας των αμοιβαίων δράσεων των σωμάτων επί αλλήλων. Συνεπώς, εξαιρουμένων των εξωτερικών δράσεων και προσκομμάτων, το κοινό κέντρο βάρους όλων των αλληλεπιδρώντων σωμάτων είτε είναι ακίνητο είτε κινείται ευθύγραμμα ομαλά.".

Τα συστήματα των σημειακών μαζών αποτελούν ένα θεωρητικό μαθηματικό πρότυπο προσομοίωσης για τη μελέτη της κίνησης και της αλληλεπίδρασης των σωμάτων, όπως για παράδειγμα των ουρανίων σωμάτων, αναδεικνύοντας τις επιπτώσεις όχι μόνο της μεταφορικής αλλά και της περιστροφικής τους κίνησης στο χώρο.



Εσωτερικές δυνάμεις αλληλεπίδρασης σε ένα σύστημα τριών σωμάτων και εντοπισμός του αδρανειακού κέντρου.

[12] Ο όρος *κέντρο βάρους* υπονοεί το *κέντρο μάζας* του συστήματος των σωμάτων.

✓ Οι *Μαθηματικές Αρχές της Φυσικής Φιλοσοφίας* έδωσαν το έναυσμα σε μια νέα πορεία της μαθηματικής σκέψης που οδήγησε στη θεμελίωση του Μαθηματικού Λογισμού. Οι μαθηματικοί του 18ου και 19ου αιώνα, όταν επιχείρησαν να αναδιατυπώσουν με σαφήνεια το θεωρητικό υπόβαθρο της Κλασικής Μηχανικής, βρέθηκαν αντιμέτωποι με μια σειρά εννοιολογικών δυσχερειών που προκλήθηκαν κυρίως από την έννοια της *δύναμης*. Η αμφισβήτηση της κεντρικής εννοιολογικής της θέσης έγινε εντονότερη με τα επιτεύγματα του 20ου αιώνα και οι εξελίξεις έδειξαν ότι υπάρχουν σοβαροί λόγοι αναθεώρησης της ορθολογικής βάσης στην οποία θεμελιώθηκε η Κλασική Μηχανική.

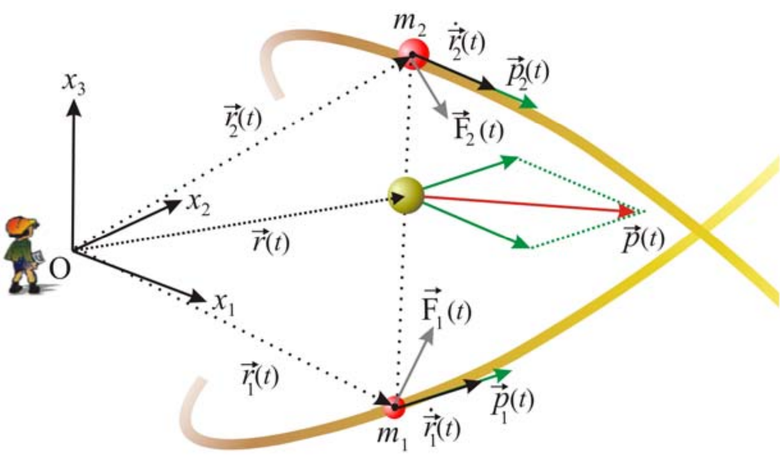
Με την πάροδο του χρόνου, οι έννοιες της *ορμής*, της *στροφορμής* και της *ενέργειας*, άρχισαν να καταλαμβάνουν κεντρική θέση στην προσπάθεια ορθολογικής ερμηνείας και κατανόησης της φυσικής πραγματικότητας. Οι νόμοι της φύσης, από ότι τουλάχιστο γνωρίζουμε, είναι ίδιοι παντού στο χώρο και στο χρόνο. Η χωρική ομογένεια, η χωρική ισοτροπία και η χρονική ομογένεια είναι μάλλον οι βαθύτεροι λόγοι που καθιστούν τις αρχές διατήρησης της ορμής, της στροφορμής και της ενέργειας κυρίαρχες και θεμελιώδεις στην Κλασική Μηχανική.

