ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ακαδημαϊκό έτος 2015-16

ΜΑΘΗΜΑ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Καθηγητής: Σ. Πνευματικός

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2ης ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΙ ΧΩΡΟΙ : ΕΝΔΟΓΕΝΗΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

Ευκλείδειος χώρος καλείται κάθε πραγματικός διανυσματικός χώρος Ε, πεπερασμένης διάστασης, εφοδιασμένος με την πράξη του εσωτερικού γινομένου. Το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ενδογενώς ως διγραμμική, συμμετρική και θετικά ορισμένη απεικόνιση[1], η οποία σε κάθε ζεύγος διανυσμάτων $\vec{x},\vec{y}\in \mathrm{E}$ αποδίδει ένα πραγματικό αριθμό που συμβολίζεται $<\vec{x},\vec{y}>$:

$$<,>: \mathrm{E}\times\mathrm{E}\to\mathbb{R}\,.$$

Η διανυσματική δομή προσδίδει στα στοιχεία του ευκλείδειου χώρου διανυσματική υπόσταση και διαμέσου του εσωτερικού γινομένου αποδίδεται σε κάθε διάνυσμα το μέτρο του ως εξής :[2]

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{<\vec{x},\vec{x}>}\,.$$

Επίσης, από τη στάθμη προκύπτει η εξής μετρική που ορίζει την τοπολογία του ευκλείδειου χώρου Ε :[3]

$$d:\mathrm{E}\times\mathrm{E}\to\mathbb{R}\,,\;\; d(x,y)=\|\vec{x}-\vec{y}\|\,.$$

---

1 Διγραμμικότητα : $<\vec{x}+\vec{x}',\vec{y}>=<\vec{x},\vec{y}>+<\vec{x}',\vec{y}>,\;\; \forall \vec{x},\vec{x}',\vec{y}\in\mathrm{E}$,

$<\vec{x},\vec{y}+\vec{y}'>=<\vec{x},\vec{y}>+<\vec{x},\vec{y}'>,\;\; \forall \vec{x},\vec{y},\vec{y}'\in\mathrm{E}$,

$\lambda<\vec{x},\vec{y}>=<\lambda\vec{x},\vec{y}>=<\vec{x},\lambda\vec{y}>,\;\; \forall \vec{x},\vec{y}\in\mathrm{E},\; \forall\lambda\in\mathbb{R}$.

Συμμετρικότητα : $<\vec{x},\vec{y}>=<\vec{y},\vec{x}>,\;\; \forall \vec{x},\vec{y}\in\mathrm{E}$.

"θετικά ορισμένη" : $<\vec{x},\vec{x}>\geq 0,\; \forall\vec{x}\in\mathrm{E},\quad <\vec{x},\vec{x}>=0 \Leftrightarrow \vec{x}=\vec{0}$.

2 Συνεπώς, κάθε ευκλείδειος χώρος Ε αποκτά δομή σταθμισμένου διανυσματικού χώρου η οποία ορίζεται ως εξής :

$$\|\;\|:\mathrm{E}\to\mathbb{R}^{+},\quad \|\vec{x}\| = \sqrt{<\vec{x},\vec{x}>}\,,$$

και πληρούνται οι ακόλουθες συνθήκες :

- $\|\vec{x}\| = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \vec{x}=0,\;\; \vec{x}\in\mathrm{E}$,
- $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\|\vec{x}\|,\;\; \forall\vec{x}\in\mathrm{E}, \forall\lambda\in\mathbb{R}$,
- $\|\vec{x}+\vec{y}\|\leq\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|\;,\;\; \forall\vec{x},\vec{y}\in\mathrm{E}$.

3 Συνεπώς, κάθε ευκλείδειος χώρος Ε αποκτά μετρική δομή η οποία ορίζεται ως εξής :

$$d:\mathrm{E}\times\mathrm{E}\to\mathbb{R}\,,\;\; d(x,y)=\|\vec{x}-\vec{y}\|\,,$$

και πληρούνται οι ακόλουθες συνθήκες :

- $d(x,y)=0 \;\;\Rightarrow\;\; x=y\,,\;\; x,y\in\mathrm{E}$,
- $d(x,y)=d(y,x)\,,\;\; \forall x,y\in\mathrm{E}$,
- $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)\;,\;\; \forall x,y,z\in\mathrm{E}$.

