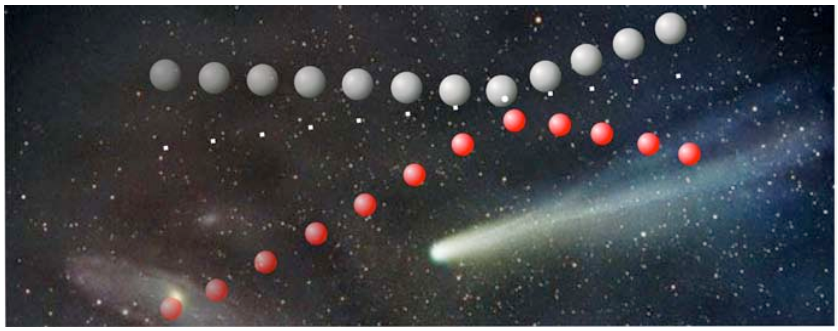
ΜΑΘΗΜΑ 9ο

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΚΑΙ ΑΠΩΛΕΙΑ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ



Τίποτα δεν χάνεται, τίποτα δεν δημιουργείται, όλα μετασχηματίζονται.

Αναξαγόρας
(5ος αιώνας π.Χ.)

Η έννοια της μηχανικής ενέργειας, ως φυσικού μεγέθους που διατηρεί σταθερή τιμή κατά την κίνηση ενός σώματος, παρότι υπήρξε αντικείμενο αναζητήσεων και πολλαπλών αντιπαραθέσεων από την εποχή του Νεύτωνα, απέκτησε σαφή μαθηματική έκφραση στα μέσα του 19ου αιώνα. Ζητούμενο ήταν να εισαχθεί ως εννοιολογική μετάβαση, από την αμφιλεγόμενη έννοια της δύναμης ως αιτίου της μεταβολής της κίνησης στην έννοια του παραγόμενου έργου από τις δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σώμα κατά τη διάρκεια της κίνησής το στο χώρο. Στη μακρά αυτή αντιπαράθεση έδωσε τέλος το *θεώρημα της ζώσας δύναμης*, του *Lagrange*[1], που δηλώνει ότι το έργο το οποίο δέχεται κάθε σώμα από τις ασκούμενες σε αυτό δυνάμεις κατά την κίνησή του, εφόσον δεν υπάρξουν απώλειες, είναι ίσο με το μισό της επαύξησης της ζώσας δύναμης που προκύπτει από το γινόμενο της μάζας του με το τετράγωνο της ταχύτητάς του. Απέμενε πλέον η αναγνώριση του ρόλου της δυναμικής ενέργειας και ήταν θέμα χρόνου η άθροισή της με την κινητική ενέργεια ώστε να αναδειχθεί ο ρόλος της μηχανικής ενέργειας και η αρχή της διατήρησής της:

Κατά τη διάρκεια της κίνησης μιας σημειακής μάζας υπό την επίδραση ενός πεδίου δυναμικού, η ενεργειακή της τιμή διατηρείται σταθερή κατά μήκος της τροχιάς της.

---

[1] *Joseph Louis Lagrange* (1736-1813), Mécanique Analytique, Paris, 1788.

9.1. Κινήσεις ενός βαθμού ελευθερίας και διατήρηση της ενέργειας.

Αν ο χώρος των θέσεων στις οποίες θα μπορούσε να βρεθεί μια σημειακή μάζα είναι μονοδιάστατος τότε λέμε ότι οι κινήσεις της είναι ενός βαθμού ελευθερίας. Στην περίπτωση αυτή, η εξίσωση που διέπει την κίνηση της σημειακής μάζας στα αδρανειακά συστήματα αναφοράς εκφράζεται ως εξής:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Η ασκούμενη δύναμη στη σημειακή μάζα υπεισέρχεται σε αυτή την εξίσωση ως διανυσματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής και προκύπτει από τη συνάρτηση δυναμικού μιας πραγματικής μεταβλητής που ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{U} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad \mathrm{U}(x) = -\int_{x_o}^{x} f(u)\,du\,.$$

