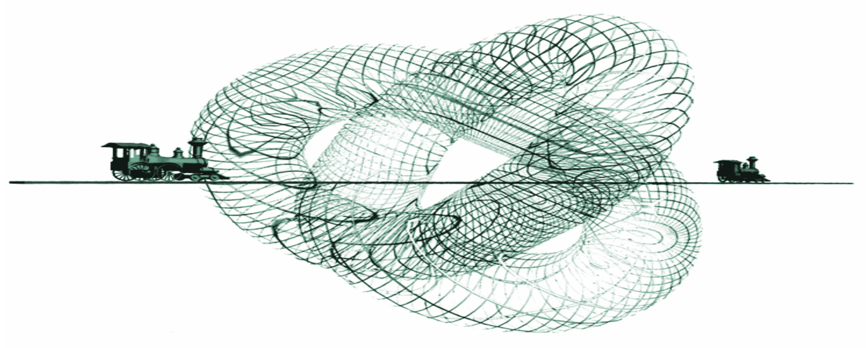
ΜΑΘΗΜΑ 1:

Η ΚΛΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΗΣΗ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ



" Τίποτε δεν θεωρώ μεγαλύτερο αίνιγμα από το χρόνο και το χώρο . Εντούτοις, τίποτε δεν με απασχολεί λιγότερο από αυτά επειδή ποτέ δεν τα σκέφτομαι."

Charles Lamb
(*19ος αιώνας*)

Ο *χρόνος* και ο *χώρος* είναι οι δυο θεμελιώδεις έννοιες από τις οποίες αρχίζει η πορεία αναζήτησης της γνώσης και ερμηνείας της φυσικής πραγματικότητας. Η μαθηματική τους έκφραση δεν μας λέει τι είναι στην πραγματικότητα ο χρόνος και ο χώρος, αλλά καθιστά εφικτή την κωδικοποίηση των παρατηρήσεων και τη συναγωγή προβλέψεων που επιζητούν την πειραματική επιβεβαίωσή τους μέσα στη φυσική πραγματικότητα.

Ο Νεύτωνας, στο σύγγραμμά του *Μαθηματικές Αρχές της Φυσικής Φιλοσοφίας,*[*] έδωσε το πρώτο μαθηματικό πρότυπο για το χρόνο και το χώρο. Στο πρότυπο αυτό, ο χρόνος και ο χώρος είναι διαχωρισμένοι μεταξύ τους και συνιστούν ένα υπόβαθρο επάνω στο οποίο διαδραματίζονται τα γεγονότα χωρίς όμως να το επηρεάζουν.

Ένα *γεγονός* είναι κάτι που συμβαίνει σε κάποια συγκεκριμένη στιγμή στο χρόνο και σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο στο χώρο και η αντιληπτική ανάγκη απαιτεί τέσσερις πληροφορίες για τον εντοπισμό του, μια χρονική και τρεις χωρικές. Αλλά, σε αντίθεση με αυτό που πίστευαν στην αρχαιότητα, καμία στιγμή του χρόνου και κανένα σημείο του χώρου δεν ξεχωρίζει από τις άλλες στιγμές και τα άλλα σημεία ώστε να υπάρχει μια απόλυτα αποδεκτή αρχή ως προς την οποία να εντοπίζονται τα γεγονότα.

---

[*] Isaac Newton, "Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica", 1687.

Το μαθηματικό πρότυπο του χρόνου και του χώρου, όπως κάθε μαθηματικό πρότυπο, είναι αποδεκτό εφόσον παρέχει τη δυνατότητα ανάπτυξης μιας ορθολογικής συλλογιστικής και μιας αριθμητικής υπολογιστικής που τα συμπεράσματά τους ανταποκρίνονται στα πειραματικά δεδομένα της φυσικής πραγματικότητας.

