Πανεπιστήμιο Πατρών

Τμήμα Μαθηματικών

ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΕΔΙΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ ΒΑΘΜΙΔΑΣ

Μεταπτυχιακή Εργασία

Κρηνίδη Ειρήνη-Δανάη

Επιβλέπων καθηγητής
Αντώνης Στρέκλας

Πάτρα 2013

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η μεταπτυχιακή μου εργασία έχει τίτλο: ***ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΕΔΙΩΝ*** και ***ΘΕΩΡΙΕΣ ΒΑΘΜΙΔΑΣ*** και χωρίζεται σε δύο μέρη:

Στο ***Πρώτο μέρος*** γίνεται μια σύντομη αναφορά στις θεμελιώδεις αρχές της Κβαντομηχανικής και μια ιστορική αναδρομή στους Φυσικούς και Μαθηματικούς που έβαλαν ο καθένας το δικό τους λιθαράκι για να φθάσουμε στο σήμερα και στην ανακάλυψη του *σωματιδίου Higgs*. Συγχρόνως γίνεται και μια εννοιολογική αναδρομή που περιγράφει τα όρια και τα περιεχόμενα της Σύγχρονης Φυσικής στην οποία περιέχεται η κβαντική θεωρία καθώς και η σχέση της με την Κλασική Φυσική.

Το ***Δεύτερο μέρος*** με την σειρά του χωρίζεται σε πέντε κεφάλαια:

Στο **πρώτο κεφάλαιο** δίνονται οι σχετικιστικές εξισώσεις *Klein-Gordon* και *Dirac* εξηγώντας τα προβλήματα που λύνει και τα εμπόδια που αντιμετωπίζει η κάθε μια τους.

Στο **δεύτερο κεφάλαιο** γίνεται αναφορά στην θεωρία πεδίων ως λύση των προβλημάτων που δημιουργούν οι εξισώσεις του πρώτου κεφαλαίου. Συνεχίζει με την μελέτη του θεωρήματος της Noether και τις συνέπειές του στην Φυσική καθώς επίσης και με την κβάντωση των κλασικών πεδίων. Πιο συγκεκριμένα, δίνονται οι έννοιες της κανονικής κβάντωσης, εξετάζεται το πραγματικό και μιγαδικό πεδίο Klein-Gordon όπως και τα κβαντισμένα πεδία Dirac και Schrodinger. Το δεύτερο κεφάλαιο κλείνει με το κβαντισμένο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

Στο **τρίτο κεφάλαιο** γίνεται μια αναφορά σε Lie-ομάδες και άλγεβρες Lie όπως και στις ομάδες SU(2) και SU(3). Για την παρουσίαση της θεωρίας των ομάδων Lie αναφέρονται κάποιοι ορισμοί, προτάσεις και μικρά παραδείγματα.

Το **τέταρτο κεφάλαιο** ασχολείται με τις θεωρίες βαθμίδας, με τους παγκόσμιους και τοπικούς μετασχηματισμούς στο πραγματικό και μιγαδικό πεδίο Klein-Gordon, με το πεδίο Yang-Mills και την θεωρία ενοποίησης.

Στο **πέμπτο κεφάλαιο** κυριαρχεί το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας, με το θεώρημα Goldstone και κυρίως με τον μηχανισμό Higgs εξηγώντας πως τα μποζόνια βαθμίδας του Καθιερωμένου Προτύπου αποκτούν μάζα.

SUMMARY

My Master's thesis is entitled: ***QUANTUM FIELD THEORY*** and ***GAUGE THEORIES.*** It consists of two parts:

In the ***first part*** there is a brief reference regarding the fundamental principles of Quantum Mechanics and a historical retrospection of how physicists and mathematicians each made their own contribution in order for us today to reach to the discovery of the Higgs particle. In parallel, there is a conceptual overview that describes the boundaries and contents of Modern Physics, which includes Quantum Theory and its relation to Classical Physics.

In the ***second part*** there are five chapters:

The **first chapter** describes the Klein-Gordon and Dirac relativistic equations, explaining the advantages and drawbacks that each of them have.

The **second chapter** refers to the field theory as a solution to the problems posed by the equations of the first chapter. It continues with a study of the Noether theorem and its consequences in Physics, as well as the quantization of classical fields. In particular, the concepts of normal quantization are given out, the real and the complex field of Klein-Gordon is examined, as well as the quantized Dirac and Schrodinger fields. It ends with the quantized electromagnetic field.

The **third chapter** describes the Lie-groups and the Lie algebras, as well as the SU (2) and SU (3) groups. In order to present the Lie –group theory, definitions, suggestions and examples are given out.

The **fourth chapter** deals with the Gauge Theories, the global and local transformations in the real and complex field of Klein-Gordon, the Yang-Mills field theory and the unification theory.

Finally, the **fifth chapter** examines the spontaneous symmetry breaking, the Goldstone theorem and especially with the Higgs mechanism, explaining how the gauge bosons of the Standard Model acquire mass.

Οι πρωτοπόροι της Κβαντικής Θεωρίας

M. Planck

Βραβείο Nobel 1918 για την ανακάλυψη του κβάντου δράσης.

N. Bohr

Βραβείο Nobel 1922 για τη μελέτη της δομής των ατόμων και της ακτινοβολίας τους.

D. Bohm

Σπάνιος συνδυασμός θεωρητικού φυσικού και μυστικιστή. Η Αιτιότητα και Τύχη στη Σύγχρονη Φυσική, αποτελεί έργο σταθμός στην Κβαντική Φυσική.

M. Born

Βραβείο Nobel 1954 για το θεμελιακό έργο του στην κβαντική μηχανική και ιδιαίτερα στην στατιστική ερμηνεία της κυματοσυνάρτησης.

Bose

Διατύπωσε μαζί με τον Einstein τη στατιστική για τα σωματίδια με ακέραιο σπιν.

L. Broglie

Βραβείο Nobel 1929 για την ανακάλυψη της κυματικής φύσης του ηλεκτρονίου

P. Debye

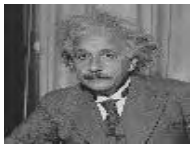
Βραβείο Nobel Χημείας 1936 για τα πολικά μόρια και την έρευνα στα διαλύματα.

P. Dirac

Βραβείο Nobel 1933 για την ανακάλυψη νέων και παραγωγικών μορφών της ατομικής θεωρίας.

P. Ehrenfest

Διατύπωσε μια αρχή και ένα θεώρημα στην στατιστική μηχανική και την κβαντομηχανική που φέρουν το όνομα του.



A. Einstein

Βραβείο Nobel 1921 για τα επιτεύγματά του στην ερμηνεία του φωτοηλεκτρικού φαινομένου.

Gamow

Ερμήνευσε την ακτινοβολία α, πρότεινε για τους πυρήνες το πρότυπο της υγρής σταγόνας, θεμελιωτής της σύγχρονης βιολογίας.

S. Goudsmith

Βρήκε το spin του ηλεκτρονίου

W. Heisenberg

Βραβείο Nobel 1932 για τη συμβολή του στην θεμελίωση της κβαντομηχανικής και στην ανακάλυψη των αλλοτροπικών μορφών του Υδρογόνου.

W. Pauli

Βραβείο Nobel 1945 για την ανακάλυψη της απαγορευτικής αρχής που φέρει το όνομα του.

E. Purcell

Βραβείο Nobel φυσικής 1952 για την ανάπτυξη μεθόδων μετρήσεων του πυρηνικού μαγνητισμού.

E. Schroedinger

Βραβείο Nobel 1933 για την ανακάλυψη νέων και παραγωγικών μορφών της ατομικής θεωρίας.

A. Sommerfeld

Πρωτοπόρος της κβαντικής φυσικής, συγγραφέας του έργου "Ατομική δομή και φασματικές γραμμές". Χρησιμοποίησε πρώτος τις φασματικές γραμμές στην έρευνα της ύλης.

E. Wigner

Βραβείο Nobel 1963 για την συμβολή του στη θεωρία των στοιχειωδών σωματιδίων και στην ανακάλυψη και εφαρμογή των θεμελιακών αρχών συμμετρίας.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη 3

Summary 4

Οι πρωτοπόροι της Κβαντικής Θεωρίας 5

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ 12

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Η Γένεση της Κβαντικής Θεωρίας 13

1.1. Εισαγωγή 14

1.2. Ιστορική και εννοιολογική ανασκόπηση της Κλασσικής Θεωρίας 15

1.2.1. Κλασσική Μηχανική 15

1.2.2. Κλασσική Θεωρία πεδίων 16

1.2.3. Κλασσική Στατιστική Μηχανική 17

1.3. Οι αποτυχίες της Κλασσικής Θεωρίας 19

1.3.1. Κβάντωση ΗΜ ακτινοβολίας – Ο σωματιδιακός χαρακτήρας του φωτός 19

1.3.1.1. Ακτινοβολία μέλανος σώματος 19

Α. Απόπειρα κλασσικής ερμηνείας 21

Β. Κβαντική ερμηνεία – Η υπόθεση του Planck 22

1.3.1.2. Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο 24

Α. Απόπειρα κλασσικής ερμηνείας 24

Β. Κβαντική ερμηνεία – Η υπόθεση των Φωτονίων 25

1.3.1.3. Το φαινόμενο Compton 27

Α. Απόπειρα κλασσικής ερμηνείας 27

Β. Κβαντική ερμηνεία 28

1.3.1.4. Ο κυματοσωματιδιακός δυισμός του φωτός 29

1.3.2. Κβάντωση ενεργειακών καταστάσεων – Κυματική συμπεριφορά ηλεκτρονίων 30

1.3.2.1. Ατομικά φάσματα 30

Α. Απόπειρα κλασσικής ερμηνείας – Κλασσικά Ατομικά πρότυπα 32

Β. Το ατομικό πρότυπο του Thomson 32

C. Το ατομικό πρότυπο του Rutherford 33

1.3.2.2. Η ατομική θεωρία του Bohr 35

Α. Η πρώτη συνθήκη του Bohr 35

Β. Η δεύτερη συνθήκη του Bohr 36

C. Η γενικευμένη συνθήκη κβάντωσης των Wilson και Sommerfeld 39

1.3.2.3. Ο κυματοσωματιδιακός δυισμός της ύλης - Η υπόθεση των υλικών Κυμάτων De Broglie 40

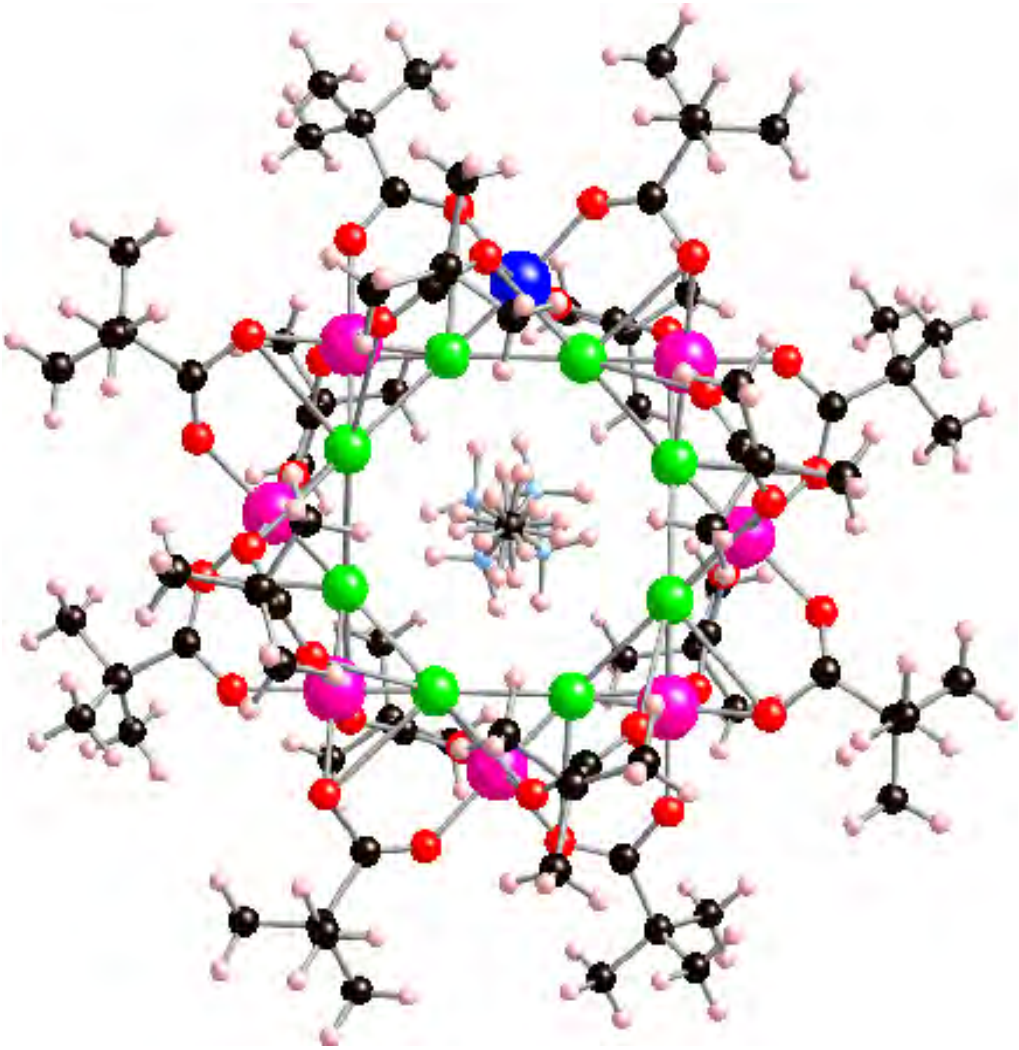
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Η θεμελίωση της Κβαντομηχανικής 42
2.1. Εισαγωγή 43
2.2. Μαθηματική περιγραφή των υλικών κυμάτων 45
2.2.1. Η ελεύθερη εξίσωση Schrodinger 45
2.2.2. Η εξίσωση Schrodinger σε εξωτερικό δυναμικό 46
2.2.3. Η έννοια του γραμμικού τελεστή 46
2.2.3.1. Ιδιότητες των τελεστών 48
2.3. Η στατιστική ερμηνεία της κυματοσυνάρτησης 49
2.3.1. Τα υλικά κύματα σαν κύματα πιθανότητας 49
2.3.2. Οι βασικές στατιστικές έννοιες 51
Α. Μέση τιμή 51
Β. Διασπορά ή Τυπική Απόκλιση 51
C. Μέση Θέση και αβεβαιότητα θέσης 52
2.4. Επέκταση της στατιστικής ερμηνείας 52
2.4.1. Ο γενικός τύπος της μέσης τιμής 52
2.4.2. Εισαγωγή τελεστών για φυσικά μεγέθη 53
2.4.3. Ο γενικός τύπος της αβεβαιότητας 54
2.5. Ολοκλήρωση της στατιστικής ερμηνείας 54
2.5.1. Ο ρόλος των ιδιοσυναρτήσεων 54
2.5.2. Το ανάπτυγμα σε ιδιοσυναρτήσεις 55
2.5.3. Η περίπτωση του συνεχούς φάσματος 57
2.6. Ο ρόλος της μέτρησης στην Κβαντομηχανική – Η αρχή του φιλτραρίσματος 59
2.7. Ερμιτιανότητα: Η βασική ιδιότητα των κβαντομηχανικών τελεστών 61
2.8. Η χρονική εξέλιξη των κυματοσυναρτήσεων 63
2.8.1. Λύση της χρονεξαρτημένης εξίσωσης Schrödinger και στάσιμες καταστάσεις 63
2.8.2. Επιπτώσεις της χρονικής εξέλιξης 64
2.9. Η αρχή της αβεβαιότητας 65
2.9.1. Η αρχή της αβεβαιότητας θέσης-ορμής 65
2.9.2. Η αρχή της αβεβαιότητας χρόνου-ενέργειας 66
2.10. Τα πέντε θεμελιώδη αξιώματα της Κβαντομηχανικής 69
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 71

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ 78
Ιστορική εισαγωγή 79
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Σχετικιστική Κβαντομηχανική 86
3.1. Εισαγωγή 87
3.2. Η εξίσωση Klein-Gordon 87
3.2.1. Προβλήματα της εξίσωσης Klein-Gordon 88
3.3. Η εξίσωση Dirac 89
3.3.1. Λύση της εξίσωσης Dirac – Ερμηνεία των λύσεων 90
3.3.2. Τα βασικά χαρακτηριστικά της εξίσωσης Dirac 91
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Θεωρία Πεδίων 94
4.1. Εισαγωγή 95
4.2. Λαγκρανζιανός φορμαλισμός 95
4.2.1. Συστήματα με πεπερασμένο πλήθος βαθμών ελευθερίας 95
4.2.2.Συστήματα με συνεχές πλήθος βαθμών ελευθερίας – Θεωρία πεδίου 97
4.3. Συμμετρίες και Νόμοι Διατήρησης 99
A. Διατήρηση της ενέργειας και συμμετρία μεταφοράς χρόνου 103
B. Αντιστροφή του χώρου 103
C. Η συζυγία φορτίου 204
D. Συμμετρία CP 104
E. Αντιστροφή του χρόνου 104
F. Θεώρημα CPT 105
4.3.1. Συνεχείς συμμετρίες 106
4.3.2. Θεώρημα της Noether 107
4.3.3. Γενική μορφή του Θεωρήματος της Noether 109
4.3.4. Γενικές Παρατηρήσεις 113
4.4. Λαγκρανζιανός φορμαλισμός και Κανονική Κβάντωση 115
4.4.1. Η κβάντωση του πεδίου Klein-Gordon 117
A. Ο αρμονικός ταλαντωτής ως μια θεωρία πεδίου 117
B. Το κβαντωμένο πεδίο Klein-Gordon και η φυσική του ερμηνεία 117
C. Το μιγαδικό πεδίο Klein-Gordon 127
D. Γενικές παρατηρήσεις στο κβαντωμένο πεδίο Klein-Gordon 129
4.4.2. Η κβάντωση του πεδίου Dirac 130
A. Λαγκρανζιανός φορμαλισμός εξίσωσης Dirac 130
B. Το κβαντωμένο πεδίο Dirac 131
C. Φερμιονική και Μποζονική κβάντωση 133

4.4.3. Το κβαντωμένο πεδίο Schrodinger 135
Α. Η δεύτερη κβάντωση – Κατασκευή κυματοσυναρτήσεων 136
Β. Εντοπισιμότητα και διατήρηση του αριθμού των σωματιδίων 136
4.4.4. Η κβάντωση του ΗΜ πεδίου 139
Α. Περιγραφή του ΗΜ πεδίου μέσω διανυσματικού δυναμικού 139
Β. Το κβαντωμένο ΗΜ – Ανάπτυγμα διανυσματικού δυναμικού σε επίπεδα κύματα 140
C. Οι καταστάσεις του κβαντωμένου ΗΜ και το φυσικό τους περιεχόμενο 143
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: Θεωρία Ομάδων 145
5.1. Εισαγωγή 146
5.2. Πεπερασμένες ομάδες 147
5.2.1. Ορισμός της ομάδας 147
5.2.2. Η ομάδα των μετασχηματισμών 148
5.2.3. Γεννήτορες πεπερασμένης ομάδας 148
5.2.4. Κυκλικές ομάδες 149
5.2.5. Υποομάδες 149
5.2.6. Συζυγή στοιχεία και κλάσεις ομάδας 149
5.2.7. Κανονική υποομάδα και ομάδα πηλίκο 150
5.2.8. Ισομορφισμός και ομομορφισμός ομάδων 150
5.2.9. Οι ομάδες μεταθέσεων 151
5.3. Αναπαραστάσεις ομάδων 152
5.3.1. Αναπαράσταση πεπερασμένων ομάδων 153
5.3.2. Ιδιότητες αναπαραστάσεων 154
5.3.3. Αναλλοίωτοι υπόχωροι 155
5.3.4. Αναγωγιμότητα μιας αναπαράστασης 155
5.3.5. Ομάδες πινάκων 155
5.4. Συνεχείς ομάδες 158
5.4.1. Πεπερασμένες συνεχείς ομάδες 158
5.4.2. Τοπολογικές ομάδες 158
5.4.3. Συνεκτική και συμπαγής ομάδα 159
5.4.4. Ομάδες Lie 160
5.4.5. Αναπαράσταση συνεχούς ομάδας 162
5.4.6. Η Lie άλγεβρα μιας Lie ομάδας 163
5.4.7. Η ειδική μοναδιαία ομάδα SU(2) 165
5.4.8. Οι γεννήτορες των ομάδων Un και SUn 168
5.4.9. Εφαρμογές της ομάδας SU(2) στην φυσική 171
5.4.10. Η ειδική μοναδιαία ομάδα SU(3) 171

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: Θεωρίες βαθμίδας....173
6.1. Εισαγωγή....174
6.2. Η θεωρία βαθμίδας και οι τρεις αλληλεπιδράσεις....175
6.2.1. ΗΜ αλληλεπίδραση....175
6.2.2. Ασθενής αλληλεπίδραση....176
6.2.3. Ισχυρή αλληλεπίδραση....177
6.3. Κβαντική Ηλεκτροδυναμική....179
6.3.1. Το πρόβλημα των απειρισμών....180
6.3.2. Επιτυχείς προβλέψεις της QED....181
6.3.3. Σταθερά σύζευξης....182
6.4. Το μιγαδικό βαθμωτό πεδίο....183
6.5. Μετασχηματισμοί βαθμίδας και ΗΜ πεδίο....186
6.6. Το πεδίο Yang-Mills....191
6.7. Η γεωμετρία των πεδίων βαθμίδας....197
6.8. Η θεωρία της Ενοποίησης....203
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: Αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας....207
7.1. Εισαγωγή....208
7.2. Ο Αβελιανός μηχανισμός Higgs....208
7.3. Θεώρημα Goldstone....212
7.4. Αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας βαθμίδας....216
7.5. Μη Αβελιανός μηχανισμός Higgs....218
7.6. Η θεωρία των Glashow-Weinberg-Salam για τις ασθενείς αλληλεπιδράσεις....219
7.7. Το καθιερωμένο πρότυπο....234
7.8. Πέραν του καθιερωμένου προτύπου....238
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ....240

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ



«Η φύση δεν κάνει τίποτε το άσκοπο, τίποτε το περιττό» - Αριστοτέλης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Η γένεση
της Κβαντικής Θεωρίας

Ιστορική Εισαγωγή

Δεν είναι καθόλου μέσα στη φύση των πραγράτων το να κάνει ένας μόνο άνθρωπος μια ξαφνική, εκρηκτική ανακάλυψη. Η επιστήμη προχωρεί βήμα με βήμα και καθένας στηρίζεται αναγκαστικά στη δουλεία των προγενεστέρων του. Όταν ακούτε για μια αιφνίδια και απροσδόκητη ανακάλυψη – μια αστραπή σε καθαρό ουρανό, σα να λέγαμε, - να είστε πάντα σίγουροι πως βγήκε μέσα από την επίδραση ενός ανθρώπου σ' έναν άλλο και τούτη ακριβώς η αλληλεπίδραση είναι που κάνει δυνατή την επιστημονική πρόοδο.

E. Rutherford

1.1 Εισαγωγή

Ολόκληρη η επιστήμη του αιώνα μας σημαδεύεται κυριολεκτικά από την εμφάνιση του ατομικού μικρόκοσμου στο πειραματικό προσκήνιο. Αυτή η εξέλιξη δεν ήταν φυσικά καθόλου απροσδόκητη. Είχαν προηγηθεί οι πολύ σημαντικές εργασίες των χημικών του 18ου και του 19ου αιώνα που προετοίμασαν το έδαφος για την ανακάλυψη του περιοδικού συστήματος, το οποίο αποτελεί και το σημείο καμπής για την εξέλιξη της ατομικής υπόθεσης.

Προς τα τέλη του 19ου αιώνα και στις αρχές του 20ου η κλασσική φυσική είχε φτάσει στην ιστορική της ολοκλήρωση και εισερχόταν σε μια περίοδο βαθιάς κρίσης. Ύστερα από μια μακραίωνη διαδικασία ενοποίησης και σύνθεσης, μια τεράστια ποικιλία εμπειρικών νόμων είχε συμπυκνωθεί σε ένα μικρό αριθμό θεμελιωδών εξισώσεων. Στους επιστήμονες της εποχής κυριαρχεί η αντίληψη ότι οι θεμελιώδεις φυσικοί νόμοι, μπορούν να ερμηνεύσουν όλα τα φυσικά φαινόμενα. Ωστόσο, η πειραματική εφαρμογή των διατυπωμένων θεμελιωδών εξισώσεων για την ανάλυση ολοένα και πιο πολύπλοκων εκδηλώσεων της υλικής πραγματικότητας οδήγησε σε αποτελέσματα που δεν μπορούσαν να ερμηνευθούν από την κλασσική φυσική – κλασσική μηχανική, ηλεκτρομαγνητική θεωρία και στατιστική μηχανική. Στη σημερινή εποχή βέβαια, έχουμε εξοικειωθεί με την αντίληψη ότι η αυθεντική μορφή των φυσικών νόμων εκδηλώνεται μόνο στο ατομικό επίπεδο.

Οι κλασσικοί νόμοι – οι νόμοι του μακρόκοσμου - αποτελούν μια ακραία οριακή περίπτωση των κβαντικών νόμων, οι οποίοι ερμηνεύουν τον ατομικό μικρόκοσμο. Η βαθμιαία ανακάλυψη αυτών των νόμων και η τελική τους διατύπωση σε μια ενιαία θεωρία απλώνεται σε ολόκληρο το πρώτο τέταρτο του αιώνα μας και μπορεί να χωριστεί σε δύο φάσεις: Η πρώτη φάση (1900 - 1923) καλύπτει την ανάπτυξη της παλαιάς κβαντικής θεωρίας, ενώ η δεύτερη (1924-1927) την θεμελίωση της σύγχρονης Κβαντομηχανικής. Η παλαιά κβαντική θεωρία αποτελεί ουσιαστικά ένα μεταβατικό στάδιο, το τέλος του οποίου ήταν η ανακάλυψη της αρχής του κυματοσωματιδιακού δυισμού, η οποία αποτελεί και το σημείο εκκίνησης της σύγχρονης Κβαντομηχανικής.

Η σωστή κατανόηση της Κβαντομηχανικής επιτυγχάνεται μόνο αν συνειδητοποιήσουμε πρώτα την πλήρη αδυναμία της κλασσικής φυσικής να ερμηνεύσει όχι κάποια λεπτομερειακά χαρακτηριστικά του ατομικού μικρόκοσμου αλλά και την ύπαρξη των βασικών συστατικών του: των ατόμων και των μορίων. Σήμερα είμαστε σε θέση να δούμε καθαρά ότι η αδυναμία της κλασσικής θεωρίας βασιζόταν στο γεγονός ότι η πειραματική της επαλήθευση στηριζόταν αποκλειστικά σε μακροσκοπικές παρατηρήσεις. Δεδομένου ότι η φυσική είναι πειραματική επιστήμη, το πείραμα επιτελεί μια διπλή λειτουργία. Από τη μία μεριά επιβεβαιώνει ή διαψεύδει τις υπάρχουσες θεωρίες και από την άλλη συμβάλλει στη διαδικασία βαθμιαίας ανάδυσης των νέων ιδεών και κατ' επέκταση στην αναζήτηση νέων θεωριών. Ένας από τους βασικούς στόχους αυτής της ιστορικής εισαγωγής είναι να αναδείξει την καθοριστική λειτουργία του πειράματος στην διαμόρφωση των βασικών ιδεών της Κβαντικής θεωρίας.

1.2. Ιστορική και εννοιολογική ανασκόπηση της Κλασσικής Θεωρίας

"Όλοι οι θεμελιώδεις νόμοι και δεδομένα της Φυσικής επιστήμης έχουν ήδη ανακαλυφθεί και είναι τόσο σταθερά εδραιωμένοι, ώστε η πιθανότητα να ανατραπούν κάποτε, σαν αποτέλεσμα νέων ανακαλύψεων, είναι τελείως μακρινή".

A. Michelson (1899)

Στο τέλος του 19ου αιώνα η Φυσική της εποχής εκείνης, την οποία σήμερα ονομάζουμε κλασική Φυσική, εθεωρείτο εδραιωμένη και ακλόνητη. Οι φυσικοί πίστευαν τότε πως ΟΛΑ τα θεμελιώδη προβλήματα είχαν λυθεί καταρχήν. Η μελέτη συγκεκριμένων φαινομένων ήταν ζήτημα μονάχα κάποιας επιμέρους εφαρμογής των γνωστών θεμελιωδών αρχών και επίλυσης των γνωστών διαφορικών εξισώσεων που εκφράζουν τους θεμελιώδεις νόμους της Φύσης. Την πεποίθηση αυτή είχαν ενισχύσει εκτός από τις μεγάλες επιτυχίες της Κλασικής Μηχανικής στη μελέτη των ουρανίων σωμάτων και οι άλλοι κλάδοι της Φυσικής. Η κινητική θεωρία, για παράδειγμα, ενοποίησε τη στατιστική μηχανική με τη θερμοδυναμική. Όμοια η ηλεκτρομαγνητική θεωρία του Maxwell ενοποίησε τα ηλεκτρικά και μαγνητικά φαινόμενα με τα οπτικά φαινόμενα, δείχνοντας ότι το φως δεν είναι τίποτε άλλο παρά ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Στο τέλος όμως του 19ου αιώνα και στην αρχή του 20ού προέκυψαν πειραματικά αποτελέσματα που δεν ήταν δυνατόν να ερμηνευθούν με την εφαρμογή των γνωστών βασικών αρχών. Χρειάστηκε τότε να αναθεωρηθούν αυτές οι ίδιες βασικές αρχές και αυτό οδήγησε σε δύο διαφορετικές "επαναστάσεις" στη Φυσική: τη θεωρία της Σχετικότητας (ειδική και αργότερα γενική) και τη θεωρία των κβάντα (που αργότερα διαμορφώθηκε στην Κβαντομηχανική).Η κλασσική φυσική χωρίζεται σε τρεις θεμελιώδεις κλάδους:

1. Κλασσική Μηχανική
2. Κλασσική θεωρία πεδίων
3. Κλασσική Στατιστική Μηχανική

1.2.1. Κλασσική Μηχανική

"Γιατί όλη η αποστολή της Φυσικής φιλοσοφίας μου φαίνεται πως έγκειται σε τούτο: Από τα φαινόμενα της κίνησης να συνάγομε δυνάμεις της φύσης και ύστερα μ' αυτές τις δυνάμεις να περιγράψομε άλλα φαινόμενα: Την κίνηση των άστρων, των κομητών και τα κύματα της θάλασσας".

Isaak Newton (Principia)

Η αρμοδιότητα της Κλασσικής Μηχανικής είναι *η μελέτη της κίνησης των υλικών σωμάτων υπό την επίδραση δεδομένων δυνάμεων* [1]. Το περιεχόμενο της συνοψίζεται στο νόμο του

Νεύτωνα: F=dp/dt, ο οποίος γνώρισε θεαματική επιβεβαίωση των προβλέψεών του τόσο στη μελέτη της κίνησης γήινων σωμάτων, όσο και στην περιγραφή της πλανητική κίνησης [1].

Στην αρμοδιότητα της Μηχανικής ανήκουν επίσης όλα τα φαινόμενα που οφείλονται στη σχετική κίνηση των δομικών μονάδων ενός συνεχούς μέσου υπό την επίδραση των αμοιβαίων τους δυνάμεων (Μηχανική Ρευστών, Κυματική). Η εφαρμογή του νόμου του Νεύτωνα στο πρόβλημα της κυματική διάδοσης οδηγεί στη γνωστή κυματική εξίσωση:

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

η οποία περιγράφει με μεγάλη ακρίβεια όλα τα μηχανικά κύματα. Η μόνη περίπτωση που έπρεπε να επιβεβαιωθεί ήταν τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Για να γίνει δυνατή η μηχανική τους ερμηνεία επινοήθηκε ένα υλικό μέσο, ο αιθέρας [2], η ύπαρξη του οποίου έπρεπε να επιβεβαιωθεί πειραματικά. Τα πειράματα των Michelson-Morley οδήγησαν στο συμπέρασμα ότι ο αιθέρας δεν υπάρχει. Επομένως, τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα δεν μπορούν να αναχθούν σε μηχανική ταλάντωση κάποιου υλικού μέσου. Σε αντίθεση με τα μηχανικά, μπορούν να διαδοθούν και στο κενό.

Οι βασικές παραδοχές πάνω στην οποίες στηρίζεται το οικοδόμημα της Κλασσικής Μηχανικής [1] είναι:

- Τα υλικά σωματίδια κινούνται πάνω σε καλά καθορισμένες τροχιές πράγμα που σημαίνει ότι μπορούμε να μετρήσουμε με απόλυτη ακρίβεια τόσο τη θέση όσο και την ταχύτητα του σωματιδίου.
- Η ενέργεια και η ορμή των υλικών σωματιδίων είναι καθαρά εντοπισμένες.
- Φυσικά μεγέθη όπως η ενέργεια, η ορμή, η στροφορμή κ.λ.π, παίρνουν όλες τις δυνατές τιμές εντός επιτρεπόμενων διαστημάτων (συνεχές πεδίο τιμών).
- Η έννοια της κβάντωσης είναι συνυφασμένη με καθαρά κυματικά μεγέθη, όπως η συχνότητα και το μήκος κύματος των στάσιμων κυμάτων. Ωστόσο, τα δυναμικά μεγέθη (ενέργεια, ορμή) παίρνουν ένα συνεχές σύνολο τιμών. Η αμφίδρομη συσχέτιση που δημιουργείται ανάμεσα στην *κβάντωση* ↔ *κυματική συμπεριφορά* θα αποτελέσει και την "σκέψη - κλειδί" στην ανακάλυψη της αρχής του κυματοσωματιδιακού δυισμού της ύλης.