Η συνάρτηση μηχανικής ενέργειας της σημειακής μάζας ορίζεται στο καρτεσιανό γινόμενο του μονοδιάστατου χώρου των θέσεων της με το μονοδιάστατο χώρο των ταχυτήτων της, δηλαδή στο ευκλείδειο επίπεδο και παίρνει πραγματικές αριθμητικές τιμές. Σε κάθε ενδεχόμενη θέση και ταχύτητα της σημειακής μάζας, δηλαδή σε κάθε σημείο του επιπέδου θέσεων και ταχυτήτων, αποδίδεται μια ενεργειακή τιμή η οποία προκύπτει από το άθροισμα των αντίστοιχων αριθμητικών τιμών της δυναμικής και της κινητικής ενέργειας:

$$\mathcal{E} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad \mathcal{E}(x,\dot{x}) = \mathrm{U}(x) + \frac{1}{2}m\dot{x}^2\,.$$

Στο επίπεδο θέσεων και ταχυτήτων η εξίσωση της κίνησης της σημειακής μάζας εκφράζεται ως σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης:

$$m\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \mathcal{E}(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}}\,, \quad m\frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{E}(x,\dot{x})}{\partial x}\,.$$

Η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας δηλώνει ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης της σημειακής μάζας, η ενεργειακή της τιμή διατηρείται σταθερή:

$$\mathcal{E}(x(t),\dot{x}(t)) = E_o \quad \Rightarrow \quad \mathrm{U}(x(t)) + \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 = E_o\,.$$

Εφόσον πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων, κάθε δεδομένη αρχική θέση και ταχύτητα της σημειακής μάζας ορίζει μια μοναδική τροχιά, η οποία εξελίσσεται στο επίπεδο θέσεων και ταχυτήτων με σταθερή ενεργειακή τιμή και η τιμή αυτή είναι γνωστή εξαρχής από την επιλογή των αρχικών συνθηκών:

$$E_o = \mathrm{U}(x_o) + \frac{1}{2}m v_o^2\,.$$

Οι τροχιές στις οποίες αντιστοιχεί ίδια ενεργειακή τιμή εξελίσσονται στο ίδιο ισοενεργειακό υποσύνολο του επιπέδου θέσεων και ταχυτήτων, δηλαδή στο ίδιο ισοσταθμικό σύνολο της συνάρτησης ενέργειας:

$$\mathcal{S}_{E_o}(\mathcal{E}) = \left\{(x,\dot{x}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \,/\, \mathcal{E}(x,\dot{x}) = E_o\right\}, \quad E_o \in \mathbb{R} \ .$$

Τα ισοενεργειακά αυτά σύνολα είναι μεμονωμένα σημεία ή καμπύλες οι οποίες, όπως υποδεικνύει το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων, είναι παντού λείες εκτός από εκεί όπου μηδενίζεται το διαφορικό της συνάρτησης ενέργειας:

$$d\mathcal{E}(x,\dot{x}) = \frac{\partial \mathcal{E}(x,\dot{x})}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathcal{E}(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}}d\dot{x} \ .$$

Τα μεμονωμένα σημεία αντιστοιχούν σε καταστάσεις ισορροπίας, δηλαδή σε σημειακές τροχιές που ορίζονται από σταθερές λύσεις των εξισώσεων κίνησης στο επίπεδο θέσεων και ταχυτήτων. Σε κάθε ισοενεργειακή καμπύλη, κατά κανόνα, εξελίσσεται μια μόνο τροχιά, όμως υπάρχει ενδεχόμενο σε κάποιες από αυτές να εξελίσσονται περισσότερες από μια τροχιές με ίδια ενεργειακή τιμή. Συγκεκριμένα, κάποιες ισοενεργειακές καμπύλες ίσως εμφανίζουν αυτοτομές στα σημεία μηδενισμού του διαφορικού της συνάρτησης ενέργειας και εκεί θα αναζητηθούν καταστάσεις ισορροπίας πέρα από εκείνες που αντιστοιχούν στα σημειακά ισοενεργειακά σύνολα.