◊ Η *ορμή* ενός συστήματος σημειακών μαζών κατά την κίνησή τους στο χώρο ορίζεται, κάθε χρονική στιγμή, ως το άθροισμα των ορμών τους:

$$\vec{p}(t) = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i(t) \ , \quad \vec{p}_i(t) = m_i \, \dot{\vec{r}}_i(t) \, , \quad i = 1, \dots, N \ .$$

Το αξιοσημείωτο είναι ότι η ορμή κάθε συστήματος σημειακών μαζών ταυτίζεται με την ορμή του αδρανειακού τους κέντρου, όπου εκεί θεωρείται συμπυκνωμένη η μάζα του και ασκείται η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων:

$$\vec{p}(t) = \mathfrak{m} \, \dot{\vec{r}}(t) \, .$$



Η ορμή του αδρανειακού κέντρου ενός συστήματος δυο σημειακών μαζών.

Οι νόμοι του Νεύτωνα υποδεικνύουν ότι στα αδρανειακά συστήματα αναφοράς ισχύουν τα εξής:

- Ο πρώτος νόμος υπαγορεύει ότι αν σε μια σημειακή μάζα δεν ασκείται δύναμη τότε η ορμή της διατηρείται σταθερή.

- Ο δεύτερος νόμος υπαγορεύει ότι αν σε μια σημειακή μάζα ασκείται δύναμη τότε η εξίσωση της κίνησής της εκφράζεται ως εξής:

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \vec{\mathrm{F}}(t)\,.$$

- Ο τρίτος νόμος υπαγορεύει ότι αν σε ένα σύστημα σημειακών μαζών ασκούνται μόνο δυνάμεις αλληλεπίδρασης τότε το άθροισμα των ορμών τους διατηρείται σταθερό.

Έτσι συνάγεται η αρχή διατήρησης της ορμής στα συστήματα σημειακών μαζών:

- **Αρχή διατήρησης της ορμής**. *Αν οι ασκούμενες εξωτερικές δυνάμεις σε ένα σύστημα σημειακών μαζών έχουν μηδενική συνισταμένη τότε η ορμή του διατηρείται σταθερή κατά τη διάρκεια της κίνησης, παρότι οι ορμές των σημειακών μαζών ίσως δεν είναι σταθερές*:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{\mathrm{F}}_i(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}(t) = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i(t) \ \textit{σταθερή}.$$

Συνεπώς, αν η συνισταμένη των ασκούμενων εξωτερικών δυνάμεων σε ένα σύστημα σημειακών μαζών είναι μηδενική τότε οι τρεις συνιστώσες της ορμής είναι σταθερές, αλλά ακόμη και αν μια ή δυο από τις συνιστώσες της ασκούμενης εξωτερικής δύναμης είναι μηδενικές τότε οι αντίστοιχες συνιστώσες της ορμής διατηρούνται σταθερές. Το άθροισμα των ασκούμενων εξωτερικών δυνάμεων προσδίδει στο σύστημα των σημειακών μαζών μια *ώθηση* που μεταξύ δυο χρονικών στιγμών προσμετράται από την αντίστοιχη μεταβολή της ορμής:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathrm{F}}(t)\,dt \;=\; \int_{t_1}^{t_2} \dot{\vec{p}}(t)dt \;=\; \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1)\,.$$

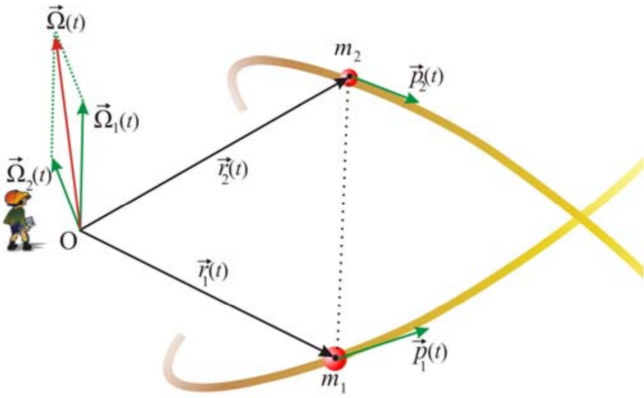
Η αρχή διατήρησης της ορμής ισχύει γιατί αποδεχτήκαμε αξιωματικά το νόμο δράσης και αντίδρασης που διασφαλίζει την αλληλοαναίρεση των εσωτερικών δυνάμεων αλληλεπίδρασης, αλλά και αντίστροφα αν αποδεχτούμε αξιωματικά την αρχή διατήρησης της ορμής απορρέει συλλογιστικά ο νόμος δράσης και αντίδρασης. Όμως, η χρονική υστέρηση της διάδοσης της δύναμης, που προκαλεί εννοιολογικές δυσχέρειες στο νόμο δράσης και αντίδρασης, δεν επηρεάζει την αρχή διατήρησης της ορμής η οποία έτσι καθίσταται εννοιολογικά σημαντικότερη από τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα. Στην αρχή διατήρησης της ορμής αντικατοπτρίζεται η ομογένεια του χώρου. Ένα σώμα στο οποίο δεν επιδρούν εξωτερικές δυνάμεις δεν θα επιταχυνθεί αυθόρμητα από μόνο του προς κάποια κατεύθυνση γιατί αυτό θα σήμαινε ότι ο χώρος δεν είναι ομογενής. Έτσι, αν το αδρανειακό κέντρο ενός σώματος έχει κάποια ταχύτητα, την ίδια ταχύτητα θα έχει οπουδήποτε αλλού στον κενό χώρο, άρα η ορμή του και κατά συνέπεια η ορμή του σώματος είναι σταθερή. Ο λόγος αυτός οδήγησε στην επανεξέταση του εννοιολογικού ρόλου του τρίτου νόμου και έθεσε το ζήτημα αντικατάστασής του από την αρχή διατήρησης της ορμής στην αξιωματική θεμελίωση της Κλασικής Μηχανικής. Άλλωστε, εκεί όπου δεν ισχύουν οι νόμοι του Νεύτωνα, στη Σχετικότητα και στην Κβαντομηχανική, η αρχή διατήρησης της ορμής εξακολουθεί να ισχύει και να συνδέεται με την ομογένεια του χώρου.[13]