1.2.2. Κλασσική θεωρία πεδίων

"Η θεωρία που προτείνω μπορεί, επομένως να ονομαστεί θεωρία του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, γιατί περιγράφει το χώρο στην περιοχή των ηλεκτρικών ή μαγνητικών σωμάτων και μπορεί επίσης να ονομαστεί δυναμική θεωρία, γιατί δέχεται ότι σ' αυτό το χώρο υπάρχει ύλη που με την κίνησή της παράγει τα παρατηρούμενα φαινόμενα".

James C. Maxwell (1864)

Η κλασσική θεωρία των πεδίων πραγματεύεται την μελέτη των θεμελιωδών δυναμικών πεδίων; το πεδίο βαρύτητας και το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο [3,4,5]. Η κλασσική Θεωρία του πεδίου βαρύτητας συγκεντρώνεται στο νόμο της Παγκόσμιας έλξης:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r} \qquad (2)$$

Η θεωρία του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου περιγράφεται με τις τέσσερις εξισώσεις του Maxwell [6]:

$$\nabla E = 4\pi\rho \qquad \nabla xE = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} \qquad (3)$$

$$\nabla B = 0 \qquad \nabla xB = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}J \qquad (4)$$

Οι εξισώσεις του Maxwell επαληθεύουν την κλασσική κυματική εξίσωση. Η πιο σημαντική συνέπεια των εξισώσεων του Maxwell είναι η διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο κενό σύμφωνα με της νόμους της Κλασσικής Κυματικής με ταχύτητα της ίση με την ταχύτητα του φωτός. Στα πλαίσια της Κλασσικής θεωρίας η αναγωγή των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε μηχανικές ταλαντώσεις είναι αδύνατη. Ως αποτέλεσμα αυτού υπάρχουν δύο ξεχωριστές και αμοιβαία αποκλειόμενες φυσικές οντότητες: τα σωματίδια και τα κύματα. Κάθε απόπειρα να αποδοθούν κυματικά χαρακτηριστικά στα σωματίδια ή σωματιδιακός χαρακτήρας στην ακτινοβολία έρχεται σε πλήρη αντίθεση με την Κλασσική Φυσική.

1.2.3. Κλασσική Στατιστική Μηχανική

"Η Γενική θερμοδυναμική ξεκινά από το γεγονός – όσο βέβαια μπορούμε να πούμε από την πείρα της μέχρι τώρα – ότι, της οι φυσικές διαδικασίες είναι μη αντιστρεπτές. Έτσι, σύμφωνα με της αρχές της φαινομενολογίας, η θερμοδυναμική του δεύτερου νόμου διατυπώνεται με τέτοιο τρόπο, ώστε η άνευ όρων μη αντιστρεπτότητα όλων των φυσικών διαδικασιών να αναγορεύεται σε πρωταρχικό αξίωμα. Ευ τούτοις, απαιτείται της και η επεξεργασία μηχανικών μοντέλων, τα οποία ακριβώς δεν καλύπτουν το ίδιο πάντα έδαφος με τη Γενική Θερμοδυναμική, βαθαίνουν την κατανόησή της, παρέχοντας τη δυνατότητα μιας διαφορετικής αντίληψης".

Ludwing Boltzmann

Με την κλασσική μηχανική και την κλασσική θεωρία πεδίων είμαστε σε θέση να εξηγήσουμε της νόμους οποιουδήποτε φαινομένου, μελετώντας την κίνηση της πλήθους σωματιδίων υπό την επίδραση των αμοιβαίων της δυνάμεων [7,8,9]. Ωστόσο για ένα μακροσκοπικό σώμα δεν ισχύουν τα παραπάνω διότι:

- Ο αριθμός των σωματιδίων του μακροσκοπικού σώματος είναι τόσο μεγάλος (~10^{23}) ώστε η λύση των εξισώσεων της κίνησης να είναι πρακτικά αδύνατη για κάθε σωματίδιο ξεχωριστά.
- Από την πλευρά των θερμοδυναμικών μεγεθών, η περιγραφή της σωματιδιακής κίνησης δεν είναι αναγκαία, π.χ. για τον υπολογισμό της πίεσης της αερίου, αρκεί η γνώση του αριθμού των σωματιδίων και της κατανομής των ταχυτήτων της. Δηλαδή αρκεί η γνώση της στατιστικής κατανομής στο χώρο των θέσεων και των ορμών.
- Ο βασικός νόμος που διέπει της μεταβολές των απομονωμένων μακροσκοπικών συστημάτων, δηλαδή ο νόμος αύξησης της εντροπίας [10,11], δεν συνάγεται από της εξισώσεις της μικροσκοπικής κίνησης (που είναι αναλλοίωτες στην αντιστροφή του χρόνου) διότι οι μακροσκοπικές μεταβολές είναι μονής κατεύθυνσης. Έτσι ο νόμος αύξησης της εντροπίας πρέπει να θεωρηθεί ανεξάρτητος θεμελιώδης νόμος της φύσης.

Ο στατιστικός ορισμός της εντροπίας είναι:

$$S = k \log W \qquad (5)$$

όπου k η σταθερά του Boltzmann και W το "στατιστικό βάρος" μιας συγκεκριμένης κατανομής μορίων στο χώρο των φάσεων. Το W ορίζεται ως ο αριθμός των συνδυασμών με τους οποίους μπορεί να πραγματοποιηθεί η θεωρούμενη κατανομή. Η πιθανότερη κατανομή μορίων, δηλαδή αυτή που μεγιστοποιεί την εντροπία, αντιστοιχεί στην κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας και είναι:

$$\frac{dN}{N} = Ae^{-\frac{E}{kT}} d\tau \qquad (6)$$

όπου dN/N είναι το ποσοστό των μορίων που βρίσκονται σε όγκο dτ και έχουν ενέργεια Ε. Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση (6) η ποσότητα:

$$P = Ae^{-E/kT} \qquad (7)$$

δίνει την πιθανότητα να έχει ένα σωματίδιο ενέργεια Ε σε θερμοκρασία Τ. Ο τύπος αυτός είναι ο τύπος του Boltzmann και αποτελεί τον κεντρικό τύπο της Στατιστικής Μηχανικής [10,11,12].

Τέλος, ένας από τους βασικούς νόμους της Στατιστικής Μηχανικής η οποία μελετά τη μέση τιμή των φυσικών ιδιοτήτων πολύ μεγάλων συνόλων από ξεχωριστά σωματίδια που κινούνται τυχαίως, είναι το Θεώρημα της Ισοκατανομής: Η ολική ενέργεια ενός μεγάλου πλήθους χωριστών σωματίων, που ανταλλάσουν μεταξύ τους την ενέργειά τους με κρούσεις, κατανέμεται εξίσου (κατά μέσο όρο) σε όλα τα σωμάτια.

Συνοψίζοντας, στον παρακάτω πίνακα (πίνακας 1) παρουσιάζεται το οικοδόμημα των θεμελιωδών κλασσικών νόμων. Στις αρχές του 20ου αιώνα, η πειραματική εφαρμογή αυτών των νόμων, των μεθόδων και των προτύπων της Κλασσικής Φυσικής στη μελέτη των μοριακών, ατομικών και πυρηνικών συστημάτων, στα οποία συμβαίνουν μικροσκοπικά φαινόμενα, δηλαδή φαινόμενα που δεν είναι δυνατόν να παρατηρηθούν απ' ευθείας, είχε ως αποτέλεσμα να εμφανίζονται αδικαιολόγητες και μη αναμενόμενες παραφωνίες.

ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ			
	ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ	ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΠΕΔΙΩΝ	ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ
Θεμελιώδεις νόμοι	$F = \frac{dp}{dt}$	1: Ηλεκτρομαγνητικό πεδίο $\nabla E = 4\pi\rho, \ \nabla B = 0$ $\nabla \times E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}$ $\nabla \times B = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} J$ $F = q\left(E + \frac{1}{c} v \times B\right)$ 2: Πεδίο βαρύτητας $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$	$\Delta S \geqslant 0$ $S = k \log W$

Πίνακας 1: Θεμελιώδεις Κλασσικοί Νόμοι

1.3. Οι αποτυχίες της Κλασσικής Θεωρίας

Στην παρούσα ενότητα γίνεται μία συνοπτική ανασκόπηση των πειραμάτων που κατέδειξαν την ανάγκη αναθεώρησης αρκετών από τις έννοιες της Κλασσικής Φυσικής. Στο πρώτο μέρος, θα αναφερθούν τα φαινόμενα (φάσμα μέλανος σώματος, φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, φαινόμενο Compton) που οδήγησαν σε αναθεώρηση της κλασσικής θεωρίας για το φώς σαν συνεχούς ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας χωρίς σωματιδιακό χαρακτήρα. Στο δεύτερο μέρος με αφετηρία τα φασματοσκοπικά δεδομένα θα αναφερθούν τα φαινόμενα που δείχνουν την κβάντωση των ενεργειακών καταστάσεων στα άτομα και αποδεικνύουν τις κυματικές ιδιότητες των ηλεκτρονίων ταυτόχρονα με τις σωματιδιακές.

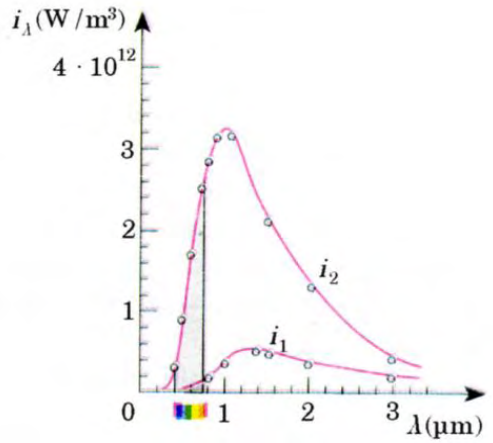
1.3.1. Κβάντωση ΗΜ ακτινοβολίας – Ο σωματιδιακός χαρακτήρας του φωτός

1.3.1.1. Η ακτινοβολία μέλανος σώματος

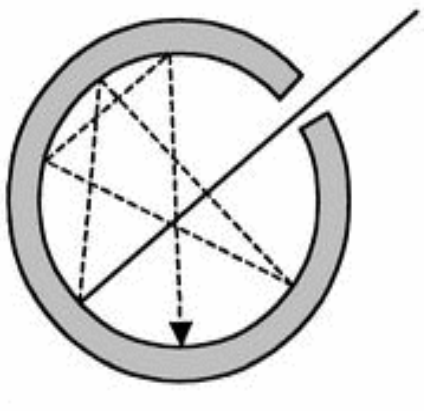
"Μέχρι πρόσφατα η συνέχεια όλων των δυναμικών φαινομένων παιρνόταν ασυζητητί σαν η βάση για όλες τις φυσικές θεωρίες, μέχρι που ανυψώθηκε στο γνωστό δόγμα: «Η φύση δεν κάνει άλματα», περίπου όπως συνέβη άλλοτε με τις απόψεις του Αριστοτέλη. Εν τούτοις η τωρινή έρευνα έχει προκαλέσει σημαντικές ρωγμές ακόμα και σ' αυτό το απόρθητο οχυρό της Φυσικής Επιστήμης".

M. Planck

Μέλαν σώμα, είναι ένα ιδανικό σώμα που απορροφά πλήρως (100%) κάθε προσπίπτουσα ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία οποιασδήποτε συχνότητας. Καμιά ακτινοβολία δεν το διαπερνά και καμιά δεν ανακλάται από αυτό. Οι ιδιότητες αυτές καθιστούν ένα μέλαν σώμα, ιδανική πηγή θερμικής ακτινοβολίας: *Η ποσότητα και το μήκος κύματος της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας που εκπέμπεται από μέλαν σώμα, εξαρτάται αποκλειστικά από την θερμοκρασία του* [13]. Η ενεργειακή κατανομή της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας στις διάφορες συχνότητες έχει τη μορφή που δείχνουν οι καμπύλες του σχήματος 1.



Σχήμα 1: Ενεργειακή κατανομή μέλανος σώματος



Σχήμα 2: Μέλαν σώμα

Ένα απλό θεωρητικό μοντέλο μέλανος σώματος δίνεται από μια κοιλότητα μέσα σε ένα υλικό θερμοκρασίας Τ (σχήμα 2). Εξαιτίας της θερμικής κίνησης των φορτισμένων σωματιδίων του υλικού των τοιχωμάτων της κοιλότητας εκπέμπεται ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Η παγιδευμένη στην κοιλότητα ακτινοβολία αλληλεπιδρά με τα φορτισμένα σωματίδια μεταβιβάζοντας σ' αυτά ενέργεια. Όταν ο ρυθμός απορρόφησης ενέργειας από τα τοιχώματα είναι ίσος με τον ρυθμό εκπομπής, τότε έχει επιτευχθεί θερμική ισορροπία μεταξύ ύλης και ακτινοβολίας. Ανοίγοντας μια οπή στην κοιλότητα, μικρή ως προς τις διαστάσεις της κοιλότητας, τότε η ακτινοβολία «ισορροπίας» που διαφεύγει δεν επηρεάζει την ισορροπία και μπορούμε να μελετήσουμε τις ιδιότητές της με ένα φασματοσκόπιο. Το μέγεθος που μετράμε με αυτό τον τρόπο είναι η ένταση I(ν) της δέσμης σε κάθε περιοχή συχνοτήτων. Η ένταση αυτή είναι ανάλογη της ποσότητας ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας μέσα στην κοιλότητα. Η κατανομή της ενέργειας της κοιλότητας (φασματική κατανομή) στις διάφορες συχνότητες περιγράφεται από τη συνάρτηση φασματικής κατανομής η οποία ορίζεται ως εξής:

$$u(\nu,T)=\frac{\Delta E}{V\Delta\nu} \qquad (1)$$

Τα αποτελέσματα της πειραματικής ανάλυσης του φάσματος μπορούν να συνοψιστούν σε **τέσσερις πειραματικούς νόμους** [13]:

1. Ο νόμος της παγκοσμιότητας του φάσματος: *'η καμπύλη της φασματικής κατανομής είναι ανεξάρτητη από το υλικό των τοιχωμάτων, το σχήμα και του όγκο της κοιλότητας και εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία'.*
2. Ο ασυμπτωτικός νόμος του Wien: *'Για υψηλές συχνότητες η εμπειρική καμπύλη περιγράφει πολύ καλά του τύπο:*

$$u(\nu,T) = \mathrm{A}\nu^3 e^{\frac{-a\nu}{T}} \qquad (2)$$

όπου Α, α εμπειρικές σταθερές ανεξάρτητες από τη θερμοκρασία, υλικό των τοιχωμάτων, το σχήμα και του όγκο της κοιλότητας'.

3. Ο νόμος της μετατόπισης του Wien: *'Η συχνότητα μέγιστης εκπομπής μετατοπίζεται ανάλογα με τη θερμοκρασία'*:

$$\nu_{\max} = (\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha})\mathrm{T} \qquad (3)$$

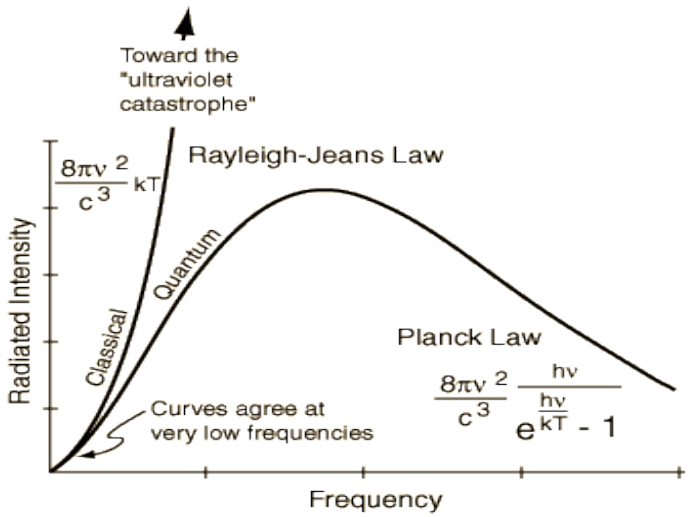
Η τιμή της σταθεράς είναι ανεξάρτητη από το υλικό των τοιχωμάτων και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της κοιλότητας.

4. Ο νόμος των Stefan-Boltzmann: *'Η ολική ηλεκτρομαγνητική ενέργεια της κοιλότητας είναι ανάλογη με την τέταρτη δύναμη της θερμοκρασίας'*:

$$U \sim \mathrm{T}^4 \qquad (4)$$

Α. Απόπειρα κλασσικής ερμηνείας του φάσματος

Οι Rayleigh και Jeans προσπάθησαν να εξηγήσουν θεωρητικά, στα πλαίσια της κλασσικής φυσικής τους παραπάνω εμπειρικούς νόμους και την καμπύλη του σχήματος 1. Τα αποτελέσματα της θεωρητικής πρόβλεψης των Rayleigh και Jeans και τα πειραματικά δεδομένα για την ίδια θερμοκρασία Τ φαίνονται σχήμα 3.



Σχήμα 3: Σύγκριση Κλασσικής-Κβαντικής ερμηνείας του φάσματος

Η κλασσική πρόβλεψη συνοψίζεται στον ακόλουθο τύπο των Rayleigh και Jeans:

$$u(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT \qquad (5)$$

Ο κλασσικός τύπος συμφωνεί με τα πειραματικά δεδομένα μόνο στην περιοχή των χαμηλών συχνοτήτων, ενώ στις υψηλές συχνότητες δεν έχει καμία σχέση με το πείραμα και οδηγεί στο παράλογο αποτέλεσμα ότι η ενέργεια της κοιλότητας γίνεται άπειρη. Η ανώμαλη συμπεριφορά στις υψηλές συχνότητες ονομάζεται 'υπεριώδης καταστροφή'[13].

Το βασικό σκεπτικό πίσω από τον κλασσικό νόμο βρίσκεται στο θεώρημα ισοκατανομής σύμφωνα με το οποίο: '*Σε κάθε θερμοδυναμικό βαθμό ελευθερίας αντιστοιχεί μια μέση ενέργεια ίση με 1/2kT*'. Σε μία κοιλότητα, ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα αποτελείται από στάσιμα κύματα που έχουν καθορισμένες συχνότητες και περιγράφονται με ακρίβεια από τις εξισώσεις Maxwell. Όμως επειδή μπορεί να υπάρχει άπειρος αριθμός δυνατών στάσιμων κυμάτων, η ολική ενέργεια της κοιλότητας θα είναι άπειρη, όπως προκύπτει από τις παρακάτω σχέσεις:

Ολική ενέργεια = (Μέση ενέργεια ανά στάσιμο κύμα) x (ολικός αριθμός στάσιμων κυμάτων)

$$\Delta E = \bar{E}(\Delta N) = kT \times \infty = \infty \qquad (6)$$

όπου $\bar{E}$=kT η μέση ενέργεια ανά στάσιμο κύμα, η οποία είναι σταθερή και ανεξάρτητη από τη συχνότητα, και ΔN ο ολικός αριθμός των στάσιμων κυμάτων.

Συμπερασματικά, η ακτινοβολία μέλανος σώματος δεν μπορούσε να περιγραφεί με βάση την υπάρχουσα κλασική θεωρία, κατά την οποία οι υπεύθυνοι για την ακτινοβολία ταλαντωτές (άρα και η ακτινοβολία της κοιλότητας) μπορούν να έχουν οποιαδήποτε ενέργεια, ανεξάρτητα από τη συχνότητά τους.

Β. Κβαντική ερμηνεία: Η υπόθεση του Planck

> *"Έξη χρόνια πάλευα με το πρόβλημα της θερμικής ισορροπίας ύλης και ακτινοβολίας χωρίς επιτυχία. Ήξερα ότι αυτό το πρόβλημα είχε θεμελιώδη σημασία για τη Φυσική. Ήξερα του τύπο που αναπαράγει την ενεργειακή κατανομή του φάσματος. Μια θεωρητική ερμηνεία έπρεπε να βρεθεί, με κάθε κόστος, οσοδήποτε ψηλό"*
>
> *M. Planck*

Ο Γερμανός φυσικός Max Planck προσπαθώντας να εξηγήσει στο σύνολο τους τα πειραματικά δεδομένα χρειάστηκε να ξεφύγει από τα όρια της κλασσικής θεωρίας. Οι υποθέσεις-κλειδιά του Planck ήταν:

- Η ενέργεια ενός στάσιμου κύματος μέσα στην κοιλότητα είναι κβαντωμένη. Κατά τη θερμική εκπομπή ακτινοβολίας [14-19], οι μόνες επιτρεπόμενες τιμές ενέργειας είναι ακέραια πολλαπλάσια της ποσότητας hν, δηλαδή:

$$E_n = nh\nu, \qquad n=0, 1, 2, 3\ldots\ldots\ldots \qquad (7)$$

όπου η σταθερά h = 6.626 x 10^{-34} Js ονομάζεται σταθερά του Planck [20], η ποσότητα hν ονομάζεται κβάντο ενέργειας και ο ακέραιος n, κβαντικός αριθμός για την συγκεκριμένη συχνότητα ν [21,22,23].

- Οι ενέργειες των ταλαντωτών που βρίσκονται στα τοιχώματα της κοιλότητας μπορούν να πάρουν μόνο διακριτές τιμές, nhν. Η ανωτέρω κβάντωση οφείλεται στο γεγονός ότι η θερμική ακτινοβολία εκπέμπεται από μικρούς ταλαντωτές που έχουν διακριτές ποσότητες ενέργειας και εκπέμπουν ή απορροφούν τις ίδιες διακριτές ποσότητες όταν "παιρνούν" από μια κατάσταση ταλάντωσης σε μια άλλη.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση E_n=nhν και το αξίωμα του Boltzmann ότι η πιθανότητα να βρίσκεται ένα σύστημα σε δοσμένη κατάσταση εξαρτάται μόνο από την ενέργεια της κατάστασης και τη θερμοκρασία: exp(-E_n/kT) προκύπτει ότι η μέση ενέργεια ανά στάσιμο κύμα είναι [24,25,26]:

$$E = \int_0^\infty u(\lambda, \mathrm{T})\, d\lambda = \sigma \mathrm{T}^4$$
$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} = 5,6705x10^{-8} Wm^{-2} K^{-4} \qquad (8)$$

Η φασματική πυκνότητα u(ν,T) ισούται, όπως και στην κλασσική θεωρία, με το γινόμενο της μέσης ενέργειας ανά στάσιμο κύμα επί την πυκνότητα ρ(ν)=8πν²/c³ των στάσιμων κυμάτων ανά μονάδα όγκου και συχνότητας. Επομένως προκύπτει:

$$u = \bar{\mathrm{E}}\, \rho(\nu) = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \frac{8\pi\nu^2}{c^3} = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} \qquad (9)$$

Η έκφραση αυτή ταιριάζει πολύ καλά με την πειραματική καμπύλη σε όλα τα μήκη κύματος και με την τιμή του h, το οποίο όταν αρχικά το εισήγαγε ο Planck,αποτελούσε μια ακαθόριστη παράμετρο της θεωρίας [20]. Η κατανομή του Planck διαφέρει από το νόμο των Rayleigh-Jeans μόνο κατά τον εκθετικό παράγοντα ο οποίος είναι πάρα πολύ σημαντικός. Στην περιοχή των μεγάλων συχνοτήτων ο εκθέτης hν/kT είναι μεγάλος, οπότε $e^{h\nu/kT} \to \infty$, άρα: u → 0 καθώς ν → ∞, κάτι που βρίσκεται σε συμφωνία με τις πειραματικές παρατηρήσεις. Στην περιοχή των χαμηλών συχνοτήτων hν/kT<< 1, οπότε $e^{h\nu/kT}$-1≈ hν/kT και ο νόμος του Planck ανάγεται στο νόμο των Rayleigh-Jeans.

Ο νόμος του Planck τεκμηριώνει επίσης τους νόμους των Stefan-Boltzmann και Wien. Ο πρώτος προκύπτει με ολοκλήρωση της ενεργειακής πυκνότητας σε όλα τα μήκη κύματος, από λ=0 έως λ=∞, η οποία δίνει:

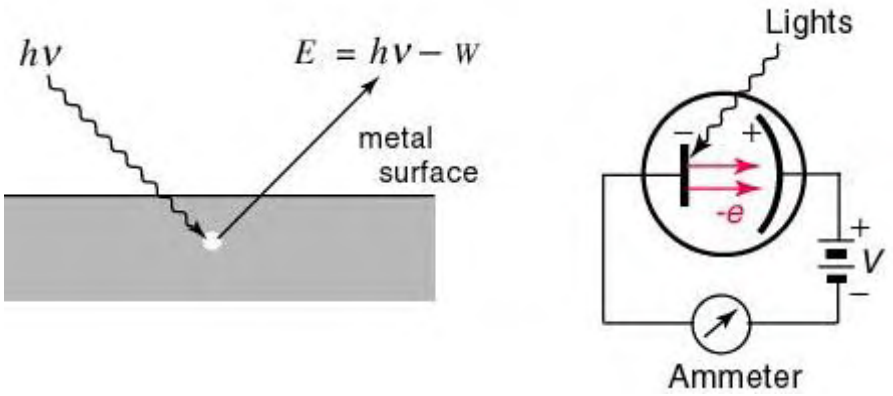
$$E = \int_0^\infty u(\lambda, \mathrm{T})\, d\lambda = \sigma \mathrm{T}^4 \quad \text{όπου } \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} = 5,6705x10^{-8} Wm^{-2} K^{-4} \qquad (10)$$

Ο νόμος του Wien προκύπτει από την εύρεση του μήκους κύματος για το οποίο dE/dλ=0, σχέση που εκφράζει τη συνθήκη μεγίστου της κατανομής. Σε υψηλές θερμοκρασίες η παράγωγος μηδενίζεται στο λ_{max} όπου:

$$T\lambda_{\max} = \frac{hc}{5k} = 0,2898x10^{-2}\,mK \qquad (11)$$

1.3.1.2. Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο είναι το φαινόμενο κατά το οποίο μια μεταλλική επιφάνεια απελευθερώνει ηλεκτρόνια στο περιβάλλον όταν προσπίπτει πάνω της φωτεινή ή υπεριώδης ακτινοβολία. Η πειραματική διάταξη για τη μελέτη του φαινομένου φαίνεται στο σχήμα 4.



Σχήμα 4: Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

Οι παράμετροι που μπορούν να μεταβληθούν στο πείραμα είναι η συχνότητα και η ένταση της φωτεινής δέσμης και η τάση της πηγής. Τα μεγέθη που μετράμε είναι η ένταση I του φωτοηλεκτρικού ρεύματος και η μέγιστη ταχύτητα των εξαγόμενων από το μέταλλο ηλεκτρονίων. **Πειραματικά** έχει διαπιστωθεί ότι για το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο ισχύουν **οι παρακάτω νόμοι** [27]:

1. Αν η συχνότητα της ακτινοβολίας είναι τέτοια που μπορεί να προκαλέσει εξαγωγή ηλεκτρονίων τότε ο αριθμός των ηλεκτρονίων που εκπέμπονται είναι ανάλογος της έντασης της προσπίπτουσας ακτινοβολίας.
2. Η μέγιστη κινητική ενέργεια με την οποία τα φωτοηλεκτρόνια εγκαταλείπουν το μέταλλο είναι γραμμική συνάρτηση της συχνότητας της προσπίπτουσας ακτινοβολίας, εξαρτάται από το έργο εξαγωγής του μετάλλου αλλά είναι ανεξάρτητη της έντασης της ακτινοβολίας.
3. Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο συμβαίνει μόνο όταν η προσπίπτουσα στη μεταλλική επιφάνεια ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία έχει συχνότητα μεγαλύτερη ή ίση από μια ορισμένη τιμή. Η τιμή αυτή ονομάζεται οριακή συχνότητα ή συχνότητα κατωφλίου $\nu_{min.}$
4. Η εκπομπή φωτοηλεκτρονίων από το μέταλλο γίνεται σχεδόν ταυτόχρονα με το φωτισμό της επιφάνειάς.

Α. Απόπειρα κλασσικής ερμηνείας

Η Κλασική Φυσική υποστηρίζει ότι ένα σώμα απορροφά ή εκπέμπει ενέργεια κατά τρόπο συνεχή και έτσι αδυνατεί να ερμηνεύσει το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο. Το κύριο χαρακτηριστικό του φαινομένου, δηλαδή η απόσπαση ηλεκτρονίων από το μέταλλο, δεν είναι

ανεξήγητο σύμφωνα με την κλασσική ηλεκτρομαγνητική θεωρία. Πράγματι, με την πρόσπτωση του ηλεκτρομαγνητικού κύματος πάνω στο μέταλλο, το ηλεκτρικό πεδίο ασκεί δύναμη (F=-eE) στα ηλεκτρόνια του μετάλλου, μεταβιβάζοντας τους κινητική ενέργεια, η οποία όταν ξεπεράσει μια ορισμένη τιμή μπορεί να τα αποσπάσει από το μέταλλο. Ωστόσο αυτός ο κλασσικός μηχανισμός δεν είναι σε θέση να εξηγήσει τους πειραματικούς νόμους. Συγκεκριμένα, σύμφωνα με την κλασσική θεωρία [28,29]:

1. Η αύξηση της έντασης της προσπίπτουσας ακτινοβολίας σημαίνει αύξηση της έντασης του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου. Αυτό σημαίνει ότι ασκείται μεγαλύτερη δύναμη στα ηλεκτρόνια η οποία μπορεί να τα αποσπάσει πολύ πιο γρήγορα αυξάνοντας με αυτόν τον τρόπο το ρυθμό εξαγωγής, δηλαδή το φωτοηλεκτρικό ρεύμα. Επομένως η ηλεκτρομαγνητική θεωρία μπορεί να εξηγήσει καταρχήν τον πρώτο πειραματικό νόμο του φωτοηλεκτρικού φαινομένου.
2. Η ταχύτητα των εξερχόμενων ηλεκτρονίων πρέπει να μεγαλώνει παράλληλα με την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, δηλαδή παράλληλα με την ένταση της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. Αντίθετα η συχνότητα της ακτινοβολίας δεν παίζει κανένα ρόλο. Αυτό έρχεται σε πλήρη αντίθεση με τον δεύτερο πειραματικό νόμο, σύμφωνα με τον οποίο η ταχύτητα των ηλεκτρονίων αυξάνει με τη συχνότητα και είναι ανεξάρτητη της έντασης.
3. Η οριακή συχνότητα ν_{min} δεν υπάρχει. Έτσι για οσοδήποτε μικρή συχνότητα επιτυγχάνεται εκπομπή ηλεκτρονίων, κάτι το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τα πειραματικά δεδομένα.
4. Η εκπομπή ηλεκτρονίων από το μέταλλο γίνεται μετά από την παρέλευση ορισμένου χρονικού διαστήματος από τη στιγμή φωτισμού του μέχρι να αποκτήσουν αρκετή κινητική ενέργεια. Στην πραγματικότητα ο μηχανισμός μεταβίβασης ενέργειας στα ηλεκτρόνια είναι ακαριαίος (10^{-9} sec), ενώ η κλασσική θεωρία προβλέπει βαθμιαίες και συνεχείς μεταβιβάσεις ενέργειας κάτι το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τα πειραματικά δεδομένα.

Β. Κβαντική ερμηνεία – Υπόθεση των φωτονίων

> *"Σύμφωνα με την παραδοχή που προτείνεται εδώ, η ενέργεια μιας φωτεινής ακτίνας, που εκπέμπεται από μια σημειακή πηγή, δεν είναι συνεχώς κατανεμημένη στο χώρο, αλλά αποτελείται από ένα πεπερασμένο αριθμό ενεργειακών κβάντων, που είναι τελείως εντοπισμένα στο χώρο, χωρίς να διαιρούνται και τα οποία μπορούν να παραχθούν ή να απορροφηθούν μόνο σαν ολόκληρες μονάδες".*
>
> *A. Einstein (1905)*

Οι υποθέσεις του Αϊνστάιν για την ερμηνεία του φωτοηλεκτρικού φαινομένου [28,29]:

- Το φως (συχνότητας f) αποτελείται από μια δέσμη "φωτεινών πακέτων" (φωτονίων) που το καθένα φέρει ενέργεια E=hv.
- Κάθε φωτόνιο μπορεί να δώσει την ενέργειά του σε (και άρα να εξάγει) ένα μόνο ηλεκτρόνιο, και η μεταφορά αυτή της ενέργειας γίνεται ακαριαία.