Στην Κλασική Μηχανική, το καθιερωμένο μαθηματικό πρότυπο του χρόνου και του χώρου, που ανταποκρίνεται στην ανυπαρξία αρχής, διαμορφώνεται με τη θεώρηση ενός τετραδιάστατου *αφινικού χώρου* $\mathbb{E}^4$ που εκφράζει τον καλούμενο *χωροχρόνο* πριν τη διάσπασή του σε χώρο και χρόνο. Κάθε σημείο του αναπαριστά ένα *γεγονός* και κανένα από αυτά δεν ξεχωρίζει ώστε να εκληφθεί ως απόλυτη αρχή. Σε αυτό το γεωμετρικό πρότυπο του χωροχρόνου προσαρτάται ο τετραδιάστατος πραγματικός διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^4$ διαμέσου μιας απεικόνισης:

$$\mathbb{E}^4 \times \mathbb{E}^4 \to \mathbb{R}^4$$

που σε κάθε ζεύγος γεγονότων $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{E}^4$ προσαρτά ένα μοναδικό διάνυσμα $\vec{\upsilon}_{\mathfrak{ab}} \in \mathbb{R}^4$, έτσι ώστε να πληρούνται τα εξής αξιώματα:

✓ Το 1ο αξίωμα διασφαλίζει τη δυνατότητα μετάβασης από ένα γεγονός σε κάποιο άλλο διαμέσου των διανυσμάτων του προσαρτημένου διανυσματικού χώρου:

Αν δοθεί ένα διάνυσμα $\vec{\upsilon} \in \mathbb{R}^4$ *τότε σε κάθε γεγονός* $\mathfrak{a} \in \mathbb{E}^4$ *προσαρτάται ένα μοναδικό γεγονός* $\mathfrak{b} \in \mathbb{E}^4$ *τέτοιο ώστε*:

$$\vec{\upsilon}_{\mathfrak{ab}} = \vec{\upsilon}\,.$$

✓ Το 2ο αξίωμα διασφαλίζει την ισχύ επί του χώρου των γεγονότων μιας μεταβατικής συνθήκης που ισχύει στον προσαρτημένο διανυσματικό χώρο:

Για κάθε τριάδα γεγονότων $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in \mathbb{E}^4$ *ισχύει:*

$$\vec{\upsilon}_{\mathfrak{ab}} + \vec{\upsilon}_{\mathfrak{bc}} = \vec{\upsilon}_{\mathfrak{ac}}\,.$$

Από εδώ απορρέει ότι:

$$\vec{\upsilon}_{\mathfrak{aa}} \equiv \vec{0} \quad \text{και} \quad \vec{\upsilon}_{\mathfrak{ab}} = -\vec{\upsilon}_{\mathfrak{ba}}\,.$$

Έτσι, η μετάβαση από ένα γεγονός $\mathfrak{a} \in \mathbb{E}^4$ σε ένα γεγονός $\mathfrak{b} \in \mathbb{E}^4$ πραγματοποιείται με τη *χωροχρονική μεταφορά* που ορίζεται από το προσαρτημένο διάνυσμα $\vec{\upsilon}_{\mathfrak{ab}} \in \mathbb{R}^4$ και συμβολικά σημειώνεται ως εξής:

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + \vec{\upsilon}_{\mathfrak{ab}}\,.$$

Οι χωροχρονικές μεταφορές των γεγονότων του χωροχρόνου συγκροτούν ένα διανυσματικό χώρο ισόμορφο προς τον τετραδιάστατο πραγματικό διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^4$. Ο *χρόνος* ορίζεται ως γραμμική απεικόνιση - *ως προβολή* - του τετραδιάστατου χώρου των χωροχρονικών μεταφορών στην πραγματική ευθεία που καλείται *χρονικός άξονας*:

$$\tau : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}\,.^{*}$$

Το *χρονικό διάστημα* μεταξύ δύο γεγονότων $\mathfrak{a}$ και $\mathfrak{b}$ προσμετράται με τον αριθμό:

$$\tau(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) \equiv \tau(\vec{\upsilon}_{\mathfrak{ab}})$$

και τα γεγονότα αυτά καλούνται *ταυτόχρονα* όταν:

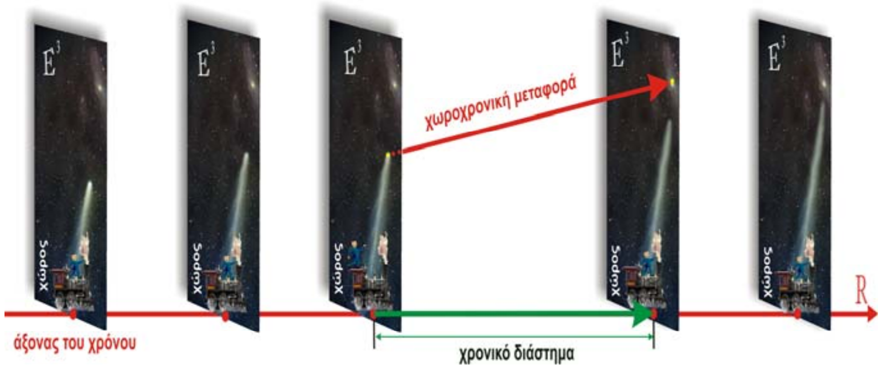
$$\tau(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) = 0\,.$$

Οι χωροχρονικές μεταφορές που μεταφέρουν κάθε γεγονός σε ταυτόχρονό του συγκροτούν τον πυρήνα της προβολής των χωροχρονικών μεταφορών στο χρονικό άξονα:

$$\mathfrak{Ker}\,\tau = \left\{ \upsilon_{\mathfrak{ab}} \in \mathbb{R}^4 \;/\; \tau(\upsilon_{\mathfrak{ab}}) = 0 \right\}.$$

Συνεπώς, κάθε χρονική στιγμή, τα ταυτόχρονα γεγονότα συγκροτούν έναν τρισδιάστατο αφινικό χώρο $\mathbb{E}^3$ προσαρτημένο στον πραγματικό διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$. Έτσι, ο χωροχρόνος διασπάται σε καρτεσιανό γινόμενο *χώρου* και *χρόνου*:

$$\mathbb{E}^4 = \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}\,.$$



Μετάβαση από ένα γεγονός σε άλλο γεγονός μέσα στον κλασικό χώρο-χρόνο.

---

* Ο χρόνος νοείται ως μια ανεξάρτητη γραμμή, κάτι σαν σιδηροδρομική γραμμή, που εκτείνεται επ'άπειρο προς τις δυο κατευθύνσεις και θεωρείται παντοτινός υπό την έννοια ότι είχε υπάρξει από πάντα και θα υπάρχει για πάντα, λέει ο *Stephen Hawking* στο πολύ ενδιαφέρον βιβλίο του που έχει τίτλο: *Το Χρονικό του Χρόνου*.

Στο διασπασμένο αφινικό χώρο-χρόνο προσαρτάται ο *αριθμητικός χώρο-χρόνος* στον οποίο τα γεγονότα αποκτούν χωρικές και χρονικές συντεταγμένες:

$$\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} .$$

Στον αριθμητικό χώρο-χρόνο, το διάνυσμα χωροχρονικής μεταφοράς από το γεγονός $\mathfrak{a} = (x,t)$ στο γεγονός $\mathfrak{b} = (y,t')$ εκφράζεται ως εξής:

$$\vec{\upsilon}_{\mathfrak{ab}} = \left(y_1 - x_1 ,\ y_2 - x_2 ,\ y_3 - x_3 ,\ t' - t \right)$$

και από την προβολή του στο χρονικό άξονα υπολογίζεται το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ των δύο αυτών γεγονότων:

$$\tau : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} , \quad \tau(\vec{\upsilon}_{\mathfrak{ab}}) = t' - t .$$

Η γραμμικότητα του χρόνου υποδεικνύει ότι:

$$\tau(\vec{\upsilon}_{\mathfrak{ab}} + \vec{\upsilon}_{\mathfrak{bc}}) = \tau(\vec{\upsilon}_{\mathfrak{ab}}) + \tau(\vec{\upsilon}_{\mathfrak{bc}}) , \quad \forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in \mathbb{E}^4 .$$