◊ Η *στροφορμή* ενός συστήματος σημειακών μαζών κατά την κίνησή τους στο χώρο ορίζεται ως το άθροισμα των στροφορμών τους:

$$\vec{\Omega}(t)=\sum_{i=1}^{N}\vec{\Omega}_i(t)=\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i(t)\times\vec{p}_i(t)\,.$$

Ας σημειωθεί ότι η στροφορμή ενός συστήματος σημειακών μαζών δεν ταυτίζεται με τη στροφορμή του αδρανειακού τους κέντρου όπου εκεί θεωρείται συμπυκνωμένη η μάζα του και ασκείται η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων:

$$\vec{\Omega}_o(t)=\vec{r}(t)\times\vec{p}(t)\,.$$



Η στροφορμή ενός συστήματος σημειακών μαζών ως προς ένα σημείο αναφοράς στο χώρο.

Ο ορισμός και υπολογισμός της στροφορμής ενός συστήματος σημειακών μαζών προϋποθέτει την επιλογή ενός σημείου αναφοράς στο χώρο το οποίο, στην προκειμένη περίπτωση, είναι η αρχή του ευκλείδειου χώρου. Ο παρατηρητής που βρίσκεται στο σημείο αναφοράς ερμηνεύει τη στροφορμή κάθε κινούμενης σημειακής μάζας ως την τάση της να εκτελέσει στροφική κίνηση γύρω του, χωρίς να σημαίνει ότι οπωσδήποτε θα εκτελεστεί αυτή η κίνηση. Η τάση αυτή αποτιμάται αριθμητικά κάθε χρονική στιγμή από το μέτρο της στροφορμής, δηλαδή το γινόμενο των μέτρων των διανυσμάτων της θέσης και της ορμής επί το ημίτονο της μικρότερης προσανατολισμένης γωνίας τους. Η συνει-

[13] Στη Σχετικότητα ο ορισμός της ορμής είναι πιο πολύπλοκος αφού εκεί ακόμη και σωμάτια χωρίς μάζα έχουν ορμή.

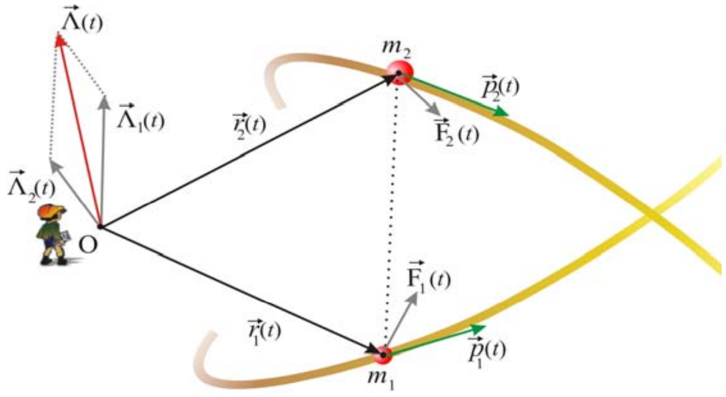
σφορά της ορμής της σημειακής μάζας στη στροφορμή της είναι τόσο μεγαλύτερη όσο μικρότερο είναι το μέτρο της προβολής της στο φορέα του διανύσματος της θέσης. Η συνεισφορά αυτή είναι μηδενική κάθε στιγμή που τα διανύσματα της θέσης και της ορμής είναι συγγραμμικά και γίνεται πλήρης όταν είναι ορθογώνια. Όταν πρόκειται για ένα σύστημα σημειακών μαζών, ο παρατηρητής που βρίσκεται στο σημείο αναφοράς, αθροίζοντας τις στροφορμές των σημειακών μαζών, ερμηνεύει τη στροφορμή του συστήματος ως την τάση του να εκτελέσει γύρω από αυτόν στροφική κίνηση, χωρίς να σημαίνει ότι οπωσδήποτε θα εκτελεστεί αυτή η κίνηση. Αλλά, η τάση αυτή δεν ταυτίζεται πάντα με την τάση στροφικής κίνησης του αδρανειακού κέντρου.

