ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ακαδημαϊκό έτος 2015-16

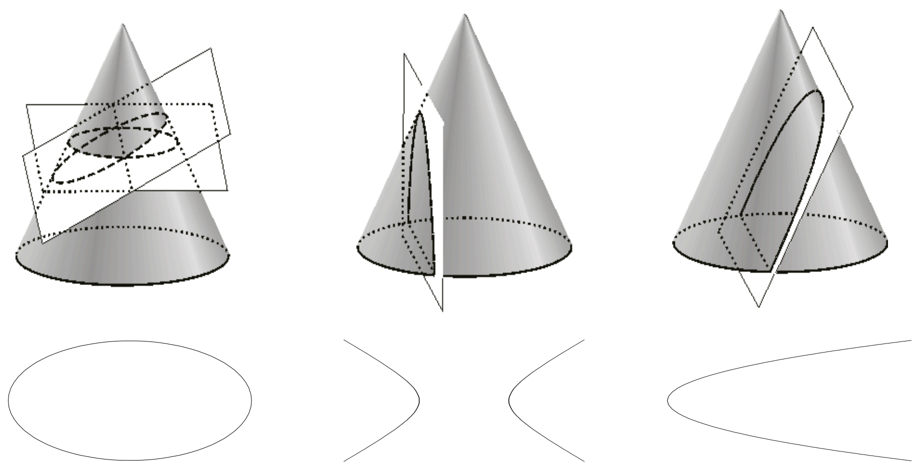
ΜΑΘΗΜΑ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Καθηγητής: Σ. Πνευματικός

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 12^{ης} ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΩΝ ΜΟΡΦΩΝ: ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ



Απολλώνιος (262-190 π.Χ.)
Αν η κλίση της γενέτειρας του κώνου ως προς το οριζόντιο επίπεδο είναι φ
τότε από την τομή της επιφάνειας του κώνου με ένα επίπεδο κλίσης μικρότερης, ίσης, μεγαλύτερης από φ
προκύπτει αντίστοιχα έλλειψη, παραβολή, υπερβολή.

Η εξίσωση με την οποία ορίζεται μία κωνική τομή σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων του επιπέδου εξαρτάται από τη θέση αυτού του συστήματος αναφοράς στο επίπεδο. Αλλά, όποιο και αν είναι το σύστημα αναφοράς, η εξίσωση μιας κωνικής τομής ορίζεται από ένα πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού ως προς τις συντεταγμένες του επιπέδου, δηλαδή πρόκειται για εξίσωση της μορφής:

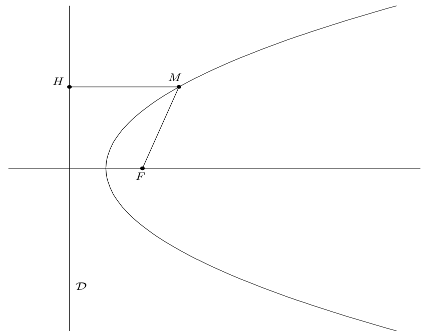
$$q_1x^2 + q_2y^2 + q_3xy + \ell_1 x + \ell_2 y + \kappa = 0.$$

Αναγόμενη στη θεωρία των τετραγωνικών μορφών θα διαπιστώσουμε ότι υπάρχει πάντα κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων στο οποίο η εξίσωση αυτή αποκτά ιδιαίτερα απλή έκφραση Π.χ. υπάρχει σύστημα αναφοράς όπου η εξίσωση της έλλειψης ή της υπερβολής αποκτά τετραγωνική έκφραση:

$$\frac{X^2}{a^2} \pm \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Σημείωση. Είναι χρήσιμο να θυμηθείτε τον γεωμετρικό ορισμό των κωνικών τομών, δηλαδή με δεδομένο ένα σημείο (την εστία F), μια ευθεία μη διερχόμενη από το F (την διευθετούσα D) και ένα γνήσια θετικό αριθμό e (εκκεντρότητα), η κωνική τομή ορίζεται ως γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου τ.ω.:

$$d(M,F) = e\, d(M,D)\,.$$

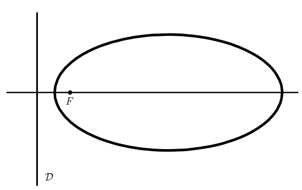


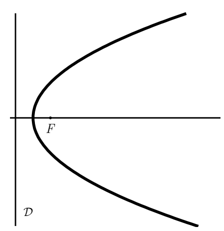
Η τιμή της εκκεντρότητας καθορίζει το είδος της κωνικής τομής:

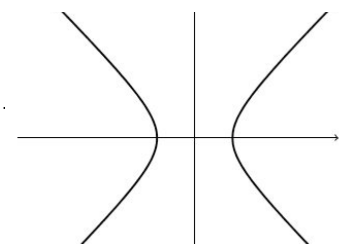
$$0 < e < 1 \Rightarrow \text{ έλλειψη}, \quad e = 1 \Rightarrow \text{ παραβολή}, \quad e > 1 \Rightarrow \text{ υπερβολή.}$$

Οι κωνικές τομές διαθέτουν έναν εστιακό άξονα συμμετρίας που διέρχεται από την εστία τους και είναι κάθετος στην διευθετούσα. Οι ελλείψεις και οι υπερβολές έχουν έναν ακόμη άξονα συμμετρίας, κάθετο στον εστιακό άξονα, άρα διαθέτουν κέντρο συμμετρίας. Εκεί θα τεθεί τελικά το σύστημα αναφοράς στο οποίο θα επιτευχθεί η απλούστερη έκφραση των εξισώσεων που ορίζουν αυτές τις κωνικές τομές.

Οι κορυφές μιας κωνικής τομής είναι τα σημεία στα οποία την τέμνουν οι άξονες συμμετρίας της: οι ελλείψεις έχουν 4 κορυφές, οι υπερβολές έχουν 2 κορυφές και οι παραβολές μια κορυφή.







Αρχικά θεωρούμε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων επικεντρωμένο στην εστία της κωνικής τομής, το οποίο έχει τους άξονες του αντίστοιχα παράλληλους προς τον εστιακό άξονα και την διευθετούσα. Σε αυτό το σύστημα αναφοράς $\Re_F$ καθορίζεται η εξίσωση του εστιακού άξονα $y=0$, η εξίσωση της διευθετούσας $x=-\delta$ όπου δ δηλώνει την απόσταση της εστίας από την διευθετούσα και επιπλέον οι συντεταγμένες της ορθογώνιας προβολής κάθε σημείου $M(x,y)$ στη διευθετούσα: $H(x,y)=(-\delta,y)$.
Με αυτά τα δεδομένα προκύπτει η εξίσωση των κωνικών τομών στο σύστημα αναφοράς $\Re_F$:

$$d(M,F) = e\, d(M,D) \iff (MF) = e(MH) \iff (MF)^2 = e^2(MH)^2 \iff x^2 + y^2 = e^2(x+\delta)^2\,.$$

Εισάγοντας την παράμετρο $p = e\delta$, η εξίσωση των κωνικών τομών διατυπώνεται ως εξής:

$$(1-e^2)x^2 + y^2 - 2epx - p^2 = 0\,.$$

Θα αναζητήσουμε τώρα ένα νέο σύστημα αναφοράς όπου η εξίσωση των κωνικών τομών αποκτά μια απλή τετραγωνική έκφραση που θα επιτρέπει την αναλυτική ερμηνεία των γεωμετρικών τους χαρακτηριστικών. Αν πρόκειται για ελλείψεις ή υπερβολές το νέο σύστημα αναφοράς θα τεθεί στο κέντρο συμμετρίας τους, ενώ στην περίπτωση των παραβολών θα τεθεί στη μοναδική κορυφή τους.