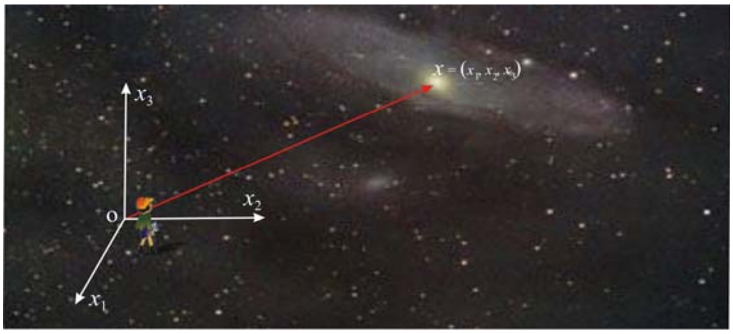
Στην Κλασική Μηχανική δεν υπάρχει μετρική στον τετραδιάστατο χώρο-χρόνο που να έχει φυσικό νόημα και να προσμετρά συγχρόνως χρονικά διαστήματα και χωρικές αποστάσεις.* Μόνο η χωρική απόσταση των ταυτόχρονων γεγονότων είναι μετρήσιμη. Ο χώρος των ταυτόχρονων γεγονότων είναι εφοδιασμένος με την *ευκλείδεια δομή* του, δηλαδή την πραγματική διανυσματική δομή και την πράξη του εσωτερικού γινομένου από όπου απορρέει η *ευκλείδεια μετρική* που προσμετρά τη χωρική απόσταση δυο ταυτόχρονων γεγονότων $\mathfrak{a} = (x,t)$ και $\mathfrak{b} = (y,t)$ ως εξής:

$$d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad d(x,y) = \| \vec{x} - \vec{y} \| = \left((y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 \right)^{1/2} .$$

Η μαθηματική δομή του χώρο-χρόνου που χαρακτηρίζεται από την αφινικότητά της, τη γραμμικότητα του χρόνου και την ευκλείδεια δομή του χώρου καλείται *γαλιλαϊκή δομή*. Ο χώρος των ταυτόχρονων γεγονότων είναι εφοδιασμένος με ένα *ευκλείδειο σύστημα αναφοράς*, δηλαδή ένα τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων ορισμένο από μια θετικά προσανατολισμένη ορθοκανονική βάση της ευκλείδειας δομής του. Το ευκλείδειο σύστημα αναφοράς ορίζει ένα *καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων* το οποίο αποδίδει σε κάθε σημείο του χώρου τις αριθμητικές συντεταγμένες του διαμέσου των ορθογώνιων προβολών στους τρεις άξονες:

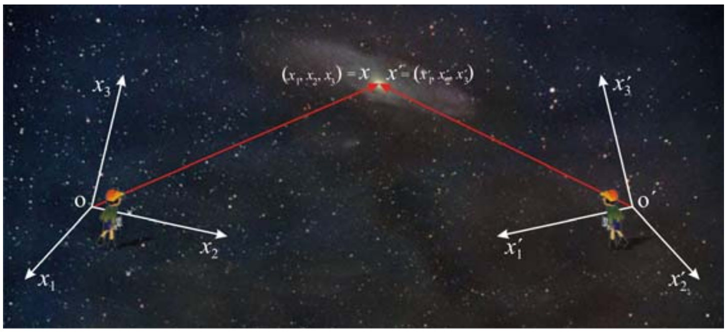
$$x_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} , \ i = 1,2,3 .$$

* Στην Κλασική Μηχανική η μη ύπαρξη φυσικής μετρικής που να προσμετρά συγχρόνως χωρικές αποστάσεις και χρονικά διαστήματα οφείλεται στην ανυπαρξία παγκόσμιας σταθεράς με διαστάσεις ταχύτητας όπως συμβαίνει με την ταχύτητα του φωτός στη Θεωρία της Σχετικότητας.



Εντοπισμός της θέσης ενός σημείου στο ευκλείδειο σύστημα αναφοράς.

Η αφινική φύση του χωρικού μαθηματικού προτύπου επιτρέπει να θεωρήσουμε ένα *σύστημα αναφοράς*, ορισμένο από μια θετικά προσανατολισμένη ορθοκανονική βάση, κεντροθετημένο οπουδήποτε στο χώρο, όμως τότε κάθε σημείο του χώρου εντοπίζεται με διαφορετικές αριθμητικές συντεταγμένες σε διάφορα συστήματα αναφοράς.