Κατά την κίνηση μιας σημειακής μάζας στο χώρο υπό την επίδραση μιας δύναμης, ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της εκφράζει τη *ροπή* της δύναμης ως προς το σημείο αναφοράς:

$$\frac{d\vec{\Omega}(t)}{dt} = \vec{r}(t) \times \vec{\mathrm{F}}(t) \equiv \vec{\Lambda}(t) \ .$$

Όταν πρόκειται για ένα σύστημα σημειακών μαζών, η *ολική ροπή* των ασκούμενων δυνάμεων ορίζεται ως το άθροισμα των αντίστοιχων ροπών τους ως προς το σημείο αναφοράς. Ο νόμος δράσης και αντίδρασης επιβάλλει την αλληλοαναίρεση των ροπών των εσωτερικών δυνάμεων αλληλεπίδρασης και κατά συνέπεια στην ολική ροπή υπεισέρχονται μόνο οι ασκούμενες εξωτερικές δυνάμεις:

$$\vec{\Lambda}(t) = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{r}_i(t) \times \vec{\mathrm{F}}_i(t) \right).$$



Η ροπή των ασκούμενων δυνάμεων στο σύστημα σημειακών μαζών ως προς ένα σημείο αναφοράς στο χώρο.

Κατά την κίνηση του συστήματος των σημειακών μαζών υπό την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων, ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του εκφράζει την ολική ροπή τους ως προς το σημείο αναφοράς:

$$\frac{d\vec{\Omega}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{r}_i(t) \times \vec{\mathrm{F}}_i(t) \right) = \vec{\Lambda}(t) \ .$$

Έτσι συνάγεται η αρχή διατήρησης της στροφορμής στα συστήματα σημειακών μαζών:

- ***Αρχή διατήρησης της στροφορμής***. *Αν η ολική ροπή των ασκούμενων εξωτερικών δυνάμεων σε ένα σύστημα σημειακών μαζών είναι μηδενική τότε η στροφορμή του διατηρείται σταθερή κατά τη διάρκεια της κίνησης, παρότι οι στροφορμές των σημειακών μαζών ίσως δεν είναι σταθερές*:

$$\vec{\Lambda}(t)=\sum_{i=1}^{N}\vec{\Lambda}_i(t)=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{\Omega}(t)=\sum_{i=1}^{N}\vec{\Omega}_i(t)\ \textit{σταθερή}.$$

Η αρχή διατήρησης της στροφορμής υποδεικνύει ότι ένα σύστημα σημειακών μαζών στο οποίο δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις δεν θα αλλάξει αυθόρμητα από μόνο του τη στροφική του κατάσταση. Άλλωστε, αυτό είχε πει ο Νεύτωνας στις *Μαθηματικές Αρχές της Φυσικής Φιλοσοφίας*.

Συνεπώς, αν η ολική ροπή των ασκούμενων εξωτερικών δυνάμεων σε ένα σύστημα σημειακών μαζών είναι μηδενική τότε κατά τη διάρκεια της κίνησης οι τρεις συνιστώσες της στροφορμής διατηρούνται σταθερές, αλλά ακόμη και αν μια ή δυο από τις συνιστώσες της ολικής ροπής είναι μηδενικές τότε οι αντίστοιχες συνιστώσες της στροφορμής διατηρούνται σταθερές.

