ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ακαδημαϊκό έτος 2015-16

ΜΑΘΗΜΑ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Καθηγητής: Σ. Πνευματικός

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7^{ης} ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ

ΟΙ ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ JORDAN

Θεωρούμε ένα *n*-διάστατο διανυσματικό χώρο E στο σώμα $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και συμβολίζουμε $\mathcal{L}(E)$ το σύνολο των K-γραμμικών απεικονίσεων (ενδομορφισμών) του *E* στον εαυτό του.

Σημείωση. Αν $\mathcal{L}(E)$ και $Sp(f) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\} \subset \mathrm{K}$ με αντίστοιχες πολλαπλότητες $p_1, ..., p_k$, τότε:

$$P_f(\mathrm{X}) = (-1)^n (\mathrm{X} - \lambda_1)^{p_1} ... (\mathrm{X} - \lambda_k)^{p_k}, \quad m_f(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - \lambda_1)^{p'_1} ... (\mathrm{X} - \lambda_k)^{p'_k}, \quad 1 \le p'_i \le p_i, \; i = 1, ..., k.$$

Οι ρίζες του ελάχιστου πολυωνύμου είναι ακριβώς οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, δηλαδή οι ιδιοτιμές του ενδομορφισμού, όμως όχι πάντα με την ίδια πολλαπλότητα. Ο ενδομορφισμός διατηρεί αναλλοίωτους τους ιδιόχωρους και τους χαρακτηριστικούς χώρους κάθε ιδιοτιμής και κάθε ιδιόχωρος εγκλείεται στον αντίστοιχο χαρακτηριστικό χώρο χωρίς όμως να ταυτίζεται οπωσδήποτε με αυτόν:

$$E_{\lambda_i} = Ker(f - \lambda_i id), \; N_{\lambda_i} = Ker(f - \lambda_i id)^{p_i}, \quad f(E_{\lambda_i}) \subseteq E_{\lambda_i}, \; f(N_{\lambda_i}) \subseteq N_{\lambda_i}, \; E_{\lambda_i} \subseteq N_{\lambda_i}, \quad i = 1, ..., k.$$

Από το λήμμα διάσπασης του πυρήνα προκύπτει ότι ο χώρος *E* διασπάται σε ευθύ άθροισμα των χαρακτηριστικών χώρων:

$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} N_{\lambda_i}.$$

Η διάσπαση αυτή δεν ισχύει για τους ιδιόχωρους εκτός αν το ελάχιστο πολυώνυμο έχει όλες τις ρίζες του απλές στο K :

$$m_f(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - \lambda_1)...(\mathrm{X} - \lambda_k) \quad \Rightarrow \quad E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}.$$

Η διάσπαση σε ιδιόχωρους σημαίνει (και αντίστροφα) ότι υπάρχει βάση ιδιοδιανυσμάτων στο χώρο *E* και τότε, στη βάση αυτή, ο πίνακας του ενδομορφισμού είναι διαγώνιος (και αντίστροφα). Αν η διαγωνιοποίηση δεν είναι εφικτή τότε τίθεται το ερώτημα της ύπαρξης και κατασκευής μιας βάσης στην οποία ο πίνακας του ενδομορφισμού αποκτά τριγωνική έκφραση.

Άσκηση 1. Διαπιστώστε ότι ο πίνακας κάθε ενδομορφισμού $f \in \mathcal{L}(E)$ μπορεί σε κατάλληλη βάση να αποκτήσει τριγωνική έκφραση στο $\mathbb{C}$ αλλά όχι πάντα στο $\mathbb{R}$:

$$\mathrm{M}(f)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Σημείωση. Στην διαγώνιο του τριγωνικού πίνακα εμφανίζονται οι ιδιοτιμές, δηλαδή οι *n* ρίζες που το χαρακτηριστικό πολυώνυμο (Θεώρημα D'Alembert). Η τριγωνοποίηση είναι εφικτή στο πραγματικό πλαίσιο μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές.