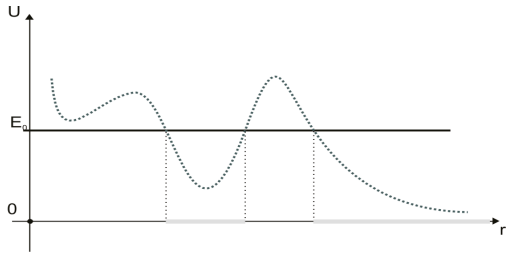
Η προβολή κάθε τροχιάς στον μονοδιάστατο χώρο θέσεων υποδεικνύει τη διαδρομή της σημειακής μάζας και η προβολή της στον μονοδιάστατο χώρο ταχυτήτων υποδεικνύει τις τιμές της ταχύτητας με την οποία η σημειακή μάζα διέρχεται από τις θέσεις αυτής της διαδρομής. Η προβολή κάθε κατάστασης ισορροπίας στο μονοδιάστατο χώρο θέσεων υποδεικνύει την αντίστοιχη θέση όπου ισορροπεί η σημειακή μάζα και στις θέσεις αυτές η ταχύτητά της προφανώς οφείλει να είναι μηδενική.

Η αρχή διατήρησης της ενέργειας υποδεικνύει ότι η προβολή της τροχιάς στο μονοδιάστατο χώρο θέσεων έχει δυνατότητα εξέλιξης μόνο σε συγκεκριμένα διαστήματα, εκεί όπου η τιμή της δυναμικής ενέργειας της σημειακής μάζας δεν υπερβαίνει τη σταθερή ενεργειακή της τιμή:

$$\mathrm{U}(x) + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = E_o \quad \Rightarrow \quad \mathrm{U}(x) \le \mathrm{E}_o \ .$$

Ο προσδιορισμός της τροχιάς στα επιτρεπτά διαστήματα της μονοδιάστατης κίνησης ανάγεται στον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος:

$$\mathrm{U}(x) + \frac{1}{2}m(dx/dt)^2 = E_o \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2/m}}\int_{x_o}^{x}\frac{dx}{\sqrt{E_o - \mathrm{U}(x)}} = t - t_o \quad \Rightarrow \quad x(t) = \ldots \ .$$

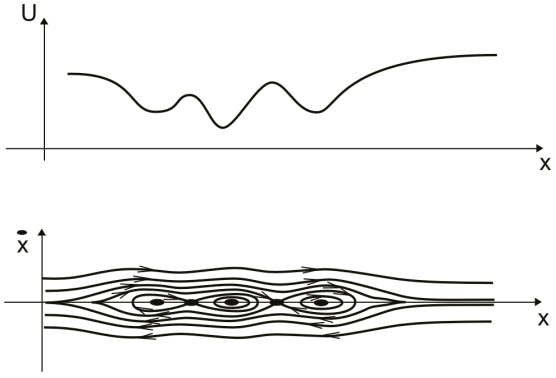


Γράφημα συνάρτησης δυναμικού και περιοχές επιτρεπτής κίνησης με δεδομένη ενεργειακή τιμή.

Η φύση των καταστάσεων ισορροπίας στο επίπεδο θέσεων και ταχυτήτων και η συμπεριφορά των τροχιών στην περιοχή τους μπορεί να γίνει αντιληπτή με την απευθείας μελέτη του γραφήματος της συνάρτησης δυναμικού.

- Οι καταστάσεις *ευσταθούς ισορροπίας* στο επίπεδο θέσεων και ταχυτήτων αντιστοιχούν στις θέσεις τοπικής ελαχιστοποίησης της τιμής της συνάρτησης δυναμικού, δηλαδή στα σημεία του μονοδιάστατου χώρου θέσεων όπου η $1^{η}$ παράγωγος της συνάρτησης δυναμικού είναι μηδενική και η $2^{η}$ παράγωγός της είναι θετική. Αυτό σημαίνει ότι οι αρχικές συνθήκες θέσης και ταχύτητας που είναι αρκετά γειτονικές σε αυτή την κατάσταση ισορροπίας ορίζουν τροχιές που εξελίσσονται στην περιοχή της κατάστασης ισορροπίας.