Εντοπισμός της θέσης ενός σημείου σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς του ευκλείδειου χώρου.

Στον ευκλείδειο χώρο των ταυτόχρονων γεγονότων το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ενδογενώς ως διγραμμική απεικόνιση που σε κάθε ζεύγος διανυσμάτων $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ αποδίδει τον πραγματικό αριθμό $<\vec{x}, \vec{y}>$ και η οποία οφείλει να είναι συμμετρική και θετικά ορισμένη:*

$$<,>: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,.$$

---

* Διγραμμικότητα: $<\vec{x}+\vec{x}', \vec{y}> = <\vec{x}, \vec{y}> + <\vec{x}', \vec{y}> \quad \forall \vec{x}, \vec{x}', \vec{y} \in \mathbb{R}^3$,

$<\vec{x}, \vec{y}+\vec{y}'> = <\vec{x}, \vec{y}> + <\vec{x}, \vec{y}'> \quad \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{y}' \in \mathbb{R}^3$,

$\lambda<\vec{x}, \vec{y}> = <\lambda\vec{x}, \vec{y}> = <\vec{x}, \lambda\vec{y}> \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Συμμετρία: $<\vec{x}, \vec{y}> = <\vec{y}, \vec{x}> \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$.

Θετικότητα: $<\vec{x}, \vec{x}> \geq 0,\ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \quad <\vec{x}, \vec{x}> = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0},\ \vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

Σε κάθε διάνυσμα του ευκλείδειου χώρου αποδίδεται το *μέτρο* του:

$$\| \vec{x} \| = <\vec{x}, \vec{x}>^{1/2}$$

και η *απόσταση* δυο σημείων προσμετράται ως εξής:

$$d(x,y) = \| \vec{x} - \vec{y} \| .$$

Η *γωνία* δυο μη μηδενικών διανυσμάτων ορίζεται μονοσήμαντα από τη σχέση:*

$$\cos\theta = <\vec{x}, \vec{y}> / \| \vec{x} \| \| \vec{y} \| , \quad 0 \le \theta \le \pi ,$$

και προκύπτει:

$$\vec{x} \perp \vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad <\vec{x}, \vec{y}> = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \| \vec{x} + \vec{y} \| = \| \vec{x} - \vec{y} \| .$$

Η *ορθοκανονικότητα* μιας βάσης του τρισδιάστατου ευκλείδειου χώρου σημαίνει ότι τα διανύσματα που τη συγκροτούν είναι *μοναδιαία* και ανά δυο μεταξύ τους *ορθογώνια*:

$$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \text{ ορθοκανονική βάση}: \; <\vec{e}_i, \vec{e}_j> = \delta_{ij} \; (\text{σύμβολο Kronecker}), \; i, j = 1,2,3 .$$

Ο προσανατολισμός της βάσης ορίζεται από τη διάταξή της και χαρακτηρίζεται ως θετικός όταν το πρόσημο της ορίζουσας της είναι θετικό που σημαίνει ότι:

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 .$$

Η αριθμητική έκφραση του εσωτερικού γινομένου καθορίζεται από την επιλογή της βάσης του ευκλείδειου χώρου και αποσυνθέτοντας τα διανύσματα σε μια βάση:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \quad \text{και} \quad \vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$$

προκύπτει:

$$<\vec{x}, \vec{y}> = \sum_{i,j=1,2,3} x_i y_j <\vec{e}_i, \vec{e}_j> .$$

Στις ορθοκανονικές βάσεις προκύπτει η κανονική έκφραση:

$$<\vec{x}, \vec{y}> = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

άρα

$$\| \vec{x} \| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$$

και

$$d(x,y) = \left((y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 \right)^{1/2} .$$