Σύμφωνα με τη φωτονική θεωρία της ακτινοβολίας, ο μηχανισμός εξαγωγής περιγράφεται ως εξής: Ένα φωτόνιο απορροφάται από ένα ηλεκτρόνιο και του μεταβιβάζει όλη του την ενέργεια. Ένα μέρος αυτής της ενέργειας χρησιμοποιείται για την εξουδετέρωση του έργου εξαγωγής και το υπόλοιπο μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια του εκπεμπόμενου ηλεκτρονίου. Ο παραπάνω ενεργειακός μετασχηματισμός περιγράφεται από την φωτοηλεκτρική εξίσωση του Αϊνστάιν [30]:

$$hv=W+1/2mu^2 \qquad (12)$$

από την οποία προκύπτει ότι το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο είναι δυνατό μόνο όταν η ενέργεια του φωτονίου είναι μεγαλύτερη από το έργο εξαγωγής του μετάλλου ($hv \geq W$). Η οριακή συχνότητα δίνεται από τη σχέση:

$$hv_{min}=W \qquad (13)$$

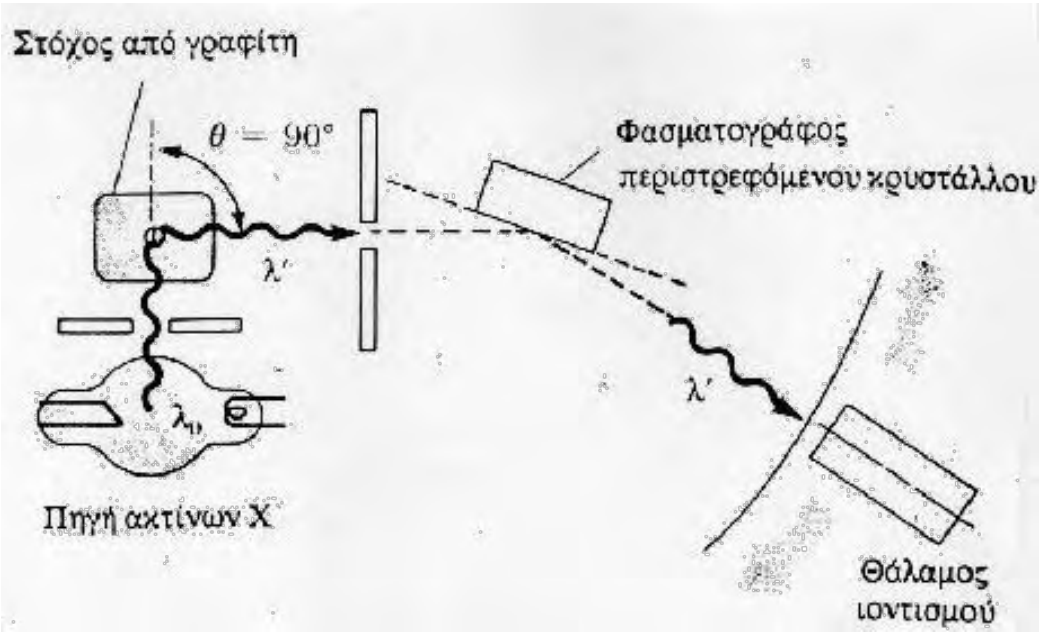
και η τιμή της εξαρτάται από το υλικό του μετάλλου, όπως ακριβώς δείχνει το πείραμα. Επίσης η αύξηση της φωτεινής έντασης σημαίνει αύξηση της ροής των φωτονίων που με τη σειρά της συνεπάγεται αύξηση του αριθμού των εξαγόμενων ηλεκτρονίων. Τέλος η εξαγωγή γίνεται ακαριαία καθώς η μεταβίβαση ενέργειας από την προσπίπτουσα ακτινοβολία γίνεται στιγμιαία με την απορρόφηση όλης της ενέργειας του φωτονίου.

Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο είναι ουσιαστικά μια ειδική περίπτωση μιας γενικότερης κατηγορίας φαινομένων που αφορούν στην αλληλεπίδραση του φωτός με την ύλη και ενεργοποιείται μόνο όταν η συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας υπερβεί μια ορισμένη τιμή. Εάν η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία είχε το συνεχή χαρακτήρα που προβλέπεται από την κλασσική θεωρία θα μπορούσε να απορροφηθεί σιγά-σιγά και ανεξάρτητα από τη συχνότητα του προσπίπτοντος φωτός. Η δράση του φωτός έχει κβαντικό χαρακτήρα και δεν μπορεί να προχωρήσει η αντίδραση, όταν η συχνότητα της ακτινοβολίας είναι μικρότερη από την τιμή v_{min}, όσο μεγάλη και αν είναι η φωτεινή ένταση. Χωρίς την κβάντωση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας τα ηλεκτρόνια θα απορροφούσαν συνεχώς ενέργεια από το φως οποιασδήποτε συχνότητας με αναπόφευκτο τέλος την πλήρη διάλυση της ύλης. Σε ένα τέτοιο κόσμο η ύπαρξη σταθερών μοριακών δομών θα ήταν αδύνατη.

Τέλος, ο ασυνεχής σωματιδιακός χαρακτήρας της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας έχει ανιχνεύσιμες επιπτώσεις μόνο στην περιοχή των μεγάλων συχνοτήτων (μικρά μήκη κύματος), αφού στην περίπτωση αυτή η ενέργεια του κβάντου είναι αρκετά μεγάλη ώστε να προκαλέσει ανιχνεύσιμες συνέπειες. Στην περιοχή των χαμηλών συχνοτήτων η κλασσική θεωρία δίνει αξιόπιστες προβλέψεις, όπως φαίνεται και από την επιτυχία του κλασσικού τύπου των Rayleigh-Jeans σ' αυτή την περιοχή.

1.3.1.3. Το φαινόμενο Compton

Το φαινόμενο Compton αναφέρεται στη σκέδαση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας από φορτισμένα σωματίδια (συνήθως ελαφρώς δέσμια ηλεκτρόνια) [31,32]. Η πειραματική διάταξη που χρησιμοποίησε ο Compton φαίνεται σχηματικά στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 5). Μια ηλεκτρομαγνητική δέσμη κατευθύνεται σε ένα μεταλλικό στόχο και σκεδάζεται από τα ηλεκτρόνια του. Ένας ανιχνευτής τοποθετημένος διαδοχικά σε διάφορες γωνίες μετρά τη συχνότητα της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας συναρτήσει της γωνίας σκέδασης θ. Το βασικό αποτέλεσμα της δουλειάς του συνοψίζεται στον εξής πειραματικό νόμο: "***Η σκεδαζόμενη ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία έχει συχνότητα μικρότερη από την αρχική. Η τιμή της εξαρτάται από τη γωνία σκέδασης***".



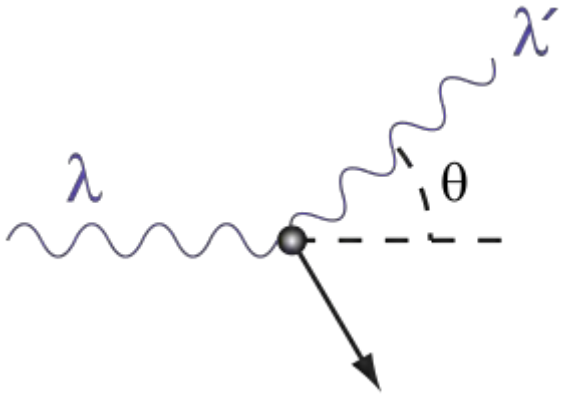
Σχήμα 5: Το πείραμα Compton

Α. Απόπειρα κλασσικής ερμηνείας

Σύμφωνα με την **κλασσική θεωρία** ο μηχανισμός της σκέδασης ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος (ακτίνες Χ) από ένα φορτισμένο σωματίδιο είναι πολύ απλός και περιγράφεται ως εξής: Το ηλεκτρικό πεδίο του κύματος θέτει το ηλεκτρόνιο σε αρμονική ταλάντωση με συχνότητα ίση με τη συχνότητα του κύματος. Το ταλαντευόμενο ηλεκτρόνιο επιταχύνεται και εκπέμπει με τη σειρά του ένα δευτερογενές ηλεκτρομαγνητικό κύμα με συχνότητα ίση με τη συχνότητα της ταλάντωσης, η οποία ισούται με τη συχνότητα του αρχικού κύματος. Επομένως, σύμφωνα με την κλασσική ανάλυση, η συχνότητα της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας είναι ίση με την αρχική. Το πείραμα, όμως, έδειχνε πως η συχνότητα της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας εξαρτάται από τη γωνία σκέδασης [33]. Η κλασική θεωρία ήταν κατά συνέπεια ανεπαρκής για την εξήγηση του φαινομένου.

Β. Κβαντική ερμηνεία

Σύμφωνα με τη φωτονική θεωρία της ακτινοβολίας, το φαινόμενο Compton είναι μια ελαστική κρούση ενός φωτονίου με ένα ηλεκτρόνιο. Ο μηχανισμός του φαινομένου περιγράφεται ακολούθως: το φωτόνιο απορροφάται προς στιγμή από το ηλεκτρόνιο και αμέσως επανεκπέμπεται σε μια κατεύθυνση διαφορετική από την αρχική, όπως φαίνεται στο σχήμα 6.



Σχήμα 6: Σκέδαση Compton

Οι υποθέσεις που εισήχθησαν στην θεωρητική εξαγωγή του φαινομένου Compton [33] ήταν:

- Η προσπίπτουσα ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία αποτελείται από φωτόνια με ενέργεια που δίνεται από τον τύπο του Planck (E=hν)
- Τα φωτόνια, όντας σωματίδια, σκεδάζονται από ελαφρώς δέσμια ατομικά ηλεκτρόνια
- Τα ηλεκτρόνια κινούνται με σχετικιστικές ταχύτητες
- Η ενέργεια και η ορμή πριν και μετά την σκέδαση είναι διατηρούμενες ποσότητες

Καθώς το δευτερογενές φωτόνιο εκπέμπεται σε μια κατεύθυνση διαφορετική από την αρχική, η αρχή διατήρησης της ορμής επιβάλλει στο αρχικά ακίνητο ηλεκτρόνιο να κινηθεί αποκτώντας κινητική ενέργεια. Αυτό σημαίνει ότι η ενέργεια του δευτερογενούς φωτονίου θα είναι μειωμένη σε σχέση με την αρχική και ίση με την κινητική ενέργεια που απέκτησε το ηλεκτρόνιο. Έτσι, αν ε, ε' και ν, ν' είναι οι αρχικές και τελικές τιμές της ενέργειας και της συχνότητας του φωτονίου προκύπτει:

$$E > E' \rightarrow h\nu > h\nu' \rightarrow \nu > \nu' \qquad (14)$$

Για τα μήκη κύματος λ=c/ν και λ'=c/ν' θα έχουμε αντίστοιχα λ' > λ. Η αλλαγή του μήκους κύματος, Δλ= λ' – λ, εξαρτάται από τη γωνία θ του δευτερογενούς φωτονίου και δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta) \qquad (15)$$

όπου h η σταθερά του Planck, m_e η μάζα ηρεμίας του ηλεκτρονίου και c η ταχύτητα του φωτός. Η ποσότητα $h/m_e c$ ονομάζεται μήκος κύματος Compton λ_c του ηλεκτρονίου. Η αλλαγή του μήκους κύματος είναι σημαντική μόνο για φωτόνια πολύ μεγάλης ενέργειας γι'

αυτό και η κινητική ενέργεια του σκεδαζόμενου ηλεκτρονίου θα' ναι επίσης πολύ μεγάλη. Όταν $\lambda=\lambda_c$, τότε η ενέργεια του φωτονίου $E=h\nu=hc/\lambda$ είναι ίση με την ενέργεια ηρεμίας mc^2 του ηλεκτρονίου. Επομένως το φαινόμενο Compton είναι σημαντικό όταν η ενέργεια του πρωτογενούς φωτονίου είναι συγκρίσιμη ή μεγαλύτερη από την ενέργεια ηρεμίας του ηλεκτρονίου [34-36].

Με την παρατήρηση του φαινομένου Compton το 1923, καταρρέουν και οι τελευταίες αντιρρήσεις για τον δυαδικό χαρακτήρα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας και η υπόθεση του κυματοσωματιδιακού δυισμού του φωτός αποκτά πλέον ακλόνητη πειραματική βάση.

1.3.1.4. Ο κυματοσωματιδιακός δυισμός του φωτός

Η υπόθεση των φωτονίων έρχεται σε πλήρη αντίθεση με την κλασσική θεωρία στα πλαίσια της οποίας η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία έχει αποκλειστικά κυματικό χαρακτήρα χωρίς κανένα σωματιδιακό υπόβαθρο. Με την υπόθεση των φωτονίων, το ηλεκτρομαγνητικό κύμα έχει ταυτόχρονα κυματικό και σωματιδιακό χαρακτήρα [37].

Σύμφωνα με τη θεωρία της Σχετικότητας, η σχέση ενέργειας-ορμής ενός σωματιδίου μάζας m είναι:

$$E^2=p^2c^2+m^2c^4 \qquad (16)$$

Το φωτόνιο κινείται με την ταχύτητα του φωτός, οπότε θα έχει μάζα ηρεμίας ίση με το μηδέν, και από την σχέση (16) για m=0, προκύπτει:

$$E = cp \qquad (17)$$

Οι σχέσεις που συνδέουν τα κυματικά (συχνότητα, μήκος κύματος) με τα σωματιδιακά χαρακτηριστικά (ενέργεια, ορμή) είναι:

$$E = h\nu \qquad p = \frac{h}{\lambda} \qquad (18)$$

Ο συνδετικός κρίκος ανάμεσα σ' αυτές τις δύο σχέσεις (18) είναι η σταθερά h του Planck. Εάν περιγράψουμε τα κυματικά χαρακτηριστικά του φωτονίου συναρτήσει της κυκλικής συχνότητας ω και του κυματαριθμού k:

$$\omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} = 2\pi\nu \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

τότε οι σχέσεις (18) παίρνουν τη μορφή:

$$\mathrm{E} = h\nu = \frac{h}{2\pi}\omega \qquad p = \frac{h}{2\pi}k \qquad (19)$$

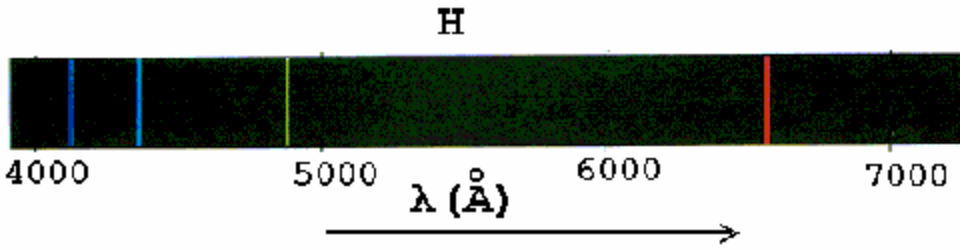
Η σταθερά $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ χρησιμοποιείται σχεδόν αποκλειστικά στη σύγχρονη κβαντομηχανική με το όνομα ανηγμένη σταθερά του Planck. Μέσω του ħ οι εξισώσεις (19) του Αϊνστάιν γράφονται:

$$\mathrm{E} = \hbar\omega \qquad p = \hbar k \qquad (20)$$

1.3.2. Κβάντωση ενεργειακών καταστάσεων – Κυματική συμπεριφορά ηλεκτρονίων

1.3.2.1. Ατομικά φάσματα

Σε αντίθεση με το συνεχές φάσμα του μέλανος σώματος, το οποίο εξαρτάται μόνο από την θερμοκρασία, τα ατομικά φάσματα, τα οποία είναι γραμμικά, διαφέρουν τρομερά από άτομο σε άτομο και φαίνονται πολύπλοκα και ακανόνιστα. Το φάσμα εκπομπής του ατόμου του υδρογόνου (σχήμα 7) αποτελείται από ένα χαρακτηριστικό σύνολο φωτεινών γραμμών που αντιστοιχούν στα διάφορα μήκη κύματος. Όπως βλέπουμε στο σχήμα 7 το φάσμα είναι πολύπλοκο χωρίς κάποια εμφανή κανονικότητα (όπως οι νόμοι του Wien και του Boltzmann για το μέλαν σώμα) που θα διευκόλυνε την θεωρητική ερμηνεία του.



Σχήμα 7: Φάσμα εκπομπής του ατόμου του Υδρογόνου

Πρώτος ο Ελβετός J. J. Balmer το 1885 παρατήρησε ότι οι φασματικές γραμμές του ατόμου του υδρογόνου ταιριάζουν τέλεια στον ακόλουθο εμπειρικό τύπο:

$$\lambda_n = 3646\frac{n^2}{n^2-4}\,\mathring{A} \qquad n=3,\ 4,\ 5,\ldots\ldots \qquad (1)$$

Ο τύπος του Balmer, δεν προσφέρει φυσική ερμηνεία του φάσματος. Εντούτοις, η σχέση αυτή βοήθησε στην πρόβλεψη νέων γραμμών, οι οποίες δεν είχαν παρατηρηθεί αρχικά, και συνέβαλλε αποφασιστικά στην μετέπειτα διαμόρφωση μιας πλήρους θεωρητικής ερμηνείας του φάσματος του υδρογόνου. Μια από τις μεγαλύτερες συνεισφορές του Balmer υπήρξε η αναζήτηση παρομοίων σχέσεων για άλλα στοιχεία και η ανακάλυψη και άλλων φασματικών σειρών και κανόνων για το υδρογόνο. Η επέκταση των μετρήσεων του φάσματος και σε άλλες περιοχές πέρα από την ορατή και την περιοχή του εγγύς υπεριώδους έκανε δυνατή και την ανακάλυψη και άλλων φασματικών σειρών σαν του Balmer, που έχουν την γενική μορφή :

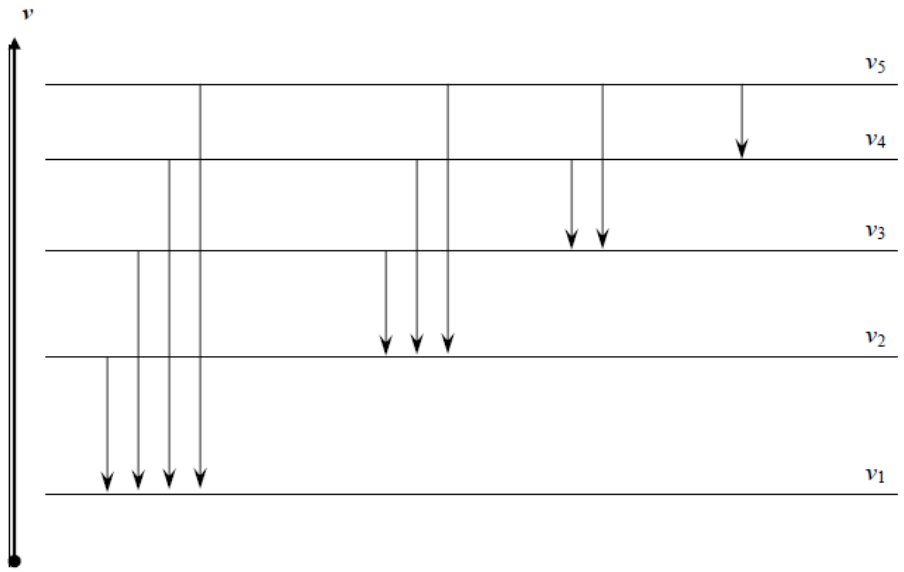
$$\nu = R\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right) \qquad (2)$$

όπου το ν παριστάνει τις φασματικές συχνότητες, τα n,m είναι ακέραιοι αριθμοί και $R=3{,}27\times10^{15}\ sec^{-1}$ μια εμπειρική σταθερά, η σταθερά του Rydberg.

Οι φασματικές γραμμές άλλων στοιχείων μπορούν να γραφούν με τη μορφή:

$$\nu = \nu_m - \nu_n \qquad (3)$$

Ο εμπειρικός νόμος που εκφράζεται με την παραπάνω σχέση είναι γνωστός σαν συνδυαστική αρχή: “ *Το φάσμα κάθε στοιχείου χαρακτηρίζεται πλήρως από μια ακολουθία φασματικών όρων* $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots\ldots \upsilon_n$, *ώστε: Κάθε φασματική γραμμή μπορεί να γραφεί σαν διαφορά δύο φασματικών όρων”.* Αυτό είναι πολύ σημαντικό διότι μας επιτρέπει την παρουσίαση ενός πολύπλοκου φάσματος, με πάρα πολλές φασματικές γραμμές, με βάση μερικούς μόνο θεμελιώδεις φασματικούς όρους. Η θεμελιώδης ακολουθία των φασματικών όρων επιλέγεται έτσι ώστε οι υπόλοιπες φασματικές γραμμές να προκύπτουν (από την συνδυαστική αρχή) συνδυάζοντας όλες τις δυνατές διαφορές των φασματικών όρων. Προς τον σκοπό αυτό, οι φασματικοί όροι παρουσιάζονται σαν οριζόντιες γραμμές σε κατάλληλο διάγραμμα φασματικών όρων, ώστε να κόβουν τον κατακόρυφο άξονα συχνοτήτων στις κατάλληλες τιμές των συχνοτήτων (οι οποίες αντιστοιχούν στους συγκεκριμένους φασματικούς όρους). Οι φασματικές γραμμές τότε, παρουσιάζονται σαν κατακόρυφα βέλη, όπως στο σχήμα 8.



Σχήμα 8: Διάγραμμα φασματικών όρων

Διαπιστώθηκε ακόμα ότι ενώ κάθε φασματική γραμμή μπορεί να γραφεί σαν διαφορά δύο φασματικών, το αντίθετο δεν ισχύει πάντα και κάποιες διαφορές ν_m-ν_n δεν εμφανίζονται στο φάσμα. Αυτές οι απαγορευμένες διαφορές διέπονται από ορισμένους κανόνες επιλογής ώστε να διακρίνονται από τις επιτρεπόμενες μεταβάσεις. Έτσι εάν ξέρουμε n φασματικούς όρους, τότε υπάρχουν n(n-1)/2 φασματικές γραμμές. Από το σχήμα 8 προκύπτει ότι κάθε κατακόρυφη γραμμή ισούται πάντοτε με το άθροισμα ή τη διαφορά δύο άλλων. Αυτό σημαίνει ότι: “*Το άθροισμα ή διαφορά δύο παρατηρούμενων συχνοτήτων είναι πάλι μια παρατηρούμενη συχνότητα*”. Σύμφωνα με τον τύπο του Balmer η ακολουθία φασματικών όρων για το άτομο του υδρογόνου είναι:

$$\nu_n = \frac{R}{n^2} \qquad (4)$$

Αυτό το εμπειρικό αποτέλεσμα θα παίξει σημαντικό ρόλο στη διατύπωση της θεωρίας του Bohr.

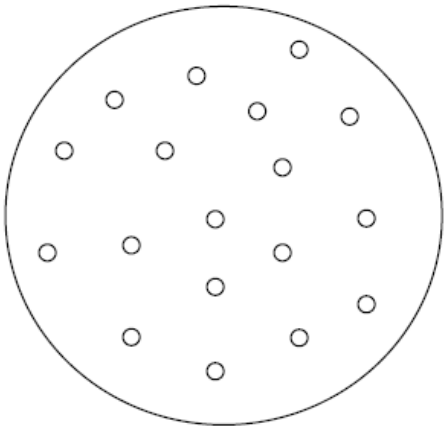
Α. Απόπειρα κλασσικής ερμηνείας – Κλασσικά ατομικά πρότυπα

Από την μέχρι τώρα πείρα μας με το μέλαν σώμα, θα περιμέναμε πως κάποιου είδους ταλαντώσεις των ατομικών ηλεκτρονίων θα είναι υπεύθυνες για το ατομικό φάσμα του υδρογόνου. Είναι δηλαδή προφανές, ότι η προέλευση του ατομικού φάσματος εκπομπής του υδρογόνου σχετίζεται άμεσα με τις ενεργειακές καταστάσεις του ατόμου του υδρογόνου.

Στην κλασσική φυσική μια καθαρά περιοδική κίνηση ενός φορτισμένου σωματιδίου είναι αδύνατη. Τα ηλεκτρόνια περιστρέφονται γύρω από τον πυρήνα ως επιταχυνόμενα φορτισμένα σωματίδια εκπέμποντας συνεχώς ακτινοβολία, οπότε το πλάτος της ταλάντωσης του μειώνεται συνεχώς. Η κίνηση γίνεται απεριοδική και το αντίστοιχο φάσμα συνεχές. Επιπλέον το βασικό συμπέρασμα της κλασσικής ανάλυσης ότι στην περίπτωση διακριτού φάσματος, το οποίο οφείλεται σε περιοδική κίνηση, ότι μαζί με τις θεμελιώδεις συχνότητες θα εμφανίζονται και οι ανώτερες αρμονικές τους, δεν βρίσκει καμία πειραματική επιβεβαίωση. Αντίθετα, το πειραματικό φάσμα, όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη παράγραφο διέπεται από μια κλασσικά ανεξήγητη αρχή σύμφωνα με την οποία *το άθροισμα ή διαφορά δύο παρατηρούμενων συχνοτήτων είναι πάλι μια παρατηρούμενη συχνότητα.* Ο μόνος τρόπος για να συμβιβαστεί η κλασσική συνδυαστική αρχή με την απουσία ανώτερων αρμονικών στο πειραματικό φάσμα είναι να δεχτούμε ότι όλα τα ηλεκτρόνια εκτελούν απλές αρμονικές ταλαντώσεις με συχνότητες ίσες με τις παρατηρούμενες. Ωστόσο απ' ότι "*ξέρομε μέχρι τώρα η Φύση δεν δουλεύει μ' αυτόν τον τρόπο*".

Β. Το ατομικό πρότυπο του Thomson

Το πρώτο κλασικό ατομικό μοντέλο οφείλεται στον J.J. Thomson, ο οποίος αναγνώρισε και ανακάλυψε το ηλεκτρόνιο ως θεμελιώδες συστατικό του ατόμου . Σύμφωνα με το μοντέλο του Thomson, το άτομο αποτελείται από ένα ομοιογενώς φορτισμένο σφαιρικό πυρήνα με θετικό φορτίο μέσα στον οποίο είναι κατανεμημένα, επίσης ομοιογενώς, τα σημειακά αρνητικά φορτία των ηλεκτρονίων, όπως φαίνεται παραστατικά στο σχήμα 9.



Σχήμα 9: Ατομικό πρότυπο του Thomson

Για το άτομο του υδρογόνου το μοντέλο του Thomson προβλέπει την ύπαρξη ενός μοναδικού ηλεκτρονίου, με φορτίο – e, μέσα σε μια ομοιογενώς θετικά φορτισμένη σφαίρα, ακτίνας R ίσης με την ακτίνα του ατόμου και με φορτίο + e. Στην κανονική κατάσταση του ατόμου, λόγω της σφαιρικής συμμετρίας, το ηλεκτρόνιο θα βρίσκεται στο κέντρο της σφαίρας χωρίς να ασκείται επάνω του καμία δύναμη . Όταν το άτομο διεγερθεί, το ηλεκτρόνιο εκτελεί μια αρμονική ταλάντωση και το μήκος κύματος της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας (~10^3 Å) επαληθεύει το πειραματικό φάσμα του σχήματος 7. Όμως το γεγονός ότι το μοντέλο προβλέπει μια μόνο γραμμή (μία συχνότητα) έρχεται σε πλήρη αντίθεση με το φάσμα του σχήματος 7 το οποίο αποτελείται από ένα μεγάλο αριθμό χαρακτηριστικών φασματικών γραμμών. Έτσι, το ατομικό πρότυπο του Thomson παρουσιάζει ένα σοβαρό πρόβλημα ασυμφωνίας με το πείραμα.

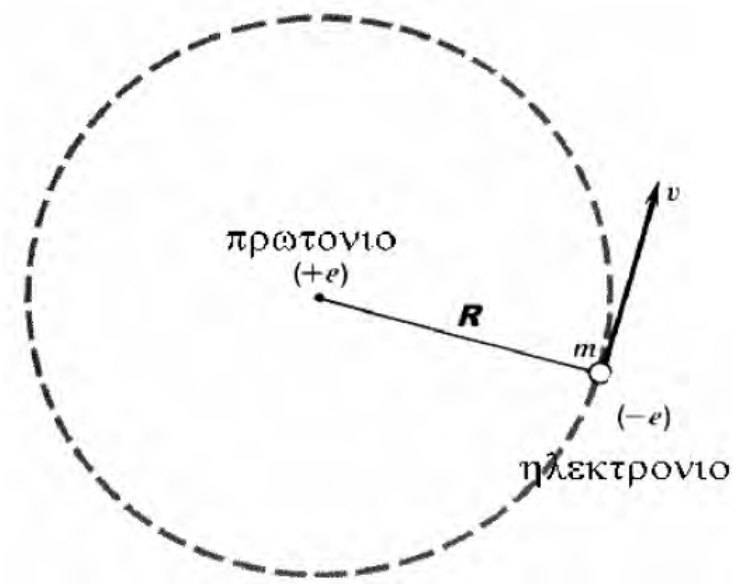
C. Το ατομικό πρότυπο του Rutherford

> *"Ήταν το πιο απίστευτο γεγονός που μου' τύχε στη ζωή μου. Ήταν σχεδόν τόσο απίστευτο, όσο και το να βάλεις με μια οβίδα 15 ιντσών σ' ένα φύλλο χαρτιού και να γυρίσει να σε χτυπήσει. Καθώς άρχισα να το σκέφτομαι, κατάλαβα ότι αυτή η οπισθοσκέδαση θα' πρεπε να οφείλεται σε μια μοναδική κρούση και, κάνοντας τους υπολογισμούς, είδα ότι ο μόνος τρόπος για να πάρει κανείς μια τέτοια τάξη μεγέθους, ήταν να θεωρήσει ότι το μεγαλύτερο μέρος της μάζας του ατόμου ήταν συγκεντρωμένο σ' ένα μικροσκοπικό πυρήνα".*
>
> *E. Rutherford*

Την «χαριστική βολή» στο μοντέλο του Thomson έδωσε η εργασία του Rutherford, ο οποίος ασχολήθηκε με πειράματα σκεδάσεως σωματίων *α* από άτομα. Ο Rutherford έδειξε ότι το συμπέρασμα που προκύπτει από τα πειράματα αυτά είναι ότι όλο το θετικό φορτίο του ατόμου είναι συγκεντρωμένο σε μια πάρα πολύ μικρή περιοχή στο κέντρο του ατόμου και δεν είναι απλωμένο σε όλο το άτομο. Σε πλήρη αντίθεση με ότι θα περίμενε κανείς για την σκέδαση σωματιδίων *α* (τα οποία είναι θετικά φορτισμένοι πυρήνες He) από τα θετικά φορτία του ατόμου του Thomson, τα πειράματα του Rutherford [38] έδειξαν σημαντική σκέδαση σε μεγάλες γωνίες σκεδάσεως, ακόμα και στις 180°. Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να συμβαίνει μόνο εάν τα θετικά φορτία, τα οποία συγκεντρώνουν όλη σχεδόν την μάζα του ατόμου, ήταν συγκεντρωμένα σε μια πολύ μικρή περιοχή, σχεδόν σημειακών διαστάσεων (σχήμα 10). Η ακτίνα του θετικού ατομικού πυρήνα προσδιορίστηκε από τα πειράματα σκεδάσεως πως είναι της τάξεως των 10^{-14} m, ενώ η ακτίνα του ατόμου είναι, ως γνωστόν, της τάξεως των 10^{-10} m.

Σύμφωνα με το «πλανητικό» ατομικό πρότυπο, που υιοθέτησε ο Rutherford το άτομο του υδρογόνου αποτελείται από έναν θετικά φορτισμένο πυρήνα, ένα πρωτόνιο, γύρω από τον οποίο περιστρέφεται ένα ηλεκτρόνιο (σχήμα 10). Όμως, εάν αφήσουμε ελεύθερα και ακίνητα

δυο αντίθετα σημειακά φορτία, τότε λόγω της αμοιβαίας έλξης τους, θα πλησιάσουν μέχρι η απόσταση τους να μηδενιστεί. Έτσι, ο μόνος τρόπος να διατηρηθεί ο πυρήνας και το ηλεκτρόνιο σε κάποια απόσταση *R*, παρά την αμοιβαία έλξη μεταξύ τους, είναι να έχει το ηλεκτρόνιο κάποια αρχική κινητική ενέργεια και στροφορμή ώστε να εκτελεί κυκλική τροχιά γύρω από τον πυρήνα, σε αναλογία με τις πλανητικές τροχιές γύρω από τον Ήλιο. Η ελκτική δύναμη Coulomb από τον πυρήνα δρα ως κεντρομόλος δύναμη και κρατεί το ηλεκτρόνιο σε κυκλική τροχιά ακτίνας R. Η συχνότητα περιστροφής του ηλεκτρονίου συμπίπτει με τη συχνότητα της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας και για την ίδια επιλογή ακτίνας τα αποτελέσματα συμπίπτουν με το πρότυπο του Thomson. Η μοναδική διαφορά είναι ότι το μοντέλο του Rutherford είναι και πειραματικά επιβεβαιωμένο.



Σχήμα 10: Ατομικό πρότυπο του Rutrherford

Υπάρχει όμως ένα σημαντικό πρόβλημα: Σύμφωνα με την κλασική ηλεκτρομαγνητική θεωρία το ηλεκτρόνιο επιταχύνεται συνεχώς λόγω της κεντρομόλου επιτάχυνσης, οπότε θα χάνει συνεχώς ενέργεια και θα πλησιάζει όλο και περισσότερο στον πυρήνα μέχρι να πέσει επάνω του. Σε μια τέτοια περίπτωση, λόγω της συνεχούς μεταβολής της ταχύτητας και της ακτίνας, η συχνότητα της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας θα μεταβάλλονταν συνεχώς από μια μέγιστη τιμή μέχρι το μηδέν. Έτσι το φάσμα του ατόμου θα ήταν συνεχές και όχι γραμμικό. Επομένως, σύμφωνα το κλασικό ατομικό πρότυπο του Rutherford, το άτομο του υδρογόνου, και κατ΄ επέκταση και των άλλων στοιχείων, δεν μπορεί να είναι σταθερό.

Από τα παραπάνω γίνεται προφανές ότι, μόνο μια πλήρης κβαντική θεωρία της ύλης η οποία θα προβλέπει τις κβαντισμένες ενεργειακές καταστάσεις του ατόμου μπορεί να δώσει πλήρη απάντηση στα φασματοσκοπικά δεδομένα. Η θεωρία αυτή θα αναπτυχθεί στην επόμενη παράγραφο.

1.3.2.2. Η Ατομική θεωρία του Bohr

"Αφετηρία μου δεν ήταν καθόλου η ιδέα ότι, το άτομο είναι ένα πλανητικό σύστημα σε μικρή κλίμακα και σαν τέτοιο ότι διέπεται από τους νόμους της αστρονομίας. Ποτέ δεν πήρα αυτή την αναλογία κατά γράμμα. Αφετηρία μου ήταν μάλλον η σταθερότητα της ύλης. Ένα καθαρό θαύμα αν το δει κανείς από τη σκοπιά της Κλασσικής φυσικής".