Συγκεκριμένα, αν οι θέσεις των σημειακών μαζών εντοπίζονται στον ευκλείδειο χώρο κάθε χρονική στιγμή με τα ακόλουθα διανύσματα:

$$\vec{r}_i(t)=\left(x_{i1}(t),x_{i2}(t),x_{i3}(t)\right),\quad i=1,\dots,N\ ,$$

τότε προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις που διατηρούνται σταθερές κατά τη διάρκεια της κίνησης του συστήματος των σημειακών μαζών:

$$\vec{\Lambda}(t)=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{\Omega}(t):\ \left|\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{N}m_i\left(x_{i2}(t)\dot{x}_{i3}(t)-\dot{x}_{i2}(t)x_{i3}(t)\right)=\mathrm{c}_1\\ \sum_{i=1}^{N}m_i\left(x_{i3}(t)\dot{x}_{i1}(t)-\dot{x}_{i3}(t)x_{i1}(t)\right)=\mathrm{c}_2\\ \sum_{i=1}^{N}m_i\left(x_{i1}(t)\dot{x}_{i2}(t)-\dot{x}_{i1}(t)x_{i2}(t)\right)=\mathrm{c}_3\end{array}\right.$$

Η ολική ροπή των ασκούμενων εξωτερικών δυνάμεων προσδίδει στο σύστημα των σημειακών μαζών μια *στροφική ώθηση* η οποία μεταξύ δυο χρονικών στιγμών προσμετράται από την αντίστοιχη μεταβολή της στροφορμής:

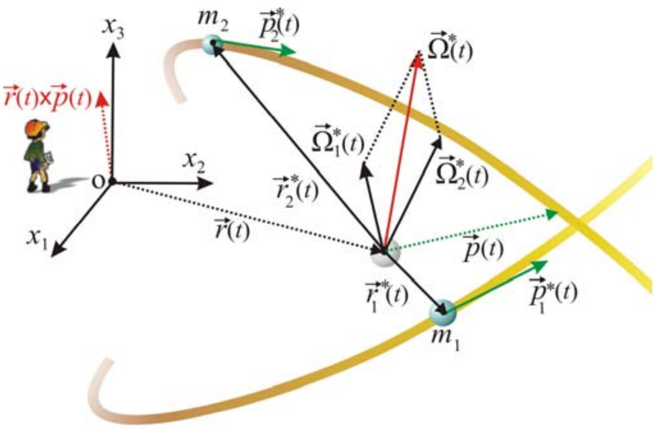
$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{\Lambda}(t)\,dt \;=\; \int_{t_1}^{t_2}d\vec{\Omega}(t) \;=\; \vec{\Omega}(t_2)-\vec{\Omega}(t_1)\,.$$

◊ Η *ιδιοστροφορμή* (*spin*) ενός συστήματος σημειακών μαζών που κινούνται στο χώρο ορίζεται ως η στροφορμή του αναφορικά προς το αδρανειακό του κέντρο:[14]

$$\vec{\Omega}^*(t) = \sum_{i=1}^{N} \Omega_i^*(t) = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i^{\,*}(t) \times \vec{p}_i^{\,*}(t) .$$

Η ιδιοστροφορμή κάθε συστήματος σημειακών μαζών εκφράζει την ενδογενή τάση εκτέλεσης στροφικής κίνησης γύρω από το αδρανειακό του κέντρο. Ο παρατηρητής που βρίσκεται στο αδρανειακό κέντρο έχει ενδογενή αντίληψη της στροφικής τάσης του συστήματος, ενώ ο παρατηρητής που βρίσκεται σε κάποιο άλλο σημείο του χώρου έχει εξωγενή αντίληψη που διαμορφώνεται από τη συνάθροιση της ιδιοστροφορμής με τη στροφορμή του αδρανειακού κέντρου. Η στροφορμή του αδρανειακού κέντρου καλείται *τροχιακή στροφορμή* και δεν είναι ενδογενές γνώρισμά του συστήματος των σημειακών μαζών αφού εξαρτάται από το σημείο αναφοράς του παρατηρητή:

$$\vec{\Omega}_o(t) = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t) .$$



Η ιδιοστροφορμή ενός συστήματος σημειακών μαζών.