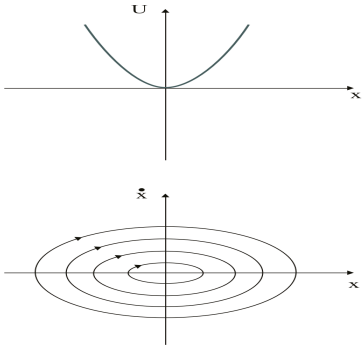
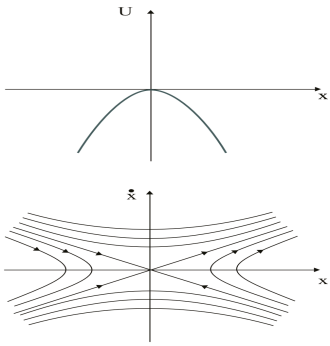
- Οι καταστάσεις *ασταθούς ισορροπίας* στο επίπεδο θέσεων και ταχυτήτων αντιστοιχούν στις θέσεις μεγιστοποίησης της τιμής της συνάρτησης δυναμικού, δηλαδή στα σημεία του μονοδιάστατου χώρου θέσεων όπου η $1^{η}$ παράγωγος της συνάρτησης δυναμικού είναι μηδενική και η $2^{η}$ παράγωγός της είναι αρνητική. Αυτό σημαίνει ότι οι αρχικές συνθήκες θέσης και ταχύτητας που είναι αρκετά γειτονικές σε αυτή την κατάσταση ισορροπίας ορίζουν τροχιές που απομακρύνονται από την περιοχή της κατάστασης ισορροπίας.



Γράφημα συνάρτησης δυναμικού ενός βαθμού ελευθερίας και συμπεριφορά των τροχιών κοντά στις καταστάσεις ισορροπίας στο επίπεδο θέσεων και ταχυτήτων.[1]

[1] Τα σημεία καμπής του δυναμικού αντιστοιχούν σε καταστάσεις ιδιάζουσας ισορροπίας.

ΑΝΤΙΠΡΟΣΩΠΕΥΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΙΝΗΣΕΩΝ ΕΝΟΣ ΒΑΘΜΟΥ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ

ΕΛΚΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΘΕΤΙΚΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ	ΑΠΩΣΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΡΝΗΤΙΚΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ
$\vec{\mathfrak{F}}(x) = -\mathfrak{K}\,x\,, \quad \mathfrak{K} > 0\,,$	$\vec{\mathfrak{F}}(x) = \mathfrak{K}\,x\,, \quad \mathfrak{K} > 0\,,$
$\mathfrak{U}(x) = \frac{1}{2}\mathfrak{K}\,x^2$	$\mathfrak{U}(x) = -\frac{1}{2}\mathfrak{K}\,x^2$
	
Ευσταθής ισορροπία Γράφημα δυναμικού & Ισοενεργειακές καμπύλες	Ασταθής ισορροπία. Γράφημα δυναμικού & Ισοενεργειακές καμπύλες
$\mathcal{E}(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\mathfrak{K}\,x^2 + \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2$	$\mathcal{E}(x,\dot{x}) = -\frac{1}{2}\mathfrak{K}\,x^2 + \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2$
Εξίσωση της κίνησης	**Εξίσωση της κίνησης**
$m\,\ddot{x}(t) + \mathfrak{K}\,x(t) = 0$	$m\,\ddot{x}(t) - \mathfrak{K}\,x(t) = 0$
Λύση:	Λύση:
$x(t) = \mathrm{C}_1 \cos\omega t + \mathrm{C}_2 \sin\omega t$	$x(t) = \mathrm{C}_1\, e^{\omega t} + \mathrm{C}_2\, e^{-\omega t}$
$\omega = \sqrt{\mathfrak{K}\,/\,m}$	$\omega = \sqrt{\mathfrak{K}\,/\,m}$