- **Περίπτωση της έλλειψης και της υπερβολής**

Η εξίσωση των κωνικών τομών εκκεντρότητας $e \neq 1$ εκφράζεται στο σύστημα αναφοράς $\Re_F$ ως εξής:

$$(1-e^2)x^2 + y^2 - 2epx - p^2 = 0$$

και στο σύστημα αυτό υπολογίζονται οι συντεταγμένες του κέντρου της συμμετρίας τους:

$$\Omega = \left(ep/(1-e^2), 0\right)_{\Re_F} .$$

Για τον υπολογισμό αυτό λαμβάνουμε υπόψη τις συντεταγμένες των δυο κορυφών τους:

$$S = -\left(p/(e+1), 0\right)_{\Re_F} \quad \text{και} \quad S = -\left(p/(e-1), 0\right)_{\Re_F} .$$

Η μεταφορά του συστήματος αναφοράς $\Re_F$ με συντεταγμένες (x, y) από την εστία στο κέντρο συμμετρίας ορίζει το σύστημα αναφοράς $\Re_\Omega$ με συντεταγμένες (X, Y) και καθορίζει τις σχέσεις:

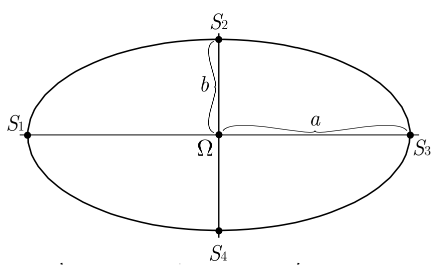
$$\begin{Bmatrix} X = x - ep/(1-e^2) \\ Y = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = X + ep/(1-e^2) \\ y = Y \end{Bmatrix}$$

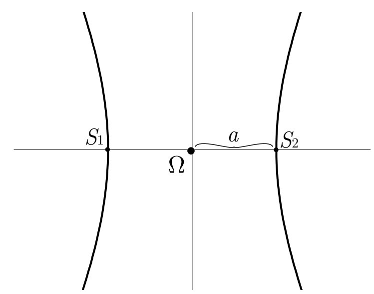
Στο σύστημα αναφοράς $\Re_\Omega$ η εξίσωση των κωνικών αυτών τομών αποκτά την τετραγωνική έκφραση:

$$\left(\frac{1-e^2}{p}\right)^2 X^2 + \left(\frac{1-e^2}{p^2}\right) Y^2 = 1 .$$

Ο συντελεστής του X^2 είναι πάντα θετικός ενώ το πρόσημο του συντελεστή του Y^2 εξαρτάται από την τιμή της εκκεντρότητας. Συνακόλουθα, υπάρχουν γνήσια θετικές σταθερές a, b τέτοιες ώστε η εξίσωση των κωνικών αυτών τομών αποκτά την ακόλουθη έκφραση:

$$e < 1 \;\Rightarrow\; \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \;\Rightarrow\; \text{έλλειψη}, \qquad e > 1 \;\Rightarrow\; \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1 \;\Rightarrow\; \text{υπερβολή}.$$





Οι άξονες του συστήματος αναφοράς $\Re_\Omega$ είναι πλέον άξονες συμμετρίας της έλλειψης και της υπερβολής. Οι άξονες αυτοί τέμνουν κάθε έλλειψη στις 4 κορυφές της:

$$S_1 = \left(-a, 0\right)_{\Re_\Omega}, \quad S_2 = \left(0, b\right)_{\Re_\Omega}, \quad S_3 = \left(a, 0\right)_{\Re_\Omega}, \quad S_4 = \left(0, -b\right)_{\Re_\Omega}$$

και ο εστιακός άξονας τέμνει κάθε υπερβολή στις 2 κορυφές της:

$$S_1 = \left(-a, 0\right)_{\Re_\Omega}, \quad S_2 = \left(a, 0\right)_{\Re_\Omega} .$$

