ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ακαδημαϊκό έτος 2015-16

ΜΑΘΗΜΑ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Καθηγητής: Σ. Πνευματικός

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 6^{ης} ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ

ΤΟ ΙΔΕΩΔΕΣ ΤΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ ΠΟΥ ΜΗΔΕΝΙΖΟΥΝ ΕΝΑΝ ΕΝΔΟΜΟΡΦΙΣΜΟ

ΘΕΩΡΗΜΑ CAYLEY-HAMILTON

Θεωρούμε ένα *n*-διάστατο διανυσματικό χώρο E στο σώμα $\mathrm{K}=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και το σύνολο $\mathcal{L}(E)$ των Κ-γραμμικών απεικονίσεων (ενδομορφισμών) του E στον εαυτό του.

Θεωρούμε επίσης τον δακτύλιο:

$$\mathrm{K}[\mathrm{X}]=\left\{a_m\mathrm{X}^m+a_{m-1}\mathrm{X}^{m-1}+\ldots+a_1\mathrm{X}+a_0 \,/\, a_0,\ldots,a_m\in\mathrm{K},\, m\in\mathbb{N}\right\}.$$

- Αν $f\in\mathcal{L}(E)$ και $P\in\mathrm{K}[\mathrm{X}]$, ορίζεται ο ενδομορφισμός $P(f):E\to E$:

$$P(f):=a_mf^m+a_{m-1}f^{m-1}+\ldots+a_1f+a_0id\ , \quad (\,f^k=f\circ\ldots\circ f\ : k \text{ φορές}).$$

Σημείωση. Έτσι, σε κάθε δεδομένο ενδομορφισμό $f\in\mathcal{L}(E)$ προσαρτάται ένας μορφισμός δακτυλίων:

$$\Phi_f:\left(\mathrm{K}[\mathrm{X}],+,.\right)\to\left(\mathcal{L}(E),+,\circ\right), \quad \Phi_f(P)=P(f).$$

- Πώς χαρακτηρίζεται ο πυρήνας και η εικόνα αυτού του μορφισμού δακτυλίων;
- Ο πυρήνας και η εικόνα συγκροτούν αντίστοιχα ιδεώδη των δακτυλίων $\mathrm{K}[\mathrm{X}]$ και $\mathcal{L}(E)$;
- Αν $P,Q\in\mathrm{K}[\mathrm{X}]$ δείξτε ότι: $P(f)\circ Q(f)=Q(f)\circ P(f)$, $\forall f\in\mathcal{L}(E)$.

- Λέμε ότι ένα πολυώνυμο $P\in\mathrm{K}[\mathrm{X}]$ μηδενίζει τον ενδομορφισμό $f\in\mathcal{L}(E)$ αν $P(f)=0$.

Άσκηση 1. Διαπιστώστε ότι τα πολυώνυμα που μηδενίζουν κάθε δεδομένο ενδομορφισμό συγκροτούν ένα αντίστοιχο ιδεώδες μέσα στο δακτύλιο $\mathrm{K}[\mathrm{X}]$.

Σημείωση. Μας ενδιαφέρει να γνωρίζουμε το ιδεώδες των πολυωνύμων που μηδενίζουν κάθε δεδομένο ενδομορφισμό και τον γεννήτορα αυτού του ιδεώδους, δηλαδή το πολυώνυμο χαμηλότερου βαθμού που μηδενίζει τον ενδομορφισμό.

- Ο όρος *ελάχιστο πολυώνυμο* ενός ενδομορφισμού $f\in\mathcal{L}(E)$ δηλώνει το χαμηλότερου βαθμού πολυώνυμο $m_f(\mathrm{X})\in\mathrm{K}[\mathrm{X}]$ (με μοναδιαίο συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου) που μηδενίζει αυτόν τον ενδομορφισμό:

$$m_f(f)=0.$$

Άσκηση 2. Διαπιστώστε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο ενός ενδομορφισμού είναι μοναδικό και ότι είναι γεννήτορας του ιδεώδους των πολυωνύμων που τον μηδενίζουν στον δακτύλιο $\mathrm{K}[\mathrm{X}]$.

Σημείωση. Αυτό σημαίνει ότι το ελάχιστο πολυώνυμο ενός ενδομορφισμού διαιρεί κάθε πολυώνυμο που μηδενίζει τον ενδομορφισμό στον δακτύλιο $\mathrm{K}[\mathrm{X}]$:

$$P(f)=0 \;\Rightarrow\; \exists Q\in\mathrm{K}[\mathrm{X}]:\ P(\mathrm{X})=Q(\mathrm{X})\,m_f(\mathrm{X}).$$

Θεώρημα Cayley-Hamilton: *Κάθε ενδομορφισμός μηδενίζεται από το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο:*

$$f \in \mathcal{L}(E) \quad \Rightarrow \quad P_f(f) = 0 .$$

Σημείωση. Συμβολίζουμε P_f το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του ενδομορφισμού $f \in \mathcal{L}(E)$: $P_f(\lambda) = \det(f - \lambda id)$.