N. Bohr

Με αφετηρία την αδυναμία της κλασσικής φυσικής να εξηγήσει τόσο την ευστάθεια των ατόμων, όσο και τα φασματοσκοπικά δεδομένα [39-42], ο Bohr προχώρησε στη διατύπωση δύο υποθέσεων στηριζόμενος στα δύο κεντρικά συμπεράσματα της ατομικής φασματοσκοπίας που αναφέρθηκαν παραπάνω:

1. την συνδυαστική αρχή, $\nu = \nu_m - \nu_n$ (3)
2. την ακολουθία φασματικών όρων του ατόμου του υδρογόνου, $\nu_n = \frac{R}{n^2}$ (4)

Α. Η πρώτη συνθήκη του Bohr

Κατά τον Einstein ένα φωτόνιο συχνότητας ν έχει ενέργεια:

$$E=h\nu \qquad (5)$$

Ένα πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της σχέσης (5) με h, προκύπτει:

$$h\nu=h\nu_m - h\nu_n \qquad (6)$$

όπου το αριστερό μέλος δίνει την ενέργεια του εκπεμπόμενου φωτονίου. Λόγω της αρχής διατήρησης της ενέργειας, οι ενέργειες του ατόμου πριν και μετά την εκπομπή του φωτονίου συνδέονται με τη σχέση:

$$h\nu=E_{\alpha\rho\chi} - E_{\tau\varepsilon\lambda} \qquad (7)$$

Όμως για να αποσπάσουμε το ηλεκτρόνιο χρειάζεται να προσφέρουμε ενέργεια στο άτομο, άρα η αρχική και η τελική ενέργεια του ατόμου θα έχει αρνητικές τιμές. Από τις σχέσεις (6) και (7) προκύπτει ότι:

$$E_{\alpha\rho\chi}=-h\nu_n \quad \text{και} \quad E_{\tau\varepsilon\lambda}=-h\nu_m \qquad (8)$$

Δεδομένου ότι οι φασματικοί όροι αποτελούν μια διακριτή ακολουθία οι σχέσεις (6) δείχνουν ότι το ίδιο ισχύει και για τις επιτρεπόμενες ενέργειες του ατόμου. Οδηγούμαστε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι οι επιτρεπόμενες ενέργειες στα άτομα είναι κβαντωμένες και δίνονται από τη σχέση:

$$E_n=-h\nu_n \qquad n=1, 2, 3.... \qquad (9)$$

Επομένως, η πρώτη συνθήκη του Bohr διατυπώνεται ως εξής:

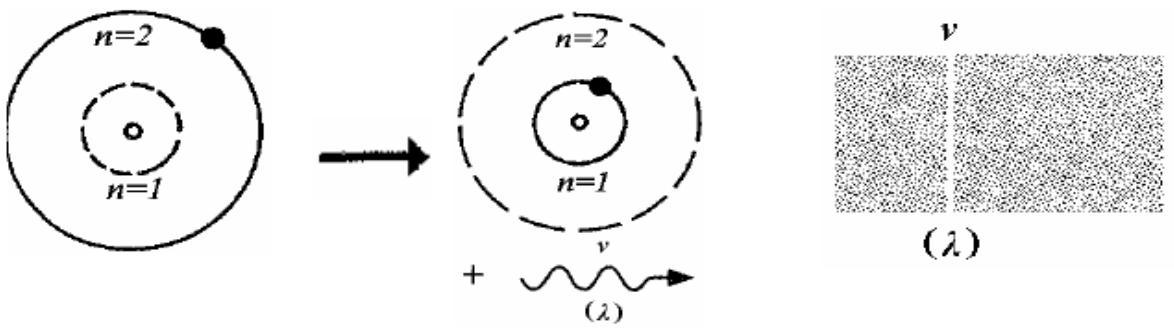
Οι ενεργειακές καταστάσεις των ατόμων είναι κβαντωμένες [43,44]. *Οι επιτρεπόμενες ενέργειες συνδέονται με την ακολουθία φασματικών όρων του κάθε ατόμου με τη σχέση:*

$$E_n=-hv_n \qquad (10)$$

Κάθε επιτρεπόμενη ενέργεια ορίζει μια στάσιμη κατάσταση στην οποία το άτομο δεν ακτινοβολεί. Ακτινοβολία εκπέμπεται μόνο κατά τη μετάβαση του ατόμου από μια ανώτερη σε μια κατώτερη ενεργειακή στάθμη. Η συχνότητα του εκπεμπόμενου φωτονίου προσδιορίζεται από την αρχή διατήρησης της ενέργειας:

$$hv=E_n - E_m \qquad (11)$$

Επειδή οι ενέργειες των ηλεκτρονίων είναι συγκεκριμένες και διακριτές σύμφωνα με το πρώτο αξίωμα του Bohr, το φάσμα του ατόμου είναι γραμμικό και χαρακτηριστικό του συγκεκριμένου ατόμου. Στο σχήμα 11 φαίνεται παραστατικά η δημιουργία του φάσματος εκπομπής του ατόμου του υδρογόνου [45-48]. Η συχνότητα της ακτινοβολίας δεν έχει καμία σχέση με την συχνότητα περιστροφής του ηλεκτρονίου, αλλά συνδέεται με τη μεταβολή ενέργειας, κατά τη μετάβαση από την τροχιά υψηλότερης ενέργειας στην τροχιά χαμηλότερης ενέργειας. Έτσι, εξηγείται όχι μόνο η γραμμικότητα του φάσματος αλλά και η συνδυαστική αρχή του Ritz.



Σχήμα 11: Παραστατική περιγραφή του φάσματος εκπομπής του ατόμου του υδρογόνου με βάση το μοντέλο Bohr

Β. Η δεύτερη συνθήκη του Bohr

Δεδομένου ότι οι ενεργειακές καταστάσεις στα άτομα είναι κβαντωμένες [49-52], οι επιτρεπόμενες ενέργειες E_n συνδέονται με τους φασματικούς όρους ν_n με τη σχέση:

$$E_n=-hv_n \qquad (10)$$

Η ακολουθία φασματικών όρων του ατόμου του υδρογόνου δίνεται από τον εμπειρικό τύπο:

$$\nu_n = \frac{R}{n^2} \qquad (4)$$

Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι οι επιτρεπόμενες ενέργειες E_n δίνονται από τη σχέση :

$$E_n = -\frac{hR}{n^2} = -\frac{13,6eV}{n^2} \qquad (12)$$

Η κβάντωση των ενεργειακών καταστάσεων του ατόμου του υδρογόνου αντανακλά το γεγονός ότι το ηλεκτρόνιο μπορεί να κινηθεί σε ορισμένες διακριτές τροχιές, τις οποίες τις θεωρούμε κυκλικές. Οι κυκλικές τροχιές είναι μονοπαραμετρικές, όποτε η γνώση μιας οποιασδήποτε ποσότητας τις καθορίζει μονοσήμαντα. Για να προσδιορίσουμε την ακτίνα και ταχύτητα του ηλεκτρονίου χρησιμοποιούμε τη σχέση που εκφράζει την ισότητα της κεντρομόλου δύναμης και της δύναμης Coulomb:

$$m\frac{\upsilon^2}{r}=\frac{e^2}{r^2} \qquad (13)$$

Αντικαθιστώντας το $m\upsilon^2=e^2/r$, στην σχέση της ολικής ενέργειας:

$$E=\frac{1}{2}m\upsilon^2-\frac{e^2}{r} \qquad (14)$$

προκύπτει ότι:

$$E=-\frac{e^2}{2r} \qquad (15)$$

όπου r η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς, και δίνεται από τη σχέση:

$$r=-\frac{e^2}{2E}=\frac{e^2}{2|E|} \qquad (16)$$

και υ η αντίστοιχη ταχύτητα περιφοράς:

$$\upsilon=\sqrt{\frac{2|E|}{m}} \qquad (17)$$

Η στροφορμή του περιστρεφόμενου ηλεκτρονίου δίνεται από τη σχέση:

$$l=m\upsilon r=e^2\sqrt{\frac{m}{2|E|}} \qquad (18)$$

Εάν αντικαταστήσουμε στην παραπάνω σχέση την ακολουθία επιτρεπόμενων ενεργειών

$$r_n=\frac{\hbar^2}{me^2}n^2=\frac{h^2}{4\pi^2me^2}n^2$$

$$\upsilon_n=\frac{e^2}{\hbar}\frac{1}{n}=\frac{2\pi e^2}{h}\frac{1}{n}$$

προκύπτει ότι:

$$l=l_n=e^2\sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}}=Ln \quad \text{όπου } L=10^{-27}\text{erg x sec}=\hbar \qquad (19)$$

Παρατηρούμε δηλαδή, ότι η στροφορμή μπορεί να πάρει μόνο τις τιμές που είναι ακέραια πολλαπλάσια της ποσότητας L= ħ.

Επομένως, η δεύτερη συνθήκη του Bohr διατυπώνεται ως εξής:

Επιτρέπονται μόνο εκείνες οι κυκλικές τροχιές, για τις οποίες η στροφορμή του ηλεκτρονίου είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της σταθεράς του Planck

$$l_n=n\hbar \qquad (20)$$

Παίρνοντας τη συνθήκη $l_n=n\hbar$ και αντιστρέφοντας τη σειρά των προηγούμενων υπολογισμών βρίσκουμε, για κάθε κβαντικό αριθμό n, την ακτίνα r_n και την ταχύτητα υ_n μέσω των σχέσεων:

$$r_n = \frac{\hbar^2}{me^2} n^2 = \frac{h^2}{4\pi^2 me^2} n^2, \quad n=1,2..... \qquad (21)$$

$$\upsilon_n = \frac{e^2}{\hbar}\frac{1}{n} = \frac{2\pi e^2}{h}\frac{1}{n}, \quad n=1, 2..... \qquad (22)$$

Η πρώτη σχέση γράφεται: $r_n=a_o n^2$ όπου $\alpha_o = \frac{\hbar^2}{me^2}$ είναι η θεμελιώδης ακτίνα του ατόμου του υδρογόνου, όπως προκύπτει από την θεωρία του Bohr [53,54,55]. Αντικαθιστώντας τις τιμές των θεμελιωδών φυσικών σταθερών

$$\hbar = 1.05459 \times 10^{-27} \text{ erg sec}$$

$$m = 9.1096 \times 10^{-28} \text{ gr}$$

$$e = 4.8033 \times 10^{-10} \text{ CGS}$$

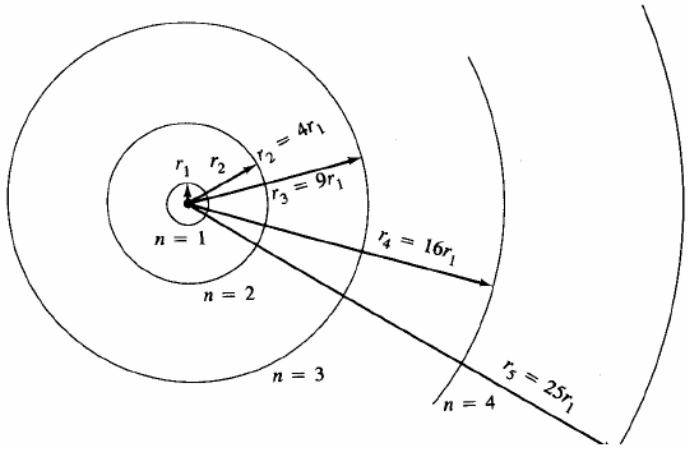
βρίσκουμε: a_o=0,529Å. Η ακτίνα της δεύτερης τροχιάς, που αντιστοιχεί σε n =2, είναι $4a_o$, ενώ η ακτίνα της τρίτης τροχιάς είναι $9a_o$, όπως φαίνεται σχηματικά στο σχήμα 12.

Αν πάρουμε σαν μονάδα συγκρίσεως την ταχύτητα του φωτός, μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{\upsilon_n}{c} = \frac{e^2}{\hbar c}\frac{1}{n}, \quad n=1,2..... \qquad (23)$$

Ο συνδυασμός των σταθερών e, ħ και c είναι καθαρός αριθμός, χωρίς διαστάσεις και έχει την τιμή 1/137. Η αδιάστατη αυτή σταθερά, η οποία συμβολίζεται συνήθως με α, έχει μεγάλη σημασία και είναι γνωστή, σαν σταθερά της λεπτής υφής:

$$a = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137} \qquad (24)$$



Σχήμα 12: Οι πέντε πρώτες κβαντισμένες ακτίνες του ατόμου του υδρογόνου με βάση το μοντέλο Bohr

C. Γενικευμένη συνθήκη κβάντωσης Wilson και Sommerfeld

Η μεγάλη επιτυχία της συνθήκης κβάντωσης του Bohr, παρά τις αυθαίρετες παραδοχές που περιείχε, οδήγησε και άλλους θεωρητικούς φυσικούς στην αναζήτηση μιας γενικότερης συνθήκης που θα ήταν εφαρμόσιμη και για διαφορετικού τύπου περιοδικές κινήσεις, όπως οι ελλειπτικές τροχιές στο άτομο του υδρογόνου ή απλή αρμονική ταλάντωση των ατόμων ενός διατομικού μορίου.

Οι Wilson και Sommerfeld το 1916 επέκτειναν την κβάντωση της στροφορμής για τις κλειστές περιοδικές τροχιές του ηλεκτρονίου στο άτομο του Bohr στην γενικότερη περίπτωση οποιουδήποτε φυσικού συστήματος του οποίου οι συντεταγμένες είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου [56,57]. Ταυτόχρονα ενοποίησαν την κβάντωση της στροφορμής του Bohr για τα άτομα, με την κβάντωση της ενέργειας των ταλαντωτών του Planck, που είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Οι κανόνες Wilson-Sommerfeld μπορούν να διατυπωθούν ως εξής:

Για κάθε φυσικό σύστημα του οποίου οι συντεταγμένες είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου, υπάρχει μία συνθήκη Κβάντωσης για κάθε μία από τις συντεταγμένες αυτές. Η συνθήκη κβάντωσης που αντιστοιχεί στην συντεταγμένη q είναι:

$$\oint p_q dq = nh \qquad (25)$$

όπου q μια γενικευμένη συντεταγμένη της κίνησης και p η αντίστοιχη γενικευμένη ορμή.

Για το μοντέλο του Bohr η κατάλληλη γενικευμένη συντεταγμένη είναι η γωνία περιφοράς θ με αντίστοιχη γενικευμένη ορμή την στροφορμή l, οπότε η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\oint pdq = \oint ld\varphi = \lambda \oint d\varphi = l2\pi = nh \Rightarrow l = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar \qquad (26)$$

που είναι η γνωστή συνθήκη του Bohr.

Στην περίπτωση μιας μονοδιάστατης ταλάντωσης μέσα σε ένα δυναμικό V(x), η γενικευμένη συνθήκη κβάντωσης γράφεται:

$$\oint p_x dx = 4\int_0^{x_{\max}} p_x dx = nh \qquad (27)$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος εισάγουμε τη σχέση που δίνει την σταθερή ενέργεια του συστήματος:

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{Dx^2}{2} \qquad (28)$$

όπου D είναι η «σταθερά ελατηρίου» του αρμονικού ταλαντωτή, που δίνεται από τη σχέση:

$$v = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}} \qquad (29)$$

Η ορμή υπολογίζεται από τη σχέση (28), και είναι:

$$p_x = \sqrt{2m(E - Dx^2/2)} \qquad (30)$$

Η σχέση (28) μπορεί να γραφεί:

$$\frac{p_x^2}{2mE} + \frac{Dx^2}{2E} = 1 \qquad (31)$$

Η εξίσωση αυτή (31) είναι εξίσωση έλλειψης με μεγάλο άξονα $a = \sqrt{2E/D}$, και μικρό άξονα $b = \sqrt{2mE}$. Το εμβαδόν της έλλειψης είναι ίσο με:

$$\pi ab = \sqrt{\frac{4mE^2}{D}} \qquad (32)$$

Κατά συνέπεια:

$$\oint p_x dx = 2\pi E\sqrt{\frac{m}{D}} = \frac{E}{v} \qquad (33)$$

Οπότε η συνθήκη κβάντωσης (25) για τον αρμονικό ταλαντωτή γράφεται:

E=nhv

η οποία είναι ταυτόσημη με την συνθήκη κβάντωσης του Planck.

1.3.2.3. Ο κυματοσωματιδιακός δυισμός της ύλης – Υπόθεση των υλικών κυμάτων De Broglie

Παρά την επιτυχία της θεωρίας του Bohr να εξηγήσει τα φάσματα απλών ατόμων, παρουσιάστηκαν μεγάλες δυσκολίες στην ανάλυση των φασμάτων πιο πολύπλοκων ατόμων. Κατά τη δεκαετία του 1920 οι Luis de Broglie, πρότεινε, σε αντιστοιχία με τα σωματιδιακά χαρακτηριστικά των οπτικών κυμάτων, την κυματική φύση των υλικών σωμάτων [58-60]. Έτσι ο γνωστός δυϊσμός σωματίου-κύματος για το φως, μπορεί σύμφωνα με τον de Broglie, να επεκταθεί για οποιοδήποτε σωμάτιο.

Η αρχή του κυματοσωματιδιακού δυισμού (De Broglie, 1923) διατυπώνεται ως [61-64]:
"Ο κυματοσωματιδιακός δυισμός είναι ένα παγκόσμιο χαρακτηριστικό της ύλης σ' όλες τις μορφές της. Οι σχέσεις που συνδέουν τα κυματικά με τα σωματιδιακά χαρακτηριστικά είναι:

$$E = \hbar\omega \qquad p = \hbar k \qquad (34)$$

και είναι ίδιες, τόσο για τα φωτόνια όσο και για τα μαζικά σωματίδια".

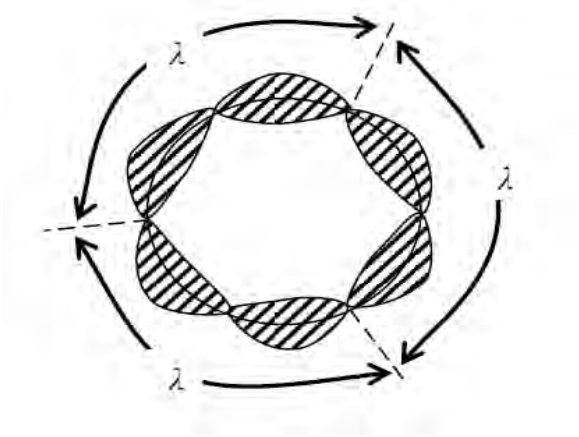
Κατά τον de Broglie, ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο είναι συνδεδεμένο με ένα βαθμιαία εξελισσόμενο κύμα, έτσι ώστε κάθε ενέργεια να είναι επιτρεπτή. Ένα όμως δεσμευμένο ηλεκτρόνιο χαρακτηρίζεται από ένα σταθερό κύμα που μπορεί να έχει μόνο μερικές καθορισμένες συχνότητες ή ενεργειακές καταστάσεις. Τα χαρακτηριστικά του κύματος που «συνοδεύει» κάποιο σωμάτιο ο de Broglie τα προσδιόρισε, χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες σχέσεις για το φωτόνιο. Δεδομένου ότι k=2π/λ η σχέση p=ħk γράφεται:

$$\lambda = \frac{h}{p} \qquad (35)$$

Εάν δεχθούμε, ότι οι στάσιμες καταστάσεις συνδέονται με στάσιμα υλικά κύματα του ηλεκτρονίου στην τροχιά του, πρέπει το μήκος της περιφέρειας, κατά μήκος της οποίας σχηματίζεται το στάσιμο κύμα, να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος.

$$2\pi r_e = n\lambda, \quad n=1, 2..... \qquad (36)$$

Βλέπουμε λοιπόν πως οι στάσιμες τροχιές του Bohr μπορούν να ερμηνευθούν σαν στάσιμα υλικά κύματα του ηλεκτρονίου, περιφοράς. Από όλες τις δυνατές τροχιές, αυτές που επιτρέπονται είναι αυτές που επιζούν της καταστροφικής συμβολής, επειδή τα υλικά τους κύματα συμβάλουν ενισχυτικά (σχήμα 13), σύμφωνα με την σχέση (36).



Σχήμα 13: Αναπαράσταση των στάσιμων υλικών κυμάτων του ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου

Οι κβαντωμένες κυκλικές τροχιές του Bohr και οι στάσιμες καταστάσεις στις οποίες αντιστοιχούν συνδέονται άμεσα και προκύπτουν από τη συνθήκη κβάντωσης της στροφορμής. Συγκεκριμένα, αντικαθιστώντας στην σχέση (36) την σχέση (35) προκύπτει [65-69]:

$$2\pi r_n = n\frac{h}{p} \Rightarrow rp = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar \qquad (37)$$

και δεδομένου ότι l=rp, θα έχουμε:

$$l = l_n = n\hbar$$

που είναι η συνθήκη κβάντωσης του Bohr.

Η κυματική ιδιότητα του ηλεκτρονίου αποδείχθηκε πειραματικά από τους C. Davisson και L.H. Germer στις ΗΠΑ και από τους G.P. Thomson και A. Reid στην Αγγλία. Οι επιστήμονες αυτοί έδειξαν ότι μία δέσμη ηλεκτρονίων υπόκειται σε περίθλαση όταν περνάει μέσα από λεπτά φύλλα χρυσού, όπως και τα κύματα των ακτινών-Χ όταν περνούν μέσα από κρυσταλλικές δομές.

Συνοψίζοντας, η ανακάλυψη της θεμελιώδους αρχής του κυματοσωματιδιακού δυισμού, στα πλαίσια της εννοιολογικής εξίσωσης *Σταθερότητα ↔ Κβάντωση ↔ Κυματική συμπεριφορά*, θα αποτελέσει το αφετηριακό αξίωμα για την οικοδόμηση μιας νέας θεμελιώδους θεωρίας, της ***Κβαντικής Μηχανικής***. Η διατύπωση των γενικών αρχών αυτής της θεωρίας αποτελεί το αντικείμενο του επόμενου κεφαλαίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η Θεμελίωση της Κβαντομηχανικής

"Όταν το αντικείμενο μιας μελέτης, σε κάθε τομέα, έχει αρχές ή στοιχεία, μόνο μέσα από τη γνωριμία τους κατακτιέται η γνώση. Δηλαδή η επιστημονική γνώση. Γιατί δεν θεωρούμε ότι ξέρομε ένα πράγμα αν δεν έχομε γνωρίσει ποτέ τις πρώτες του αρχές και δεν έχομε φέρει την αναλυσή μας ως τα απλούστερα στοιχεία του. Είναι φανερό επομένως ότι στην επιστήμη της Φύσης, όπως και σ' άλλους τομείς μελέτης, το πρώτο μας καθήκον είναι να καθορίσομε τα όσα αφορούν τις αρχές της".

Αριστοτέλης (Φυσικά)

2.1. Εισαγωγή

Από τις αρχές του 20ού αιώνα οι φυσικοί έστρεψαν την προσοχή τους και το ενδιαφέρον τους στη μελέτη των μοριακών, ατομικών και πυρηνικών συστημάτων, στα οποία συμβαίνουν μικροσκοπικά φαινόμενα, δηλαδή φαινόμενα που δεν είναι δυνατόν να παρατηρηθούν απευθείας. Σύντομα έγινε αντιληπτό ότι οι νόμοι ,οι μέθοδοι και τα πρότυπα της κλασσικής φυσικής δεν ήταν αρκετά για να εξηγήσουν τα φαινόμενα της μοριακής, ατομικής και πυρηνικής φυσικής.

Οι πρώτες προσπάθειες στην ατομική φυσική απέβλεψαν στην υπερνίκηση των δυσκολιών της κλασσικής θεωρίας με τροποποίηση νόμων ή με αλλαγή των προτύπων . Οι προσπάθειες αυτές οδήγησαν στην συνήθως καλούμενη παλαιά κβαντική θεωρία ,όπως διαμορφώθηκε με τις εργασίες των Einstein, Planck, Bohr, De Broglie που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η πρώτη αυτή μορφή της κβαντικής θεωρίας άνοιξε ορίζοντες στην επιστήμη, εξήγησε πολλά από τα τότε γνωστά φαινόμενα ,άφηνε όμως πολλά κενά στην κατανόηση άλλων. Οι προσπάθειες συνεχίστηκαν για να καταλήξουν σε επιτυχία την περίοδο 1925-1930, οπότε και διαμορφώθηκε και μια νέα μορφή κβαντικής θεωρίας με τις εργασίες των Schrödinger, Heisenberg, Dirac και άλλων.

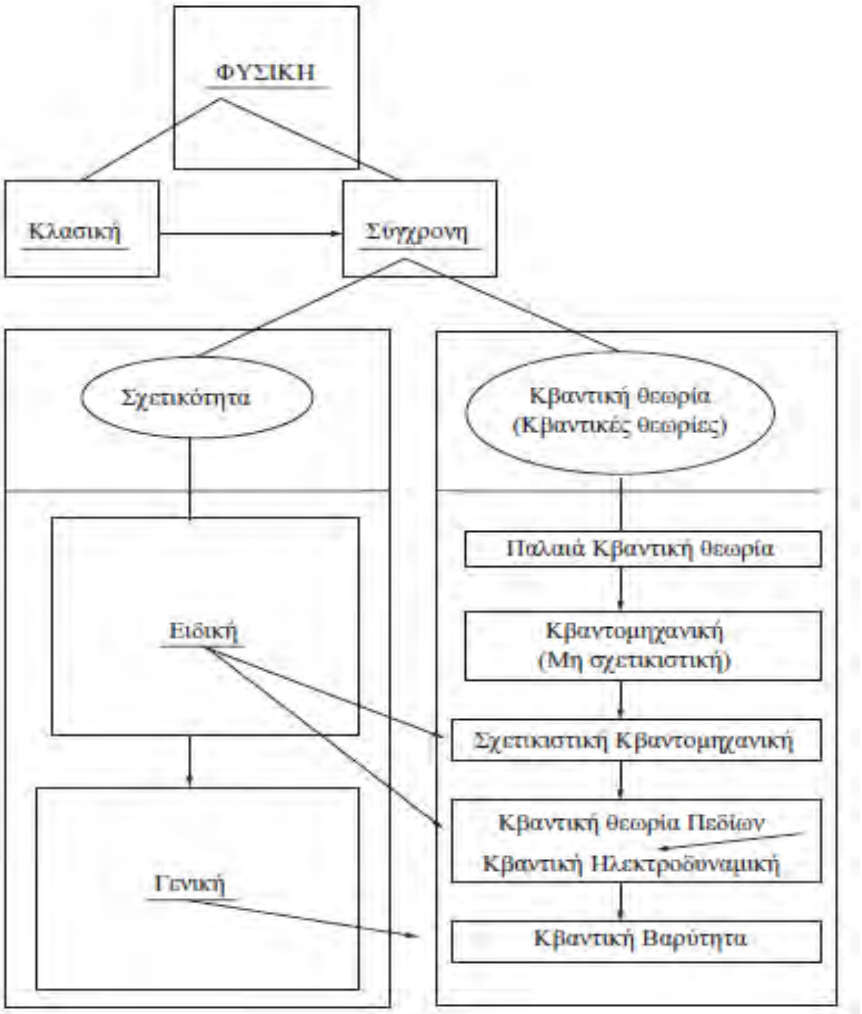
Όπως γίνεται φανερό, η κβαντική θεωρία δεν είναι μια θεωρία που προέκυψε από τη φαντασία ενός φυσικού. Οι περισσότεροι φυσικοί την αποδέχτηκαν κάτω από την πίεση των πειραματικών δεδομένων, μια και ερχόταν σε σύγκρουση με τις καθιερωμένες τους αντιλήψεις. Μερικοί μάλιστα, όπως ο Einstein, συνέχισαν να την αμφισβητούν μέχρι το τέλος της ζωής τους.

Η Κβαντική Θεωρία, που ξεκίνησε την ίδια περίπου εποχή με την ειδική θεωρία της σχετικότητας (1905), εξελίχθηκε και ολοκληρώθηκε διαδοχικά σε Κβαντομηχανική, Σχετικιστική Κβαντομηχανική και Κβαντική Θεωρία Πεδίου. Κάτω από τον γενικό όρο Κβαντική Θεωρία περιλαμβάνονται (σχήμα 14):

- *Η Κβαντομηχανική*, που αποτελεί, την ώριμη, θεμελιωμένη μορφή της «παλαιάς» κβαντικής θεωρίας. Η Κβαντομηχανική είναι μια σχετικά πλήρης φυσική θεωρία για την περιγραφή σωματιδίων του μικρόκοσμου (δηλαδή σωματιδίων με «διάμετρο» d μικρότερη από 1Å, d<1 Å) που κινούνται με ταχύτητες πολύ μικρότερες από την ταχύτητα c του φωτός.
- *Η σχετικιστική κβαντομηχανική*, η οποία συνδυάζει τις βασικές αρχές της κβαντομηχανικής και της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας. Η θεωρία αυτή δημιουργήθηκε για την περιγραφή των σωματιδίων του μικρόκοσμου με ταχύτητες, μικρότερες βέβαια, αλλά όχι αμελητέες ως προς τη c.
- Η *κβαντική θεωρία πεδίου*, που χρησιμεύει κυρίως για την περιγραφή αλληλεπιδράσεων μεταξύ σωματιδίων του μικρόκοσμου κατά τις οποίες μεταβάλλεται η φύση ή/και το πλήθος των σωματιδίων. Κατά τις αλληλεπιδράσεις αυτές συμβαίνουν μετατροπές

ενέργειας σε ύλη και αντιστρόφως (όπως προβλέπει η ειδική θεωρία της σχετικότητας) και επομένως η πρακτικά χρησιμότερη μορφή της θεωρίας αυτής είναι σχετικιστική. Η μεγάλη επιτυχία της κβαντικής θεωρίας πεδίου είναι η ακριβέστατη κβαντική περιγραφή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και της αλληλεπίδρασης των ηλεκτρονίων μ' αυτό. Το μέρος αυτό της κβαντικής θεωρίας πεδίου ονομάζεται κβαντική ηλεκτροδυναμική.

- Η *κβαντική βαρύτητα*, η οποία συνδυάζει τη γενική θεωρία της σχετικότητας με την κβαντική θεωρία πεδίου. Η θεωρία αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην κοσμολογία για την περιγραφή των αρχικών σταδίων στην εξέλιξη του σύμπαντος.



Σχήμα 14: Διαίρεση της Σύγχρονης Φυσικής

Η κβαντομηχανική αποτελεί τη βάση σχεδόν κάθε θεωρίας όλων των συστημάτων του μικρόκοσμου. Η νέα θεωρία καλείται να εξηγήσει χωρίς αυθαιρεσίες:

1. Τη σωματιδιακή υφή της ακτινοβολίας (φωτόνια – Einstein)
2. Την κυματική υφή των σωματιδίων (υλικά κύματα – De Broglie)
3. Την κβάντωση των τιμών των φυσικών μεγεθών

Σκοπός του συγκεκριμένου κεφαλαίου είναι η παρουσίαση των θεμελιωδών αρχών της Κβαντομηχανικής.

2.2. Μαθηματική περιγραφή των Υλικών κυμάτων

2.2.1. Η ελεύθερη εξίσωση του Schrodinger

Στην κλασσική κυματική θεωρία ένα επίπεδο κύμα περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$\varphi(x,t) = e^{i(kx-\omega t)} \qquad (1)$$

όπου $\omega = \frac{E}{\hbar}$ και $k = \frac{p}{\hbar}$, η συχνότητα και ο κυματαριθμός του αντίστοιχου υλικού κύματος. Άρα ένα επίπεδο υλικό κύμα περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση [70]:

$$\psi(x,t) = e^{i(px-Et)/\hbar} \qquad (2)$$

Εάν παραγωγίσουμε την (2) ως προς t και ως προς x, παίρνουμε:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar}\psi \quad \text{και} \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{ip}{\hbar}x \qquad (3)$$

Εάν αντί των διαφορικών τελεστών $\partial/\partial t$ και $\partial/\partial x$ εισάγουμε τους:

$$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad \text{και} \quad \hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \qquad (4)$$

οπότε οι σχέσεις (3) γράφονται:

$$\hat{E}\psi = E\psi \quad \text{και} \quad \hat{p}\psi = p\psi \qquad (5)$$

Από τις σχέσεις (5), για να επαληθεύεται η σχέση ενέργειας-ορμής $E=p^2/2m$, θα πρέπει η κυματοσυνάρτηση ψ(x,t) να ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\hat{E}\psi = \frac{\hat{p}^2}{2m}\psi \qquad (6)$$

όπου

$$\hat{p}^2 = \hat{p}\,\hat{p} = (-i\hbar\frac{\partial}{\partial x})(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}) = -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \qquad (7)$$

οπότε η σχέση (6) γράφεται:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \qquad (8)$$

που είναι η *ελεύθερη εξίσωση Schrodinger* [71-74].

Η ελεύθερη εξίσωση Schrödinger (8) γράφεται συνήθως στην ισοδύναμη συμβολική μορφή:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}_o\psi \qquad (9)$$

όπου

$$\hat{H}_o = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \qquad (10)$$

είναι ο λεγόμενος τελεστής της ελεύθερης Χαμιλτονιανής.