Η ιδιοστροφορμή του συστήματος των σημειακών μαζών εκφράζεται ως διανυσματική διαφορά της στροφορμής του και της στροφορμής του αδρανειακού του κέντρου:

$$\vec{\Omega}^*(t) = \vec{\Omega}(t) - \vec{\Omega}_o(t) .$$

[14] Σε ένα σύστημα αναφοράς επικεντρωμένο στο αδρανειακό κέντρο, τα διανύσματα θέσης και ταχύτητας προσδιορίζονται ως εξής:

$$\vec{r}_i^{\,*}(t) = \vec{r}_i(t) - \vec{r}(t) , \quad \dot{\vec{r}}_i^{\,*}(t) = \dot{\vec{r}}_i(t) - \dot{\vec{r}}(t) , \quad i = 1,\dots,N ,$$

άρα

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i^{\,*}(t) = 0 , \quad \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,*}(t) = 0 , \quad \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i^{\,*}(t) = 0 .$$

Όταν το αδρανειακό κέντρο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση σε φορέα που διέρχεται από το σημείο αναφοράς του παρατηρητή τότε η στροφορμή του είναι μηδενική και κατά συνέπεια η στροφορμή του συστήματος ταυτίζεται με την ιδιοστροφορμή του:

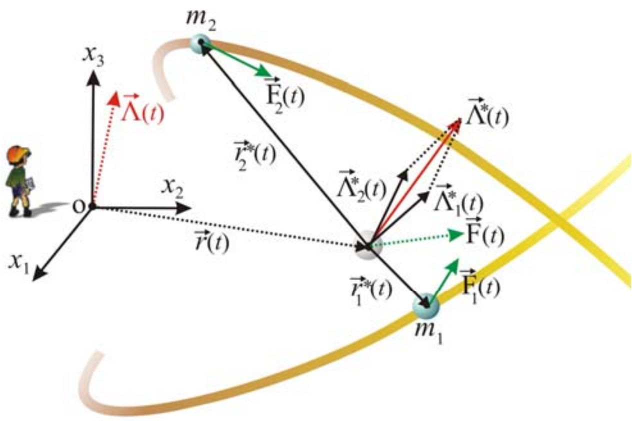
$$\vec{\Omega}(t) = \vec{\Omega}^*(t) \,.$$

Η ολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σύστημα σημειακών μαζών ως προς το αδρανειακό κέντρο ορίζεται ως εξής:

$$\vec{\Lambda}^*(t) = \sum_{i=1}^{N} \vec{\Lambda}_i^*(t) = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i^{\,*}(t) \times \vec{\mathrm{F}}_i(t) \,.$$

Η ολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων ως προς το αδρανειακό κέντρο προκύπτει από τη διανυσματική διαφορά μεταξύ της ολικής ροπής τους και της συνισταμένης εξωτερικής δύναμης ως προς το σημείο αναφοράς του παρατηρητή:

$$\vec{\Lambda}^*(t) = \vec{\Lambda}(t) - \vec{r}(t) \times \vec{\mathrm{F}}(t) \,.$$



Η ροπή των ασκούμενων δυνάμεων στο σύστημα σημειακών μαζών ως προς το αδρανειακό κέντρο.

Κατά τη διάρκεια της κίνησης των σημειακών μαζών στο χώρο, ο ρυθμός μεταβολής της ιδιοστροφορμής του συστήματός τους εκφράζει την ολική ροπή των ασκούμενων εξωτερικών δυνάμεων ως προς το αδρανειακό κέντρο:

$$\frac{d\vec{\Omega}^*(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{r}_i^{\,*}(t) \times \vec{\mathrm{F}}_i(t) \right) = \sum_{i=1}^{N} \vec{\Lambda}_i^*(t) = \vec{\Lambda}^*(t) \,.$$

Ο παρατηρητής που βρίσκεται στο αδρανειακό κέντρο υπολογίζει τη *στροφική ώθηση* του συστήματος των σημειακών μαζών μεταξύ δυο χρονικών στιγμών ως εξής:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{\Lambda}^*(t)\,dt \;=\; \int_{t_1}^{t_2} d\vec{\Omega}^*(t) \;=\; \vec{\Omega}^*(t_2) - \vec{\Omega}^*(t_1).$$

- **Αρχή διατήρησης της ιδιοστροφορμής**. *Αν η ολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σύστημα σημειακών μαζών, ως προς το αδρανειακό του κέντρο, είναι μηδενική τότε η ιδιοστροφορμή του διατηρείται σταθερή*:

$$\vec{\Lambda}^*(t) = \sum_{i=1}^{N} \vec{\Lambda}_i^*(t) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\Omega}^*(t) = \sum_{i=1}^{N} \vec{\Omega}_i^*(t) \ \textit{σταθερή}.$$