Η κατασκευή της βάσης στην οποία τριγωνοποιείται ο πίνακας γίνεται επαγωγικά στη διάσταση του χώρου *E*. Συντάξτε την απόδειξη που θα δοθεί στο μάθημα ή εκείνη που θα επιλέξετε από τη βιβλιογραφία και τριγωνοποιείστε κάποιους πίνακες της επιλογής σας στο μιγαδικό ή εφόσον είναι εφικτό στο πραγματικό πλαίσιο.

- Αν $f \in \mathcal{L}(E)$ με ιδιοτιμές $\lambda_1, ..., \lambda_n$, διακριτές ή όχι, διαπιστώστε ότι:

$$Tr(f) = \lambda_1 + ... + \lambda_n \quad \text{και} \quad det(f) = \lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_n.$$

Λήμμα αναλλοίωτων υπόχωρων. Αν $f \in \mathcal{L}(E)$ και $E = E_1 \oplus ... \oplus E_k$ με $f(E_i) \subseteq E_i$, $i = 1,...,k$, τότε οι υπόχωροι E_i διαθέτουν αντίστοιχες βάσεις $\mathcal{B}_i$, $i = 1,...,k$, τέτοιες ώστε στη βάση $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_1 ..., \mathcal{B}_k\}$ του E ο πίνακας του ενδομορφισμού εκφράζεται ως εξής:

$$\mathrm{M}(f)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \boxed{M_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{M_k} \end{bmatrix} \qquad M_i = \mathrm{M}(f \mid E_i)_{\mathcal{B}_i}.$$

Σημείωση. Η απόδειξη δεν είναι δύσκολη και βασίζεται στο αναλλοίωτο των υπόχωρων που υπεισέρχονται στη διάσπαση του *E*.

- Διαπιστώστε ότι η συνθήκη $f(E_i) \subseteq E_i$ είναι αναγκαία και ικανή για να οριστεί η απεικόνιση $f \mid E_i : E_i \to E_i$.
- Με τον τρόπο αυτό ορίζεται η προβολή $pr_i : E \to E_i$, $i = 1,...,k$, παράλληλα προς τον υπόχωρο $\bigoplus_{j \neq i} E_j, j = 1,...,k$.

Θεώρημα. Αν $f \in \mathcal{L}(E)$ και $Sp(f) = \{\lambda_1,...,\lambda_k\} \subset \mathrm{K}$ με αντίστοιχες πολλαπλότητες $p_1,...,p_k$, τότε οι χαρακτηριστικοί χώροι N_{λ_i} διαθέτουν αντίστοιχες βάσεις $\mathcal{B}_i$ τέτοιες ώστε στη βάση $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_1 ..., \mathcal{B}_k\}$ του E ο πίνακας του ενδομορφισμού εκφράζεται ως εξής:

$$\mathrm{M}(f)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{matrix}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_k & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{matrix}} \end{bmatrix} \qquad M_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{bmatrix} = \mathrm{M}(f \mid N_{\lambda_i})_{\mathcal{B}_i}.$$

Σημείωση. Η απόδειξη δεν είναι δύσκολη και προκύπτει από το προηγούμενο λήμμα θέτοντας στην αποσύνθεση τους χαρακτηριστικούς χώρους του ενδομορφισμού οι οποίοι όπως ξέρετε διατηρούνται αναλλοίωτοι. Για κάθε $i = 1,...,k$ ισχύει:

$$N_{\lambda_i} = Ker(f - \lambda_i id)^{p_i} \Rightarrow (f - \lambda_i id)^{p_i}(x) = 0,\ \forall x \in N_{\lambda_i} \Rightarrow (\mathrm{X} - \lambda_i)^{p_i}(f_i) = 0,\ f_i = f \mid N_{\lambda_i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{f_i}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - \lambda_i)^{p_i'},\ 1 \le p_i' \le p_i \Rightarrow P_{f_i}(\mathrm{X}) = (-1)^{p_i''}(\mathrm{X} - \lambda_i)^{p_i''},\ p_i'' \ge p_i'.$$

Άρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του περιορισμού $f_i = f \mid N_{\lambda_i}$ έχει τις ρίζες του στο K – μια ρίζα λ_i πολλαπλότητας p_i'' – οπότε ο πίνακάς του M_i είναι διαγωνιοποιήσιμος στο K και στη διαγώνιο εμφανίζεται p_i'' φορές η ιδιοτιμή λ_i. Αρκεί πλέον να διαπιστώσετε ότι $p_i'' = p_i$ και αυτό προκύπτει με έναν απλό υπολογισμό:

$$P_f(\mathrm{X}) = det(M_1 - \mathrm{X}I) \cdot ... \cdot det(M_k - \mathrm{X}I) = P_{f_1}(\mathrm{X}) \cdot ... \cdot P_{f_k}(\mathrm{X}) = (-1)^n (\mathrm{X} - \lambda_i)^{p_1''} \cdot ... \cdot (\mathrm{X} - \lambda_k)^{p_k''}$$

αφού λάβετε υπόψη σας την έκφραση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του ενδομορφισμού f :

$$P_f(\mathrm{X}) = (-1)^n (\mathrm{X} - \lambda_i)^{p_1} \cdot ... \cdot (\mathrm{X} - \lambda_k)^{p_k}.$$

Προφανώς, το πλήθος των blocs που υπεισέρχονται στην έκφραση του τριγωνικού πίνακα που υποδεικνύει το θεώρημα είναι ίδιο με εκείνο των χαρακτηριστικών χώρων, δηλαδή με το πλήθος των διαφορετικών ιδιοτιμών του ενδομορφισμού και το μέγεθος κάθε bloc είναι ίδιο με τη διάσταση του αντίστοιχου χαρακτηριστικού χώρου. Στη διαγώνιο του πίνακα εμφανίζονται οι ιδιοτιμές, μιγαδικές ή πραγματικές, του ενδομορφισμού με τις αντίστοιχες πολλαπλότητές τους. Απομένει να εξοικειωθείτε με τη διαδικασία κατασκευής της κατάλληλης βάσης κάθε χαρακτηριστικού χώρου ώστε να συγκροτηθεί η βάση του *E* στην οποία ισχύει η τριγωνική έκφραση.

Άσκηση 2. Εφαρμόστε το θεώρημα στον ενδομορφισμό που στην κανονική βάση ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{M}(f)_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Υπόδειξη. Χαρακτηριστικό πολυώνυμο : $P_f(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2(\mathrm{X}-1)^2 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0,\ \nu(\lambda_1) = \nu(\lambda_2) = 2 \Rightarrow ...$

Το θεώρημα υποδεικνύει την ύπαρξη βάσης $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ του $\mathbb{R}^4$ στην οποία ο πίνακας του ενδομορφισμού εκφράζεται ως εξής:

$$\mathrm{M}(f)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{\begin{matrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

Ο προσδιορισμός αυτής της βάσης και ο υπολογισμός των σταθερών a και b είναι πλέον εύκολη διαδικασία:

$$\begin{cases} f(v_1) = v_1 \\ f(v_2) = av_1 + v_2 \\ f(v_3) = 0 \\ f(v_4) = bv_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M\,v_1 = v_1 \\ (M-I)v_2 = av_1 \\ M\,v_3 = 0 \\ M\,v_4 = bv_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = {}^t[0,0,1,1] \\ v_2 = {}^t[1,0,0,0] \\ v_3 = {}^t[1,1,0,0] \\ v_4 = {}^t[0,1,1,0] \end{cases} \Rightarrow \mathrm{M}(f)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

- Παρατηρείστε ότι οι χαρακτηριστικοί χώροι είναι: $N_{\lambda=1} = \langle v_1, v_2 \rangle$, $N_{\lambda=0} = \langle v_3, v_4 \rangle$ και $\mathbb{R}^4 = N_{\lambda=1} \oplus N_{\lambda=0}$.
- Γιατί ο πίνακας αυτού του ενδομορφισμού δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος; Ποιοι είναι οι ιδιόχωροι και το ελάχιστο πολυώνυμο;
- Πώς θα μπορούσατε να αξιοποιήσετε αυτό το θεώρημα για τον υπολογισμό της m–οστής δύναμης του πίνακα $\mathrm{M}(f)_{\mathcal{E}}$;