2.2.2. Η εξίσωση του Schrodinger σε εξωτερικό δυναμικό

Στην περίπτωση που το σωματίδιο κινείται μέσα σε ένα δυναμικό V(x), η ελεύθερη εξίσωση Schrodinger γράφεται:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\hat{H}\psi \qquad (11)$$

όπου ο τελεστής της Χαμιλτονιανής είναι:

$$\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+V(\hat{x})=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x) \qquad (12)$$

Επομένως, η εξίσωση (11) γράφεται:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+V(x)\psi \qquad (13)$$

Για την τρισδιάστατη κίνηση σε ένα δυναμικό V(r) η εξίσωση θα είναι πάλι:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\hat{H}\psi$$

όπου ο τελεστής της Χαμιλτονιανής προκύπτει από τη κλασσική Χαμιλτονιανή

$$\mathrm{H}=\frac{p^2}{2m}+V(r)=\frac{p_x^2+p_\psi^2+p_z^2}{2m}+V(x,\psi,z) \qquad (14)$$

με την αντικατάσταση:

$$p_x\to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \qquad p_\psi\to -i\hbar\frac{\partial}{\partial \psi} \qquad p_z\to -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}$$

ή συνοπτικά $p\to -i\hbar\nabla$ όπου $\nabla=\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\psi}\frac{\partial}{\partial \psi}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$, οπότε προκύπτει:

$$\hat{\mathrm{H}}=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial \psi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+V(x,\psi,z) \qquad (15)$$

ή ισοδύναμα

$$\hat{\mathrm{H}}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(r) \qquad (16)$$

όπου $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial \psi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ είναι ο Λαπλασιανός τελεστής.

Τελικά, η τρισδιάστατη εξίσωση Schrodinger [75] γράφεται:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+V(r)\psi \qquad (17)$$

2.2.3. Η έννοια του γραμμικού τελεστή

Ο όρος τελεστής που χρησιμοποιήσαμε πιο πάνω, είναι τελείως τετριμμένος. Αναφέρεται σε κάθε «πράξη» – σε κάθε «κανόνα αντιστοίχισης» – που απεικονίζει ένα σύνολο μαθηματικών

αντικειμένων σε ένα άλλο. Στην κβαντομηχανική, οι τελεστές που χρησιμοποιούμε – συνήθως διαφορικοί τελεστές που δρουν πάνω στις κυματοσυναρτήσεις – είναι επιπλέον και γραμμικοί, το οποίο σημαίνει ότι η δράση τους πάνω σε έναν γραμμικό συνδυασμό κυματοσυναρτήσεων μεταφέρεται πάνω σε κάθε συνάρτηση του συνδυασμού χωριστά [76,77]. Δηλαδή

$$\hat{A}(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = c_1(\hat{A}\psi_1) + c_2(\hat{A}\psi_2) \qquad (18)$$

Ο χαμιλτονιανός τελεστής (16) έχει, προφανώς, την ιδιότητα της γραμμικότητας και αυτός είναι ένας άλλος τρόπος να πούμε ότι η εξίσωση Schrödinger (11) είναι γραμμική. Μια άμεση συνέπεια αυτής της γραμμικότητας –με τεράστια φυσική σημασία - είναι η εξής: *ΘΕΩΡΗΜΑ: Κάθε γραμμικός συνδυασμός λύσεων της εξισώσεως Schrödinger είναι επίσης λύση της.*

Απόδειξη: Θέλουμε να δείξουμε ότι η συνάρτηση

$$\psi(r,t) = c_1\psi_1(r,t) + c_2\psi_2(r,t) \qquad (19)$$

είναι λύση της Εξισώσεως (11) αν οι ψ_1 και ψ_2 είναι επίσης λύσεις. Εισάγοντας την (19) στην (11) θα έχουμε διαδοχικά:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = \hat{H}(c_1\psi_1 + c_2\psi_2)$$

$$\Rightarrow c_1(i\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial t}) + c_2(i\hbar\frac{\partial\psi_2}{\partial t}) = c_1(\hat{H}\psi_1) + c_2(\hat{H}\psi_2) \qquad (20)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε, βεβαίως, τη γραμμικότητα του $\hat{H}$ για να μεταφέρουμε τη δράση του πάνω στις επιμέρους συναρτήσεις του συνδυασμού $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$. Όμως η (20) προφανώς ισχύει αφού οι ψ_1 και ψ_2 είναι λύσεις της εξίσωσης Schrodinger και άρα πληρούνται οι

$$i\hbar\frac{\partial\psi_i}{\partial t} = \hat{H}\psi_i$$

Όμως ενώ η γραμμικότητα είναι μια μαθηματική ιδιότητα που τη μοιράζονται τόσο η κλασική κυματική εξίσωση (1), όσο και το κβαντομηχανικό της ανάλογο (2) εντούτοις οι ομοιότητες σταματάνε εδώ. Και αρχίζουν οι διαφορές, με πιο σημαντικές τις εξής δύο:

1. *Η εξίσωση Schrodinger έχει μιγαδικούς συντελεστές ενώ η κλασική κυματική εξίσωση είναι καθαρά πραγματική*. Μια άμεση συνέπεια αυτής της διαφοράς είναι ότι οι λύσεις της εξίσωσης Schrodinger είναι υποχρεωτικά μιγαδικές και επομένως δεν είναι δυνατόν να αντιπροσωπεύουν ένα φυσικά παρατηρήσιμο κύμα.
2. *Η εξίσωση Schrodinger είναι πρώτης τάξης ως προς το χρόνο ενώ η αντίστοιχη κλασική είναι δευτεροβάθμια*. Αυτό συνεπάγεται αμέσως ότι για τον πλήρη καθορισμό της λύσης της εξίσωσης Schrodinger μας αρκεί να γνωρίζουμε μόνο την αρχική μορφή $\psi(\boldsymbol{r}, 0) = \psi(\boldsymbol{r})$ της κυματοσυνάρτησης, ενώ για την κλασική κυματική εξίσωση χρειαζόμαστε όχι μόνο την αρχική μορφή $\varphi(r, 0) = \varphi(r)$ αλλά και την αρχική ταχύτητα όλων των σημείων του παλλόμενου σώματος $\upsilon(r,0) = g(r)$.

2.2.3.1. Ιδιότητες τελεστών

1. Πρόσθεση τελεστών που δρουν σε χώρο Hilbert

$$\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}, \qquad \text{δηλαδή}: \hat{C}\psi = (\hat{A} + \hat{B})\psi = \hat{A}\psi + \hat{B}\psi \qquad (21)$$

2. Πολλαπλασιασμός Τελεστών

$$\hat{C} = \hat{A}\hat{B}, \qquad \text{δηλαδή}: \hat{C}\psi = \hat{A}(\hat{B}\psi) \qquad (22)$$

3. Μετάθετες Τελεστών

$$\hat{D} = [\hat{A}, \hat{B}] \Rightarrow \hat{D}\psi = \hat{A}(\hat{B}\psi) - \hat{B}(\hat{A}\psi)$$

$$\Rightarrow [\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \qquad (23)$$

Εάν για δύο τελεστές ο μεταθέτης τους είναι μηδέν, τότε οι δύο τελεστές μετατίθενται.

4. Αντίστροφος τελεστής

$$\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = 1$$

$$(\hat{A}\hat{A}^{-1})\psi = \hat{A}(\hat{A}^{-1}\psi) = \psi = \hat{A}^{-1}(\hat{A}\psi) \qquad (24)$$

5. Ιδιοσυναρτήσεις και ιδιοτιμές τελεστή

Λύση της εξίσωσης $\hat{A}\psi = \alpha\psi$ για έναν τελεστή $\hat{A}$.

Το ψ ονομάζεται ιδιοσυνάρτηση του $\hat{A}$ και το α ονομάζεται ιδιοτιμή του $\hat{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοσυνάρτηση ψ.

Εάν οι ιδιοτιμές είναι ένα διακριτό σύνολο, τότε το αριθμούμε και το συμβολίζουμε με α_n, οπότε:

$$\psi_n : \hat{A}\psi_n = \alpha_n\psi_n \qquad (25)$$

Εάν ο τελεστής $\hat{A}$ είναι ένας διαφορικός τελεστής τότε η εξίσωση των ιδιοτιμών αντιστοιχεί στη λύση μιας διαφορικής εξίσωσης.

Εάν σε μια ιδιοτιμή α του τελεστή $\hat{A}$ αντιστοιχούν δύο ή περισσότερες ιδιοσυναρτήσεις, γραμμικά ανεξάρτητες, οι ιδιοσυναρτήσεις αυτές λέγονται εκφυλισμένες.

Οι συναρτήσεις $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$ λέγονται γραμμικά ανεξάρτητες εάν, δοθείσης της

$$\beta_1\psi_1 + \beta_2\psi_2 + \ldots + \beta_k\psi_k = 0 \qquad (26)$$

ισχύει

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k = 0 \qquad (27)$$

6. Ερμιτιανός Τελεστής (ορισμός)

$$\int \Phi^*(x)(\hat{A}\psi(x))dx = \int (\hat{A}\Phi(x))^*\psi(x)dx \qquad (28)$$

αλλιώς από το συμβολισμό του εσωτερικού γινομένου γράφουμε:

$$\left\langle \Phi, \hat{A}\psi \right\rangle = \left\langle \hat{A}\Phi, \psi \right\rangle \qquad (29)$$

7. Συζυγής Τελεστής

$$\int \Phi^*(\hat{A}\psi)dx = \int (\hat{A}^\dagger \Phi)^*\psi dx \qquad (30)$$

$$\left\langle \Phi, \hat{A}\psi \right\rangle = \left\langle \hat{A}^\dagger \Phi, \psi \right\rangle \qquad (31)$$

8. Αυτοσυζυγής Τελεστής είναι αυτός για τον οποίο ισχύει:

$$\hat{A} = \hat{A}^\dagger \qquad (32)$$

Ο αυτοσυζυγής τελεστής είναι και ερμιτιανός.

2.3. Η στατιστική ερμηνεία της κυματοσυνάρτησης

2.3.1. Τα υλικά κύματα σαν κύματα πιθανότητας

Παρά την αναμφίβολη πειραματική του τεκμηρίωση, ο κυματοσωματιδιακός δυϊσμός της ύλης δεν μπορεί να γίνει αποδεκτός αν δεν αρθεί πειστικά η θεμελιώδης αντίφαση που εμπεριέχει. Πώς είναι δυνατόν ένα σωματίδιο να είναι ταυτόχρονα και ένα κύμα χωρίς να χάνει τη σωματιδιακή του υπόσταση; Η αντίφαση είναι φανερή: Ένα σωματίδιο είναι ένας εντοπισμένος και αδιαίρετος κόκκος ύλης – που κινείται πάνω σε μια καλά καθορισμένη τροχιά – ενώ ένα κύμα είναι, εξ ορισμού, μια εκτεταμένη φυσική διαταραχή που μπορεί επιπλέον να διαιρεθεί είτε με την τοποθέτηση ενός κατάλληλου 'εμποδίου' στο πέρασμά του είτε μέσω της ανάκλασής του κατά την πρόσπτωσή του στη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ δύο μέσων. Αν λοιπόν το κύμα που περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση ψ ερμηνευθεί ως ένα κλασικό κύμα – δηλαδή ως μια μετρήσιμη φυσική διαταραχή (οπότε και το αντίστοιχο σωματίδιο θα πρέπει να θεωρηθεί ότι διαχέεται μέσα στον όγκο αυτής της διαταραχής) – τότε η αντίφαση σωματίδιο-κύμα παίρνει τις διαστάσεις μιας καθαρά λογικής αντίφασης ανάμεσα στα αντιθετικά ζεύγη εννοιών «εντοπισμένο και αδιαίρετο» αφ' ενός (=σωματίδιο) και «εκτεταμένο και διαιρετό» αφ' ετέρου (=κύμα). Όμως η αδυναμία μιας συμβατικής κλασικής ερμηνείας των υλικών κυμάτων προκύπτει και από το καθαρά μαθηματικό γεγονός που αναφέραμε πριν· ότι δηλαδή οι λύσεις της εξίσωσης Schrödinger είναι υποχρεωτικά μιγαδικές και επομένως δεν είναι δυνατόν να αντιπροσωπεύουν μια μετρήσιμη φυσική διαταραχή [78-80].

Έτσι οδηγούμαστε στην περίφημη πλέον στατιστική ερμηνεία της ψ (M. Born, 1926):

Η στατιστική ερμηνεία της κυματοσυνάρτησης [81-86]: Η κυματοσυνάρτηση δεν αντιπροσωπεύει ένα φυσικά παρατηρήσιμο κλασικό κύμα αλλά ένα "κύμα πιθανότητας". Το τετράγωνο της απόλυτης τιμής της κυματοσυνάρτησης μας δίνει την πυκνότητα πιθανότητας – δηλαδή την πιθανότητα ανά μονάδα μήκους (ή όγκου) – να βρούμε το σωματίδιο σε μια περιοχή του χώρου.

Κατά τη στατιστική ερμηνεία, η πυκνότητα πιθανότητας P(x) θα είναι:

$$P(x) = |\psi(x)|^2 = \psi^*(x)\psi(x) \qquad (1)$$

όπου τώρα παραλείψαμε τη χρονική μεταβλητή από το σύμβολο της κυματοσυνάρτησης επειδή, όσον αφορά τη στατιστική ερμηνεία, ο χρόνος t είναι μόνο μια παράμετρος χωρίς ιδιαίτερη σημασία. Όταν γράφουμε λοιπόν απλώς ψ(x) θα εννοούμε ένα στιγμιότυπο της κυματοσυνάρτησης ψ(x, t) δηλαδή τη μορφή της για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t = t_0$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω η πιθανότητα να βρούμε το σωματίδιο κάπου μεταξύ x και x + dx θα είναι:

$$P(x)dx = |\psi(x)|^2 \, dx \qquad (2)$$

οπότε η ολική πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο οπουδήποτε στο πλήρες διάστημα $-\infty < x < +\infty$ θα δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 \, dx \qquad (3)$$

Για να έχει όμως νόημα η στατιστική ερμηνεία της ψ πρέπει αυτή η ολική πιθανότητα να είναι ίση με τη μονάδα. Δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1 \qquad (4)$$

Η (4) ονομάζεται συνθήκη κανονικοποίησης, και μια κυματοσυνάρτηση ψ που την ικανοποιεί αποκαλείται κανονικοποιημένη κυματοσυνάρτηση. Για να μπορεί μια κυματοσυνάρτηση να κανονικοποιηθεί πρέπει να είναι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 \, dx < \infty \qquad (5)$$

δηλαδή το ολοκλήρωμα του τετραγώνου της από $-\infty$ έως $+\infty$ πρέπει να συγκλίνει. Συναρτήσεις ψ(x) με αυτή την ιδιότητα ονομάζονται τετραγωνικά ολοκληρώσιμες. Αν μια κυματοσυνάρτηση ψ(x) είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη μπορούμε πάντα να την πολλαπλασιάσουμε με έναν κατάλληλο συντελεστή κανονικοποίησης ώστε η συνολική πιθανότητα να βγαίνει ίση με μονάδα. Επομένως η βασική απαίτηση για να κρίνουμε αν μια κυματοσυνάρτηση περιγράφει μια πραγματοποιήσιμη φυσική κατάσταση του σωματιδίου είναι το αν είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη ή όχι. Και για να συμβαίνει αυτό, μια προφανής αναγκαία συνθήκη είναι η

$$\psi(-\infty) = \psi(+\infty) = 0$$

δηλαδή να μηδενίζεται η κυματοσυνάρτηση στο $\pm\infty$.

2.3.2. Οι βασικές στατιστικές έννοιες

Α. Μέση τιμή

Η μέση τιμή <A> ενός στατιστικού μεγέθους Α με δυνατές τιμές $a_1,\ldots, a_n,\ldots$ και αντίστοιχες πιθανότητες εμφάνισής τους $P_1,\ldots, P_n,\ldots$ ορίζεται ως:

$$< A >= \sum a_n p_n \qquad (6)$$

δηλαδή ως το άθροισμα των δυνατών τιμών του πολλαπλασιασμένων επί τις αντίστοιχες πιθανότητες

Στην περίπτωση ενός συνεχούς στατιστικού μεγέθους Α με πυκνότητα πιθανότητας P(a) – δηλαδή πιθανότητα ανά μονάδα διαστήματος της συνεχούς στατιστικής μεταβλητής a – το άθροισμα μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα και ο αντίστοιχος τύπος είναι:

$$< A >= \sum aP(a) = \int aP(a)da \qquad (7)$$

ενώ ισχύουν και οι αυτονόητες συνθήκες κανονικοποίησης:

$$\sum p_n = 1 \quad \text{και} \quad \int P(a)da = 1 \qquad (8)$$

όπου τόσο το άθροισμα όσο και το ολοκλήρωμα εκτείνονται σε όλο το διάστημα των δυνατών τιμών του μεγέθους.

Β. Διασπορά ή τυπική απόκλιση

Εκτός από τη μέση τιμή ενός στατιστικού μεγέθους μας ενδιαφέρει, να γνωρίζουμε και το πόσο συγκεντρωμένες ή διεσπαρμένες γύρω από αυτήν είναι οι δυνατές τιμές του. Η στατιστική έννοια που εκφράζει αυτό το πράγμα ονομάζεται διασπορά (ή τυπική απόκλιση) του μεγέθους Α – σύμβολο ΔΑ (ή σ_A) – και ορίζεται ως εξής: *"Το τετράγωνο της διασποράς ενός στατιστικού μεγέθους Α ορίζεται ως η μέση τετραγωνισμένη απόκλιση από τη μέση του τιμή"*. Δηλαδή

$$(\Delta A)^2 = \left\langle (A - < A >)^2 \right\rangle \qquad (9)$$

Από την (9) χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της μέσης τιμής, παίρνουμε ότι:

$$(\Delta A)^2 = < A^2 > - < A >^2 \qquad (10)$$

που μας λέει ότι: το τετράγωνο της αβεβαιότητας ενός στατιστικού μεγέθους ισούται με τη μέση τιμή του τετραγώνου του μείον το τετράγωνο της μέσης τιμής του.

C. Μέση θέση και αβεβαιότητα θέσης

Μια άμεση εφαρμογή των παραπάνω αποτελεί, βεβαίως, η θέση ενός κβαντομηχανικού σωματιδίου σε μία διάσταση για την οποία θα είναι:

$$P(x) = |\psi(x)|^2 \qquad (11)$$

οπότε μέσω της (7) οι μέσες τιμές <x> και <x²>θα δίνονται από τις εκφράσεις:

$$\begin{aligned} <x> &= \int_{-\infty}^{+\infty} xP(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x|\psi(x)|^2 \, dx \\ <x^2> &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2P(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2|\psi(x)|^2 \, dx \end{aligned} \qquad (12)$$

οπότε θα προσδιορίζεται αμέσως και η αβεβαιότητα θέσης Δx βάσει του τύπου (10):

$$(\Delta x)^2 = <x^2> - <x>^2 \qquad (13)$$

2.4. Επέκταση της στατιστικής ερμηνείας

2.4.1. Ο γενικός τύπος της μέσης τιμής

Η στατιστική ερμηνεία της κυματοσυνάρτησης που αναφέρθηκε νωρίτερα μας δίνει τη στατιστική κατανομή των αποτελεσμάτων μόνο για το φυσικό μέγεθος θέση του σωματιδίου. Όμως η θέση δεν είναι το μόνο μετρήσιμο μέγεθος του σωματιδίου και συνήθως δεν είναι καν αυτό που μας ενδιαφέρει περισσότερο. Για να ολοκληρωθεί λοιπόν η στατιστική ερμηνεία θα πρέπει να είμαστε σε θέση να προβλέπουμε τη στατιστική κατανομή των αποτελεσμάτων ενός τυχόντος φυσικού μεγέθους [87-89].

Ξεκινώντας από την έκφραση της μέσης θέσης σε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα θα έχουμε διαδοχικά:

$$<x> = \int_{-\infty}^{+\infty} xP(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\psi^*\psi dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(\chi\psi)dx \qquad (1)$$

Η τελευταία γραφή:

$$<x> = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(\chi\psi)dx \qquad (2)$$

μας δείχνει την ακόλουθη πιθανή γενίκευση:

$$<A> = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(\hat{A}\psi)dx \qquad (3)$$

όπου $\hat{A}$ ένας κατάλληλος γραμμικός τελεστής για το μέγεθος A.

2.4.2. Εισαγωγή τελεστών για τα φυσικά μεγέθη

Από την σχέση (2), είναι φανερό ότι για τη θέση ο κατάλληλος κβαντομηχανικός τελεστής είναι:

$$\hat{x} = x \qquad (4)$$

και η δράση πάνω στις κυματοσυναρτήσεις ψ(x) συνίσταται στον απλό πολλαπλασιασμό τους επί x.

Για την ορμή, μια επιλογή είναι η:

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \qquad (5)$$

δηλαδή αυτή που κάναμε και νωρίτερα στο πλαίσιο της συμβολικής γραφής της εξισώσεως Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \qquad (6)$$

προκειμένου να δημιουργήσουμε τον χαμιλτονιανό τελεστή $\hat{H}$ από την κλασική έκφραση της ολικής ενέργειας του σωματιδίου

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x) \qquad (7)$$

Για ένα τυχόν φυσικό μέγεθος A = A(x, p), που είναι συνάρτηση της θέσης και της ορμής ο αντίστοιχος κβαντομηχανικός τελεστής θα είναι:

$$\hat{A} = A(\hat{x}, \hat{p})$$

δηλαδή αυτός που προκύπτει από την κλασική έκφραση του μεγέθους, αν αντικατασταθούν τα x και p με τους αντίστοιχους τελεστές.

Για την ολική ενέργεια του σωματιδίου ο σχετικός τελεστής θα είναι:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \qquad (8)$$

Για την τρισδιάστατη περίπτωση η γενίκευση είναι:

$$\hat{x} = x \qquad \hat{\psi} = \psi \qquad \hat{z} = z$$

$$p_x \to -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \qquad p_\psi \to -i\hbar \frac{\partial}{\partial \psi} \qquad p_z \to -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$$

ή, σε διανυσματική γραφή

$$\hat{r} = r \quad \hat{p} = -i\hbar\nabla \qquad (9)$$

ενώ για ένα τυχόν φυσικό μέγεθος A = A(r, p) θα έχουμε:

$$\hat{l} = \hat{r} \times \hat{p} = -i\hbar r \times \nabla) \qquad (10)$$

Για το μέγεθος της στροφορμής

$$l = r \times p$$

που οι συνιστώσες του είναι:

$$l_x = yp_z - zp_y \qquad l_y = zp_x - xp_z \qquad l_z = xp_y - yp_x$$

οι κβαντομηχανικοί τελεστές θα έχουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} \hat{l}_x &= -i\hbar(\psi\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial \psi}) \\ \hat{l}_\psi &= -i\hbar(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}) \qquad (11) \\ \hat{l}_z &= -i\hbar(x\frac{\partial}{\partial \psi} - \psi\frac{\partial}{\partial x}) \end{aligned}$$

ή, διανυσματικά

$$\hat{l} = \hat{r} \times \hat{p} = -i\hbar r \times \nabla) \qquad (12)$$

2.4.3. Ο γενικός τύπος της αβεβαιότητας

Εκτός από τη μέση τιμή, ο τύπος (3) μας επιτρέπει να υπολογίζουμε και την αβεβαιότητα (ΔΑ) ενός κβαντομηχανικού μεγέθους, αφού μπορούμε να τον εφαρμόσουμε και για τον υπολογισμό της μέσης τιμής του A^2.

$$< A^2 >= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(\hat{A}^2 \psi)dx \qquad (13)$$

άρα και για τον υπολογισμό του $(\Delta A)^2$ μέσω του γενικού τύπου της στατιστικής (10) της παραγράφου 2.3.2.

Ειδικότερα για τα μεγέθη θέση και ορμή μπορούμε να υπολογίσουμε – για κάθε δεδομένη κυματοσυνάρτηση – τόσο το Δx όσο και το Δp και να επιβεβαιώσουμε ότι όντως ισχύει η λεγόμενη ανισότητα του Heisenberg:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \qquad (14)$$

2.5. Ολοκλήρωση της στατιστικής ερμηνείας

2.5.1. Ο ρόλος των ιδιοσυναρτήσεων

Ιδιοσυναρτήσεις ενός τελεστή Α ονομάζονται οι συναρτήσεις που ικανοποιούν την εξίσωση ιδιοτιμών:

$$A\psi_\alpha = \alpha\psi_\alpha \qquad (1)$$

Το α ονομάζεται ιδιοτιμή του τελεστή.

Οι ιδιοσυναρτήσεις ενός τελεστή έχουν ιδιαίτερη φυσική σημασία γιατί γι' αυτές η δράση του τελεστή παίρνει την απλούστερη δυνατή μορφή. Δηλαδή ξαναδίνει την ίδια συνάρτηση πολλαπλασιασμένη με έναν αριθμό, την ιδιοτιμή.

Στην κβαντομηχανική, παίζουν σημαντικό ρόλο οι ιδιοσυναρτήσεις των γραμμικών τελεστών [90] που αντιστοιχούν σε φυσικά μεγέθη: εάν ένα σωμάτιο περιγράφεται από μια κυματοσυνάρτηση που αποτελεί ταυτόχρονα και ιδιοσυνάρτηση ενός τελεστή που εκφράζει κάποιο φυσικό μέγεθος, τότε η μόνη τιμή που μπορεί να προκύψει από τη μέτρηση του μεγέθους αυτού είναι η αντίστοιχη ιδιοτιμή και η απροσδιοριστία στη μέτρηση είναι μηδέν, δηλαδή μπορούμε να μετρήσουμε το μέγεθος αυτό με απόλυτη ακρίβεια. Η απόδειξη είναι απλή:

Η κυματοσυνάρτηση ικανοποιεί την εξίσωση ιδιοτιμών:

$$A\psi_\alpha = \alpha\psi_\alpha$$

οπότε

$$A^2\psi_\alpha = A(A\psi_\alpha) = A(\alpha\psi_\alpha) = \alpha(A\psi_\alpha) = \alpha^2\psi_\alpha \qquad (2)$$

δηλαδή η ψ_α είναι ιδιοσυνάρτηση και του τελεστή A^2 με ιδιοτιμή α^2.

Για τις μέσες τιμές συνεπώς θα ισχύει:

$$\langle A\rangle = \int \psi_\alpha^*(A\psi_\alpha)dx = \int \psi_\alpha^*\alpha\psi_\alpha dx = \alpha\int \psi_\alpha^*\psi_\alpha dx = \alpha \qquad (3)$$

και παρομοίως

$$\langle A^2\rangle = \int \psi_\alpha^*(A^2\psi_\alpha)dx = \int \psi_\alpha^*\alpha^2\psi_\alpha dx = \alpha^2\int \psi_\alpha^*\psi_\alpha dx = \alpha^2 \qquad (4)$$

οπότε:

$$(\Delta A)^2 = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2 = \alpha^2 - \alpha^2 = 0 \qquad (5)$$

Οι καταστάσεις που περιγράφονται από τις ιδιοσυναρτήσεις ενός φυσικού μεγέθους λέγονται ιδιοκαταστάσεις.

2.5.2. Το ανάπτυγμα σε ιδιοσυναρτήσεις

Όταν η εξίσωση ιδιοτιμών έχει λύση μόνο μια διακριτή ακολουθία ιδιοτιμών α_1, α_2,....α_n, τότε λέμε ότι το φυσικό μέγεθος A έχει διακριτό φάσμα. Διαφορετικά, εάν έχουμε λύση για κάθε α, τότε το φάσμα ονομάζεται συνεχές.

Εάν σε μια συγκεκριμένη ιδιοτιμή αντιστοιχούν δύο ή περισσότερες ιδιοσυναρτήσεις η ιδιοτιμή λέγεται εκφυλισμένη. Η πραγματικότητα των ιδιοτιμών εξασφαλίζεται χάριν σε μια πολύ σημαντική ιδιότητα των τελεστών, την ερμιτιανότητα, που θα παρουσιαστεί σε επόμενη παράγραφο.

Είδαμε νωρίτερα πως εάν η κυματοσυνάρτηση είναι κάποια ιδιοσυνάρτηση του A, τότε η στατιστική κατανομή είναι γνωστή: υπάρχει μοναδικό πιθανό αποτέλεσμα κατά τη μέτρηση

του φυσικού μεγέθους που αντιστοιχεί στον ερμιτιανό τελεστή Α που η ιδιοτιμή του αντιστοιχεί στην εν λόγω ιδιοσυνάρτηση.

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. Η μέση τιμή και οι ιδιοτιμές των φυσικών τελεστών είναι πραγματικοί αριθμοί
2. Δύο ιδιοσυναρτήσεις ψ_1,ψ_2, που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές α_1, α_2 είναι ορθογώνιες που σημαίνει ότι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^*(x)\psi_2(x)dx = 0 \qquad (6)$$

3. Κάθε κυματοσυνάρτηση ψ μπορεί πάντα να αναπτυχθεί σε μια σειρά ιδιοσυναρτήσεων κάποιου φυσικού μεγέθους:

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n \qquad (7)$$

Εάν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της (7) με ψ_m^* και ολοκληρώσουμε παίρνουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^* \psi dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^* \psi_n dx \qquad (8)$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις ψ_m, ψ_n είναι ορθογώνιες και από την σχέση (6) ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^* \psi_n dx = 0 \qquad (9)$$

και επομένως από το άθροισμα του δευτέρου μέλους της (8) θα έχουμε μόνο τον όρο n=m, οπότε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^* \psi dx = c_m \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^* \psi_m dx = c_m \qquad (10)$$

Από τη σχέση (10) προκύπτει ότι οι συντελεστές στο ανάπτυγμα της ψ δίνονται από τον τύπο:

$$c_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* \psi dx \qquad (11)$$

Οι συντελεστές c_n μας λένε πόσο συνεισφέρει η αντίστοιχη κυματοσυνάρτηση στο σχηματισμό της ψ. Είναι συνεπώς λογικό να αναμένουμε οι συντελεστές c_n να σχετίζονται με την πιθανότητα εμφάνισης των διαφόρων ιδιοτιμών α_1, α_2,….α_n του μεγέθους Α.

Για να ελέγξουμε τον παραπάνω ισχυρισμό, αρκεί να πάρουμε τον τύπο της μέσης τιμής του μεγέθους Α και να αντικαταστήσουμε την κυματοσυνάρτηση ψ με το ανάπτυγμά της:

$$\langle A \rangle = \int \psi^* (A\psi) dx$$

$$\Rightarrow \langle A \rangle = \int (\sum_m c_m^* \psi_m^*)(A \sum_n c_n \psi_n) dx =$$

$$= \sum_{n,m} c_m^* c_n \int \psi_m^* (A\psi_n) dx$$

Όμως, $A\psi_n = \alpha_n \psi \alpha_n$ και επομένως:

$$\langle A \rangle = \sum_{n,m} c_m^* c_n \alpha_n \int \psi_m^* \psi_n dx = \sum_{n,m} c_m^* c_n \alpha_n \delta_{nm} = \sum_n |c_n|^2 \alpha_n$$

Όπου:

$$\int \psi_m^* \psi_n dx = \delta_{nm} \qquad (12)$$

Επομένως αποδείξαμε ότι:

$$\langle A \rangle = \sum_n |c_n|^2 \alpha_n \qquad (13)$$

Η σχέση αυτή είναι πανομοιότυπη με την σχέση ορισμού της μέσης τιμής ενός μεγέθους A του οποίου οι πιθανές τιμές είναι α_n με αντίστοιχες πιθανότητες p_n:

$$\langle A \rangle = \sum_n p_n \alpha_n \qquad (14)$$

Το αποτέλεσμα αυτό μας οδηγεί στην ακόλουθη ερμηνεία: *οι μόνες δυνατές τιμές ενός φυσικού μεγέθους A που αντιστοιχεί σε ερμιτιανό τελεστή είναι οι ιδιοτιμές του. Αν η κατάσταση του σωματιδίου σε μια ορισμένη χρονική στιγμή περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση ψ, τότε η πιθανότητα εμφάνισης σε μια μέτρηση του μεγέθους A της ιδιοτιμής* a_n *είναι:*

$$p_n = |c_n|^2 \qquad (15)$$

όπου c_n είναι ο συντελεστής της ιδιοσυνάρτησης ψ_n στο ανάπτυγμα:

$$\psi = \sum_n c_n \psi_n$$

της ψ σε ιδιοσυναρτήσεις του μεγέθους A.

Για να είναι συνεπής η ερμηνεία αυτή θα πρέπει οι συντελεστές να είναι κανονικοποιημένοι σύμφωνα με τη σχέση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = 1$$

που εκφράζει το γεγονός ότι η πιθανότητα για όλα τα ενδεχόμενα πρέπει είναι ίση με τη μονάδα.

2.5.3. Η περίπτωση του συνεχούς φάσματος

Στους ερμιτιανούς γραμμικούς τελεστές εμφανίζεται ακόμα ένα φαινόμενο: η ύπαρξη συνεχούς φάσματος. Στην περίπτωση αυτή εμφανίζονται δυσκολίες στη στατιστική ερμηνεία που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο και θα πρέπει να εισάγουμε ορισμένες τροποποιήσεις.

Θεωρούμε ότι η εξίσωση ιδιοτιμών (1) εμφανίζει συνεχές φάσμα, δηλαδή η τιμή του α εκτείνεται στο διάστημα (-∞,+∞). Στην περίπτωση αυτή, η κυματοσυνάρτηση ψ δεν γράφεται

με τη μορφή αθροίσματος (7) όπως πριν, αλλά μπορεί να αντικατασταθεί από το ολοκλήρωμα:

$$\psi = \int c(\alpha)\psi_\alpha d\alpha \qquad (16)$$

Στη συνέχεια η φυσική ερμηνεία των συντελεστών c_n ως πιθανοτήτων (15) αντικαθίσταται από τη σχέση:

$$p(\alpha) = |c(\alpha)|^2 \qquad (17)$$

που εκφράζει την πυκνότητα πιθανότητας του μεγέθους A, δηλαδή την πιθανότητα η μετρούμενη τιμή να έχει τιμή από α έως α+dα μιας και σε αυτή την περίπτωση η πιθανότητα να πάρουμε μια συγκεκριμένη τιμή α του μεγέθους A θα είναι μηδέν.