Η εξίσωση της έλλειψης και η εξίσωση της υπερβολής παραμετροποιούνται ως εξής:

$$\text{έλλειψη}: \quad e < 1 \;\Rightarrow\; \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi[,$$

$$\text{υπερβολή}: \quad e > 1 \;\Rightarrow\; \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x(t) = a\cosh t \\ y(t) = b\sinh t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} .$$

- **Περίπτωση της παραβολής**

Η εξίσωση της κωνικής τομής εκκεντρότητας $e=1$ εκφράζεται στο σύστημα αναφοράς $\Re_F$ ως εξής:

$$y^2 - 2px = p^2$$

όπου η παράμετρος p συμπίπτει πλέον με την απόσταση δ της εστίας από την διευθετούσα. Πρόκειται για εξίσωση παραβολής και εδώ ναι μεν δεν υπάρχει κέντρο συμμετρίας αλλά υπάρχει μια μοναδική κορυφή:

$$S = \left(-p/2, 0\right)_{\Re_F}.$$

Η μεταφορά του συστήματος αναφοράς $\Re_F$ με συντεταγμένες (x,y) από την εστία στην κορυφή της κωνικής τομής ορίζει το σύστημα αναφοράς $\Re_S$ με συντεταγμένες (X,Y) και καθορίζει τις σχέσεις:

$$\begin{Bmatrix} X = x - p/2 \\ Y = y \end{Bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} x = X + p/2 \\ y = Y \end{Bmatrix}$$

Στο σύστημα αναφοράς $\Re_\Omega$ η εξίσωση της παραβολής αποκτά την έκφραση:

$$Y^2 = 2pX$$

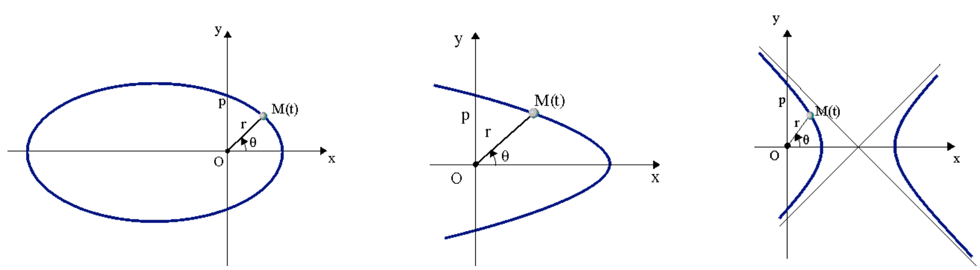
και παραμετροποιείται ως εξής:

$$\text{παραβολή}: \quad e=1 \quad \Rightarrow \quad Y^2 = 2pX \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x(t) = t^2/2 \\ y(t) = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

- **Πολική εξίσωση των κωνικών τομών.**

Στο σύστημα αναφοράς που είναι τοποθετημένο στην εστία των κωνικών τομών προσδιορίζονται οι πολικές εξισώσεις τους οι οποίες συνοψίζονται ως εξής:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$



$e<1 \Rightarrow$ *έλλειψη* $\qquad e=1 \Rightarrow$ *παραβολή* $\qquad e>1 \Rightarrow$ *υπερβολή*

Σημείωση. Στις πολικές συντεταγμένες ως προς το εστιακό σύστημα αναφοράς $\Re_F$ διαπιστώνουμε ότι:

$$d(M,F) = e\,d(M,D) \Leftrightarrow r = e\,|\delta - r\cos\theta| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} r = \ \ e(r\cos\theta - \delta) \\ r = -e(r\cos\theta - \delta) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} r = \dfrac{-p}{1 - e\cos\theta} \\ r = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta} \end{array} \right.$$

Οι δυο αυτές πολικές εξισώσεις ορίζουν την ίδια καμπύλη γιατί θεωρώντας τις δυο 2π-περιοδικές συναρτήσεις:

$$f_+(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \quad f_-(\theta) = \frac{-p}{1 - e\cos\theta}$$

ισχύει $f_-(\theta+\pi) = -f_+(\theta)$ άρα το ίδιο σημείο ορίζεται από τις πολικές συντεταγμένες $(f_+(\theta),\theta)$ και $(f_-(\theta+\pi),\theta+\pi)$.