Υπόδειξη. Σε ένα γενικό πλαίσιο, χρησιμοποιείστε την αλλαγή βάσης $\mathrm{M}(f)_{\mathcal{B}} = P^{-1}\mathrm{M}(f)_{\mathcal{E}}P$ και δείξτε ότι:

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{matrix}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_k & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{matrix}} \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{matrix}}^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_k & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{matrix}}^m \end{bmatrix}$$

Αν δεν καταφέρατε να φτάσετε στο τελικό συμπέρασμα της συγκεκριμένης ερώτησης παρατηρείστε ότι:

$$M_i = \mathrm{M}(f \mid N_i)_{\mathcal{B}_i} = \begin{bmatrix} \lambda_i & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} \quad : \quad M_i = \lambda_i I + J\,.$$

Για τον υπολογισμό του $M_i^m = \left(\lambda_i I + J\right)^m$, θα χρειαστείτε τον τύπο του διωνύμου:

$$\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathcal{M}(n,n)\,,\ \mathrm{AB} = \mathrm{BA} \Rightarrow \left(\mathrm{A}+\mathrm{B}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \mathrm{A}^k \mathrm{B}^{n-k}\ .$$

Για την ολοκλήρωση του υπολογισμού παρατηρείστε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του J είναι $P_J(\mathrm{X}) = (-1)^n \mathrm{X}^n$ και το ελάχιστο πολυώνυμο $m_J(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^m$ όπου $m \le n$, και επειδή $m_J(J) = 0$ θα ισχύει $J^m = 0$, κλπ

Σημείωση. Η κατασκευή της βάσης στην οποία ο πίνακας ενός ενδομορφισμού αποκτά την τριγωνική έκφραση που υποδεικνύει το θεώρημα είναι γενικά επαρκής για τις εφαρμογές. Εντούτοις, μια τελευταία αναγωγή μπορεί να επιτευχθεί ώστε ο πίνακας να αποκτήσει την απλούστερη δυνατή έκφραση στην οποία υπεισέρχονται blocs Jordan, δηλαδή τετραγωνικοί πίνακες της μορφής:

$$J(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & & \lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & & 0 \end{bmatrix} = \lambda \mathbb{I} + J(0)\,, \quad \lambda \in \mathrm{K}\,.$$

- Πώς εκφράζεται ο ενδομορφισμός $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ που ο πίνακάς του στην κανονική βάση είναι τύπου Jordan;
- Ποιος είναι ο πυρήνας, η εικόνα, το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο αυτού του ενδομορφισμού;
- Ποιος είναι ο ιδιόχωρος και ο χαρακτηριστικός χώρος της ιδιοτιμής αυτού του ενδομορφισμού;
- Παρατηρείστε ότι ο πίνακας $J(0)$ είναι μηδενοδύναμος, δηλαδή υπάρχει $\nu \in \mathbb{N}^* : J(0)^\nu = 0$.

Υπόδειξη. $P_{J(\lambda)}(\mathrm{X}) = (-1)^n(\mathrm{X}-\lambda)^n$, $m_{J(\lambda)}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-\lambda)^n$, $\dim E_\lambda = 1$.

Λήμμα Jordan. Αν $f \in \mathcal{L}(E)$ με $P_f(\mathrm{X}) = (-1)^n(\mathrm{X}-\lambda)^n$, $m_f(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-\lambda)^m$, $\dim E_\lambda = \ell$, υπάρχει βάση $\mathcal{B}$ του E στην οποία ο πίνακάς του συγκροτείται από ℓ υποπίνακες τύπου Jordan ως εξής:

$$\mathrm{M}(f)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \boxed{J_1(\lambda)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_\ell(\lambda)} \end{bmatrix} \quad \text{όπου } J_i(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & & \lambda \end{bmatrix}, \quad i = 1,\dots,\ell .$$