Ο υπολογισμός των συντελεστών c(α) γίνεται με τον ίδιο τρόπο όπως και στην διακριτή περίπτωση (69) μέσω της σχέσης:

$$\psi = \int \psi_\alpha^*(x)\psi(x)dx \qquad (18)$$

Όλες οι παραπάνω επεκτάσεις από το διακριτό στο συνεχές είναι σωστές, με μια κατάλληλη ερμηνεία. Το καίριο στοιχείο είναι η σχέση ορθοκανονικότητας όπως και την διακριτή περίπτωση (12). Η ουσιώδης διαφορά ανάμεσα στις ιδιοσυναρτήσεις του διακριτού και του συνεχούς φάσματος είναι ότι οι πρώτες είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες και άρα μπορούν να κανονικοποιηθούν, ενώ οι δεύτερες όχι.

Στην περίπτωση του συνεχούς φάσματος, η συνθήκη ορθοκανονικότητας γράφεται ως εξής:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\alpha_1}^*(x)\psi_{\alpha_2}(x)dx = \delta(\alpha_1 - \alpha_2) \qquad (19)$$

όπου $\delta(\alpha_1-\alpha_2)$ είναι η συνάρτηση του Dirac.

Για παράδειγμα, ο τύπος

$$c(\alpha) = \int \psi_\alpha^*(x)\psi(x)dx \qquad (20)$$

αποδεικνύεται εύκολα ως εξής: ξεκινάμε από το ανάπτυγμα

$$\psi = \int c(\alpha')\psi_{\alpha'}d\alpha',$$

στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με $\psi_\alpha^*(x)$ και ολοκληρώνουμε ως προς x λαμβάνοντας υπόψη έναν από τους ορισμούς της συνάρτησης δ:

$$\int \delta(\alpha - \alpha')c(\alpha')d\alpha' = c(\alpha) \qquad (21)$$

Πραγματικά παίρνουμε

$$\int \psi_\alpha^*(x)\psi(x)dx = \int c(\alpha')d\alpha' \int \psi_\alpha^*(x)\psi_{\alpha'}(x)dx \int \delta(\alpha - \alpha')c(\alpha')d\alpha' = c(\alpha)$$

Η συνάρτηση δ του Dirac αποτελεί την κατάλληλη συνεχή γενίκευση του συμβόλου δ του Kronecker. Ποιοτικά μπορεί να το δει κανείς αυτό από το γεγονός ότι το σύμβολο δ του Kronecker ορίζεται ισοδύναμα μέσω της χαρακτηριστικής του ιδιότητας

$$\sum_m \delta_{nm} c_m = c_n \qquad (22)$$

Αν υποθέσουμε ότι οι δείκτες n, m παίρνουν συνεχείς τιμές και τους γράψουμε σαν α, α' αντίστοιχα, τότε η προφανής συνεχής γενίκευση της παραπάνω ιδιότητας του συμβόλου δ του Kronecker θα είναι

$$\int \delta(\alpha - \alpha')c(\alpha')d\alpha' = c(\alpha) \qquad (23)$$

όπου το άθροισμα ως προς το δείκτη m αντικαταστάθηκε από το ολοκλήρωμα ως προς την αντίστοιχη συνεχή μεταβλητή α' και η συνάρτηση δ γράφηκε ως δ(α-α') αντί $\delta_{\alpha\alpha'}$ διότι εξαρτάται μόνο από τη διαφορά α-α'.

Υπάρχουν όμως κάποιες "τεχνικές" δυσκολίες για τις παραπάνω συνεχείς γενικεύσεις που προκύπτουν από το γεγονός ότι οι ιδιοσυναρτήσεις των ερμιτιανών τελεστών με συνεχές φάσμα μπορεί να μην είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες, κάτι το οποίο αποτελεί πλήγμα για την στατιστική ερμηνεία της κυματοσυνάρτησης και την ερμηνεία των τετραγώνων των μέτρων των συντελεστών $|c(\alpha)|^2$ ως πυκνότητα πιθανότητας

$$|c(\alpha)|^2 \, da = p(\alpha)d\alpha$$

Θεωρούμε λοιπόν ότι *οι ιδιοσυναρτήσεις των ερμιτιανών τελεστών με συνεχές φάσμα μπορούν να εκλειφθούν μόνο ως μαθηματικά εύχρηστες εξιδανικεύσεις φυσικά πραγματοποιήσιμων καταστάσεων,* συνεπώς δεν συνιστά καταστροφή της στατιστικής ερμηνείας της κυματοσυνάρτησης το γεγονός ότι μπορεί να μην είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες, αφού δεν αντιστοιχούν σε πραγματικές φυσικές καταστάσεις.

2.6. Ο ρόλος της μέτρησης στην Κβαντομηχανική – Η αρχή του φιλτραρίσματος

Για να ολοκληρώσουμε την στατιστική ερμηνεία της κυματοσυνάρτησης και να δούμε την πλήρη μορφή της λεγόμενης σχολής της Κοπεγχάγης σχετικά με την ερμηνεία της Κβαντομηχανικής, χρειαζόμαστε ένα ακόμη στοιχείο και αυτό είναι το τι συμβαίνει κατά τη στιγμή της μέτρησης ενός φυσικού μεγέθους.

Η μέτρηση είναι μια διαδικασία αλληλεπίδρασης μεταξύ της μετρητικής συσκευής και του μετρούμενου συστήματος. Από την αλληλεπίδραση αυτή μεταβάλλονται τόσο η κατάσταση της μετρητικής συσκευής, όσο και το μετρούμενο σύστημα το οποίο μεταβαίνει σε μια κατάσταση διαφορετική από την αρχική. Αυτές οι παρατηρήσεις ισχύουν για όλες τις μετρήσεις, κλασσικές και κβαντικές.

Στις κλασσικές μετρήσεις ισχύουν δυο χαρακτηριστικά:

1. Η επίδραση της μετρητικής συσκευής πάνω στο μετρούμενο σύστημα μπορεί να μειωθεί κατά βούληση χωρίς να επηρεαστεί σημαντικά η ακρίβεια της μέτρησης.
2. Ακόμη και αν η επίδραση αυτή δεν είναι αμελητέα, μπορούμε να την υπολογίσουμε και να την λάβουμε υπόψη για την διόρθωση των αποτελεσμάτων.

Στην Κβαντομηχανική τα πράγματα δεν είναι έτσι. Δεν μπορούμε να μειώσουμε κατά βούληση την επίδραση της μετρητικής συσκευής χωρίς να επηρεάσουμε αρνητικά την

ακρίβεια της μέτρησης. Σκεφτείτε για παράδειγμα την διαδικασία μέτρησης της θέσης ενός σωματίου χρησιμοποιώντας μια μονοχρωματική δέσμη φωτός. Από την κυματική οπτική γνωρίζουμε πως για να δούμε ένα μικρό αντικείμενο θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε φως με αντίστοιχα μικρό μήκος κύματος. Στην κλασσική ηλεκτρομαγνητική θεωρία αυτό δεν επηρεάζει την ακρίβεια της μέτρησης γιατί μπορούμε παράλληλα να μειώσουμε την ένταση της φωτεινής δέσμης ώστε να αποφύγουμε την διαταραχή της θέσης του σωματίου. Κβαντικά αυτό δεν είναι δυνατό: η ελάχιστη δυνατή αλληλεπίδραση της φωτεινής δέσμης αντιστοιχεί στην ελαστική κρούση ενός φωτονίου της δέσμης με το σωμάτιο. Η ενέργεια του φωτονίου $E=hv=hc/\lambda$, οπότε αν θέλουμε να μειώσουμε τη διαταραχή θα πρέπει να ελαττώσουμε την ενέργεια του προσπίπτοντος φωτονίου, δηλαδή να χρησιμοποιήσουμε μεγάλα μήκη κύματος, οπότε η ακρίβεια της μέτρησης θα μειωθεί. Αντίθετα, αν επιμένοντας σε μια πολύ ακριβή μέτρηση της θέσης χρησιμοποιήσουμε μικρά μήκη κύματος, τότε το προσπίπτον φωτόνιο θα έχει μεγάλη ενέργεια οπότε θα διαταράξει πολύ το σωμάτιο και θα το βγάλει από την αρχική του θέση. Το συμπέρασμα είναι:

1. Στην Κβαντομηχανική είναι αδύνατον να μειώσουμε την επίδραση της μετρητικής συσκευής χωρίς να επηρεάσουμε αρνητικά την ακρίβεια της μέτρησης.
2. Ούτε μπορούμε να προβλέψουμε την επίδραση της μετρητικής συσκευής ώστε να διορθώσουμε το προκύπτον αποτέλεσμα.

Το δεύτερο συμπέρασμα προκύπτει από την στατιστική ερμηνεία της κυματοσυνάρτησης ως εξής: Έστω ότι θέλουμε να μετρήσουμε κάποιο φυσικό μέγεθος που περιγράφεται από τον ερμιτιανό τελεστή A με διακριτές ιδιοτιμές a_1, a_2,....a_n και με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις ψ_1, ψ_2,....ψ_n. Μια τυχαία κατάσταση του μετρούμενου συστήματος περιγράφεται από μια κυματοσυνάρτηση η οποία στο σύστημα των ιδιοσυναρτήσεων του A γράφεται:

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n$$

Σύμφωνα με τη στατιστική ερμηνεία, είναι αδύνατο να προβλέψουμε το αποτέλεσμα της μέτρησης εκ των προτέρων, το μόνο που μπορούμε να πούμε είναι πως η μέτρηση θα δώσει οπωσδήποτε μια τιμή εκ των a_1, a_2,....a_n και αν επαναλάβουμε την μέτρηση πολλές φορές, μπορούμε να υπολογίσουμε τη συχνότητα εμφάνισης καθενός εξ αυτών των πιθανών αποτελεσμάτων, που δεν θα είναι άλλη από την πιθανότητα της αντίστοιχης ιδιοτιμής και η οποία θα είναι:

$$p_n = |c_n|^2$$

Ας περιοριστούμε σε μια μέτρηση που έβγαλε αποτέλεσμα a_n. Σύμφωνα με τα παραπάνω, είναι αδύνατον, από αυτή τη μέτρηση και μόνο, να καθορίσουμε την κατάσταση του συστήματος πριν τη μέτρηση. Λόγω της στατιστικής ερμηνείας, δεν υπάρχει αντιστοιχία 1-1 μεταξύ αρχικής και τελικής κατάστασης σε μια μέτρηση. Η ίδια αρχική κατάσταση μπορεί να

δώσει πολλά διαφορετικά αποτελέσματα, οπότε το αποτέλεσμα μιας συγκεκριμένης μέτρησης δεν μπορεί να μας διαφωτίσει για την κατάσταση του συστήματος πριν τη μέτρηση.

Για το ποια είναι η κατάσταση του συστήματος μετά την μέτρηση σκεφτόμαστε ως εξής: αν κάνουμε μια μέτρηση του μεγέθους A και πάρουμε την τιμή έστω a_n, είναι λογικό να απαιτήσουμε σε μια δεύτερη μέτρηση του ίδιου μεγέθους αμέσως μετά την πρώτη μέτρηση, θα πρέπει να δώσει με βεβαιότητα ίδιο αποτέλεσμα. Αυτό θα συμβεί μόνο αν μετά την πρώτη μέτρηση το σύστημα βρεθεί στην αντίστοιχη ιδιοκατάσταση ψ_n. Συμπερασματικά: *αν μια μέτρηση του φυσικού μεγέθους A δώσει την ιδιοτιμή a_n, τότε η κατάσταση του συστήματος μετά την μέτρηση θα περιγράφεται από την αντίστοιχη με την μετρούμενη ιδιοτιμή ιδιοσυνάρτηση ψ_n.* Η διατύπωση αυτή είναι γνωστή ως *αρχή του φιλτραρίσματος*. Είναι μια μη συνεχής διαδικασία σε αντίθεση με την χρονική εξέλιξη της κυματοσυνάρτησης που περιγράφεται από την εξίσωση του Schrodinger που είναι συνεχής διαδικασία [83].

2.7. Ερμιτιανότητα: Η βασική μαθηματική ιδιότητα των Κβαντομηχανικών τελεστών

Στην Κβαντομηχανική, σε κάθε παρατηρήσιμο μέγεθος, A, αντιστοιχούμε έναν τελεστή A. Η μέση τιμή του μεγέθους αυτού είναι ίση με τη μέση τιμή του τελεστή A ως προς την κυματοσυνάρτηση ψ που περιγράφει την κατάσταση του συστήματος. Η μέση τιμή, εφόσον η ψ είναι κανονικοποιημένη, είναι το εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle A \rangle = \int \psi^* (A\psi) dx \qquad (1)$$

Δεδομένου ότι η μέση τιμή είναι μια μετρούμενη ποσότητα, η έκφραση (1) πρέπει να δίνει πάντα πραγματικό αποτέλεσμα για οποιαδήποτε κυματοσυνάρτηση ψ. Αν ο τελεστής A έχει αυτή την ιδιότητα ονομάζεται ερμιτιανός.

Ορισμός: *"Ένας τελεστής ονομάζεται ερμιτιανός αν η μέση τιμή του είναι πάντα πραγματική"*.

Μια πρώτη συνέπεια αυτού του ορισμού είναι η εξής: *"Οι ιδιοτιμές ενός ερμιτιανού τελεστή είναι πραγματικοί αριθμοί"*.

Αν λάβουμε υπόψη τις προφανείς ιδιότητες της μέσης τιμής:

$$\langle A+B \rangle = \langle A \rangle + \langle B \rangle \quad \text{και} \quad \langle \lambda A \rangle = \lambda \langle A \rangle \qquad (2)$$

τότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα:

1. *Το άθροισμα δύο ερμιτιανών τελεστών είναι επίσης ερμιτιανός τελεστής*
2. *Το γινόμενο ενός ερμιτιανού τελεστή και ενός πραγματικού αριθμού είναι πάλι ερμιτιανός τελεστής*
3. *Το γινόμενο δύο ερμιτιανών τελεστών είναι ερμιτιανός τελεστής μόνο αν οι τελεστές μετατίθενται.*

Εφόσον η μέση τιμή ενός ερμιτιανού τελεστή είναι πάντα πραγματική, ισχύει:

$$\langle A \rangle = \langle A \rangle^* \qquad (3)$$

όπου $\langle A \rangle = \int \psi^* (A\psi) dx$ οπότε $\langle A \rangle^* = (\int \psi^* (A\psi) dx)^* = \int \psi (A\psi)^* dx) \equiv \int (A\psi)^* \psi dx)$ (4)

και η σχέση (3) γράφεται:

$$\int \psi^*(A\psi)dx = \int (A\psi)^* \psi dx \qquad (5)$$

Έτσι για μια τυχούσα κυματοσυνάρτηση ψ, μπορούμε να βάλουμε στην θέση ένα τυχόντα γραμμικό συνδυασμό $\psi' = \psi + \lambda\varphi$ και να απαιτήσουμε να ισχύει για κάθε λ η σχέση:

$$\int \psi^*(A\varphi)dx = \int (A\psi)^* \varphi dx \qquad (6)$$

Δηλαδή: *Η δράση ενός ερμιτιανού τελεστή μπορεί να μεταφερθεί από τη μια συνάρτηση ενός ολοκληρώματος στην άλλη.*

Θεώρημα: *Ένας ερμιτιανός τελεστής έχει πραγματικές ιδιοτιμές και ορθογώνιες ιδιοσυναρτησεις.* Απόδειξη: Από τη σχέση (6), για δύο ιδιοσυναρτήσεις ψ_1, ψ_2 που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές α_1, α_2, θα έχουμε

$$\int \psi_1^*(A\psi_2)dx = \int (A\psi_1)^* \psi_2 dx \qquad (7)$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι οι ψ_1, ψ_2 ικανοποιούν τις εξισώσεις ιδιοτιμών:

$$A\psi_1 = \alpha_1\psi_1 \text{ και } A\psi_2 = \alpha_2\psi_2$$

με α_1, α_2 πραγματικά, παίρνουμε:

$$\int \psi_1^*(\alpha_2\psi_2)dx = \int (\alpha_1\psi_1)^* \psi_2 dx$$

$$\Rightarrow \alpha_2 \int \psi_1^* \psi_2 dx = \alpha_1 \int \psi_1^* \psi_2 dx$$

$$\Rightarrow (\alpha_2 - \alpha_1) \int \psi_1^* \psi_2 dx = 0 \qquad (8)$$

και δεδομένου ότι $\alpha_2 \neq \alpha_1$ θα είναι:

$$\int \psi_1^* \psi_2 dx = 0 \qquad (9)$$

που είναι η συνθήκη ορθογωνιότητας.

Ισχύει και το αντίστροφο θεώρημα: "*Αν ένας τελεστής έχει πραγματικές ιδιοτιμές και πλήρες σύστημα ορθογώνιων ιδιοσυναρτήσεων, είναι ερμιτιανός*". Πράγματι, αν συμβαίνει αυτό τότε η μέση τιμή (3) γράφεται ως:

$$\langle A \rangle = \sum_n \alpha_n |c_n|^2$$

και είναι πραγματική αρκεί οι ιδιοτιμές α_n να είναι πραγματικές. Ένα χρήσιμο πόρισμα είναι το εξής: *''Κάθε πραγματική συνάρτηση ενός ερμιτιανού τελεστή είναι επίσης ερμιτιανός τελεστής''.*

Μια τελευταία βασική ιδιότητα των ερμιτιανών τελεστών λέει ότι*: ''Οι ιδιοσυναρτήσεις τους αποτελούν πλήρες σύστημα''.* Αυτό σημαίνει ότι κάθε συνάρτηση που ανήκει στο χώρο δράσης του τελεστή μπορεί να αναπτυχθεί σε μια σειρά ιδιοσυναρτήσεων της μορφής:

$$\psi = \sum_n c_n \psi_n \qquad (10)$$

Αυτή η ιδιότητα είναι καίρια για τη στατιστική ερμηνεία και χωρίς αυτή η Κβαντομηχανική δεν θα είχε φυσική σημασία, αφού θα υπήρχαν τετραγωνικά ολοκληρώσιμες κυματοσυναρτήσεις, δηλαδή πραγματοποιήσιμες φυσικές καταστάσεις, οι οποίες δεν μπορούν να αναπτυχθούν στην μορφή (10) και δεν θα ήμασταν σε θέση να προβλέψουμε τα πιθανά αποτελέσματα των μετρήσεων του μεγέθους A.

2.8. Η χρονική εξέλιξη των κυματοσυναρτήσεων

2.8.1. Λύση της χρονεξαρτημένης εξίσωσης Schrödinger και στάσιμες καταστάσεις

Κατά την ανάπτυξη της στατιστικής ερμηνείας στις προηγούμενες παραγράφους, η χρονική εξέλιξη είχε αγνοηθεί διότι αυτό που μας ενδιέφερε είναι το φυσικό περιεχόμενο της κυματοσυνάρτησης σε μια δεδομένη χρονική στιγμή. Η χρονικά εξελιγμένη [91] μορφή μιας ενεργειακής ιδιοσυνάρτησης θα είναι:

$$\psi_n(x,t) = \psi_n(x)e^{-iE_n t/\hbar} \qquad (1)$$

Υποθέτουμε ότι η (1) είναι μια λύση της εξίσωσης Schrödinger, δηλαδή ικανοποιεί την

$$-i\hbar\frac{\partial\psi_n}{\partial t} = H\psi_n \qquad (2)$$

Άρα προκύπτει

$$-i\hbar\frac{\partial\psi_n(x,t)}{\partial t} = E_n\psi_n(x)e^{-iE_n t/\hbar} \qquad (3)$$

και επίσης

$$H\psi_n(x,t) = (H\psi_n(x))e^{-iE_n t/\hbar} = E_n\psi_n(x)e^{-iE_n t/\hbar} \qquad (4)$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η $\psi_n(x)$ είναι μια ιδιοσυνάρτηση της Χαμιλτονιανής με ιδιοτιμή E_n και ικανοποιεί την εξίσωση ιδιοτιμών $H\psi_n = E_n\psi_n$. Οι (3) και (4) ικανοποιούν την (2). Εάν έχουμε μια άπειρη ακολουθία ειδικών λύσεων $\psi_n(x,t)$ n=1,2... της εξίσωσης Schrödinger η γενική λύση κατασκευάζεται με επαλληλία και είναι:

$$\psi(x,t) = \sum_n c_n\psi_n(x,t) = \sum_n c_n\psi_n(x,t)e^{-iE_n t/\hbar} \qquad (5)$$

όπου $\psi_n(x)$ είναι ιδιοσυναρτήσεις της Χαμιλτονιανής. Επειδή η εξίσωση του Schrödinger είναι πρωτοτάξια ως προς το χρόνο η γνώση της $\psi(x,0)$ αρκεί για να καθορίσει μονοσήμαντα την χρονική εξέλιξη της $\psi(x,t)$. Βάζοντας t=0 στην (5) προκύπτει:

$$\psi(x,0) = \sum_n c_n\psi_n(x) \equiv \psi(x) \qquad (6)$$

Οι άγνωστοι συντελεστές c_n δεν είναι τίποτα άλλο από τους συντελεστές του αναπτύγματος της αρχικής κυματοσυνάρτησης $\psi(x,0)\equiv\psi(x)$ σε ιδιοσυναρτήσεις ενέργειας που υπολογίζονται από τον τύπο:

$$c_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^*(x)\psi(x)dx \qquad (7)$$

Το πρόβλημα της χρονικής εξέλιξης ενός κβαντομηχανικού συστήματος ανάγεται στην χρονοανεξάρτητη εξίσωση

$$H\psi=E\psi \qquad (8)$$

Αν ξέρουμε τις ιδιοτιμές E_n και τις αντίστοιχες ιδιοσυναρτησεις ψ_n της (8) το πρόβλημα της χρονικής εξέλιξης μιας οποιασδήποτε κυματοσυνάρτησης ψ(x,0) είναι ουσιαστικά τετριμμένο. Η ιδιαίτερη φυσική σημασία των ενεργειακών ιδιοκαταστάσεων οφείλεται μεταξύ των άλλων, και στο γεγονός ότι η χρονική εξέλιξη γι' αυτές έχει τη μορφή απλής φάσης:

$$\psi_n(x,t)=\psi_n(x)e^{-iE_n t/\hbar} \qquad (9)$$

Έτσι η πυκνότητα πιθανότητας θέσης

$$P(x,t)=\left|\psi_n(x,t)\right|^2=\left|\psi_n(x)\right|^2 \qquad (10)$$

είναι ανεξάρτητη από το χρόνο. Το ίδιο ισχύει και για τη μέση τιμή και γενικότερα για τη στατιστική κατανομή οποιουδήποτε φυσικού μεγέθους. Συμπερασματικά, *όταν ένα φυσικό σύστημα βρίσκεται σε μια κατάσταση καθορισμένης ενέργειας, η χρονική εξέλιξη δεν επιφέρει καμία απολύτως αλλαγή στα μετρήσιμα χαρακτηριστικά του*. Για το λόγο αυτό οι ενεργειακές ιδιοκαταστάσεις ονομάζονται στάσιμες καταστάσεις.

2.8.2. Επιπτώσεις της χρονικής εξέλιξης

Η χρονική εξέλιξη έχει μετρήσιμες επιπτώσεις στα μετρήσιμα φυσικά μεγέθη μόνο αν η κατάσταση του φυσικού συστήματος είναι μια επαλληλία $\psi=\sum_n c_n\psi_n$ ενεργειακών ιδιοκαταστάσεων. Στην περίπτωση αυτή η χρονικά εξελιγμένη μορφή της ψ είναι:

$$\psi(x,t)=\sum_{n=0} c_n\psi_n(x)e^{-iE_n t/\hbar} \qquad (11)$$

και δεν συνδέεται με την αρχική κυματοσυνάρτηση με μια απλή αλλαγή φάσης. Αντικαθιστώντας την (11) στην σχέση (1) της παραγράφου 2.7 παρατηρούμε ότι η μέση τιμή μεταβάλλεται με το χρόνο ως εξής:

$$\langle A\rangle_t=\int\psi^*(x,t)(A\psi(x,t))dx=$$

$$=\int(\sum_n c_n^*\psi_n^* e^{-iE_n t/\hbar})(\sum_m c_m(A\psi_m)\psi_n^* e^{-iE_m t/\hbar})dx=$$

$$=\sum_{n,m} c_n^* c_m e^{i(E_n-E_m)t/\hbar}\int\psi_n^*(A\psi_m)dx=$$

$$\Rightarrow\langle A\rangle_t=\sum_{n,m} c_n^* c_m e^{i\omega_{nm}t/\hbar}A_{nm} \qquad (12)$$

όπου

$$\omega_{nm}=E_n-E_m/\hbar \text{ και } A_{nm}=\int\psi_n^*(A\psi_m)dx \qquad (13)$$

Οι ποσότητες A_{nm} (13) ονομάζονται στοιχεία μήτρας του τελεστή A, και ικανοποιούν τη σχέση $A_{nm} = A^*_{nm}$. Εξαίρεση αποτελούν τα λεγόμενα διατηρήσιμα μεγέθη για τα οποία η μέση τιμή παραμένει χρονικά σταθερή. Για να απαλειφθεί ο χρόνος από την (12) πρέπει:

$$A_{nm} = 0 \text{ για } n \neq m \qquad (14)$$

Η συνθήκη (104) μπορεί να ικανοποιηθεί μόνο όταν οι ενεργειακές ιδιοσυναρτήσεις ψ_n είναι ιδιοσυναρτήσεις του μεγέθους A, δηλαδή αν ισχύει $A\psi_n = a_n\psi_n$, όποτε η (13) δίνει:

$$A_{nm} = \int \psi_n^*(A\psi_m)dx = \alpha_m \int \psi_n^* \psi_m dx \qquad (15)$$

και λόγω της ορθογωνιότητας των συναρτήσεων θα είναι $A_{nm}=0$. Δύο μεγέθη μπορούν να έχουν κοινό σύστημα ιδιοσυναρτήσεων μόνο αν οι τελεστές τους μετατίθενται, οπότε ένα μέγεθος είναι διατηρήσιμο μόνο αν μετατίθεται με τη Χαμιλτονιανή του προβλήματος.

2.9. Η αρχή της αβεβαιότητας

2.9.1. Η αρχή της αβεβαιότητας θέσης-ορμής

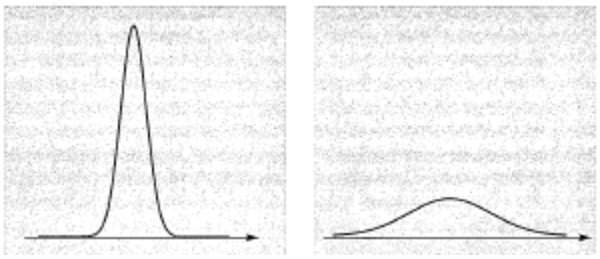
Η ακριβής διατύπωση της σχέσης αβεβαιότητας [92-95] θέσης-ορμής είναι:

$$(\Delta x)(\Delta p) \geq \frac{\hbar}{2} \qquad (1)$$

"Το γινόμενο των αβεβαιοτήτων θέσης-ορμής δεν μπορεί να γίνει μικρότερο από το μισό της σταθεράς του Planck". Η σχέση της αβεβαιότητας δεν είναι παρά μια αναπόδραστη συνέπεια της κεντρικής αρχής του κυματοσωματιδιακού δυισμού. Η αβεβαιότητα θέσης (Δx) εκφράζει χονδρικά το εύρος της κυματοσυνάρτησης ψ(x) που περιγράφει μια δεδομένη στιγμή την κατάσταση του σωματιδίου. Αν η ψ(x) είναι αρκετά στενή, τότε το Δx είναι αρκετά μικρό. Αν αντίθετα η κυματοσυνάρτηση είναι πλατιά, τότε η αβεβαιότητα είναι μεγάλη.

Για την αβεβαιότητα της ορμής το ρόλο της ψ(x) παίζει η μετασχηματισμένη κατά Fourier φ(p) που αντιπροσωπεύει το πλάτος της πιθανότητας για την όρμη. Άρα το Δp εκφράζει το εύρος της κυματοσυνάρτησης των ορμών φ(p). Το Δp είναι μεγάλο ή μικρό ανάλογα με το αν η φ(p) είναι πλατιά ή στενή. Όσο πιο στενή είναι η κυματοσυνάρτηση της θέσης ψ(x), τόσο πιο πλατιά είναι η κυματοσυνάρτηση της ορμής φ(p) (σχήμα 15). Δεδομένης αυτής της παρατήρησης, η σχέση της αβεβαιότητας γράφεται:

$$(\Delta x)(\Delta p) \approx \hbar \qquad (2)$$



Σχήμα 15: Μαθηματικός μηχανισμός αρχής της αβεβαιότητας

Όπως ξέρουμε από την κλασσική κυματική θεωρία, όσο πιο καλά εντοπισμένο είναι ένα κύμα τόσο πιο ευρεία είναι η περιοχή κυματαριθμών των επίπεδων κυμάτων στα οποία αναλύεται. Το εύρος Δx του κυματοπακέτου και το εύρος Δk των κυματαριθμών συνδέονται μέσω της σχέσης:

$$(\Delta x)(\Delta k) \approx 1 \qquad (3)$$

Δεδομένου ότι Δp= ħΔk η (3) είναι ισοδύναμη με την κβαντομηχανική σχέση αβεβαιότητας (2). Βλέπουμε λοιπόν ότι η αρχή της αβεβαιότητας είναι μια αναγκαστική συνέπεια της κυματικής συμπεριφοράς των σωματιδίων.

Αν ξέρουμε τη θέση με πολύ μεγάλη ακρίβεια (Δx μικρό), τότε η κυματοσυνάρτηση θα είναι πολύ εντοπισμένη οπότε θα περιέχει μια ευρύτατη ποικιλία ορμών (Δp μεγάλο). Αν αντίθετα η ορμή είναι γνωστή με μεγάλη ακρίβεια (Δp μικρό) τότε η κυματοσυνάρτηση θα είναι πολύ στενή, οπότε η ψ(x) θα' ναι αρκετά εκτεταμένη κάνοντας αδύνατο τον ακριβή προσδιορισμό της θέσης του σωματιδίου. Στην ακραία περίπτωση που ξέρουμε την ορμή με απόλυτη ακρίβεια (Δp=0), η κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου είναι ένα επίπεδο κύμα:

$$\psi_p(x) \sim e^{ipx/\hbar} \qquad (4)$$

το οποίο μας δίνει μια πιθανότητα θέσης:

$$P(x) \sim \left|\psi_p(x)\right|^2 = \text{σταθερά} \qquad (5)$$

που είναι σταθερή σε ολόκληρο το χώρο και επομένως αντιστοιχεί σε πλήρη άγνοια της θέσης του σωματιδίου (Δx=∞).

2.9.2. Η αρχή της αβεβαιότητας χρόνου-ενέργειας

Η σχέση αβεβαιότητας χρόνου-ενέργειας [96]:

$$(\Delta E)(\Delta t) \approx \hbar \qquad (6)$$

έχει εντελώς διαφορετικό φυσικό νόημα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο χρόνος δεν είναι ένα δυναμικό μέγεθος, αλλά μια παράμετρος που συνοδεύει τις μετρήσεις μας. Ο χρόνος είναι μια εξωτερική ως προς το φυσικό σύστημα παράμετρος και γι' αυτόν ακριβώς το λόγο δεν έχουμε εισαγάγει ένα κβαντομηχανικό τελεστή χρόνου. Η ποσότητα Δt στην (96) δεν μπορεί να θεωρηθεί παρόμοια με τις αβεβαιότητες των άλλων μεγεθών, αλλά απαιτεί μια ιδιαίτερη ερμηνεία.

Το Δt πρέπει να ερμηνευθεί ως ο χαρακτηριστικός χρόνος εξέλιξης του συστήματος τ. Στο πλαίσιο μιας τέτοιας ερμηνείας, η (6) μπορεί να γραφεί:

$$(\Delta E)(\tau) \approx \hbar \qquad (7)$$

Το φυσικό νόημα της (7) διατυπώνεται ως εξής: *Όσο πιο αργά μεταβάλλεται ένα φυσικό σύστημα (τ μεγάλο), τόσο πιο καλά καθορισμένη είναι η ενέργεια του (ΔΕ μικρό).* Και αντίστροφα*: Όσο πιο γρήγορος είναι ο ρυθμός μεταβολής του (τ μικρό), τόσο πιο μεγάλη είναι η αβεβαιότητα στην ενέργεια του (ΔΕ μεγάλο).*

Στην περίπτωση που η κατάσταση του φυσικού συστήματος είναι μια ενεργειακή ιδιοκατάσταση, η ενέργεια του θα' ναι απόλυτα καθορισμένη ($\Delta E=0$). Η (7) δίνει:

$$\tau=\infty$$

Όμως ο άπειρος χρόνος εξέλιξης σημαίνει ότι το σύστημα παραμένει χρονικά αμετάβλητο, αφού χρειάζεται άπειρο χρόνο για να παρατηρήσουμε μια αλλαγή στην κατάστασή του. Αυτό είναι το χαρακτηριστικό των ενεργειακών καταστάσεων, τις οποίες ονομάζουμε στάσιμες, ακριβώς επειδή η χρονική τους εξέλιξη δεν επιφέρει καμία αλλαγή στα μετρήσιμα μεγέθη του συστήματος.

