ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ακαδημαϊκό έτος 2015-16

ΜΑΘΗΜΑ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Καθηγητής: Σ. Πνευματικός

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 8ης ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

Θεωρούμε έναν πραγματικό διανυσματικό χώρο Ε διάστασης n.

- Αν $s : \mathrm{E}\times\mathrm{E}\to\mathbb{R}$ είναι μια διγραμμική συμμετρική μορφή στο Ε, διαπιστώστε ότι ορίζεται μια τετραγωνική μορφή στο Ε ως εξής:

$$q:\mathrm{E}\to\mathbb{R},\quad q(x)=s(x,x),\ \forall x\in\mathrm{E}.$$

- Αν $q:\mathrm{E}\to\mathbb{R}$ είναι μια τετραγωνική μορφή στο Ε, διαπιστώστε ότι ορίζεται μια διγραμμική συμμετρική μορφή στο Ε ως εξής:

$$s:\mathrm{E}\times\mathrm{E}\to\mathbb{R},\quad s(x,y)=\frac{1}{2}[q(x+y)-q(x)-q(y)],\ \forall x,y\in\mathrm{E}.$$

- Διαπιστώσετε ότι με τον τρόπο αυτό ορίζεται μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των διγραμμικών συμμετρικών μορφών και των τετραγωνικών μορφών που υφίστανται στο Ε.
- Διαπιστώστε ότι οι διγραμμικές συμμετρικές μορφές και αντίστοιχα οι τετραγωνικές μορφές στο Ε, συγκροτούν ισόμορφους πραγματικούς διανυσματικούς χώρους διάστασης $n(n+1)/2$.
- Στην περίπτωση $n=2$, διαπιστώστε ότι ο χώρος των τετραγωνικών μορφών στο Ε είναι ισόμορφος με τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ και προσδιορίστε μια βάση του.
- Στην περίπτωση $n=2$, διαπιστώστε ότι ο χώρος των τετραγωνικών μορφών στο Ε διαμερίζεται στα ακόλουθα υποσύνολα και επιλέξτε από κάθε ένα τον πιο απλό, κατά τη γνώμη σας, αντιπρόσωπο:

$$\Sigma_k=\left\{q:\mathrm{E}\to\mathbb{R}\,/\,rank\,q=k\right\},\ k=0,1,2.$$

Τα υποσύνολα αυτά είναι ή όχι διανυσματικοί υπόχωροι του χώρου των τετραγωνικών μορφών στο Ε.

ΑΣΚΗΣΗ 1. Στον πραγματικό διανυσματικό χώρο $\mathrm{E}=\mathbb{R}^4$, εφοδιασμένο με την κανονική του βάση, ορίζουμε τη διγραμμική συμμετρική μορφή:

$$s(x,y)=x_1y_1+2x_2y_2+4x_3y_3+18x_4y_4+x_1y_3+x_3y_1+2x_2y_4+2x_4y_2+6x_3y_4+6x_4y_3.$$

1. Γράψτε στην κανονική βάση του Ε τον πίνακα της διγραμμικής αυτής μορφής.

2. Προσδιορίστε την αντίστοιχη τετραγωνική μορφή $q(x)=s(x,x),\ x\in\mathrm{E}$.

3. Εξετάστε αν η διγραμμική αυτή μορφή ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο χώρο Ε.

ΑΣΚΗΣΗ 2. Στον πραγματικό διανυσματικό χώρο $\mathrm{E}=\mathbb{R}^4$, εφοδιασμένο με την κανονική του βάση, ορίζουμε τη διγραμμική συμμετρική μορφή:

$$s(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-x_4y_4 .$$

1. Γράψτε στην κανονική βάση του Ε τον πίνακα της διγραμμικής αυτής μορφής.

2. Προσδιορίστε την αντίστοιχη τετραγωνική μορφή $q(x)=s(x,x),\ x\in\mathrm{E}$.

3. Διαπιστώστε ότι η διγραμμική μορφή s δεν ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο χώρο Ε.

4. Προσδιορίστε τον *κώνο ισοτροπίας* της τετραγωνικής αυτής μορφής:

$$C(q)=\left\{x\in\mathrm{E}\,/\,q(x)=0\right\}.$$

5. Προσδιορίστε τον *πυρήνα* της τετραγωνικής αυτής μορφής:

$$K(q)=\left\{x\in\mathrm{E}\,/\,s(x,y)=0,\forall y\in\mathrm{E}\right\}.$$

6. Επαληθεύστε ότι:

$$E^{\perp}=K(q)\subset C(q) .$$

ΑΣΚΗΣΗ 3. Στον πραγματικό διανυσματικό χώρο $\mathrm{E}=\mathbb{R}^4$, εφοδιασμένο με την κανονική του βάση, ορίζουμε τη διγραμμική συμμετρική μορφή:

$$s(x,y)=x_1y_1+2x_2y_2+x_1y_2+x_2y_1-x_2y_3-x_3y_2-x_2y_4-x_4y_2+2x_3y_4+2x_4y_3 .$$

1. Γράψτε στην κανονική βάση του Ε τον πίνακα της διγραμμικής αυτής μορφής.

2. Προσδιορίστε την αντίστοιχη τετραγωνική μορφή $q(x)=s(x,x),\ x\in\mathrm{E}$.