Άσκηση 1. Επαληθεύστε ότι από το εσωτερικό γινόμενο απορρέει πράγματι μια στάθμη και συνακόλουθα μια μετρική, όπως υποδεικνύεται στην προηγούμενη κατασκευή, δηλαδή ότι πράγματι πληρούνται τα αξιώματα των σταθμισμένων χώρων και των μετρικών χώρων. Προηγουμένως, σας προτείνουμε να αποδείξετε την ανισότητα Cauchy-Schwarz: [4]

$$|<\vec{x},\vec{y}>| \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|, \quad \forall \vec{x},\vec{y} \in \mathrm{E} .$$

Ερώτημα. Αν σε ένα πραγματικό διανυσματικό χώρο δοθεί μια μετρική, πώς θα αναγνωρίσουμε αν προέρχεται ή όχι από μια στάθμη και αν δοθεί μια στάθμη πώς θα αναγνωρίσουμε αν προέρχεται ή όχι από ένα εσωτερικό γινόμενο; [5]

- Θεωρούμε μια διγραμμική απεικόνιση στον n–διάστατο πραγματικό διανυσματικό χώρο Ε :

$$B : \mathrm{E}\times\mathrm{E} \to \mathbb{R} .$$

Στη βιβλιογραφία οι διγραμμικές αυτές απεικονίσεις καλούνται διγραμμικές μορφές ορισμένες στο χώρο Ε. Η έκφραση μιας διγραμμικής μορφής σε δεδομένη βάση του χώρου Ε προκύπτει ως εξής :

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i \quad \text{και} \quad \vec{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{e}_j \quad \Rightarrow \quad B(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_i y_j B(\vec{e}_i,\vec{e}_j) .$$

Σε αυτή τη βάση ορίζεται ο πίνακας της διγραμμικής μορφής ως εξής :

$$M(B)_{(e_i)} = \begin{bmatrix} B(e_1,e_1) & B(e_1,e_2) & \cdots & B(e_1,e_n) \\ B(e_2,e_1) & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ B(e_n,e_1) & \cdots & & B(e_n,e_n) \end{bmatrix}$$

και η αριθμητική τιμή που αποδίδεται σε κάθε ζεύγος στοιχείων του Ε υπολογίζεται ως εξής:

$$B(x,y) = {}^{t}X\,M\,Y .$$

Προφανώς, η διγραμμική μορφή είναι συμμετρική αν και μόνο αν ο πίνακάς της εκφρασμένος σε μια βάση είναι συμμετρικός. Ο έλεγχος της συμμετρικότητας μιας διγραμμικής μορφής είναι απλή διαδικασία, αλλά όταν χρειαστεί να ελεγχθεί το κατά πόσο είναι ή όχι θετικά ορισμένη τότε χρειάζεται περισσότερη προσοχή. Σε επόμενο μάθημα θα δώσουμε αλγοριθμικές μεθόδους που επιτρέπουν να αποφανθούμε άμεσα για το αν μια συμμετρική διγραμμική μορφή ορίζει ή όχι εσωτερικό γινόμενο σε ένα πραγματικό διανυσματικό χώρο.

---

[4] **Υπόδειξη.** Αν $x, y \in \mathrm{E}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της γραμμικότητας του εσωτερικού γινομένου καταλήγουμε:

$$< \lambda x + y, \lambda x + y > = \lambda^2 < x,x > + 2\lambda < x,y > + < y,y > .$$

Επειδή $< \lambda x + y, \lambda x + y > \geq 0$, το τριώνυμο αυτό είναι θετικό ή μηδέν για κάθε λ οπότε η διακρίνουσά του είναι αρνητική ή μηδέν:

$$< x,y >^2 - < x,x >< y,y > \leq 0 \quad \text{άρα} \quad < \vec{x},\vec{y} >^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 .$$

Όταν τα θεωρούμενα διανύσματα είναι συγγραμμικά τότε ισχύει η ισότητα στη σχέση Cauchy-Schwarz.

[5] **Απάντηση.** Εύκολα διαπιστώνουμε ότι κάθε μετρική που προέρχεται από μια στάθμη ορισμένη σε έναν πραγματικό διανυσματικό χώρο διατηρείται αναλλοίωτη κατά τις μεταφορές και τις ομοθεσίες:

$$d(x-a, y-a) = d(y,x) ,\ \forall x,y \in \mathrm{E} ,\ \forall a \in \mathrm{E} , \qquad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x,y) ,\ \forall x,y \in \mathrm{E} ,\ \forall \lambda \in \mathbb{R} .$$

Αντίστροφα, κάθε μετρική που είναι ορισμένη σε έναν πραγματικό διανυσματικό χώρο και πληροί αυτές τις συνθήκες προέρχεται από μια στάθμη που ορίζεται στον πραγματικό διανυσματικό χώρο ως εξής:

$$\|\vec{x}\| = d(0,x) ,\ \forall x \in \mathrm{E} .$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι κάθε στάθμη που προέρχεται από ένα εσωτερικό γινόμενο ορισμένο σε έναν πραγματικό διανυσματικό χώρο διαθέτει την ακόλουθη χαρακτηριστική ιδιότητα που καλείται κανόνας του παραλληλογράμμου:

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2 ,\ \ \forall x,y \in \mathrm{E} .$$

Αντίστροφα, κάθε στάθμη ορισμένη σε έναν πραγματικό διανυσματικό χώρο που πληροί τον κανόνα του παραλληλογράμμου προέρχεται από ένα εσωτερικό γινόμενο το οποίο ορίζεται από τον “τύπο πόλωσης” των Fréchet-Von Neumann–Jordan (βλ. βιβλιογραφία).