Πεπερασμένος χρόνος εξέλιξης τ μπορεί να εμφανιστεί μόνο σε καταστάσεις που δεν έχουν καθορισμένη ενέργεια, δηλαδή $\Delta E\neq 0$. Μια τέτοια κατάσταση υπέρθεσης είναι:

$$\psi(x)=c_1\psi_1+ c_2\psi_2 \qquad (8)$$

όπου ψ_1, ψ_2 είναι δύο ενεργειακές ιδιοσυναρτήσεις με ενέργειες E_1 και E_2 αντίστοιχα, για την οποία είναι:

$$\Delta E \approx |E_1 - E_2| \qquad (9)$$

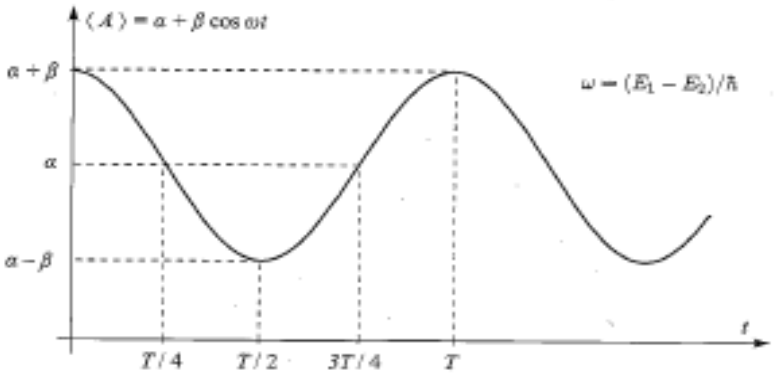
Η χρονικά εξελιγμένη μορφή της (8) είναι:

$$\psi(x,t) = c_1\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + c_2\psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar} \qquad (10)$$

Η μέση τιμή του μεγέθους Α κατά τη χρονική στιγμή t γράφεται:

$$\langle A\rangle_t = \alpha + \beta\cos\omega t \qquad (11)$$

όπου $\omega=(E_1-E_2)/\hbar$ και α, β σταθερές που η εξάρτησή τους από c_1, c_2 δεν έχει σημασία. Η γραφική παράσταση της χρονικής εξέλιξης της μέσης τιμής φαίνεται στο σχήμα 16.



Σχήμα 16: Η χρονική εξέλιξη της μέσης τιμής ενός φυσικού μεγέθους σε μια κατάσταση υπέρθεσης με ενέργειες E_1 και E_2.

Ο χρόνος που χρειάζεται να περιμένουμε για να δούμε μια αισθητή μεταβολή σε αυτή τη μέση τιμή θα είναι της τάξης του ενός τετάρτου ή του μισού της περιόδου $T=2\pi/\omega$. Ο χαρακτηριστικός χρόνος εξέλιξης του συστήματος θα είναι χονδρικά ίσος με:

$$\tau \simeq \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\hbar\pi}{E_1 - E_2} \simeq \frac{h}{\Delta E} \simeq \frac{\hbar}{\Delta\varepsilon} \qquad (12)$$

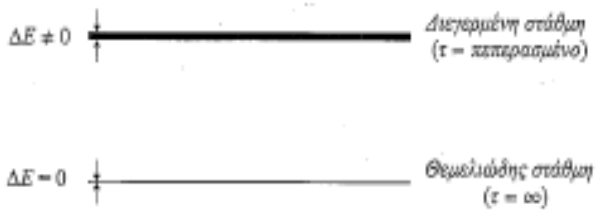
σε εμφανή συμφωνία με τη σχέση αβεβαιότητας χρόνου-ενέργειας.

Βλέπουμε δηλαδή ότι, μόλις το σύστημα έπαψε να έχει καθορισμένη ενέργεια απόκτησε ταυτόχρονα και μια ουσιώδη χρονική εξέλιξη με τον κατάλληλο χαρακτηριστικό χρόνο τ. Αν αντίστροφα δεν ξέραμε τίποτα για την ενέργεια του συστήματος, διαπιστώναμε όμως ότι τα μετρήσιμα χαρακτηριστικά του αλλάζουν αισθητά μέσα σε ένα χρονικό διάστημα τ. τότε θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε ότι δεν έχει καθορισμένη ενέργεια αλλά εμφανίζει μια ενεργειακή αβεβαιότητα ΔΕ της τάξεως του ħ/τ.

Η κλασσική εφαρμογή αυτών των ιδεών αφορά στη συσχέτιση του μέσου χρόνου ζωής και πλάτους γραμμής των διεγερμένων καταστάσεων ενός ατόμου. Οι διεγερμένες ατομικές καταστάσεις δεν είναι αυστηρά στάσιμες, γιατί το ηλεκτρόνιο που βρίσκεται εκεί έχει τη δυνατότητα να μεταβεί σε μια κατώτερη ενεργειακή στάθμη με ταυτόχρονη εκπομπή φωτονίου. Όπως και τα άλλα κβαντικά μεγέθη, έτσι και ο χρόνος αποδιέγερσης μιας στάθμης δεν μπορεί να προβλεφθεί με ακρίβεια. Επομένως αυτό που ονομάζουμε μέσο χρόνο ζωής δεν είναι παρά ο στατιστικός μέσος όρος των χρόνων αποδιέγερσης ενός πληθυσμού ταυτόχρονα διεγερμένων ατόμων.

Η μέση ζωή είναι λοιπόν ο χρόνος που χρειάζεται να περιμένουμε κατά μέσο όρο για να δούμε το άτομο να αποδιεγείρεται, δηλαδή για να δούμε μια αισθητή μεταβολή στην κατάστασή του. Ο μέσος χρόνος ζωής μιας στάθμης αντιστοιχεί επομένως στον χαρακτηριστικό χρόνο εξέλιξης ενός κβαντικού συστήματος. Έτσι μια ασταθής ενεργειακή στάθμη δεν μπορεί να έχει αυστηρά καθορισμένη ενέργεια αλλά θα παρουσιάζει μια διασπορά ΔΕ που δίνεται χονδρικά από τη σχέση (7).

Στο διάγραμμα των ενεργειακών επιπέδων οι διεγερμένες στάθμες πρέπει να παριστάνονται με διαπλατυσμένες γραμμές πάχους ΔΕ, ενώ για τη θεμελιώδη κατάσταση θα είναι πάντα ΔΕ=0, αφού γι' αυτήν ο μέσος χρόνος ζωής του ατόμου είναι άπειρος. Οι ενεργειακές στάθμες φαίνονται στο σχήμα 17.



Σχήμα 17: Δύο ενεργειακές στάθμες και οι διαπλατύνσεις τους

Δεδομένου ότι η ενεργειακή διαφορά αυτών των σταθμών δεν είναι απόλυτα καθορισμένη αλλά έχει διασπορά ΔΕ, η ενέργεια του εκπεμπόμενου φωτονίου θα είναι επίσης αβέβαια κατά το ίδιο ποσό. Η διασπορά στη συχνότητα θα είναι:

$$\Delta\nu = \frac{\Delta E}{h} \simeq \frac{1}{\tau} \qquad (13)$$

Αν προσθέσουμε ακόμα ότι η τάξη μεγέθους του μέσου χρόνου ζωής των διεγερμένων ατομικών καταστάσεων είναι περίπου $\tau \approx 10^{-8}$ sec, τότε οι αντίστοιχες αβεβαιότητες ΔΕ θα είναι της τάξεως $\Delta E \approx \hbar/\tau \approx 10^{-7}$eV.

Ένα τελευταίο σημείο που αξίζει να θιγεί είναι το κλασσικό ανάλογο της σχέσης αβεβαιότητας χρόνου-ενέργειας:

$$(\Delta\omega)(\Delta t)\approx 1 \qquad (14)$$

που προκύπτει από την (96) με αντικατάσταση $E=\hbar\omega \rightarrow \Delta E=\hbar\Delta\omega$. Η (14) αποτελεί τη χρονική εκδοχή της σχέσης:

$$(\Delta k)(\Delta x)\approx 1 \qquad (15)$$

με βάση τις προφανείς αντιστοιχίες $x\rightarrow t$ και $k\rightarrow\omega$.

2.10. Τα πέντε θεμελιώδη αξιώματα της Κβαντομηχανικής

Συνοψίζουμε τα βασικά αξιώματα της Κβαντομηχανικής:

***Αξίωμα 1**: Μαθηματική περιγραφή των φυσικών καταστάσεων*

Σε κάθε κατάσταση ενός φυσικού συστήματος αντιστοιχεί μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη κυματοσυνάρτηση. Η κυματοσυνάρτηση δεν έχει άμεσο φυσικό νόημα, αλλά περιέχει όλες τις πειραματικά ελέγξιμες πληροφορίες για την κατάσταση του φυσικού συστήματος.

***Αξίωμα 2**: Μαθηματική περιγραφή των φυσικών μεγεθών*

Σε κάθε φυσικό μέγεθος Α αντιστοιχεί ένας ερμιτιανός τελεστής $\hat{A}$, οι ιδιοσυναρτήσεις του οποίου αποτελούν ένα πλήρες σύνολο ιδιοσυναρτήσεων:

$$\langle A\rangle = \int \psi^*(A\psi)dx$$

Οι μόνες δυνατές τιμές που προκύπτουν κατά την μέτρηση του μεγέθους Α είναι οι ιδιοτιμές του $\hat{A}$, που μπορεί να είναι διακριτές ή συνεχείς, αλλά σίγουρα πραγματικές λόγω της αυτοσυνάφειας.

Σημείωση: Αν το φυσικό μέγεθος εξαρτάται από τις δυναμικές μεταβλητές της θέσης και της ορμής, η κατασκευή του τελεστή Α μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας τις αναπαραστάσεις:

$$r \rightarrow r, \qquad p \rightarrow -i\hbar\nabla$$

Αξίωμα 3: Στατιστική ερμηνεία του φορμαλισμού

Η μέση τιμή των αποτελεσμάτων των μετρήσεων ενός φυσικού μεγέθους δίνεται από τον τύπο:

$$\langle A\rangle = \int \psi^*(\hat{A}\psi)dx$$

όπου $\hat{A}$ είναι ο τελεστής που αντιστοιχεί στο μέγεθος Α.

Σε μια κατάσταση υπέρθεσης $\psi = \sum_n c_n\psi_n$, η πιθανότητα εμφάνισης της ιδιοτιμής a_n που αντιστοιχεί στην ιδιοσυνάρτηση ψ_n είναι:

$$P_n = |c_n|^2$$

Αξίωμα 4: Ο νόμος της κβαντικής μέτρησης

Η κατάσταση του φυσικού συστήματος μετά από μια μέτρηση δίνεται από την ιδιοσυνάρτηση της ιδιοτιμής που μετρήθηκε.

Αυτό αναφέρεται ως αρχή του φιλτραρίσματος κατά τη μέτρηση διότι από την επαλληλία πριν τη μέτρηση, το σύστημα μεταβαίνει στην κατάσταση $\psi = c_n \psi_n$ μετά την μέτρηση, υποθέτοντας πως το αποτέλεσμα της μέτρησης ήταν η ιδιοτιμή a_n.

Αξίωμα 5: Ο νόμος της κβαντικής κίνησης

Η χρονική εξέλιξη της κατάστασης ενός κβαντομηχανικού συστήματος διέπεται από την εξίσωση του Schrodinger.

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$$

όπου H ο τελεστής της Χαμιλτονιανής του συστήματος.

Παραπομπές

1. Isaac Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* ("*Mathematical Principles of Natural Philosophy*"), London, 1687; Cambridge, 1713; London, 1726.
2. *The Structure of the Ether*. By Dr. H. Bateman. 1915-21-06
3. James Clerk Maxwell (1861). *"On physical lines of force"*. Philosophical Magazine.
4. James Clerk Maxwell. *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field/ Part VI*
5. *Maxwell's Displacement Current and His Theory of Light*. Joan Bromberg. Communicated by S. G. Brush.
6. James Clerk Maxwell (1865). *"A dynamical theory of the electromagnetic field"*. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 155: 459–512.
7. L. Boltzmann (1868). *Studien uber das Gleichgewicht der lebendigen Kraft zwischen bewegten materiellen Punkten*. Wiener Berichte, 58, 517-560.
8. L. Boltzmann (1872). *Weitere Studien uber das Warmegleichgewicht unter Gasmolekulen*. Wiener Berichte, 66, 275-370.
9. L. Boltzmann (1898). *Vorlesungen uber Gastheorie* (S. G. Brush, Trans.). Leipzig: Barth.
10. L. Boltzmann (1877). *Uber die Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Warmetheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung respektive den Satzen uber das Warmegleichgewicht*. Wiener Berichte, 76, 373-435
11. A. Bach (1990). *Boltzmann's Probability Distribution of 1877*. Archive for History of Exact Sciences, 41, 1-40.
12. L. Boltzmann (1909). *Wissenschaftliche Abhandlungen*. Leipzig: Barth
13. T. Kuhn (1978). *Black-Body Theory and the Quantum Discontinuity*, 1894-1912. Oxford: Oxford University Press.
14. M. Planck (1900a). *Entropie und Temperatur strahlender Warme*. Annalen der Physik, 4 (1), 719-737.
15. M. Planck (1900b). *Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspektrum*. Verhandlungen der Deutschen Physikalische Gesellschaft, 2, 237-245
16. M. Planck (1906). *Vorlesungen uber die Theorie der Warmestrahlung*. Leipzig: Barth
17. M. J. Klein (1963b). *Planck, Entropy, and Quanta, 1901-1906*. Natural Philosopher, 1, 83-108.
18. M. Planck, (1913). *The Theory of Heat Radiation* (M. Masius, Trans.). New York: Dover.
19. M. J. Klein (1966). *Thermodynamics and Quanta in Planck's Work*. Physics Today, 19 (11), 23-32.

20. M. Badino & N. Robotti (2001). *Max Planck and the constants of Nature*. Annals of Science, 58, 137-162.
21. Max Planck (1901). "*On the Law of Distribution of Energy in the Normal Spectrum*". Annalen der Physik, vol. 4, p. 553-563.
22. M. Planck (1972). *Planck's Original Papers in Quantum Physics* (D. t. Haar & S. G. Brush, Trans.). London: Taylor & Francis.
23. E. Garber (1976). *Some reactions to Planck's Law, 1900-1914*. Studies in History and Philosophy of Science, 7 (2), 89-126.
24. M. J. Klein (1962). *Max Planck and the Beginnings of the Quantum Theory*. Archive for History of Exact Sciences, 1, 459-479.
25. M. Planck (1915). *Eight Lectures on Theoretical Physics* (A. P. Wills, Trans.). New York: Dover.
26. M. Planck (1958). *Physikalische Abhandlungen und Vortrage*. Braunschweig: Vieweg & Sohn
27. M. J. Klein (1963a). *Einstein's First Papers on Quanta*. Natural Philosopher, 2, 59-86.
28. A. Einstein (1909a). *Zum gegenwartigen Stand des Strahlungsproblems*. Physikalische Zeitschrift 10, 185-193. In Stachel (1989), pp. 542-550; Beck (1989), pp.357-375
29. A. Einstein (1909b). *Uber die Entwickelung unserer Anschauungen uber das Wesen und die Konstitution der Strahlung*. Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft 7, 482-500; Physikalische Zeitschrift 10, 817-826 (with Discussion). In Stachel (1989), pp. 564-582, 585{586; Beck (1989), pp. 379-398.
30. Albert Einstein (1905). "*On a Heuristic Point of View about the Creation and Conversion of Light*". Annalen der Physik 17 (6); 132–148.
31. Arthur H. Compton (1967). *Personal Reminiscences*. In Johnston (1967), pp. 3-52.
32. Debye, P. (1954). *The Collected Papers of Peter J.W. Debye*. New York: Interscience
33. Arthur H. Compton (1922). *Secondary Radiations produced by X-Rays, and Some of their Applications to Physical Problems*. "Bulletin of the National Research Council 4, Part 2 (October), 1-56. In Shankland (1973), pp. 321-377
34. Arthur H. Compton (1923a). *"A Quantum Theory of the Scattering of X-rays by Light Elements"*. The Physical Review 21 (5); 483-502.
35. Arthur H. Compton, (1923b). *The Total Reflexion of X-Rays*." Philosophical Magazine 45, 1121-1131. In Shankland (1973), pp. 402-412.
36. P. Debye (1923). *Zerstreuung von Rontgenstrahlen und Quantentheorie*. Physikalische Zeitschrift 24, 161-166. Translated in Debye (1954), pp. 80-88
37. C.D. Ellis (1926). *The Light-Quantum Theory*. Nature117, 896.

38. Rutherford E. 1911, «*The Scattering of a and β Particles by Matter and the Structure of the Atom*», April Philos. Mag, 6, 21, pdf downloaded 2008-10-09
39. N. Bohr (1913a). *On the Constitution of Atoms and Molecules* (Papers reprinted from the Philosophical Magazine with an intorduction by L. Rosenfeld). Copenhagen and New York: Munksgaard and W. A. Benjamin.
40. N. Bohr (1913b). *On the spectra of Helium and hydrogen*. Nature 92, 231-232 (letter dated 8 October 1913, published in the issue of 23 October 1913).
41. N. Bohr (1914a). *Atomic models and x-ray spectra*. Nature 92, 553-554 (letter dated 5 January 1914, published in the issue of 15 January 1914).
42. N. Bohr (1914b). *On the effect of electric and magnetic fields on spectral lines*. Phil. Mag. (6) 27 506-524 (communicated by E. Rutherford, published in issue No. 159 of March 1914).
43. N. Bohr (1915a). *On the series spectrum of hydrogen and the structure of the atom*. Phil. Mag. (6) 29 332-335 (letter dated 12 January 1915 published in issue No. 170 of February 1915).
44. N. Bohr (1915b). *On the quantum theory of radiation and the structure of the atom*. Phil. Mag. (6) 30 394-415 (dated August 1915 published in issue No. 177 of September 1915)
45. N. Bohr (1918a). *On the quantum theory of line spectra. Part I. On the general theory*, K. Danske Selsk Skrifter, 8. Raekke IV. 1, 1-36 (foreword dated November 1917, published in April 1918); reprinted in collected works 3, pp 67-102.
46. N. Bohr (1918b). *On the quantum theory of line spectra. Part I. On the hydrogen spectrum*, K. Danske Selsk Skrifter, 8. Raekke IV. 1, 37-100 (published in December 1918); reprinted in collected works 3, pp 103-166.
47. N. Bohr (1919). *On the model of a triatomic hydrogen molecule*, Meddelanden fran K. Vetenskaps akademiens Nobelinstitut 5 No 28 (dated December 1918, printed 14 February 1919).
48. N. Bohr (1920). *Uber die Serienspektra der elemente*, Z. Phys. 2, 423-469 (received 21 June 1920, published in issue No. 5 of September 1920). English translation: On the series spectra of elements, in collected works 3, pp. 241-260.
49. N. Bohr (1921a). *Atomic structure*, Nature 107, 104-107 (letter dated 16 February 1921, published in the issue of 24 March 1921); reprinted in collected works 4, pp. 72 - 82
50. N. Bohr (1921b). *Zur Frage der polarization der Strahlung in der Quantentheorie*, Z. Phys. 6, 1-9 (received 17 June 1921, published in issue No. 1 of 9 August 1921 (reprinted in collected works 3, pp. 339-349. English translation: On the question on polarization of radiation in the quantum theory, in collected works 3, pp. 350-356.

51. N. Bohr (1921c). *Unsere heutige Kenntnis vom Atom*, Die Umschau 25, 229 (published in the issue of 30 April 1921). English translation: Our present knowledge of atoms, in collected works 4, pp. 83-89.
52. N. Bohr (1921d).). *Atomic structure*, Nature 108, 208-209 (letter dated 16 September 1921, published in the issue of 13 October 1921); reprinted in collected works 4, pp 177-180.
53. N. Bohr. *The Structure of the Atom* (Nobel Lecture, December 11, 1922.) Nobel Lectures, Physics, 1922-1941. Amsterdam: Elsevier Publishing Company, 1965
54. Bohr, N., Kramers, H. A., and Slater, J. C. (1924). *The quantum theory of radiation*. Philosophical Magazine 47: 785-802. Reprinted in (Van der Waerden, 1968, pp. 159-176).
55. Nielsen, J. Rud, ed. (1976). *Niels Bohr Collected Works. Vol. 3*. The Correspondence Principle (1918-923). Amsterdam: North-Holland.
56. W. Wilson. Phil. Mag. 29 1915 795.
57. A. Sommerfeld. Ann. Phys. 51 1916 1.
58. Luis De Broglie, Maurice Broglie, Duc De (1921). *The atom model of Bohr and corpuscular spectra*. Comptes rendus (Paris) 172, 746-748 (presented by E. Bouty at the meeting of 21 March 1921).
59. Luis De Broglie (1922a). *Rayonnement noir et quanta de lumiere*. J. phys. et rad. (6) 3, 422-428 (received 26 January 1922, published in issue No. 11 of November 1922).
60. Luis De Broglie (1922b). The *interference and the quantum theory of light*. Comptes rendus (Paris) 175, 811-813 (presented by H. Deslandres at the meeting of 6 November 1922).
61. Luis De Broglie (1923a). *Waves and quanta*. Comptes rendus (Paris) 177, 507-510 (presented by J. Perrin at the meeting of 10 September 1923).
62. Luis De Broglie (1923b). *Quanta of light diffraction and interference*. Comptes rendus (Paris) 177, 548-550 (presented by J. Perrin at the meeting of 24 September 1923).
63. Luis De Broglie (1923c). *Quanta: the kinetic theory of gases and the principle of Fermat*. Comptes rendus (Paris) 177, 630-632 (presented by H. Deslandres at the meeting of 8 October 1923).
64. Luis De Broglie (1923d). *Waves and quanta*. Nature 112, 540 (letter dated 12 September, published in the issue of 13 October 1923).
65. Luis De Broglie (1924a). *A tentative theory of light quanta*. Phil. Mag. (6) 47, 446-458 (communicated by R. H. Fowler; dated 1 October 1923, published in issue No. 278 of February 1924).

66. Luis De Broglie (1924b). *The general definition of the correspondence between wave and motion*. Comptes rendus (Paris) 179, 39-40 (presented by L. De Broglie at the meeting of 7 July 1924).
67. Luis De Broglie (1924c). *On the Theorem of M. Bohr*. Comptes rendus (Paris) 179, 676-677 (presented by L. De Broglie at the meeting of 13 October 1924).
68. Luis De Broglie (1924d). *On the dynamics of quantum light and interferences*. Comptes rendus (Paris) 179, 1039-1041 (presented by L. De Broglie at the meeting of 17 November 1924).
69. Luis De Broglie (1925). *Research on the theory of Quanta*. Annalen de Physik (10) 3, 22-128, published in issue No.1 of January-February 1925)
70. Erwin Schrodinger (1922*). Was ist ein Naturgesetz*? Die Naturwissenschaften 17 (1929), 9-11.
71. Erwin Schrodinger (1926). *Abhandlungen zur Wellenmechanik*. Annalen der Physik 81133. Reprint Leipzig 1927, 163. In (Schrodinger, 1984, vol. 3).
72. Erwin Schrodinger (1926a). *On the Relation between the Quantum Mechanics of Heisenberg, Born, and Jordan, and that of Schrodinger*," Collected Papers on Wave Mechanics, New York: Chelsea Publishing Company, 45-61. Originally in Annalen der Physik (4), Vol. 79.
73. Erwin Schrodinger (1926b). *Quantization as a Problem of Proper Values I*, Collected Papers on Wave Mechanics, 1-12. Originally in Annalen der Physik (4), Vol. 79.
74. Erwin Schrodinger (1926c). *Quantization as a Problem of Proper Values II*, Collected Papers on Wave Mechanics, 13-40. Originally in Annalen der Physik (4). Vol. 79.
75. Erwin Schrodinger (1935). Die *gegenwartige Situation in der Quantenmechanik*. Die Naturwissenschaften 23, 807-812 & 823-828 & 844-849.
76. Johann von Neumann (Janos, John) (1931*). Die Eindeutigkeit der Schrödinger's Chen Operatoren*. Mathematische Annalen 104, 570-578. In (von Neumann, 1961/1976, II, 221-229).
77. John von Neumann, (Janos, Johann). 1961/1976. *Collected Works, 6* volumes, ed. A.H. Taub. Oxford etc.: Pergamon.
78. P. Jordan (1924). *Zur Theorie der Quantenstrahlung*. Zeitschrift fur Physik 30: 297-319.
79. M. Born (1925). *Vorlesungen uber Atommechanik*. Berlin: Springer
80. M. Born and P. Jordan (1925). *Zur Quantenmechanik*. Zeitschrift fur Physik 34: 858-888. Page references are to the English translation of chs. 1-3 in (Van der Waerden, 1968, pp. 277-306). Ch. 4 is omitted in this translation.
81. M. Born (1926a). *Zur Quantenmechanik der Stossvorgange*. Zeitschrift fur Physik 37, 863-867.

82. M. Born (1926b). *Quantenmechanik der Stossvorgange*. Zeitschrift fur Physik 38, 803-827.
83. M. Born (1926c). *Das Adiabaten prinzip in der Quantenmechanik*. Zeitschrift fur Physik 40, 167-192.
84. M. Born and N. Wiener (1926*). Eine neue Formulierung der Quantengesetze fur periodische und nichtperiodische Vorgange*. Zeitschrift fur Physik 36, 174-187.
85. M. Born, W. Heisenberg and P. Jordan (1926). *Zur Quantenmechanik II.* Zeitschrift fur Physik 35: 557-615. Page references to the English translation in (Van der Waerden, 1968, pp. 321-385).
86. M. Born (1978). *My life. Recollections of Nobel laureate*. New York: Charles Scribner.
87. P. Jordan (1927a). *Die Entwicklung der neuen Quantenmechanik*. Die Naturwissenschaften 15: 614-623.
88. P. Jordan (1927b). *Die Entwicklung der neuen Quantenmechanik*. Schlu. Die Naturwissenschaften 15: 636-649.
89. P. Jordan (1927c). *Uber Wellen und Korpuskeln in der Quantenmechanik*. Zeitschrift fur Physik 45: 766-775.
90. M. Born and P. Jordan (1930). *Elementare Quantenmechanik*. Berlin: Springer.
91. P. Jordan (1936). *Anschauliche Quantentheorie. Eine Einfuhrung in die moderne Auffassung der Quantenerscheinungen*. Berlin: Julius Springer.
92. W. Heisenberg (1925). *Uber quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen*, in Zeitschrift fur Physik 33, 879 (1925); M. Born, W. Heisenberg and P. Jordan, Zur Quantenmechanik II, in Zeitschrift fur Physik 35, 557 (1926).
93. W. Heisenberg (1926). *Quantenmechanik. Die Naturwissenschaften* 14, 989-995.
94. W. Heisenberg (1926). *Schwankungserscheinungen und Quantenmechanik*. Zeitschrift fur Physik 40: 501-506.
95. W. Heisenberg (1927*). Uber den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik*, in Zeitschrift fur Physik 43, 172.
96. W. Heisenberg (1930). *The physical principles of the quantum theory*. Chicago: University of Chicago Press.

Βιβλιογραφία

1. Π. Ανδριτσόπουλος (1984), *Εισαγωγή στην Κβαντομηχανική*. Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.
2. Κ.Ε. Βαγιονάκης (1996), *Εισαγωγή στην Κβαντική Μηχανική*. Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.
3. Α. Ζδέτσης (2004), *Εισαγωγή στην Σύγχρονη Φυσική*. Πανεπιστήμιο Πατρών.
4. Ι. Ζώης (2008), *Αρχές Κβαντικής Μηχανικής*. Κολλέγιο Έξετερ, Οξφόρδη.

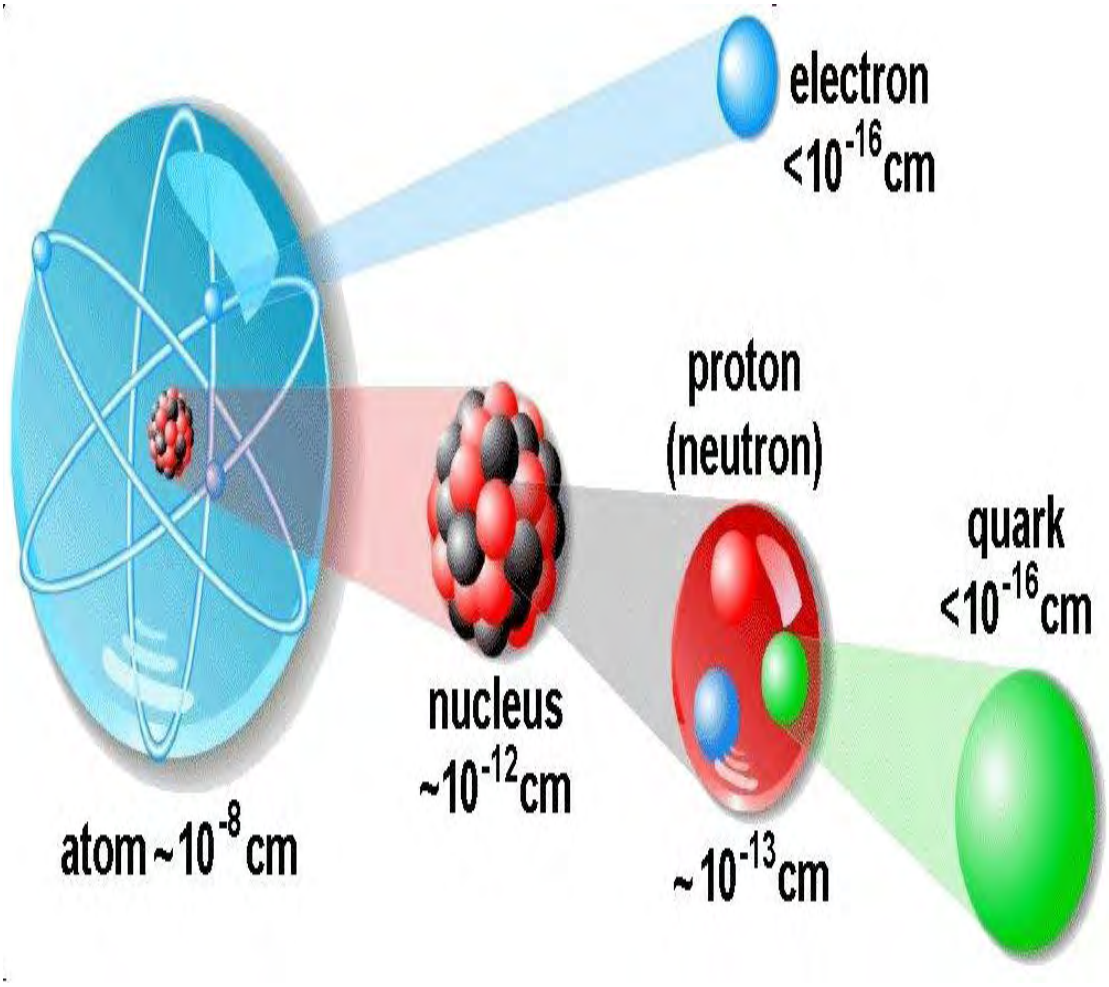
5. Α. Στρέκλας (2005), *Εισαγωγή στην Κβαντομηχανική*. Πανεπιστήμιο Πατρών.
6. Σ. Τραχανάς (2009), *Κβαντομηχανική Ι*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
7. Σ. Τραχανάς (2007), *Κβαντομηχανική ΙΙ*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
8. Σ. Τραχανάς (2013), *Στοιχειώδης Κβαντική Φυσική - Βιβλίο για ένα ανοικτό διαδικτυακό μάθημα*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
9. Σ. Τραχανάς (2012), *Στοιχειώδης Κβαντική Φυσική*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
10. Ballentine, L.E., *Quantum Mechanics*, Prentice Hall, (1990).
11. Bohm, D., *Quantum Theory*, Prentice Hall, (1968).
12. Bransden, B. H., Joachaim C. J., *Quantum Mechanics*, Pearson (2005).
13. Cohen-Tannoudji, C., *Quantum Mechanics*, Wiley, (1977).
14. Davies, V., *Quantum Mechanics*, Routledge, (1984).
15. Dirac, P. A. M., *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford (reprint 2003).
16. HQ-1: Conference on the History of Quantum Physics, Max Planck Institute for the History of Science (2008).
17. Gasiorowicz, S., *Quantum Physics*, Wiley (2003).
18. Griffiths, D. J., *Introduction to Quantum Mechanics*, Pearson (2005).
19. Hannabuss, K. C., *Introduction to Quantum Theory*, Oxford, (1998).
20. Landau, L.D., Lifschitz, E.M., *Quantum Mechanics*, Oxford (1968).
21. Landshoff, P.V., Metherell, A.J.F., Rees, W.G., *Essential Quantum Physics*, Cambridge, (1997).
22. Mandl, F., *Quantum Mechanics*, John Wiley, (1992).
23. Merzbacher, E., *Quantum Mechanics*, Wiley, (1998).
24. Messiah, A., *Quantum Mechanics, Vol I and II*, North Holland, (1970).
25. Ohanian, H., *Principles of Quantum Mechanics*, Prentice Hall, (1989).
26. Polkinghorne, J.C., *The Quantum World*, Longman, (1984).
27. Serway R. (1990), *Physics for Scientists and Engineers, Τόμος 4: Σύγχρονη Φυσική*. Μετάφραση: Καθ. Λ. Ρεσβάνης.
28. Serway R., Moses C., Moyer C., (2009), *Σύγχρονη Φυσική*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Internet

1. http://www.physics4u.gr/
2. http://el.wikipedia.org/
3. American Physical Society online exhibit on the Uncertainty Principle

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΕΔΙΟΥ – ΘΕΩΡΙΑ ΒΑΘΜΙΔΑΣ



«Όμως παρόλο που είναι τρέλα, έχει μια μέθοδο μέσα της» - Heisenberg

Ιστορική εισαγωγή

Δυο ήταν οι μεγάλες επαναστατικές θεωρίες των αρχών του 20ου αιώνα. Η μία ήταν η ειδική σχετικότητα που διατυπώθηκε από τον Einstein το 1905 [1] και η άλλη ήταν η κβαντική μηχανική, όπως διαμορφώθηκε κατά τα έτη 1925-1927 από τους Werner Heisenberg, Max Born, Pascual Jordan, Wolfgang Pauli, Erwin Shcrödinger και Niels Bohr. Όμως, η σωστή σύνθεση δεν είναι απλώς η λεγόμενη σχετικιστική κβαντική μηχανική, η διατύπωση δηλαδή σχετικιστικών κυματικών εξισώσεων όπου η αντίστοιχη κυματοσυνάρτηση περιγράφει ένα μόνο σωματίδιο. Έτσι, η θεμελιώδης εξίσωση του Paul Dirac (1928) [2-4], που κατάφερε να ενσωματώσει από την αρχή το σπιν του ηλεκτρονίου, παρουσιάζει προβλήματα σε ότι αφορά τη δυνατότητα περιγραφής ενός καθορισμένου αριθμού σωματιδίων.

