ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ακαδημαϊκό έτος 2013-14

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Καθηγητής: Σ. Πνευματικός

ΘΕΜΑ ΜΕΛΕΤΗΣ 1

ΕΡΩΤΗΜΑ 1. Όταν σε έναν πραγματικό διανυσματικό χώρο οριστεί μια μετρική, ποια συνθήκη πρέπει να πληρούται ώστε από τη μετρική αυτή να προκύψει μια στάθμη και έτσι ο χώρος να καταστεί σταθμισμένος;

ΕΡΩΤΗΜΑ 2. Θεωρούμε το σύνολο:

$$C([a,b],\mathbb{R}) = \left\{ f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \textit{συνεχεις} \right\}.$$

Δείξτε ότι το σύνολο αυτό αποκτά δομή σταθμισμένου διανυσματικού χώρου, για κάθε μια από τις μετρικές:

$$d(f,g)=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|,\quad d(f,g)=\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx,\quad d(f,g)=\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Τι άραγε θα συμβεί αν θέσουμε το ίδιο ερώτημα στο ευρύτερο σύνολο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων;

ΕΡΩΤΗΜΑ 3. Δείξτε ότι σε κάθε πραγματικό διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης, όλες οι στάθμες παράγουν ίδια τοπολογία. Δείξτε ότι αυτό δεν αληθεύει στις άπειρες διαστάσεις. Για να γίνει σαφές, προσδιορίστε τη σχέση των παραγόμενων τοπολογιών από τις μετρικές του προηγούμενου ερωτήματος στο χώρο $C([a,b],\mathbb{R})$.

ΕΡΩΤΗΜΑ 4. Στον πραγματικό διανυσματικό χώρο $C([a,b],\mathbb{R})$ θεωρούμε διαδοχικά τις στάθμες:

$$\|f\|=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)| \quad \text{και} \quad \|f\|=\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Ως προς κάθε μια από αυτές τις στάθμες, αποφανθείτε για τη συνέχεια ή ασυνέχεια της γραμμικής απεικόνισης:

(i) $D:C([a,b],\mathbb{R})\to C([a,b],\mathbb{R})$, $D(u)=u'$, (*τελεστής παραγώγισης*)

(ii) $\delta_s : C([a,b],\mathbb{R})\to\mathbb{R}$, $\delta_s(u)=u(s)$, $s\in[a,b]$, (*μέτρο Dirac*: *σημειακό φορτίο της u στο s*)

ΕΡΩΤΗΜΑ 5. Θεωρούμε μια μη μηδενική γραμμική απεικόνιση σταθμισμένων χώρων $f:E\to\mathbb{R}$. Δείξτε ότι:

Η γραμμική αυτή απεικόνιση είναι συνεχής αν και μόνο αν ο πυρήνας της είναι κλειστός στο Ε: $\overline{Kerf}=Kerf$.

Η γραμμική αυτή απεικόνιση είναι ασυνεχής αν και μόνο αν ο πυρήνας της είναι πυκνός στο Ε: $\overline{Kerf}=E$.

Εξετάστε αν μπορεί να χρησιμοποιηθεί αυτό το κριτήριο στο ερώτημα (ii) της προηγούμενης άσκησης.