Η αρχή διατήρησης της ιδιοστροφορμής ενός συστήματος σημειακών μαζών ισχύει όχι μόνο στα αδρανειακά συστήματα αναφοράς αλλά και στα συστήματα αναφοράς που ακολουθούν την κίνηση του αδρανειακού κέντρου του συστήματος των σημειακών μαζών. Η γνώση της ιδιοστροφορμής, ως ενδογενούς χαρακτηριστικού των φυσικών συστημάτων, έχει ιδιαίτερη σημασία και είναι αξιοσημείωτο ότι συνάγεται συλλογιστικά από τη μέτρηση δυο μη ενδογενών γνωρισμάτων τους, αφού ο εξωτερικός παρατηρητής μπορεί να την συμπεράνει εφόσον υπολογίσει από τη θέση στην οποία βρίσκεται τη στροφορμή των σημειακών μαζών και την στροφορμή του αδρανειακού τους κέντρου. Η διάκριση της ιδιοστροφορμής σε στροφορμή και τροχιακή στροφορμή έχει αποδειχθεί χρήσιμη για την κατανόηση της συμπεριφοράς των σωματιδίων, αφού στα περισσότερα από αυτά η ιδιοστροφορμή αποτελεί αναλλοίωτη ιδιότητά τους.

Στην αρχή διατήρησης της ιδιοστροφορμής αντικατοπτρίζεται η ισοτροπία του χώρου που εκφράζεται μαθηματικά με τους γαλιλαϊκούς μετασχηματισμούς των χωρικών στροφών. Η αρχή αυτή υποδεικνύει ότι ένα σύστημα σημειακών μαζών στο οποίο δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις δεν θα αλλάξει αυθόρμητα από μόνο του τη στροφική του κατάσταση και αυτό σημαίνει αλληλοαναίρεση των ροπών των εσωτερικών δυνάμεων αλληλεπίδρασης ως προς το αδρανειακό του κέντρο.

Η συλλογιστική που οδηγεί στο συσχετισμό της αρχής διατήρησης της στροφορμής με την ισοτροπία του χώρου καταλήγει σε λογικά συμπεράσματα αλλά όχι σε απόλυτα επιβεβαιωμένες αλήθειες της φυσικής πραγματικότητας. Σε πολύπλοκα συστήματα, όπου τα συστατικά τους στοιχεία βρίσκονται σε σχετική μεταξύ τους κίνηση, η χωρική ισοτροπία υποδεικνύει μόνο ότι μάλλον κάποιες στροφικές ιδιότητες διατηρούνται και όχι εξολοκλήρου η στροφορμή τους. Άλλωστε, η αρχή διατήρησης της στροφορμής δεν έχει ακόμη ελεγχθεί σε περιοχές πέρα από το ηλιακό μας σύστημα και το ερώτημα ισχύος της στο γαλαξιακό ή μεσογαλαξιακό χώρο περιμένει την απάντησή του. Αν η απάντηση είναι αρνητική, τότε σημαίνει ότι κάπου μακρύτερα ο χώρος δεν είναι απόλυτα ισότροπος και ένα τέτοιο συμπέρασμα θα οδηγήσει σε σημαντικές αποκαλύψεις της δομής του σύμπαντος.

Πάντως, η στροφική κίνηση, όπως φαίνεται, είναι χαρακτηριστικό των περισσότερων δομών στη φύση, από τους γαλαξίες έως το νετρίνο. Η γη περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της σε μια μέρα και περιφέρεται γύρω από τον ήλιο σε ένα χρόνο, αλλά και ο ήλιος περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του σε 25 μέρες και περιφέρεται κάνοντας το γύρο του γαλαξία σε 230 εκατομμύρια χρόνια. Όσο κατεβαίνουμε την κλίμακα των μεγεθών, τα μόρια περιστρέφονται και το ίδιο κάνουν τα ηλεκτρόνια που περιστρέφονται γύρω από τον άξονά τους και περιφέρονται μέσα στα άτομα.

Οι νόμοι της φύσης, από ότι τουλάχιστο γνωρίζουμε, κάθε χρονική στιγμή είναι ίδιοι παντού στο χώρο. Η χωρική ομογένεια, η χωρική ισοτροπία και η χρονική ομογένεια είναι μάλλον οι βαθύτεροι λόγοι που οδηγούν στις αρχές διατήρησης της ορμής της στροφορμής και της ενέργειας, καθιστώντας τις κυρίαρχες και θεμελιώδεις για την Κλασική Μηχανική.