Αν $e<1$ τότε η κωνική τομή (έλλειψη) σχηματίζεται εξολοκλήρου όταν η πολική γωνία διατρέχει το $]-\pi, \pi[$.
Αν $e=1$ τότε η κωνική τομή (παραβολή) σχηματίζεται εξολοκλήρου όταν η πολική γωνία διατρέχει το $]-\pi, \pi]$.
Αν $e>1$ τότε υπάρχει $\theta_o \in]0, \pi/2[$ τέτοιο ώστε $\cos\theta_o = 1/e$ και η κωνική τομή (υπερβολή) σχηματίζεται εξολοκλήρου όταν η πολική γωνία διατρέχει το $]-\theta_o, \theta_o[\cup]\theta_o, 2\pi - \theta_o[$ όπου θ_o και $-\theta_o$ είναι μέτρα των γωνιών που ορίζονται από τον πολικό άξονα με κάθε μια από τις δυο ασυμπτώτους των κλάδων της υπερβολής.

- **Οι κωνικές τομές και οι τετραγωνικές μορφές στο ευκλείδειο επίπεδο.**

Οι κωνικές τομές εμπίπτουν στην ευρύτερη κατηγορία των *κωνικών* καμπυλών που ορίζονται στο ευκλείδειο επίπεδο από μια 2-βάθμια πολυωνυμική εξίσωση $P(x,y)=0$ όπου:

$$P(x,y)=q_1x^2+q_2y^2+q_3xy+\ell_1x+\ell_2y+k\,.$$

Στην εξίσωση αυτή υπεισέρχονται μια τετραγωνική μορφή, μια γραμμική μορφή και μια σταθερά:

$$q(x,y)=q_1x^2+q_2y^2+q_3xy\,,\ (q_1,q_2,q_3\in\mathbb{R}),\quad \ell(x,y)=\ell_1x+\ell_2y\,,\ (\ell_1,\ell_2\in\mathbb{R}),\quad k\in\mathbb{R}\,.$$

Θεώρημα. *Αν C είναι κωνική καμπύλη στο ευκλείδειο επίπεδο με εξίσωση $P(x,y)=0$ όπου:*

$$P(x,y)=q(x,y)+\ell(x,y)+k$$

τότε

$rank(q)=2 \Rightarrow$ *C έλλειψη ή υπερβολή ή δυο τεμνόμενες ευθείες.*

$rank(q)=1 \Rightarrow$ *C παραβολή ή δυο παράλληλες ευθείες ή ένα σημείο.*

Σημείωση. Η γεωμετρική φύση της κωνικής καμπύλης καθορίζεται από την τετραγωνική μορφή που υπεισέρχεται στην εξίσωσή της και συγκεκριμένα από τις ιδιοτιμές της. Αν οι ιδιοτιμές αυτές δεν είναι μηδενικές, αναγόμαστε στην περίπτωση όπου το rank της τετραγωνικής μορφής είναι 2 οπότε το signum θα υποδείξει αν πρόκειται για έλλειψη ή υπερβολή. Αν μία από τις ιδιοτιμές είναι μηδενική, αναγόμαστε στην περίπτωση όπου το rank της τετραγωνικής μορφής είναι 1. Οι ιδιοτιμές καθορίζουν το κατάλληλο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων στο οποίο η εξίσωση της κωνικής καμπύλης εκφράζεται ως εξής:

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\ell_1'x'+\ell_2'y'+k'=0\,.$$

Σημείωση. Οι αλλαγές βάσης που διατηρούν την ορθοκανονικότητα ως προς το εσωτερικό γινόμενο του ευκλείδειου επιπέδου δεν επηρεάζουν τον γεωμετρικό τόπο των σημείων που συγκροτούν τις κωνικές καμπύλες. Άρα, οι αλλαγές συστήματος αναφοράς οφείλουν να πραγματοποιούνται μόνο με ισομετρίες ή μεταφορές στο ευκλείδειο επίπεδο.