Σημείωση. Ο ενδομορφισμός αυτός προφανώς έχει μια μόνο ιδιοτιμή $\lambda \in \mathrm{K}$ πολλαπλότητας n, οπότε υπάρχει βάση στην οποία ο πίνακάς του είναι τριγωνικός με επαναλαμβανόμενη αυτή την ιδιοτιμή στη διαγώνιό του που επιδέχεται την ακόλουθη αποσύνθεση:

$$\mathrm{M}(f)_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

Συμβολίζουμε αυτή την αποσύνθεση $A = \lambda\mathbb{I} + N$ ή αν προτιμάτε $f = \lambda id + u$. Ο ενδομορφισμός $u \in \mathcal{L}(E)$ προφανώς είναι μηδενοδύναμος, δηλαδή υπάρχει $p \in \mathbb{N}^* : u^p = 0$. Επειδή ο πίνακας $\lambda\mathbb{I}$ του λid δεν επηρεάζεται από την επιλογή της βάσης, αρκεί για την απόδειξη του λήμματος να επικεντρωθούμε στους μηδενοδύναμους ενδομορφισμούς και να προσθέσουμε το $\lambda\mathbb{I}$.
Η σημαντική ιδιότητα κάθε μηδενοδύναμου ενδομορφισμού $u \in \mathcal{L}(E)$ είναι η διάσπαση του χώρου Ε σε ευθύ άθροισμα αναλλοίωτων υπόχωρων και ότι ο περιορισμός του σε κάθε τέτοιον αναλλοίωτο υπόχωρο είναι κυκλικός ενδομορφισμός.

Σχόλιο. Στην περίπτωση του λήμματος θα διαπιστώσουμε ότι η διάσταση του ιδιόχωρου της μοναδικής ιδιοτιμής του θεωρούμενου ενδομορφισμού υποδεικνύει το πλήθος των blocs Jordan που θα υπεισέλθουν στον τελικό του πίνακα και αυτό οφείλεται στο ότι κάθε bloc Jordan έχει μοναδική ιδιοτιμή και μονοδιάστατο ιδιόχωρο. Το μέγεθος του μεγαλύτερου bloc Jordan μέσα στον τελικό πίνακα του ενδομορφισμού δηλώνεται από τον βαθμό m του ελάχιστου πολυωνύμου. Αυτό γίνεται αντιληπτό στην απόδειξη του λήμματος.

Παράδειγμα. Έστω $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5)$ με $P_f(\mathrm{X}) = -(\mathrm{X}-\lambda)^5$ και $m_f(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-\lambda)^3$.

Αν $\dim E_\lambda = 3$ ή αν $\dim E_\lambda = 2$ τότε υπάρχει βάση $\mathcal{B}$ του E στην οποία ο πίνακας του ενδομορφισμού θα εκφραστεί αντίστοιχα:

$$\mathrm{M}(f)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \lambda & 1 \\ \mathbf{0} & & \lambda \end{matrix}} & & \mathbf{0} \\ & \boxed{\lambda} & \\ \mathbf{0} & & \boxed{\lambda} \end{bmatrix} \qquad \mathrm{M}(f)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \lambda & 1 \\ \mathbf{0} & & \lambda \end{matrix}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

- Εξετάστε αν σε αυτόν τον ενδομορφισμό θα μπορούσε να εμφανιστεί η περίπτωση $\dim E_\lambda = 1$ ή $\dim E_\lambda = 4$ ή $\dim E_\lambda = 5$.

