ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ακαδημαϊκό έτος 2015-16

ΜΑΘΗΜΑ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Καθηγητής: Σ. Πνευματικός

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 9^{ης} ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ : ΘΕΜΑ ΜΕΛΕΤΗΣ

Θεωρούμε έναν πραγματικό n-διάστατο διανυσματικό χώρο E και μια τετραγωνική μορφή $q : E \to \mathbb{R}$. Στην τετραγωνική αυτή μορφή προσαρτάται η διγραμμική συμμετρική μορφή (: *πολική έκφραση της* q) :

$$s : E \times E \to \mathbb{R}, \quad s(x,y) = \frac{1}{2}\big(q(x+y) - q(x) - q(y)\big) = \frac{1}{4}\big(q(x+y) - q(x-y)\big).$$

Σε κάθε $x \in E$ αντιστοιχεί ένα στοιχείο $\ell_x \in E^*$ που ορίζεται ως εξής:

$$\ell_x : E \to \mathbb{R}, \quad \ell_x(y) = s(x,y)$$

και έτσι στη διγραμμική συμμετρική μορφή προσαρτάται η γραμμική απεικόνιση:

$$J : E \to E^*, \quad J(x) \equiv \ell_x = s(x,\bullet).$$

- Αν $e_1,\ldots,e_n$ είναι βάση του E και $e_1^*,\ldots,e_n^*$ η δυϊκή βάση στο E^*, διαπιστώστε ότι ο πίνακας της διγραμμικής συμμετρικής μορφής s (: της τετραγωνικής μορφής q) στη βάση $e_1,\ldots,e_n$ του E είναι ίδιος με τον πίνακα της γραμμικής απεικόνισης $J : E \to E^*$ και ότι ισχύει:

$$\ker q = \ker J, \quad rank\, q = rank\, J, \quad \dim E = rank\, q + dim \ker q.$$

Άσκηση. Θεωρώντας τις ακόλουθες τετραγωνικές μορφές, εκφρασμένες στην κανονική βάση του $E = \mathbb{R}^n$, $n = 3$ ή $n = 4$, και τις αντίστοιχες διγραμμικές συμμετρικές μορφές, γράψτε τις αντίστοιχες γραμμικές απεικονίσεις στην κανονική βάση του E, και υπολογίστε τους πίνακές τους :

$$J : E \to E^*, \quad J(x) \equiv \ell_x = s(x,\bullet).$$

$$q(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 - 4x_1x_2 - 8x_2x_3,\; q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3,\; q(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_3x_4$$

- Προσδιορίστε τον πίνακα αλλαγής βάσης από την κανονική βάση σε εκείνη που θα κατασκευάσετε αξιοποιώντας τον αλγόριθμο Gauss και υπολογίστε τους αντίστοιχους πίνακες των γραμμικών αυτών απεικονίσεων εκτελώντας την αλλαγή βάσης.

- Σε κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις, επιλέξτε έναν 2-διάστατο υπόχωρο Σ του E και, αφού υπολογίσετε ως προς την αντίστοιχη διγραμμική συμμετρική μορφή τον ορθογώνιο υπόχωρο $\Sigma^\perp$, δείξτε ότι:

$$\Sigma^\perp \approx \big(J(\Sigma)\big)^o.$$

(Προσέξτε ότι: $J(\Sigma)$ διανυσματικός υπόχωρος του E^* και $(J(\Sigma))^o$ διανυσματικός υπόχωρος του E^{**}.) -

- Παρατηρείστε ότι ο ακόλουθος ισομορφισμός ορίζεται χωρίς χρήση κάποιας βάσης:

$$I: E \to E^{**},\ I(x) \equiv I_x, \quad I_x : E^* \to \mathbb{R},\ I_x(\ell) = \ell(x),\ x \in E .$$

- Συμπέρασμα: Ο χώρος E^{**} *ταυτίζεται* ισομορφικά με τον χώρο E.

Άσκηση. Θεωρούμε μια τετραγωνική μορφή $q: E \to \mathbb{R}$.

- Διαπιστώστε ότι: $\ker q = E^{\perp}$.
- Αν $\Sigma \subset E$, διαπιστώστε ότι: $\ker q \subset \Sigma^{\perp}$.
- Αν Σ είναι διανυσματικός υπόχωρος του E, διαπιστώστε ότι:

$$E = \Sigma \oplus \Sigma^{\perp} \Leftrightarrow \Sigma \cap \Sigma^{\perp} = \{0\}, \quad \dim E = \dim \Sigma + \dim \Sigma^{\perp} - \dim\left(\Sigma \cap \ker q\right), \quad \Sigma^{\perp\perp} = \Sigma + \ker q .$$

ΣΧΟΛΙΟ. Για να ελέγξετε την ορθογωνιότητα ή ορθοκανονικότητα μιας βάσης $\varepsilon_1,...,\varepsilon_n$ του Ε ως προς μια δεδομένη διγραμμική συμμετρική μορφή *s* (: τετραγωνική μορφή *q*), σημειώστε ότι:

- $\varepsilon_1,...,\varepsilon_n$ ορθογώνια, δηλαδή : $s(\varepsilon_i,\varepsilon_j) = 0, \forall i \neq j,\ i,j = 1,...,n$, $\Leftrightarrow$ στη βάση αυτή $q(x) = \sum\limits_{1 \le i \le n} \lambda_i x_i^2$
- $\varepsilon_1,...,\varepsilon_n$ ορθοκανονική, δηλαδή : $s(\varepsilon_i,\varepsilon_j) = \delta_{ij},\ i,j = 1,...,n$, $\Leftrightarrow$ στη βάση αυτή $q(x) = \sum\limits_{1 \le i \le n} x_i^2$