Ερώτημα 1. Εξετάστε την επίπτωση που έχει η αλλαγή συστήματος συντεταγμένων $x'=3x$, $y'=2y$ στον κύκλο που ορίζεται στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων του ευκλείδειου επιπέδου από την εξίσωση $x^2+y^2=1$.

Ερώτημα 2. Προκειμένου να μελετήσετε τις ιδιότητες μιας τετραγωνικής μορφής χρειάζεται κατά κανόνα να αλλάξετε σύστημα συντεταγμένων ώστε να επιτευχθεί η κανονική της έκφραση (αθροίσματα/διαφορές τετραγώνων). Για τη μελέτη των κωνικών τομών είναι προτιμότερο να αναζητήσετε το νέο σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο κανονικοποιείται η τετραγωνική μορφή, με τη μέθοδο των ιδιοτιμών ή με τη μέθοδο Gauss;

Απάντηση. Η μέθοδος Gauss δεν απαιτεί παρά στοιχειώδεις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού και είναι αποτελεσματική για τον προσδιορισμό του rank και του signum της τετραγωνικής μορφής, όχι όμως για τον υπολογισμό των ευκλείδειων χαρακτηριστικών μιας κωνικής τομής. Η μέθοδος των ιδιοτιμών απαιτεί αλγεβρικούς υπολογισμούς, αλλά αφήνει ανεπηρέαστη την ορθοκανονικότητα των βάσεων και συνακόλουθα τον γεωμετρικό τόπο της κωνικής τομής. Έτσι, αν θέλουμε να αντιληφθούμε απλά και μόνο τη διαφοροποίηση μιας έλλειψης από μια υπερβολή μπορούμε να αρκεστούμε στη μέθοδο Gauss, αλλά αν θέλουμε περισσότερες πληροφορίες, π.χ. το διεύθυνση και το μήκος των αξόνων μιας έλλειψης, χρειαζόμαστε την κανονική έκφραση της τετραγωνικής μορφής σε ορθοκανονική βάση ως προς το εσωτερικό γινόμενο του ευκλείδειου επιπέδου. Κατά την αναγωγή μιας τετραγωνικής μορφής σε άθροισμα τετραγώνων, δείτε τη διαφορά των αντίστοιχων συστημάτων συντεταγμένων που καθορίζονται από τη μέθοδο των ιδιοτιμών και από τη μέθοδο Gauss:

$$q(x,y)=q_1x^2+q_2y^2+q_3xy=q_1\big(x-(q_2/2q_1)y\big)^2+\big(q_2-(q_3^2/4q_1)\big)y^2\,,\quad \big(x'=x-(q_2/2q_1)y,\ y'=y\big)\Rightarrow q(x',y')=\alpha x'^2+\beta y'^2\,.$$

$q(x,y)$ λ_1,λ_2

Πρόταση. *Αν C είναι κωνική καμπύλη στο ευκλείδειο επίπεδο με εξίσωση $P(x,y)=0$ τότε ένα σημείο $\Omega(x_o,y_o)\in C$ είναι κέντρο συμμετρίας της κωνικής καμπύλης αν και μόνο αν:*

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_o,y_o)=0\,,\quad \frac{\partial P}{\partial y}(x_o,y_o)=0\,.$$

Θεώρημα.