- **Σχόλιο για τους μηδενοδύναμους ενδομορφισμούς.** Αν $f \in \mathcal{L}(E)$ είναι m-μηδενοδύναμος ενδομορφισμός τότε:
  - Το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμό του είναι αντίστοιχα $P_f(\mathrm{X}) = (-1)^n \mathrm{X}^n$ και $m_f(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^m$.
  - Υπάρχει $x \in E$ τέτοιο ώστε $f^{v-1}(x) \neq 0$ και τα διανύσματα $x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
  - Ο ενδομορφισμός αφήνει αναλλοίωτο τον p-διάστατο διανυσματικό υπόχωρο $C_f(x) = \langle x, f(x), \dots, f^{p-1}(x) \rangle \subset E$.
  - Ο περιορισμός του ενδομορφισμού στον υπόχωρο $C_f(x)$ είναι p-μηδενοδύναμος.
  - Ο περιορισμός αυτός εκφράζεται στη βάση $\mathcal{B} = \{f^{p-1}(x), \dots, f(x), x\}$ με τον $p \times p$ πίνακα:

$$\mathrm{M}(f)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & & 0 \end{bmatrix}$$

Σημείωση. Στην περίπτωση $m = n$ συγκροτείται η αντίστοιχη κυκλική βάση $\mathcal{B} = \{f^{n-1}(x), \dots, f(x), x\}$ του χώρου E.

- Αποδείξτε τις προαναφερόμενες ιδιότητες των μηδενοδύναμων ενδομορφισμών και με τη συμβολή της βιβλιογραφίας επιχειρείστε να ολοκληρώσετε την απόδειξη του λήμματος Jordan.

Άσκηση 3. Προσδιορίστε τη μορφή Jordan του ενδομορφισμού $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ που στην κανονική βάση εκφράζεται με τον πίνακα:

$$\mathrm{M}(f)_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathrm{A}$$

Υπόδειξη. Χαρακτηριστικό πολυώνυμο : $P_f(\mathrm{X}) = -(\mathrm{X}-1)^3 \Rightarrow \lambda = 1,\ \nu(\lambda) = 3 \Rightarrow ...$ (περίπτωση λήμματος Jordan).

Ιδιόχωρος $E_\lambda = Ker(f - \lambda id) = <(1,0,1)> \Rightarrow \dim E_\lambda = 1 \Rightarrow$ ένα bloc Jordan.

Χαρακτηριστικός χώρος $N_\lambda = Ker(f-\lambda id)^3 = \mathbb{R}^3$ (Cayley-Hamilton: $P_f(f) = 0 \Rightarrow (f-\lambda id)^3 = 0 \Rightarrow N_\lambda = \mathbb{R}^3$).

Ελάχιστο πολυώνυμο : $m_f(\mathrm{X}) = ; ...$

Λήμμα Jordan $\Rightarrow$ υπάρχει βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{R}^3$ στην οποία ο πίνακας του ενδομορφισμού εκφράζεται ως εξής:

$$\mathrm{M}(f)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{B}$$

Πώς κατασκευάζεται αυτή η βάση $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$; Αναζητούμε αυτά τα διανύσματα έτσι ώστε: $\mathrm{A}v_1 = v_1,\ \mathrm{A}v_2 = v_1 + v_2,\ \mathrm{A}v_3 = v_2 + v_3$. Συνεπώς, το διάνυσμα v_1 ανήκει στον ιδιόχωρο $E_\lambda = <(1,0,1)>$, δηλαδή στη διανυσματική ευθεία που στο ευκλείδειο σύστημα συντεταγμένων ορίζεται από τις εξισώσεις $y = 0, x = z$. Το διάνυσμα $v_2 = (x,y,z)$ ορίζεται από τις εξισώσεις $x - y = 1 + x$, $x - z = y$, $-x + 2z = 1 + z$, δηλαδή από τις εξισώσεις $y = -1$, $x - z = -1$. Επιλέγουμε λοιπόν $v_1 = (1,0,1)$ και $v_2 = (-1,-1,0)$.
Το διάνυσμα $v_3 = (x,y,z)$ ορίζεται από τις εξισώσεις $x - y = x - 1$, $x - z = y - 1$, $-x + 2z = z$, δηλαδή από τις εξισώσεις $y = 1$, $x = z$ και επιλέγουμε $v_3 = (0,1,0)$. Καθορίζεται έτσι ο ακόλουθος πίνακας μετάβασης P που είναι αντιστρέψιμος και πληροί τη συνθήκη $\mathrm{A} = P\mathrm{B}P^{-1} \Leftrightarrow \mathrm{B} = P^{-1}\mathrm{A}P$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Εφαρμογή. Υπολογίστε τις λύσεις του συστήματος των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων:

$$\frac{dx}{dt} = x - y, \quad \frac{dy}{dt} = x - z, \quad \frac{dz}{dt} = -x + 2z$$