Το θεώρημα αυτό δηλώνει δίνει τη δυνατότητα ανάπτυξης ενός αλγοριθμικού προσδιορισμού του ελάχιστου πολυωνύμου, δηλαδή του γεννήτορα του ιδεώδους των πολυωνύμων που μηδενίζουν έναν ενδομορφισμό. Στις ρίζες κάθε πολυωνύμου που μηδενίζει έναν ενδομορφισμό περιλαμβάνονται οι ιδιοτιμές του ενδομορφισμού και οι ρίζες του ελάχιστου πολυωνύμου είναι ακριβώς οι ιδιοτιμές του ενδομορφισμού, δηλαδή συμπίπτουν με τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου αλλά όχι πάντα με την ίδια πολλαπλότητα:
Αν $Sp(f) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\} \subset \mathrm{K}$ με αντίστοιχες πολλαπλότητες $p_1, ..., p_k$ τότε: $p_1 + ... + p_k = n$ και

$$P_f(\mathrm{X}) = (-1)^n (\mathrm{X} - \lambda_1)^{p_1} ... (\mathrm{X} - \lambda_k)^{p_k} , \quad m_f(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - \lambda_1)^{p_1'} ... (\mathrm{X} - \lambda_k)^{p_k'} , \quad 1 \le p_i' \le p_i , \ i = 1, ..., k .$$

Συντάξτε την απόδειξή του θεωρήματος που θα δοθεί στο μάθημα ή εκείνη που θα επιλέξετε από τη βιβλιογραφία.

Άσκηση 3. Υπολογίστε το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο των ενδομορφισμών που ορίζονται στην κανονική βάση με τους αντίστοιχους πίνακες και επαληθεύστε το προηγούμενο θεώρημα:

$$\textbf{(i)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(ii)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(iii)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{(i')} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(ii')} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(iii')} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Λήμμα της διάσπασης του πυρήνα. Αν $P(\mathrm{X}) = P_1(\mathrm{X}) P_2(\mathrm{X}) ... P_k(\mathrm{X})$ όπου τα πολυώνυμα που υπεισέρχονται στην παραγοντοποίηση είναι ανά δυο πρώτα μεταξύ τους και $f \in \mathcal{L}(E)$ τότε:

$$KerP(f) = KerP_1(f) \oplus KerP_2(f) \oplus ... \oplus KerP_k(f)$$

$$P(f) = 0 \quad \Rightarrow \quad E = KerP_1(f) \oplus KerP_2(f) \oplus ... \oplus KerP_k(f)$$

Σημείωση. Συντάξτε την απόδειξη του λήμματος που θα δοθεί στο μάθημα ή εκείνη που θα επιλέξετε από τη βιβλιογραφία.

Προσέξτε τη διάσπαση ολόκληρου του χώρου σε πυρήνες όταν πρόκειται για τα πολυώνυμα που μηδενίζουν τον ενδομορφισμό, όπως π.χ. το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμό του. Κάποιοι από αυτούς τους πυρήνες ενδεχομένως να είναι μηδενικοί εκτός και αν πρόκειται για το ελάχιστο πολυώνυμο. Οι συλλογισμοί μας θα ξεκινούν από την διάσπαση ολόκληρου του χώρου σε χαρακτηριστικούς υπόχωρους (γενικευμένους ιδιόχωρους):

$$[P_f(\mathrm{X}) = (-1)^n (\mathrm{X} - \lambda_1)^{p_1} ... (\mathrm{X} - \lambda_k)^{p_k} , \quad p_1 + ... + p_k = n, \quad N_{\lambda_i} = Ker(f - \lambda_i id)^{p_i} , \ i = 1, ..., k]$$

Αν $Sp(f) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\} \subset \mathrm{K}$ με πολλαπλότητες $p_1, ..., p_k$ τότε: $E = KerN_1 \oplus ... \oplus KerN_k$.

Άσκηση 4. Εφαρμόστε το προηγούμενο λήμμα στους ενδομορφισμούς που πληρούν τις συνθήκες:

$$\text{(i)} \ f^2 = f , \quad \text{(ii)} \ f^3 = f , \quad \text{(iii)} \ f^2 = id .$$

[: (i) $P(\mathrm{X}) = \mathrm{X}(\mathrm{X} - 1)$, (ii) $P(\mathrm{X}) = \mathrm{X}(\mathrm{X} - 1)(\mathrm{X} + 1)$, (iii) $P(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - 1)(\mathrm{X} + 1)$]

[(i) $E = Kerf \oplus Ker(f - id)$, (ii) $E = Kerf \oplus Ker(f - id) \oplus Ker(f + id)$, (iii) $E = Ker(f - id) \oplus Ker(f + id)$].

- Σε κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις κάντε τη σχετική διερεύνηση εξετάζοντας το ενδεχόμενο μηδενισμού κάποιου πυρήνα και αφού υπολογίσετε το αντίστοιχο ελάχιστο πολυώνυμο δώστε τη γεωμετρική ερμηνεία αυτών των ενδομορφισμών.

- Εξετάστε την περίπτωση των ενδομορφισμών που στην κανονική βάση εκφράζονται ως εξής:

$$\text{(i)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(ii)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(iii)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$