ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ακαδημαϊκό έτος 2015-16

ΜΑΘΗΜΑ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Καθηγητής: Σ. Πνευματικός

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 10ης ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ

ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΩΝ ΜΟΡΦΩΝ

Σε ένα πραγματικό n-διάστατο διανυσματικό χώρο E, θεωρούμε μια τετραγωνική μορφή $q : E \to \mathbb{R}$.

Με δεδομένη μια βάση $\mathcal{B} = \{e_1,...,e_n\}$ του χώρου E, θεωρούμε σε αυτή τη βάση τον πίνακα $M(q)$ της q .
Σε μια νέα βάση $\mathcal{B}' = \{e_1',...,e_n'\}$ του χώρου E, θεωρούμε σε αυτή τη βάση τον πίνακα $M'(q)$ της q .

Ερώτημα: Ποια είναι η σχέση του πίνακα $M(q)$ με τον πίνακα $M'(q)$ της τετραγωνικής μορφής q ;

Απάντηση: Υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας – ο πίνακας μετάβασης από την παλαιά στη νέα βάση– :

$$M'(q) = {}^tP\,M(q)\,P .$$

Απορία 1: Γιατί στη σχέση αυτή υπεισέρχεται ο ανάστροφος και όχι ο αντίστροφος πίνακας του P ;

Απορία 2: Κατά την αλλαγή βάσης, η ορίζουσα του πίνακα της q διατηρείται αναλλοίωτη;

$$(:\ M'(q) = {}^tP\,M(q)\,P \quad \Rightarrow \quad \det M'(q) = (\det P)^2 \det M(q)\ ).$$

Απορία 3: Κατά την αλλαγή βάσης, επηρεάζονται το $rank\,q$ και το $sgn\,q$;

Απορία 4: Κατά την αλλαγή βάσης, επηρεάζονται ο πυρήνας και ο κώνος ισοτροπίας της q ;

Σχόλιο. Θυμίζουμε ότι αν $x, y \in E$ και $x = \sum_{1\le i\le n} x_i e_i$, $y = \sum_{1\le i\le n} y_i e_i$,
θέτοντας ${}^tX = [x_1,...,x_n]$, ${}^tY = [y_1,...,y_n]$, ${}^tX' = [x_1',...,x_n']$, ${}^tY' = [y_1',...,y_n']$,

τότε: $X' = P^{-1}X \Rightarrow X = PX'$, $Y' = P^{-1}Y \Rightarrow Y = PY'$, και αν M, M' είναι οι πίνακες της διγραμμικής συμμετρικής μορφής στις αντίστοιχες βάσεις $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, ισχύει: $s(x,y) = {}^tX\,M\,Y$, $s(x,y) = {}^tX'\,M'\,Y'$, άρα:

$$s(x,y) = {}^tX\,M\,Y = {}^t(PX')M\,{}^t(PY') = {}^tX'({}^tPMP)Y' \quad \text{άρα} \quad M' = {}^tPMP \quad \text{και} \quad M'(q) = {}^tP\,M(q)\,P .$$

Θα θυμηθούμε ότι, με δεδομένη μια βάση του χώρου E, σε κάθε πίνακα $n \times n$ αντιστοιχεί ένας ενδομορφισμός του E και ότι κατά την αλλαγή βάσης – με την έννοια $M' = P^{-1}M\,P$ – η ορίζουσα του πίνακα – στην παλαιά και στη νέα βάση – παραμένει αναλλοίωτη και για το λόγο αυτό μπορούμε να μιλάμε για την ορίζουσα του ενδομορφισμού και όχι απλά για την ορίζουσα του κάθε πίνακα. Όμως, δεν έχει νόημα να μιλάμε για την ορίζουσα μιας διγραμμικής μορφής – μιας τετραγωνικής μορφής – χωρίς να αναφερόμαστε στη χρησιμοποιούμενη βάση γιατί η ορίζουσα αυτή εξαρτάται από την επιλογή της βάσης και κάθε φορά επηρεάζεται πολλαπλασιαστικά από ένα γνήσια θετικό συντελεστή:

$$\det M'(q) = (\det P)^2 \det M(q) .$$

Αυτό που δεν επηρεάζεται κατά την αλλαγή βάσης είναι ο μηδενισμός ή όχι της ορίζουσας του εκάστοτε πίνακα της τετραγωνικής μορφής – της αντίστοιχης διγραμμικής μορφής – στην εκάστοτε βάση, άρα του πυρήνα της. Το συμπέρασμα αυτό μπορούμε να το μεταφέρουμε σε επίπεδο ιδιοτιμών των αντίστοιχων πινάκων της τετραγωνικής μορφής κατά τις αλλαγές βάσεις. Δηλαδή, το πλήθος των μηδενικών ιδιοτιμών του πίνακα με τον οποίο εκφράζεται μια τετραγωνική μορφή δεν μεταβάλλεται κατά τις αλλαγές βάσης, ούτε το πλήθος των θετικών και των αρνητικών ιδιοτιμών της, όπως προκύπτει από το θεώρημα Sylvester. Συνεπώς, όταν δοθεί μια τετραγωνική μορφή στο χώρο E, αντιλαμβανόμαστε το νόημα της αποσύνθεσης:

$$E = E^+(q) \oplus E^-(q) \oplus ker q \,.$$

ΑΣΚΗΣΗ. Θεωρούμε τον 3-διάτατο πραγματικό διανυσματικό χώρο:

$$E = \mathbb{R}_2[X] = \left\{ aX^2 + bX + c \,/\, a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

και ορίζουμε την απεικόνιση:

$$f : E \times E \to \mathbb{R} \,, \quad f(A,B) = A(0)B(0) + A(1)B(1) + 2A(2)B(2) \,.$$

1. Διαπιστώστε ότι πρόκειται για διγραμμική συμμετρική μορφή στο E και προσδιορίστε την αντίστοιχη τετραγωνική μορφή στο E.
2. Γράψτε τον πίνακα της συμμετρικής διγραμμικής αυτής μορφής – της τετραγωνικής μορφής – σε κάθε μια από τις εξής βάσεις:

$$\mathcal{B} = \left\{1, X, X^2\right\}, \quad \mathcal{B}' = \left\{X, X-2, X(X-2)\right\}.$$

3. Προσδιορίστε τον πίνακα αλλαγής βάσης ώστε: $M'(q) = {}^tP\,M(q)\,P$.[1]
4. Υπολογίστε τις ιδιοτιμές των δυο αυτών πινάκων και τη μεταξύ τους σχέση.
5. Εκφράστε την τετραγωνική μορφή στη βάση που προκύπτει από τον αλγόριθμο Gauss.
6. Διαπιστώστε ότι η συμμετρική διγραμμική μορφή ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο χώρο E.
7. Οι δοθείσες βάσεις και εκείνη του Gauss είναι ορθοκανονικές ως προς αυτό το εσωτερικό γινόμενο;
8. Στον ισόμορφο χώρο $\mathbb{R}^3$ εφοδιασμένο με την κανονική του βάση θεωρούμε τον υπόχωρο που ορίζεται από την εξίσωση: $x + y + z = 0$. Ποιος είναι ο ισόμορφος υπόχωρος Σ του E;
9. Ποιος είναι ο ορθογώνιος χώρος του Σ μέσα στο E ως προς το προηγούμενο εσωτερικό γινόμενο;
10. Προσδιορίστε τον περιορισμό της τετραγωνικής μορφής q στον υπόχωρο Σ του E : $q' : \Sigma \to \mathbb{R}$.
11. Εξετάστε τα προηγούμενα ερωτήματα ως προς τις ακόλουθες διγραμμικές μορφές, θέτοντας στον εαυτό σας το ερώτημα για το τι θα μπορούσε να συμβεί αν δεν ισχύει η συμμετρικότητα:

$$\textbf{(i)} \quad b : E \times E \to \mathbb{R} \,, \quad b(A,B) = 2A(0)B(2) - 6A(1)B(0)$$

$$\textbf{(ii)} \quad s : E \times E \to \mathbb{R} \,, \quad s(A,B) = A(0)B(2) + A(2)B(0) - 3A(0)B(1) - 3A(1)B(0)$$

12. Προκειμένου να ασκηθείτε στους υπολογισμούς βάλτε σε αυτή τη διαδικασία και τη βάση:

$$\mathcal{B}'' = \left\{1, X-1, (X-1)^2\right\}.$$

13. Τι θα λέγατε ως προς τα προηγούμενα ερωτήματα αν θέτουμε:

$$\textbf{(i)} \;\; f(A,B) = A(0)B(0) + A(1)B(1)) \,, \quad \textbf{(ii)} \;\; f(A,B) = A(0)B(0) \quad ;$$

---

[1] Απάντηση: $M = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \\ 9 & 17 & 33 \end{bmatrix}$ $M' = \begin{bmatrix} 9 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$