Θεώρημα Jordan. Αν $f \in \mathcal{L}(E)$ με ιδιοτιμές $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathrm{K}$ αντίστοιχης πολλαπλότητας $p_1, ..., p_k$:

$$P_f(\mathrm{X}) = (-1)^n (\mathrm{X} - \lambda_1)^{p_1} \cdot ... \cdot (\mathrm{X} - \lambda_k)^{p_k}, \quad (\lambda_i \neq \lambda_j,\ p_1 + ... + p_k = n),$$

τότε υπάρχει βάση $\mathcal{B}$ του E στην οποία ο πίνακας του ενδομορφισμού f εκφράζεται ως εξής:

$$\mathrm{M}(f)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \boxed{\overline{J}(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\overline{J}(\lambda_k)} \end{bmatrix}$$

όπου οι πίνακες $\overline{J}(\lambda_1), ..., \overline{J}(\lambda_k)$ έχουν αντίστοιχες διαστάσεις $p_1, ..., p_k$ και δίνονται από το λήμμα Jordan:

$$\overline{J}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \boxed{J_1(\lambda_i)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{\ell_i}(\lambda_i)} \end{bmatrix}$$

Σημείωση. Η απόδειξη του θεωρήματος βασίζεται στη διάσπαση του χώρου *E* σε ευθύ άθροισμα των χαρακτηριστικών χώρων και στην απευθείας εφαρμογή για κάθε χαρακτηριστικό χώρο του λήμματος Jordan.

Άσκηση 4. Προσδιορίστε τη μορφή Jordan του ενδομορφισμού $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ που στην κανονική βάση εκφράζεται με τον πίνακα:

$$\mathrm{M}(f)_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \mathrm{A}$$

Υπόδειξη. $P_f(\mathrm{X}) = -(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}-2)^2 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2,\ \nu(\lambda_1) = 1, \nu(\lambda_2) = 2 \Rightarrow$ ... (εφαρμογή θεωρήματος Jordan).

Ιδιόχωροι: $E_{\lambda_1} = Ker(f - \lambda_1 id) = <(1,0,-1)> \Rightarrow \dim E_{\lambda_1} = 1$, $E_{\lambda_2} = Ker(f - \lambda_2 id) = <(2,1,-1)> \Rightarrow \dim E_{\lambda_2} = 1$.

Ελάχιστο πολυώνυμο: $m_f(\mathrm{X}) = -(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}-2)^2 \Rightarrow$ ...

Χαρακτηριστικοί χώροι: $N_{\lambda_1} = Ker(f - \lambda_1 id) = E_{\lambda_1}$, $N_{\lambda_2} = Ker(f - \lambda_2 id)^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2z = 0\}$.

Θεώρημα Jordan $\Rightarrow$ υπάρχει βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{R}^3$ στην οποία ο πίνακας του ενδομορφισμού εκφράζεται ως εξής:

$$\mathrm{M}(f)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathrm{B}$$

Για την κατασκευή της βάσης $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ αναζητούμε τα διανύσματα έτσι ώστε: $\mathrm{A}v_1 = -v_1$, $\mathrm{A}v_2 = 2v_2$, $\mathrm{A}v_3 = v_2 + 2v_3$.