◊ Η *κινητική ενέργεια* μιας σημειακής μάζας οφείλει την ύπαρξή της στην κίνησή της στο χώρο και ορίζεται, κάθε χρονική στιγμή, ως εξής:

$$K(t)=\frac{1}{2}m<\dot{\vec{r}}(t),\dot{\vec{r}}(t)>=\frac{1}{2}m\|\dot{\vec{r}}(t)\|^2 .$$

Κατά την κίνηση μιας σημειακής μάζας στο χώρο υπό την επίδραση μιας δύναμης, η χρονική μεταβολή της κινητικής ενέργειας υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{dK(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}m<\dot{\vec{r}}(t),\dot{\vec{r}}(t)>\Big)=<m\ddot{\vec{r}}(t),\dot{\vec{r}}(t)>=<\vec{\mathrm{F}}(t),\dot{\vec{r}}(t)>$$

και κάθε χρονική στιγμή ορίζεται η *ισχύς* της ασκούμενης δύναμης:

$$\mathcal{P}(t)=<\vec{\mathrm{F}}(t),\dot{\vec{r}}(t)>.$$

Η *κινητική ενέργεια* ενός συστήματος σημειακών μαζών κατά την κίνησή τους στο χώρο ορίζεται ως άθροισμα των κινητικών τους ενεργειών:

$$K(t)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\|\dot{\vec{r}}_i(t)\|^2$$

και εισάγοντας την ορμή εκφράζεται ισοδύναμα ως εξής:

$$K(t)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\|\vec{p}_i(t)\|^2}{m_i} .$$

Η κινητική ενέργεια ενός συστήματος σημειακών μαζών δεν συμπίπτει με την κινητική ενέργεια του αδρανειακού του κέντρου όπου θεωρείται συμπυκνωμένη όλη η μάζα του και η οποία καλείται *μεταφορική κινητική ενέργεια* του συστήματος:

$$K_{\mathrm{o}}(t)=\frac{1}{2}\mathfrak{m}\|\dot{\vec{r}}(t)\|^2=\frac{1}{2\mathfrak{m}}\|\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i(t)\|^2.$$

Επίσης, θεωρώντας τις θέσεις και τις ταχύτητες των σημειακών μαζών ως προς το αδρανειακό κέντρο του συστήματός τους ορίζεται η *στροφική κινητική ενέργεια* του συστήματος:

$$K^*(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \| \dot{\vec{r}}_i^{\,*}(t) \|^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \frac{\| \vec{p}_i^{\,*}(t) \|^2}{m_i}.$$

Κάθε χρονική στιγμή, η κινητική ενέργεια ενός συστήματος σημειακών μαζών αποσυντίθεται σε άθροισμα της μεταφορικής και της στροφικής κινητικής ενέργειας:

$$K(t) = K_{\text{o}}(t) + K^*(t)\,.$$

Η ισχύς των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σύστημα σημειακών μαζών ορίζεται στο ευκλείδειο σύστημα αναφοράς ως εξής:

$$\mathcal{P}_{\varepsilon\xi}(t) = \sum_{i=1}^{N} < \vec{\mathrm{F}}_i, \dot{\vec{r}}_i(t) >$$

και η ισχύς των εσωτερικών δυνάμεων αλληλεπίδρασης υπολογίζεται ως εξής:

$$\mathcal{P}_{\varepsilon\sigma}(t) = \sum_{i=1}^{N} < \vec{f}_i, \dot{\vec{r}}_i(t) > .$$

Η αρχή δράσης και αντίδρασης δεν υπαγορεύει το μηδενισμό της ισχύος των εσωτερικών δυνάμεων αλληλεπίδρασης ενός συστήματος σημειακών μαζών, όμως είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι η ισχύς αυτή δεν εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο προσδιορίζονται οι θέσεις και οι ταχύτητες των σημειακών μαζών:

$$\mathcal{P}_{\varepsilon\sigma}(t) = \sum_{i=1}^{N} < \vec{f}_i, \dot{\vec{r}}_i^{\,*}(t) > .$$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ενός συστήματος σημειακών μαζών εκφράζει το άθροισμα της ισχύος των εξωτερικών και των εσωτερικών δυνάμεων:

$$\frac{dK(t)}{dt} = \mathcal{P}_{\varepsilon\xi}(t) + \mathcal{P}_{\varepsilon\sigma}(t)\,.$$

Συνεπώς, όταν σε ένα σύστημα σημειακών μαζών δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις τότε η κινητική του ενέργεια δεν θα διατηρηθεί σταθερή κατά τη διάρκεια της κίνησης, εκτός αν η ισχύς των εσωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική:

$$\mathcal{P}_{\varepsilon\xi}(t) \equiv 0 \;\; \& \;\; \mathcal{P}_{\varepsilon\sigma}(t) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad K(t) \;\; \textit{σταθερή}.$$