3. Διαπιστώστε ότι η διγραμμική μορφή s δεν ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο χώρο Ε.

4. Προσδιορίστε τον *κώνο ισοτροπίας* της τετραγωνικής αυτής μορφής:

$$C(q)=\left\{x\in\mathrm{E}\,/\,q(x)=0\right\}.$$

5. Προσδιορίστε τον *πυρήνα* της τετραγωνικής αυτής μορφής:

$$K(q)=\left\{x\in\mathrm{E}\,/\,s(x,y)=0,\forall y\in\mathrm{E}\right\}.$$

6. Επαληθεύστε ότι:

$$E^{\perp}=K(q)\subset C(q) .$$

ΣΧΟΛΙΟ. Θεωρούμε μια απεικόνιση $q:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

- Διαπιστώστε ότι η απεικόνιση αυτή είναι τετραγωνική μορφή αν και μόνο αν σε μια βάση του $\mathbb{R}^n$:

$$q(x)=q\left(\sum_{i=1,\dots,n}x_ie_i\right)=\sum_{i=1,\dots,n}\sum_{j=1,\dots,n}a_{ij}x_ix_j,\ a_{ij}\in\mathbb{R},\quad\forall x\in\mathbb{R}^n .$$

- Η τετραγωνική μορφή μπορεί έτσι να θεωρηθεί στο αντίστοιχο σύστημα συντεταγμένων ως πραγματική συνάρτηση n πραγματικών μεταβλητών που εκφράζει ένα ομογενές πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού.
- Διαπιστώστε ότι η αντίστοιχη διγραμμική συμμετρική μορφή μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$s:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\quad s(e_i,e_j)=\frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial x_i}(e_j),\ i,j=1,\dots,n .$$

Παράδειγμα. Θεωρούμε την ακόλουθη τετραγωνική μορφή εκφρασμένη στην κανονική βάση του $E=\mathbb{R}^4$,

$$q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-x_3^2+4x_1x_2+x_2x_3-x_3x_1 .$$

Ο πίνακάς της σε αυτή τη βάση είναι :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1/2 \\ 2 & 2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}$$

ΜΗΔΕΝΙΣΤΕΣ ΕΝΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΥΠΟΧΩΡΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ. Στον πραγματικό διανυσματικό χώρο $\mathrm{E}=\mathbb{R}^4$, εφοδιασμένο με την κανονική του βάση, θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο:

$$<x,y>=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4 .$$

Αν Σ είναι διανυσματικός υπόχωρος του Ε, συμβολίζουμε:

$$\Sigma^{\perp}=\left\{u\in \mathrm{E}/<u,v>=0,\ \forall v\in\Sigma\right\} \qquad \Sigma^{o}=\left\{\ell\in \mathrm{E}^*/\ \ell(v)=0,\ \forall v\in\Sigma\right\}$$

- Έστω $\Sigma=span\left\{v_1,v_2,v_3\right\}$ όπου: $v_1=(1,3,-2,2)$, $v_2=(1,4,-3,4)$, $v_3=(1,2,-1,0)$.

1. Προσδιορίστε τη διάσταση του υπόχωρου Σ και τις εξισώσεις που τον ορίζουν στο χώρο E.
2. Προσδιορίστε τη διάσταση του υπόχωρου $\Sigma^{\perp}$ και τις εξισώσεις που τον ορίζουν στο χώρο E.
3. Προσδιορίστε τη διάσταση του υπόχωρου Σ^{o} στο χώρο E^* και δώστε μια βάση του.
4. Προσδιορίστε τους πυρήνες της βάσης του Σ^{o} που επιλέξατε και την τομή τους στο χώρο E.

- Έστω $\Sigma'=span\left\{v_1',v_2',v_3'\right\}$ όπου: $v_1'=(1,0,0,0)$, $v_2'=(0,1,0,0)$, $v_3'=(0,0,1,0)$.

5. Εξετάστε τα προηγούμενα ερωτήματα ως προς τον υπόχωρο Σ'.
6. Εξετάστε την αλήθεια των σχέσεων:

$$(\Sigma\cap\Sigma')^{\perp}=\Sigma^{\perp}+\Sigma'^{\perp},\quad (\Sigma+\Sigma')^{\perp}=\Sigma^{\perp}\cap\Sigma'^{\perp},\qquad (\Sigma\cap\Sigma')^{\circ}=\Sigma^{\circ}+\Sigma'^{\circ},\quad (\Sigma+\Sigma')^{\circ}=\Sigma^{\circ}\cap\Sigma'^{\circ} .$$

Σημείωση. Ο μηδενιστής ενός διανυσματικού υπόχωρου Σ του Ε είναι ο διανυσματικός υπόχωρος του Ε* :

$$\Sigma^{o}=\left\{\ell\in \mathrm{E}^*/\ \ell(v)=0,\ \forall v\in\Sigma\right\}.$$

- Εξετάστε τα προηγούμενα ερωτήματα ως προς το εσωτερικό γινόμενο της Άσκησης 1.
- Τι θα μπορούσαμε να πούμε για το μηδενιστή αν θεωρήσουμε μια διγραμμική συμμετρική μορφή που δεν ορίζει εσωτερικό γινόμενο στο Ε ; Εξετάστε την περίπτωση των ασκήσεων 2 και 3.