ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ακαδημαϊκό έτος 2015-16

ΜΑΘΗΜΑ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Καθηγητής: Σ. Πνευματικός

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5^{ης} ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ

ΠΡΟΒΟΛΙΚΟΙ ΚΑΙ ΜΗΔΕΝΟΔΥΝΑΜΟΙ ΕΝΔΟΜΟΡΦΙΣΜΟΙ

Θεωρούμε ένα n-διάστατο διανυσματικό χώρο E στο σώμα $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και συμβολίζουμε $\mathcal{L}(E)$ το σύνολο των Κ-γραμμικών απεικονίσεων (ενδομορφισμών) του E στον εαυτό του.

Άσκηση 1. Θεωρούμε έναν ενδομορφισμό $f \in \mathcal{L}(E)$ τέτοιον ώστε $f = f^2$.

Ποιες είναι οι ιδιοτιμές και οι ιδιόχωροι αυτών των ενδομορφισμών ; Υπάρχει βάση ιδιοδιανυσμάτων;

Ο πίνακας αυτών των ενδομορφισμών είναι διαγωνιοποιήσιμος;

Δείξτε ότι:

- $Imf = \{x \in E \,/\, f(x) = x\} = Ker(id - f)$ και $Kerf = Im(id - f)$.
- $f = f^2 \Leftrightarrow E = Imf \oplus Kerf$.

Εξετάστε τα προηγούμενα ερωτήματα στην περίπτωση των ενδομορφισμών που στην κανονική βάση εκφράζονται ως εξής:

$$\textbf{(i)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(ii)} \quad \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 7 & -6 & -9 \\ -2 & 6 & -6 \\ -1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Σημείωση. Κάθε ενδομορφισμός $f : E \to E$ που πληροί τη συνθήκη $f = f^2$ καλείται προβολικός ενδομορφισμός.
Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί έχει δοθεί αυτή η ονομασία;

Άσκηση 2. Θεωρούμε έναν ενδομορφισμό $f \in \mathcal{L}(E)$ τέτοιον ώστε $f = f^3$.

- Προσδιορίστε την εικόνα του και τον πυρήνα κάθε τέτοιου ενδομορφισμού.
- Ποιες είναι οι ιδιοτιμές και οι ιδιόχωροι αυτών των ενδομορφισμών ;
- Υπάρχει βάση ιδιοδιανυσμάτων; Ο πίνακας αυτών των ενδομορφισμών είναι διαγωνιοποιήσιμος;
- Δείξτε ότι: $f = f^3 \Leftrightarrow E = E_1 \oplus E_{-1} \oplus Kerf$ όπου

$$E_1 = \{x \in E \,/\, f(x) = x\} \quad \text{και} \quad E_{-1} = \{x \in E \,/\, f(x) = -x\}.$$

- Εξετάστε τα προηγούμενα ερωτήματα στην περίπτωση του ενδομορφισμού που στην κανονική βάση εκφράζεται με τον πίνακα:

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3. Αν $f \in \mathcal{L}(E)$, δείξτε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}^*$ ισχύει:

$$Kerf \subseteq Kerf^2 \subseteq ... \subseteq Kerf^m \quad \textbf{και} \quad Imf \supseteq Imf^2 \supseteq ... \supseteq Imf^m$$

- Ένας ενδομορφισμός $f \in \mathcal{L}(E)$ καλείται μηδενοδύναμος αν υπάρχει $p \in \mathbb{N}^*$ τ.ώ, $f^p = 0$. Ο μικρότερος φυσικός για τον οποίο ισχύει $f^p = 0$ καλείται δείκτης του ενδομορφισμού f ή λέμε ότι ο ενδομορφισμός είναι *p*–μηδενοδύναμος. Αν ένας ενδομορφισμός είναι *p*–μηδενοδύναμος τότε το ίδιο ισχύει για τον πίνακά του εκφρασμένο σε οποιαδήποτε βάση: $M^p = 0$.

Άσκηση 4. Εξετάστε τη μηδενοδυναμία των $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ που στην κανονική βάση εκφράζονται ως εξής:

$$\textbf{(ι)} \begin{bmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(ιι)} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(ιιι)} \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 15 & -9 & 6 \\ 10 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

Σημείωση. Αν ένας πίνακας N είναι μηδενοδύναμος τότε ο πίνακας $I - N$ είναι αντιστρέψιμος:

$$\left(I - N\right)\left(I + N + N^2 + ... + N^{P-1}\right) = I \quad \Rightarrow \quad \left(I - N\right)^{-1} = \left(I + N + N^2 + ... + N^{P-1}\right)$$

Π.χ.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a & a^2 - b^2 & -a^3 + 2ab - c \\ 0 & 1 & -a & a^2 - b \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 5. Διαπιστώστε ότι οι μηδενοδύναμοι ενδομορφισμοί δεν συγκροτούν διανυσματικό υπόχωρο αλλά ορίζουν έναν *κώνο* (μηδενοδναμίας) μέσα στο χώρο $\mathcal{L}(E)$. Διαπιστώστε ότι:

- Τα στοιχεία του *κώνου* μηδενοδυναμίας έχουν μηδενική ορίζουσα.
- Οι ισομορφισμοί βρίσκονται εκτός του *κώνου* μηδενοδυναμίας.
- Τα στοιχεία του *κώνου* μηδενοδυναμίας έχουν μόνο μηδενική ιδιοτιμή.
- Τα στοιχεία του κώνου μηδενοδυναμίας έχουν μηδενικό ίχνος.

Σημείωση. Βεβαιωθείτε ότι έχετε αντιληφθεί το τι σημαίνει ο όρος κώνος μηδενοδυναμίας μέσα στο χώρο $\mathcal{L}(E)$.

Άσκηση 6. Αν ο ενδομορφισμός $f \in \mathcal{L}(E)$ είναι *p*-μηδενοδύναμος, δείξτε ότι :

- Υπάρχει $x \in E$ τέτοιο ώστε $f^{p-1}(x) \neq 0$.

- Τα διανύσματα $x, f(x), ..., f^{p-1}(x)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, οπότε παράγουν ένα *p*-διάστατο διανυσματικό υπόχωρο $C_f(x)$ (κυκλικός υπόχωρος) μέσα στο χώρο E:

$$C_f(x) = < x, f(x), ..., f^{p-1}(x) > .$$

- Δείξτε ότι ο διανυσματικός αυτός υπόχωρος διατηρείται αναλλοίωτος: $f\left(C_f(x)\right) \subseteq C_f(x)$.

- Δείξτε ότι ο περιορισμός του ενδομορφισμού f στον υπόχωρο $C_f(x)$ είναι *p*-μηδενοδύναμος.

- Δείξτε ότι ο πίνακάς του στη βάση $\left\{f^{p-1}(x), ..., f(x), x\right\}$ του $C_f(x)$ εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & & 0 \end{bmatrix}$$

Σημείωση. Η κατασκευή αυτή, των καλούμενων κυκλικών υπόχωρων, θα χρησιμοποιηθεί στο επόμενο μάθημα στο λήμμα Jordan.