- *Αν $rank(q)=2$, μεταφέροντας το ορθοκανονικό σύστημα ιδιοαξόνων στο κέντρο συμμετρίας $\Omega(x_o,y_o)$ η εξίσωση της κωνικής καμπύλης εκφράζεται ως εξής:*

$$\lambda_1 X^2+\lambda_2 Y^2+k_o=0 \quad \text{όπου} \quad k_o=P(x_o,y_o)\,.$$

- *Αν $rank(q)=1$, μεταφέροντας το ορθοκανονικό σύστημα ιδιοαξόνων στην κορυφή $S(x_o,y_o)$ η εξίσωση της κωνικής καμπύλης εκφράζεται ως εξής:*

$$Y^2=2pX\,.$$

Σημείωση. Το θεώρημα αυτό υποδεικνύει ότι η φύση της κωνικής καμπύλης καθορίζεται από το τετραγωνικό μέρος της εξίσωσής της και ταξινομεί τις κωνικές καμπύλες σε δυο κατηγορίες, λαμβάνοντας υπόψη ότι το rank μιας τετραγωνικής μορφής διατηρείται αναλλοίωτο κατά τις αλλαγές βάσης. Επίσης, αφήνει να αντιληφθούμε ότι για την απόδειξή του χρειάζεται να πραγματοποιηθεί μια ορθοκανονική αλλαγή βάσης που θα οδηγήσει στη διαγωνιοποίηση του πίνακα της τετραγωνικής μορφής κατά την υπόδειξη του Sylvester και κατόπιν μια κατάλληλη μεταφορά του συστήματος αναφοράς που θα οδηγήσει σε απορρόφηση της γραμμικής μορφής μέσα σε τετραγωνικές αθροίσεις ή διαφορές. Το πρώτο σκέλος - αλλαγή βάσης - καθορίζεται από τις ιδιοτιμές της τετραγωνικής μορφής οι οποίες υποδεικνύουν την κατάλληλη στροφή των αξόνων και τη συγκρότηση ενός ορθοκανονικού συστήματος ιδιοαξόνων όπου εξαλείφεται ο όρος *xy* και κανονικοποιείται η τετραγωνική μορφή. Το δεύτερο σκέλος - μεταφορά – καθορίζεται από την ύπαρξη ή όχι κέντρου συμμετρίας.

Ερώτημα 3. Αν οι ιδιοτιμές της τετραγωνικής μορφής είναι διαφορετικές μη μηδενικές τότε στο ευκλείδειο επίπεδο υπάρχουν δυο ορθογώνιοι μεταξύ τους μονοδιάστατοι ιδιόχωροι και έτσι μπορούμε να επιλέξουμε ένα σύστημα ορθογώνιων ιδιοαξόνων. Συμφωνείτε; Τι θα συμβεί αν η ιδιοτιμή είναι διπλή μη μηδενική; Τι θα συμβεί αν μια από τις δυο ιδιοτιμές είναι μηδενική;

Στην περίπτωση αυτή ισχύει:

$$\lambda_1\lambda_2>0\;:\;sgn(q)=\left|\begin{array}{l}(2,0):(++)\\(0,2):(--)\end{array}\right. \;\Rightarrow\; \left|\begin{array}{l}k_o \text{ ομοσημο με } \lambda_1\ \&\ \lambda_2 \Rightarrow C=\varnothing\\ k_o=0 \Rightarrow C=\{\Omega\}\\ k_o \text{ ετεροσημο με } \lambda_1\ \&\ \lambda_2 \Rightarrow C\ \textit{ελλειψη}\end{array}\right.$$

$$\lambda_1\lambda_2<0\;:\;sgn(q)=(1,1) \;\Rightarrow\; \left|\begin{array}{l}k_o\neq 0 \Rightarrow C\ \textit{υπερβολη}\\ k_o=0 \Rightarrow C\ \textit{δυο τεμνομενες ευθειες}\end{array}\right.$$