---

* Ο μονοσήμαντος προσδιορισμός της γωνίας διασφαλίζεται από την κλασική ανισότητα *Cauchy-Schwarz* :

$$<\vec{x}, \vec{y}>^2 \le \| \vec{x} \|^2 \| \vec{y} \|^2 \quad \Rightarrow \quad \exists\, \theta \in [0, \pi] : <\vec{x}, \vec{y}> = \| \vec{x} \| \| \vec{y} \| \cos\theta .$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΓΙΑ ΤΟ ΧΩΡΟ ΚΑΙ ΤΟ ΧΡΌΝΟ

✓ **Ερωτήματα ενός μαθηματικού προς ένα φυσικό:**

1. Ο Νεύτωνας λέει ότι *ο χρόνος και ο χώρος είναι διαχωρισμένοι μεταξύ τους και καμία στιγμή του χρόνου και κανένα σημείο του χώρου δεν ξεχωρίζουν από τις άλλες στιγμές και τα άλλα σημεία ώστε να εκληφθούν ως απόλυτη χρονική και χωρική αρχή*. Γιατί συμφωνείς μαζί του;

2. Λες ότι *ο χώρος και ο χρόνος δεν έχουν αρχή* και ζητάς να ορίσω το μαθηματικό τους πρότυπο. Αντιλαμβάνεσαι την αναγκαιότητα των αξιωμάτων που επιτρέπουν την αναγωγή του αφινικού προτύπου στον προσαρτημένο τετραδιάστατο πραγματικό διανυσματικό χώρο;

3. Λες ότι *ο χρόνος είναι γραμμικός*, αλλά δεν μου είπες τι είναι αυτό που σε πείθει για τη γραμμικότητά του. Πάντως η μαθηματική διαδικασία διάσπασης του χωροχρόνου σε χώρο και χρόνο προκύπτει από τον ορισμό που έδωσα στο χρόνο βασιζόμενος στη γραμμικότητά του. Αν δεν σου αρέσει αυτός ο μαθηματικός ορισμός, εσύ πώς θα όριζες το χρόνο και το χώρο;

4. Από μαθηματική άποψη ορίζεται κάλλιστα μετρική σε οποιονδήποτε τετραδιάστατο χώρο. Γιατί λες ότι δεν υπάρχει μετρική με φυσικό νόημα που να προσμετρά συγχρόνως χωρικές και χρονικές αποστάσεις στο πλαίσιο της Κλασικής Μηχανικής;

✓ **Ερωτήματα ενός φυσικού προς ένα μαθηματικό:**

1. Ο Νεύτωνας λέει ότι *ο χρόνος και ο χώρος είναι διαχωρισμένοι μεταξύ τους και καμία στιγμή του χρόνου και κανένα σημείο του χώρου δεν ξεχωρίζουν από τις άλλες στιγμές και τα άλλα σημεία ώστε να εκληφθούν ως απόλυτη χρονική και χωρική αρχή*. Γιατί το μαθηματικό πρότυπο που μου προτείνεις ανταποκρίνεται σε αυτά τα ζητούμενα;

2. Λες ότι η μαθηματική δομή του χώρο-χρόνου χαρακτηρίζεται από *την αφινικότητά της, τη γραμμικότητα του χρόνου και την ευκλείδεια δομή του χώρου*. Πες μου τι σημαίνουν οι μαθηματικοί αυτοί όροι, ώστε να πειστώ ότι συμπίπτουν οι απόψεις μας.

3. Λες ότι *οι χωροχρονικές μεταφορές συγκροτούν από αλγεβρική άποψη μια ομάδα και από γεωμετρική άποψη ένα διανυσματικό χώρο ισόμορφο προς τον τετραδιάστατο πραγματικό διανυσματικό χώρο*. Πες μου τι σημαίνουν οι μαθηματικοί αυτοί όροι, ώστε να αντιληφθώ το φυσικό τους ενδιαφέρον.

4. Όρισες το χρόνο ως *προβολή του τετραδιάστατου χώρου των χωροχρονικών μεταφορών στο χρονικό άξονα* και λες ότι, *κάθε χρονική στιγμή, ο πυρήνας της ορίζει τον τρισδιάστατο χώρο των ταυτόχρονων γεγονότων*. Πες μου τι σημαίνουν οι μαθηματικοί αυτοί όροι, ώστε να αντιληφθώ το φυσικό τους αντίκρισμα.