Άσκηση 2. Ποιες από τις εξής εκφράσεις ορίζουν εσωτερικό γινόμενο στον πραγματικό διανυσματικό χώρο $\mathrm{E}=\mathbb{R}^4$;

$$<x,y>=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4\,, \quad <x,y>=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3\,, \quad <x,y>=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-x_4y_4\,.$$

Άσκηση 3. Δείξτε ότι το σύνολο των διγραμμικών μορφών σε ένα n–διάστατο πραγματικό διανυσματικό χώρο Ε, εφοδιασμένο με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού με πραγματικούς αριθμούς, διαθέτει δομή πραγματικού διανυσματικού χώρου διάστασης n^2 και ότι οι συμμετρικές διγραμμικές μορφές συγκροτούν διανυσματικό υπόχωρο διάστασης $n(n+1)/2$. Εξετάστε αν οι συμμετρικές και θετικά ορισμένες διγραμμικές μορφές συγκροτούν ή όχι διανυσματικό υπόχωρο μέσα σε αυτόν τον διανυσματικό χώρο.

- **Η ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΤΗΤΑ ΣΤΟΥΣ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ**

Σε κάθε ζεύγος μη μηδενικών διανυσμάτων του ευκλείδειου χώρου Ε αποδίδεται η γωνία τους, μεταξύ 0 και π, η οποία ορίζεται ως εξής: [6]

$$\cos\theta=\frac{<\vec{x},\vec{y}>}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}\,.$$

Η συνθήκη ορθογωνιότητας δυο μη μηδενικών διανυσμάτων του ευκλείδειου χώρου Ε εκφράζεται ως εξής :

$$\vec{x}\perp\vec{y} \;\Leftrightarrow\; <\vec{x},\vec{y}>=0$$

και δηλώνει ότι : [7]

$$\|\vec{x}+\vec{y}\| = \|\vec{x}-\vec{y}\|\,.$$

Οι ορθοκανονικές βάσεις του ευκλείδειου χώρου Ε χαρακτηρίζονται ως εξής:

$$<\vec{e}_i,\vec{e}_j>=\delta_{ij} \;\; \text{(σύμβολο Kronecker)},\;\; i,j=1,...,n\,,\;\; (dim\mathrm{E}=n).$$ [8]

Κάθε ορθοκανονική βάση ορίζει ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων στον ευκλείδειο χώρο Ε και έτσι στα σημεία του αποδίδονται αριθμητικές συντεταγμένες διαμέσου των ορθογώνιων προβολών στους άξονες :

$$\pi_i:\mathrm{E}\to\mathbb{R}\,,\;\; \pi_i(x)=x_i\,,\quad i=1,...,n\,.$$

Αν θεωρήσουμε δυο διανύσματα και τα εκφράσουμε σε μια βάση του ευκλείδειου χώρου Ε τότε :

$$\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\vec{e}_i \quad \text{και} \quad \vec{y}=\sum_{j=1}^{n}y_j\vec{e}_j \quad \Rightarrow \quad <\vec{x},\vec{y}>=\sum_{j=1}^{n}x_iy_j<\vec{e}_i,\vec{e}_j>.$$

Στις ορθοκανονικές βάσεις προκύπτει η εξής κανονική έκφραση του εσωτερικού γινομένου :

$$<\vec{x},\vec{y}>=x_1y_1+...+x_ny_n\,.$$

Συνεπώς, στις ορθοκανονικές βάσεις προκύπτει η εξής κανονική έκφραση του μέτρου των διανυσμάτων :

$$\|\vec{x}\|=\left(x_1^2+...+x_{\mathrm{n}}^2\right)^{1/2}$$

και απορρέει η αντίστοιχη έκφραση της απόστασης δυο σημείων του ευκλείδειου χώρου :

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\mathrm{n}}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2}.$$

---

6 Η γωνία αυτή δεν είναι προσανατολισμένη και το συνημίτονο ορίζεται λαμβάνοντας υπόψη την ανισότητα Cauchy-Schwarz.

7 Η διγραμμικότητα μαζί με τη συμμετρικότητα υποδεικνύουν ότι:

$$\|x+y\|^2=<x+y,x+y>=\|x\|^2+\|y\|^2+2<x,y>, \quad \|x-y\|^2=<x-y,x-y>=\|x\|^2+\|y\|^2-2<x,y>,$$

και

$$<x,y>=0 \;\Leftrightarrow\; \|x+y\|=\|x-y\|\,.$$

8 Το σύμβολο Kronecker ορίζεται ως εξής : $i\neq j \Rightarrow \delta_{ij}=1$, $i=j \Rightarrow \delta_{ij}=0$.