Ερώτημα 4. Εξετάστε αν η μεταφορά του συστήματος αναφοράς στο κέντρο συμμετρίας υπολογίζεται ως εξής:

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\ell_1'x'+\ell_2'y'+k'=0\;:\; \left|\begin{array}{l}\lambda_1x'^2+\ell_1'x'=\lambda_1\left(x'^2+(\ell_1'/\lambda_1)x'\right)=\lambda_1\left((x'+(\ell_1'/2\lambda_1)\right)^2-\left(\ell_1'/2\lambda_1\right)^2\\ \lambda_2y'^2+\ell_2'y'=\lambda_2\left(y'^2+(\ell_2'/\lambda_2)y'\right)=\lambda_2\left((y'+(\ell_2'/2\lambda_2)\right)^2-\left(\ell_2'/2\lambda_2\right)^2\end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l}X=\dots\\ Y=\dots\end{array}\right.$$

Σημείωση. Αν $rank(q)=1$, η κωνική καμπύλη δεν διαθέτει κέντρο συμμετρίας και $2q_1q_2=q_3^2$. Στην περίπτωση αυτή

Στην περίπτωση αυτή ισχύει:

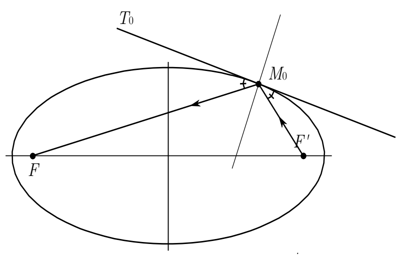
$$\lambda_1\lambda_2>0\;:\;sgn(q)=\left|\begin{array}{l}(2,0):(++)\\(0,2):(--)\end{array}\right. \;\Rightarrow\; \left|\begin{array}{l}k_o \text{ ομοσημο με } \lambda_1\ \&\ \lambda_2 \Rightarrow C=\varnothing\\ k_o=0 \Rightarrow C=\{\Omega\}\\ k_o \text{ ετεροσημο με } \lambda_1\ \&\ \lambda_2 \Rightarrow C\ \textit{ελλειψη}\end{array}\right.$$

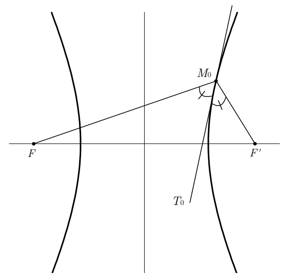
$\lambda_1\lambda_2 < 0 \ : \ sgn(q) = (1,1) \qquad \Rightarrow \begin{vmatrix} k_o \neq 0 \ \Rightarrow \ C \text{ υπερβολη} \\ k_o = 0 \ \Rightarrow \ C \text{ δυο τεμνομενες ευθειες} \end{vmatrix}$

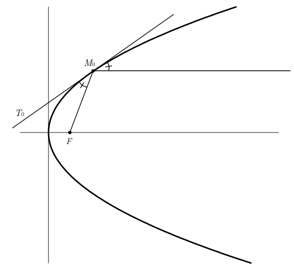
Άσκηση 1. Εφαπτόμενες των κωνικών τομών.

Προσδιορίστε τις εφαπτόμενες των κωνικών τομών και μελετήστε τις ιδιότητές τους:

- C *έλλειψη* (F, F' εστίες) $\Rightarrow$ η εφαπτομένη στο $M \in C$ είναι εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $((MF),(MF'))$.
- C *υπερβολή* (F, F' εστίες) $\Rightarrow$ η εφαπτομένη στο $M \in C$ είναι εσωτερική διχοτόμος της γωνίας $((MF),(MF'))$.
- C *παραβολή* (F εστία) $\Rightarrow$ η εφαπτομένη στο $M \in C$ είναι εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $((MF),\Delta_M)$ όπου Δ_M παράλληλη προς τον εστιακό άξονα διερχόμενη από το σημείο *M*.







Άσκηση 2. Κατασκευή της έλλειψης.