Τα ιδιοδιανύσματα $v_1 = (1,0,-1)$ και $v_2 = (2,1,-1)$ ανταποκρίνονται και συμπληρώνονται με το διάνυσμα $v_3 = (x,y,z) \in N_{\lambda_2}$ που πληροί τη συνθήκη $\mathrm{A}v_3 = v_2 + 2v_3$, δηλαδή την εξίσωση $y + z = 1$ και επιλέγουμε $v_3 = (0,1,0)$. Καθορίζεται έτσι ο ακόλουθος πίνακας μετάβασης P που είναι αντιστρέψιμος και πληροί τη συνθήκη $\mathrm{A} = P\mathrm{B}P^{-1} \Leftrightarrow \mathrm{B} = P^{-1}\mathrm{A}P$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Εφαρμογή. Υπολογίστε τις λύσεις του συστήματος των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων:

$$\frac{dx}{dt} = 3x + 2y + 4z, \quad \frac{dy}{dt} = -x + 3y - z, \quad \frac{dz}{dt} = -2x - y - 3z$$

Άσκηση 5. Προσδιορίστε τη μορφή Jordan του ενδομορφισμού $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ που στην κανονική βάση εκφράζεται με τον πίνακα:

$$\mathrm{M}(f)_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \mathrm{A}$$

Εφαρμογή. Υπολογίστε τις λύσεις του συστήματος των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων:

$$\frac{dx}{dt} = 3x + y - 2z, \quad \frac{dy}{dt} = -x + 5z, \quad \frac{dz}{dt} = -x - y + 4z$$

Απάντηση. $\mathrm{M}(f)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ....

Άσκηση 6. Θεωρούμε έναν ενδομορφισμό $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ του οποίου ο πίνακας στην κανονική βάση είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -4-\alpha & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ προσδιορίστε την αντίστοιχη κανονική μορφή Jordan.
Εφαρμογή: Υπολογίστε τις λύσεις του συστήματος των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων:

$$\dot{\mathrm{X}}(t) = \mathrm{A}(\alpha)\mathrm{X}(t)$$

Υπόδειξη. $P_f(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-1)^4 \Rightarrow \lambda = 1,\ \nu(\lambda) = 4 \Rightarrow$ ... (περίπτωση λήμματος Jordan), $m_f(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-1)^2 \Rightarrow$ ...

$$E_\lambda = Ker(f - \lambda id) = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 / \alpha y = 0,\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0\} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \dim E_\lambda = 3 \text{ αν } \alpha = 0 \Rightarrow 3\,\textit{blocs jordan} \\ \dim E_\lambda = 2 \text{ αν } \alpha \neq 0 \Rightarrow 2\,\textit{blocs jordan} \end{array} \right.$$

$$\alpha = 0 \Rightarrow J = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & & \mathbf{0} \\ & \boxed{1} & \\ \mathbf{0} & & \boxed{1} \end{bmatrix} \qquad J = P^{-1}AP, \ P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha \neq 0 \Rightarrow J = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \end{bmatrix} \qquad J = P^{-1}AP, \ P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -2/\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1/\alpha \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 7. Προσδιορίστε τη μορφή Jordan των ενδομορφισμών που στην κανονική βάση εκφράζονται αντίστοιχα με τους πίνακες:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 3 & 3 \\ -2 & -6 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 8. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $E = \{ax^2 + bx + c \,/\, a,b,c \in \mathrm{K}\}$ και τον ενδομορφισμό:

$$f : E \to E, \quad f(P) = -P - P' .$$

Προσδιορίστε τη βάση Jordan και τον πίνακα αυτού του ενδομορφισμού σε αυτή τη βάση του E.

Απάντηση. $\mathrm{M}(f)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ....

Άσκηση 9. Ποιες είναι οι ενδεχόμενες κανονικές μορφές Jordan ενός ενδομορφισμού $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^6)$ για τον οποίο γνωρίζουμε μόνο το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο:

$$P_f(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-1)^4(\mathrm{X}-2)^2 , \ \ m_f(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-1)^2(\mathrm{X}-2) .$$

Απάντηση.

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & & & & \mathbf{0} \\ & \boxed{1} & & & \\ & & \boxed{1} & & \\ & & & \boxed{2} & \\ \mathbf{0} & & & & \boxed{2} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & & & \mathbf{0} \\ & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & & \\ & & \boxed{2} & \\ \mathbf{0} & & & \boxed{2} \end{bmatrix}$$