Η φυσική ερμηνεία, πάντως, για την αναπόφευκτη ύπαρξη αρνητικών ενεργειών (λόγω της σχετικιστικής σχέσης $E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$), δόθηκε με έναν αξιοσημείωτο τρόπο από τον ίδιο τον Dirac το 1930: βασιζόμενος στην απαγορευτική αρχή του Pauli, έκανε την πρόταση ότι ηλεκτρόνια θετικής ενέργειας δεν μπορούν να πέσουν σε καταστάσεις αρνητικής ενέργειας, γιατί αυτές ήταν ήδη κατειλημμένες. Οι κενές καταστάσεις στη «θάλασσα» των ηλεκτρονίων αρνητικής ενέργειας, γνωστές και ως «οπές», συμπεριφέρονται σαν σωματίδια με αντίθετους κβαντικούς αριθμούς, δηλαδή θετική ενέργεια και θετικό φορτίο. Παρά το γεγονός ότι στην αρχή ο Dirac θεώρησε πως οι οπές αυτές παριστάνουν πρωτόνια, γρήγορα (το 1931) άλλαξε γνώμη και ταύτισε τις οπές με ένα είδος θετικά φορτισμένου σωματιδίου ίδιας μάζας με το ηλεκτρόνιο, το αντισωμάτιο του, γνωστό ως ποζιτρόνιο [5]. Σε σύντομο χρονικό διάστημα (το 1932), λόγω μιας ασυνήθιστης τροχιάς κοσμικής ακτίνας σε θάλαμο Wilson, ανακαλύφθηκε το ποζιτρόνιο από τον Carl Anderson [6-10], ο οποίος μάλλον φαίνεται να μην γνώριζε την πρόβλεψη του Dirac.

Τόσο η ανακάλυψη του ποζιτρονίου όσο και η επιτυχία να περιγράψει σωστά τη μαγνητική ροπή του ηλεκτρονίου και τη λεπτή υφή του υδρογόνου, έδωσαν στην εξίσωση του Dirac ένα ιδιαίτερο γόητρο, το οποίο διατηρείται βέβαια μέχρι τις μέρες μας. Όμως η αναγκαιότητα περιγραφής ενός μεγάλου αριθμού σωματιδίων και αντισωματιδίων οποιουδήποτε σπιν (0, 1/2, 1) οδήγησε πέρα από τη διατύπωση των απλών σχετικιστικών εξισώσεων στην ανάπτυξη της κβαντικής θεωρίας πεδίου, που υπήρξε η σωστή σύνθεση ειδικής σχετικότητας και κβαντικής μηχανικής. Αρχικά, επειδή το φωτόνιο ήταν το μόνο σωματίδιο που, πριν ανιχνευθεί ως σωματίδιο, ήταν γνωστό ως κλασικό πεδίο, ο φορμαλισμός της κβαντικής θεωρίας πεδίου αναπτύχθηκε πρώτα σε σχέση με τη θεωρία της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας και οδήγησε στη γένεση της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής, γνωστής ως QED (Quantum ElectroDynamics).

Στη συνέχεια εφαρμόστηκε και σε άλλα σωματίδια και πεδία. Όλα αυτά έγιναν κατά την περίοδο 1928-1934, και στην ανάπτυξη της κβαντικής θεωρίας πεδίου συνέβαλαν πολλοί

φυσικοί, ανάμεσά τους οι Dirac, Jordan, Eugene Wigner, Heisenberg, Pauli, Victor Weisskopf, Wendell Furry και Robert Oppenheimer [11-33]. Η πρώτη αυτή περίοδος ανάπτυξης της κβαντικής θεωρίας πεδίου ιστορικά αναφέρεται ως «δεύτερη κβάντωση»: τα πεδία που έπρεπε να κβαντωθούν αντιστοιχούν στις κυματοσυναρτήσεις ψ(x) που μπορούν να αναπτυχθούν συναρτήσει τελεστών καταστροφής και δημιουργίας, οι οποίοι καταστρέφουν και δημιουργούν σωματίδια στο χωροχρονικό σημείο x. Όμως, ο όρος «δεύτερη κβάντωση» είναι πλέον παρωχημένος και μάλλον παραπλανητικός: ένα κβαντικό πεδίο δεν είναι απλώς μια κβαντισμένη κυματοσυνάρτηση. Έτσι, ούτε το απλό πεδίο Maxwell είναι απλώς η κυματοσυνάρτηση του φωτονίου, ούτε τα βαθμωτά (χωρίς σπιν) πεδία Klein-Gordon είναι απλώς οι κυματοσυναρτήσεις των αντίστοιχων μποζονίων [34,35].

Η βαθύτερη ιδέα της κβαντικής θεωρίας πεδίου είναι ότι τα κβαντικά πεδία ψ(x) συνιστούν βασικές οντότητες της φύσης, με τα σωματίδια να αποτελούν πακέτα (συσσωρεύσεις) ενέργειας και ορμής των πεδίων. Με αυτό τον τρόπο μπορεί να πει κανείς ότι η κβαντική θεωρία πεδίου οδηγεί σε μια πιο ενοποιημένη άποψη για τη φύση σε σύγκριση με τη δυϊστική ερμηνεία της κβαντικής μηχανικής συναρτήσει κυμάτων και σωματιδίων. Οι τελεστές καταστροφής και δημιουργίας των κβαντικών πεδίων υπακούουν σε σχέσεις μετάθεσης ή αντιμετάθεσης, ανάλογα με το αν πρόκειται για μποζόνια ή φερμιόνια. Το πρόβλημα των καταστάσεων αρνητικής ενέργειας για σωματίδια οποιουδήποτε σπιν (0, 1/2, 1) λύθηκε στην κβαντική θεωρία πεδίου με την εισαγωγή δυο διαφορετικών ειδών τελεστών a και b (και των συζυγών τους a΄ και b΄), που εμφανίζονται με τον ίδιο τρόπο στη Χαμιλτονιανή. Κάτι τέτοιο δείχνει ότι η θεωρία έχει δυο είδη σωματιδίων με την ίδια μάζα, τα οποία μπορούν να ταυτιστούν με σωματίδια και αντισωματίδια. Αν είναι φορτισμένα, τότε σωματίδια και αντισωματίδια έχουν αντίθετα φορτία. Έτσι, είτε πρόκειται για μποζόνια είτε για φερμιόνια, μπορεί τα σωματίδια να είναι διαφορετικά από τα αντισωματίδια, τα οποία σημειωτέον για την περίπτωση των μποζονίων δεν μπορούν να ταυτιστούν με «οπές» σε μια θάλασσα σωματιδίων αρνητικής ενέργειας, όπως έκανε ο Dirac για τα ηλεκτρόνια – τα οποία όντας φερμιόνια υπακούουν στην απαγορευτική αρχή του Pauli [36,37].

Ένα άλλο πρόβλημα, εκείνο των αρνητικών πιθανοτήτων που συνόδευε τις σχετικιστικές κυματικές εξισώσεις, λύθηκε επίσης στην κβαντική θεωρία πεδίου. Τα πεδία ψ(x) δεν εκφράζουν πλάτη πιθανότητας, τα οποία θα πρέπει να ορίσουν διατηρούμενες θετικές πυκνότητες πιθανότητας. Αντίθετα, είναι τελεστές που δημιουργούν ή καταστρέφουν σωματίδια στους διάφορους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης. Έτσι, ο φυσικός χώρος Hilbert αντιστοιχεί σε καταστάσεις που εξ' ορισμού περιέχουν έναν ορισμένο αριθμό σωματιδίων ή και αντισωματιδίων σε κάθε κανονικό τρόπο ταλάντωσης.

Οι πιθανότητες δίνονται, από τις γνωστές $P_n = \left|\langle \psi_n | \psi \rangle\right|^2$, όπου ψ μια αυθαίρετη κατάσταση για ένα σύστημα με έναν ορισμένο αριθμό σωματιδίων Φ, ένα πλήρες ορθοκανονικό σύνολο τέτοιων καταστάσεων. Οι πιθανότητες P_n να βρούμε το σύστημα στις καταστάσεις Φ, δεν είναι,

έτσι, ποτέ αρνητικές για οποιοδήποτε σπιν. Από την άλλη μεριά, οι αριθμητικοί τελεστές N, είναι εκείνοι που εκφράζονται μέσω των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής και παριστάνουν τον αριθμό των σωματιδίων μείον τον αριθμό των αντισωματιδίων. Για φορτισμένα σωματίδια, η διατήρηση του φορτίου αναγκάζει τους τελεστές του φορτίου Q, να είναι ανάλογοι των αριθμητικών τελεστών. Το σημείο μείον εκφράζει, τότε, το φυσικό γεγονός ότι σωματίδια και αντισωματίδια έχουν αντίθετα φορτία.

Καθώς προχωρούσε η δεκαετία του 1930, η κβαντική θεωρία πεδίου γνώρισε μια πρώτη περίοδο ύφεσης. Ένα αίσθημα δυσπιστίας απέναντί της αναπτύχθηκε, κυρίως λόγω του γεγονότος ότι τότε άρχισαν να ανακαλύπτονται συνεχώς νέα σωματίδια αλλά και νέες αλληλεπιδράσεις. Ο Enrico Fermi διατύπωσε την ομώνυμη φαινομενολογική θεωρία για τις ασθενείς πυρηνικές δυνάμεις της ακτινοβολίας β το 1934 [38,39], ενώ ο Hideki Yukawa πρότεινε το 1935 μια νέα θεωρία για τις ισχυρές πυρηνικές δυνάμεις [40-44]. Στα επόμενα χρόνια ακολούθησε η ανακάλυψη ενός μεγάλου αριθμού μεσονίων. Η συνεχής ανακάλυψη μιας ποικιλίας σωματιδίων αλλά και αλληλεπιδράσεων τους γεννούσε αμφιβολίες κατά πόσο μπορούσε η κβαντική ηλεκτροδυναμική, που αποτελούσε ουσιαστικά τη μόνη κβαντική θεωρία πεδίου, να αποτελέσει το εννοιολογικό πλαίσιο για μια θεμελιώδη θεωρία.

Αλλά ακόμα πιο σημαντικό ήταν ένα άλλο θεωρητικό πρόβλημα αυτή τη φορά, εκείνο των απειριών. Από την αρχή σχεδόν της κβαντικής θεωρίας πεδίου έγινε φανερό ότι σε κάθε υπολογισμό κβαντικών διορθώσεων στη θεωρία διαταραχών ανέκυπταν (από τη μεριά των υψηλών ενεργειών της περιοχής ολοκλήρωσης) απειρίες στις διάφορες φυσικές ποσότητες και διαδικασίες που υπολογίζονταν. Το παθολογικό αυτό σύμπτωμα δημιούργησε απαισιοδοξία και δεν ήταν λίγοι εκείνοι που προσπάθησαν να εξερευνήσουν έναν εναλλακτικό φορμαλισμό.

Ανάμεσά τους ο Heisenberg, που το 1938 [45] πρότεινε, εκτός από τη θεμελιώδη ταχύτητα c της ειδικής σχετικότητας και τη θεμελιώδη δράση h της κβαντικής θεωρίας, την ύπαρξη ενός θεμελιώδους μήκους L, έτσι ώστε η κβαντική θεωρία να ισχύει μόνο για αποστάσεις μεγαλύτερες του L, και τα αποκλίνοντα ολοκληρώματα να φτάνουν μέχρι αποστάσεις L ή αντίστοιχα ορμές (είναι αξιοπερίεργο ότι σύγχρονες θεωρίες, όπως θεωρίες χορδών, κάνουν ακριβώς αυτό αλλά σε διαφορετική κλίμακα).

Ένας άλλος εναλλακτικός φορμαλισμός, που προτάθηκε από τον John Wheeler το 1937 και τον Heisenberg το 1943, συνίστατο στην αντικατάσταση καταστατικών διανυσμάτων και κβαντικών πεδίων από άλλες παρατηρήσιμες ποσότητες, όπως ο λεγόμενος πίνακας S, του οποίου τα στοιχεία είναι τα πλάτη για τις διάφορες διαδικασίες σκέδασης.

Όμως, πολλοί συνέχισαν την προσπάθεια μέσα στο πλαίσιο της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής (QED), πιστεύοντας ότι οι απειρίες θα μπορούσαν να απορροφηθούν με έναν «επανακαθορισμό», μια «επανακανονικοποίηση» των παραμέτρων της θεωρίας. Μια τέτοια διαδικασία θα σήμαινε ότι στο τέλος οι απειρίες θα μπορούσαν να απορροφηθούν στον επανακαθορισμό των παραμέτρων, δηλαδή της μάζας m και του φορτίου e του ηλεκτρονίου. Το ερώτημα ήταν αν όλες οι απειρίες μιας κβαντικής θεωρίας πεδίου μπορούσαν να τύχουν

ενός τέτοιου χειρισμού, δηλαδή να απορροφηθούν σε έναν επανακαθορισμό ενός πεπερασμένου αριθμού αριθμού παραμέτρων. Η ολοκλήρωση του προγράμματος αυτού επιτεύχθηκε στα έτη 1948-1949 από τους Julian Schwinger, Sin-Itiro Tomonaga και Richard Feynman [46-57]. Οι Schwinger και Tomonaga ακολούθησαν τελεστικές μεθόδους, ενώ ο Feynman επινόησε μια διαφορετική προσέγγιση στην κβαντική θεωρία, εκείνη του φορμαλισμού των «τροχιακών ολοκληρωμάτων», όπου κάποιος ολοκληρώνει τον παράγοντα φάσης της κλασικής δράσης πάνω σε κλασικές τροχιές σύμφωνα με την αντιστοιχία:

$$\text{Κβαντική μηχανική} \Leftrightarrow \int_{\substack{\text{μέτρο πάνω}\\ \text{στις τροχιές}}} e^{i(\text{κλασική δράση})/\hbar}$$

Το αξιοσημείωτο αποτέλεσμα μεγάλης πρακτικής σημασίας, που προέκυψε από τη μέθοδο του Feynman, ήταν ένα σύνολο γραφικών κανόνων για τον υπολογισμό των στοιχείων του πίνακα του S σε κάθε τάξη στη θεωρία διαταραχών, οι οποίοι έμειναν γνωστοί ως «κανόνες Feynman». Ο Freeman Dyson ήταν αυτός που πέτυχε να δείξει την ισοδυναμία των μεθόδων των Schwinger και Tomonaga με εκείνη του Feynman, και έτσι ολοκληρώθηκε το πρόγραμμα της επανακανονικοποίησης της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής (QED). Σε πρακτικό επίπεδο, η επανακανονικοποίηση σήμαινε ποσοτικοποίηση, δηλαδή δυνατότητα να πάρουμε πεπερασμένα ποσοτικά αποτελέσματα για παρατηρήσιμα μεγέθη. Η ιδιότητα της επανακανονικοποίησης κατέστησε την κβαντική ηλεκτροδυναμική πρότυπο κβαντικής θεωρίας πεδίου. Η πιο φημισμένη πειραματική επαλήθευση της πραγματικότητας των κβαντικών διορθώσεων έγινε με το θεωρητικό υπολογισμό της μετατόπισης στο άτομο του υδρογόνου, όπως αυτή είχε μετρηθεί από τον W. Lamb το 1947 («μετατόπιση Lamb») [58-66].

Η παραπέρα πρόοδος στην κβαντική θεωρία πεδίου συνδέθηκε με την εξέλιξη της έννοιας των συμμετριών [67-70]. Οι φυσικοί είναι πεπεισμένοι ότι οι απώτεροι νόμοι της φύσης περιέχουν έναν υψηλό βαθμό συμμετρίας. Με αυτό εννοούμε ότι η διατύπωση αυτών των νόμων παραμένει αναλλοίωτη όταν λαμβάνουν χώρα κάποιοι μετασχηματισμοί. Η παρουσία μιας συμμετρίας συνεπάγεται την απουσία περίπλοκης και άσχετης δομής. Επιπλέον, υπάρχουν πρακτικές συνέπειες της απλότητας που υπαγορεύεται από μια συμμετρία: είναι ευκολότερο να καταλάβουμε τις προβλέψεις των φυσικών νόμων. Κυρίως όμως υπάρχει μια βαθιά σχέση ανάμεσα στις συμμετρίες και τους νόμους διατήρησης: οι συμμετρίες συνεπάγονται νόμους διατήρησης και αντίστροφα, μια σχέση που διατυπώθηκε από την Emmy Noether (1918) [71]. Έτσι, συμμετρία στη μετατόπιση στο χρόνο (οι φυσικοί νόμοι δεν αλλάζουν για διαφορετικούς χρόνους) συνεπάγεται διατήρηση της ενέργειας, ενώ συμμετρία στη μετατόπιση στο χώρο (οι φυσικοί νόμοι έχουν την ίδια μορφή σε διαφορετικούς τόπους) συνεπάγεται διατήρηση της ορμής.

Στην κβαντική θεωρία, έχουμε μια άλλη συμμετρία: επειδή οι φυσικές ποσότητες είναι πραγματικές, θα πρέπει οι μιγαδικές φάσεις να μπορούν να αλλάζουν κατά τόπο και χρόνο χωρίς να επηρεάζουν το φυσικό περιεχόμενο της θεωρίας. Η συμμετρία του αναλλοίωτου ως προς τις αλλαγές φάσεις είναι γνωστή ως «συμμετρία βαθμίδας» και στην κβαντική

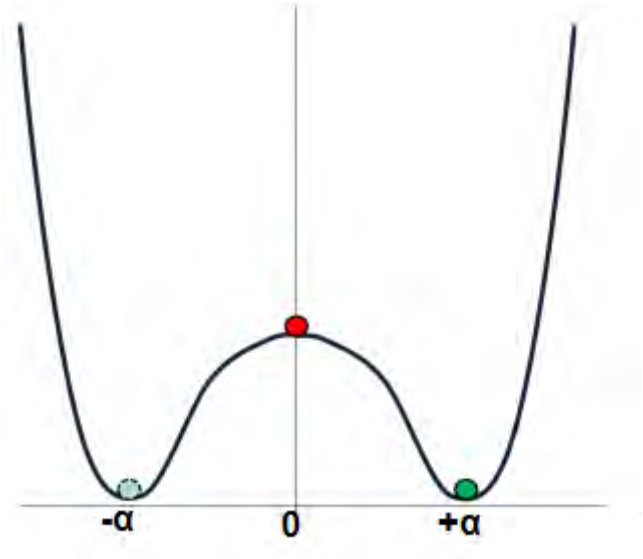
ηλεκτροδυναμική συνεπάγεται τη διατήρηση του φορτίου. Η κβαντική ηλεκτροδυναμική υπήρξε, έτσι το πρότυπο μιας κβαντικής θεωρίας πεδίου με συμμετρία βαθμίδας [72-90]. Όμως, παρά την πεποίθησή μας ότι η περιγραφή της φύσης φαίνεται να ενισχύεται από έναν μεγάλο αριθμό συμμετριών και να χαρακτηρίζεται από πολλούς νόμους διατήρησης, πρέπει να αναγνωρίσουμε ότι τα πραγματικά φυσικά φαινόμενα σπάνια εκδηλώνουν μια καθολική συμμετρικότητα. Έτσι, φαίνεται ότι την ίδια στιγμή πρέπει να βρούμε τρόπους να σπάσουμε κάποιες συμμετρίες σε ότι αφορά τις συνέπειες αυτών των συμμετριών πάνω στις θεωρίες μας. Πραγματική πρόοδος συνέβη συχνά στη φυσική όταν βρέθηκε τρόπος να γίνει κάτι τέτοιο. Θα πρέπει να παρατηρήσουμε περαιτέρω ότι, όπως φάνηκε στην πορεία, ο φορμαλισμός των κβαντικών θεωριών πεδίου πρέπει να γίνεται συναρτήσει της λαγκρανζιανής L παρά συναρτήσει της χαμιλτονιανής H.

Η πρώτη απόπειρα μιας ευρύτερης από την κβαντική ηλεκτροδυναμική κβαντικής θεωρίας με μεγαλύτερη συμμετρία βαθμίδας έγινε το 1954 από τους Chen Ming Yang και Robert Mills [91], οι οποίοι προσπάθησαν να διατυπώσουν μια θεωρία βαθμίδας για τις ασθενείς πυρηνικές δυνάμεις που να περιγράφει τις αλληλεπιδράσεις των λεγόμενων «ενδιάμεσων μποζονίων W», των υποτιθέμενων τότε φορέων αυτών των δυνάμεων. Όμως λόγω της πεπερασμένης εμβέλειας των ασθενών αλληλεπιδράσεων τα W μποζόνια έπρεπε να έχουν μια μη μηδενική πεπερασμένη μάζα, και κανείς δεν ήξερε πως έπρεπε να σπάσει η αντίστοιχη συμμετρία βαθμίδας για να γίνει κάτι τέτοιο. Επιπλέον, η θεωρία φαινόταν να είναι μη επανακανονικοποιήσιμη. Από την άλλη μεριά, η μεσονική θεωρία του Yukawa για τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις ήταν αδύνατον να εξηγήσει την πληθώρα των νέων σωματιδίων που ανακαλύπτονταν στους επιταχυντές.

Το 1964 οι Murray Gell - Mann και George Zweig κάνουν την πρόταση ότι όλα τα αδρόνια συντίθενται από στοιχειώδη σωματίδια, τα κουάρκς. Η θεωρία των κουάρκς έβαλε πράγματι μια τάξη μέσα στο χάος των στοιχειωδών σωματιδίων (σε ότι αφορά τα αδρόνια). Από άλλη μεριά, στη δεκαετία αυτή η κβαντική θεωρία πεδίου γνώρισε μια δεύτερη περίοδο ύφεσης και αμφισβήτησης. Εξαιτίας της πληθώρας των στοιχειωδών σωματιδίων και της συνακόλουθης σύγχυσης, πολλοί ήταν αυτοί που συγκέντρωσαν την προσοχή τους στη μελέτη των αναλυτικών ιδιοτήτων του πίνακα S, ανάγοντας κάτι τέτοιο σε θεμελιώδη αρχή. Όμως, όπως συνέβη και στη δεκαετία του 1930 κατά την πρώτη περίοδο αμφισβήτησης της κβαντικής θεωρίας πεδίου, συνεχίστηκε η προσπάθεια διατύπωσης μιας κβαντικής θεωρίας πεδίου βαθμίδας, τώρα πλέον για τις ασθενείς και τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις (άλλωστε μια κβαντική θεωρία πεδίου επιτρέπει σε κάποιον να συναγάγει και τις αναλυτικές ιδιότητες του πίνακα S).

Η πρόοδος στάθηκε δυνατή, χάρη τόσο στη σπουδαία όσο και λεπτή έννοια του «αυθόρμητου σπασίματος» μιας συμμετρίας [92-96]. Η ιδέα ξεκίνησε από τη φυσική της στερεάς κατάστασης και το 1964 πήρε τη μορφή του λεγόμενου «μηχανισμού Higgs», μορφή με την οποία εφαρμόστηκε στη συνέχεια στη φυσική στοιχειωδών σωματιδίων [97-102].

Αυθόρμητο σπάσιμο μιας συμμετρίας έχουμε όταν οι δυναμικοί νόμοι είναι συμμετρικοί, αλλά οι καταστάσεις που πραγματοποιούνται είναι ασυμμετρικές, γιατί οι συμμετρικές είναι ενεργειακά ασταθείς. Αυτός ο μηχανισμός σκιαγραφείται παραστατικά στο παρακάτω σχήμα, που απεικονίζει είτε την απλή δυναμική ενέργεια είτε την ενεργειακή πυκνότητα ενός πεδίου για την περίπτωση μιας κατοπτρικής συμμετρίας.



Το συμμετρικό σημείο στο 0 είναι ενεργειακά ασταθές. Ευσταθείς καταστάσεις αντιστοιχούν στα σημεία ± α. Στην περίπτωση που το παραπάνω σχήμα παριστάνει δυναμική ενέργεια ενός σωματιδίου συναρτήσει της θέσης, το φράγμα ανάμεσα στα δυο ελάχιστα αντιστοιχεί σε πεπερασμένη ενέργεια, το σωματίδιο μπορεί να διεισδύει κβαντομηχανικά από το ένα φρέαρ στο άλλο (φαινόμενο σήραγγας), οπότε η χαμηλότερη κβαντική κατάσταση είναι μια επαλληλία που τελικά σέβεται την κατοπτρική συμμετρία. Συνεπώς, αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας δεν μπορεί να συμβεί στη μονοσωματιδιακή κβαντική μηχανική. Αντίθετα, στην κβαντική θεωρία πεδίου το παραπάνω σχήμα παριστάνει ενεργειακή πυκνότητα συναρτήσει του πεδίου, με αποτέλεσμα η ολική ενέργεια φράγματος να είναι το πεπερασμένο ύψος του σχήματος πολλαπλασιασμένο με τον άπειρο όγκο στον οποίο ορίζεται η θεωρία πεδίου. Κατά συνέπεια, το φράγμα αντιστοιχεί σε άπειρη ολική ενέργεια και η διείσδυση είναι αδύνατη ή σχεδόν αδύνατη. Το αποτέλεσμα είναι ότι το σύστημα καταλήγει είτε στην κατάσταση +α είτε στην κατάσταση -α και, έτσι η κατοπτρική συμμετρία σπάει αυθόρμητα. Συνεπώς, αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας μπορεί πράγματι να συμβεί στην κβαντική θεωρία πεδίου.

Το γεγονός ότι οι ασθενείς και οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις μπορούν να περιγραφούν με έναν πιο ενοποιημένο τρόπο, δείχθηκε για πρώτη φορά από τον Sheldon Glashow το 1961. Βασιζόμενος στη θεωρία των Yang – Mills, διατύπωσε τη σχετική θεωρία βαθμίδας των «ηλεκτρασθενών» αλληλεπιδράσεων που στηρίζεται στις ομάδες συμμετρίας SU(2)xU(1). Όμως, δεν γνώριζε πώς να δώσει μάζα στα ενδιάμεσα μποζόνια W των ασθενών αλληλεπιδράσεων, με το φωτόνιο την ίδια στιγμή να παραμένει χωρίς μάζα. Ήταν ο Steven Weinberg το 1967 και ο Abdus Salam το 1968 που, χρησιμοποιώντας το αυθόρμητο

σπάσιμο συμμετρίας με τη μορφή του μηχανισμού Higgs [103-183], έδειξαν με ποιο τρόπο σπάνε πράγματι οι ανεπιθύμητες συμμετρίες στο πρότυπο του Glashow και προκύπτει η επιθυμητή φυσική εικόνα. Πιθανολόγησαν ότι μια θεωρία βαθμίδας που ενσωματώνει το μηχανισμό Higgs μπορεί να είναι επανακανονικοποιήσιμη. Ότι αυτό πράγματι συμβαίνει, δείχθηκε το 1971 από τον νεαρό τότε μεταπτυχιακό φοιτητή Gerard 't Hooft [184-235]. Η χρονολογία αυτή στάθηκε η αφετηρία αναγέννησης των κβαντικών θεωριών πεδίου.

Μέσα στα έτη 1972-1973 προτάθηκε η θεωρία βαθμίδας για τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα κουάρκς, που στηρίζεται στην ομάδα συμμετρίας SU(3) και έκτοτε γνωστή ως «κβαντική χρωμοδυναμική» (QCD), μιας και ονομάστηκε «χρώμα» ο αντίστοιχος κβαντικός αριθμός. Η αποφασιστική ιδιότητα της κβαντικής χρωμοδυναμικής ανακαλύφθηκε το 1973 από τον David Politzer και Frank Wilczek, και είναι η λεγόμενη «ασυμπτωτική ελευθερία», το γεγονός δηλαδή ότι η αντίστοιχη ένταση αλληλεπίδρασης μειώνεται για μεγαλύτερες ενέργειες (αντίστοιχα μικρότερες αποστάσεις). Η ιδιότητα αυτή επαληθευόταν δραματικά στις σκεδάσεις υψηλής ενέργειας.

Η χρονιά 1973 αποτελεί ορόσημο στη σωματιδιακή φυσική. Είναι τότε που ολοκληρώθηκε η θεωρία για το λεγόμενο «καθιερωμένο πρότυπο» της σωματιδιακής φυσικής, αυτό που βασίζεται στις θεωρίες βαθμίδας SU(3)xSU(2)xU(1). Μέχρι σήμερα, για όλα τα σχετικά πειράματα (με εξαίρεση τις μάζες των νετρίνων) φαίνεται να είναι αρκετές οι προβλέψεις του καθιερωμένου προτύπου, το οποίο αποτελεί τη σύγχρονη κβαντική θεωρία πεδίου για τις ηλεκτρομαγνητικές, τις ασθενείς και τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις, τουλάχιστον μέχρι τις ενέργειες της τάξης των 10^2 GeV. Θα πρέπει να διευκρινίσουμε ότι με την έννοια «καθιερωμένο πρότυπο» εννοούμε κάθε φορά το θεωρητικό εκείνο πλαίσιο το οποίο φαίνεται να συνιστά μια όσο το δυνατόν καλύτερη προσέγγιση στην πραγματικότητα, επειδή ακριβώς συνοψίζει την περιγραφή και εξήγηση μιας αξιοσημείωτης ποικιλίας δεδομένων, όπως αυτά συγκεντρώνονται από τις μετρήσεις και παρατηρήσεις μας. Έτσι, στη φυσική των στοιχειωδών σωματιδίων καθιερωμένο πρότυπο αποτελεί η κβαντική θεωρία πεδίων βαθμίδας SU(3)xSU(2)xU(1), που περιγράφει τα μικροφυσικά φαινόμενα μέχρι ενέργειες της τάξης των 10^2 GeV ή αποστάσεις της τάξης των 10^{-18} m. Πιστεύουμε ότι το καθιερωμένο πρότυπο της σωματιδιακής φυσικής δεν αποτελεί παρά μια, όπως λέγεται «ενεργό θεωρία» που ισχύει σε ενέργειες πολύ μικρότερες από τη λεγόμενη «ενέργεια Planck» ~10^{19} GeV.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Σχετικιστική Κβαντομηχανική

Η Σχετικιστική Κβαντική Μηχανική είναι μια θεωρία για τη φυσική περιγραφή των φυσικών συστημάτων σε σχέση με άλλα συστήματα, και αυτό είναι μια πλήρης περιγραφή του κόσμου.

Rovelli, C., 1996

3.1. Εισαγωγή

Η σύνθεση της κβαντομηχανικής και της σχετικότητας σε μια ενιαία θεωρία αποτελεί ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα της Φυσικής του αιώνα μας [236-237]. Στην πραγματικότητα μόνο μέσα στα πλαίσια αυτής της σύνθεσης είναι δυνατόν να κατανοηθούν θεμελιώδη χαρακτηριστικά του κόσμου μας όπως η αρχή του Pauli, η ύπαρξη ύλης και αντιύλης, καθώς και η δυνατότητα παραγωγής και εξαφάνισης σωματιδίων στις πυρηνικές αντιδράσεις που παράγουν, μεταξύ άλλων και την αστρική ενέργεια, στην οποία οφείλεται η ίδια η ύπαρξη μας. Χωρίς την συνδρομή της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας, οι κβαντικοί νόμοι από μόνοι τους θα ήταν αδύνατο να δημιουργήσουν ένα Σύμπαν ικανό για αυτογνωσία.

Σκοπός του συγκεκριμένου κεφαλαίου είναι μια προσπάθεια να παρουσιαστεί αυτή η μεγαλειώδης σύνθεση και να αναδειχθούν οι βασικές αρχές που θα προσφέρουν μια συνολική περιγραφή αυτού του εξαίσια κβαντικού και σχετικιστικού μας σύμπαντος.

3.2. Η εξίσωση Klein – Gordon

Η εξίσωση οφείλει την ονομασία της στους φυσικούς Oscar Klein και Walter Gordon, οι οποίοι το 1926 την πρότειναν σαν την εξίσωση που περιγράφει τα σχετικιστικά ηλεκτρόνια.

Ως γνωστόν στην Κβαντική Θεωρία, η χρονική εξέλιξη ενός συστήματος περιγράφεται από την χρονοεξαρτώμενη εξίσωση του Schrodinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x},t) = H\psi(\vec{x},t) \qquad (1)$$

όπου H είναι ο τελεστής της Χαμιλτονιανής [238-241]. Η παραπάνω εξίσωση δεν είναι αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς Lorentz. Αν αντικαταστήσουμε την έκφραση της ενέργειας με την αντίστοιχη σχετικιστική για ελεύθερο σωμάτιο, δηλαδή:

$$E^2 = c^2p^2 + m^2c^4 \qquad (2)$$

όπου m η μάζα ηρεμίας του σωματιδίου, θα έχουμε:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \psi(t,\vec{r}) = (-i\nabla)^2 c^2\psi(t,\vec{r}) + m^2c^4\psi(t,\vec{r})$$

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(t,\vec{r}) = -\nabla^2c^2\psi(t,\vec{r}) + m^2c^4\psi(t,\vec{r})$$

ή ισοδύναμα

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi(t,\vec{r}) = 0 \qquad (3)$$

Η (3) είναι η εξίσωση Klein-Gordon [34,35,242] και είναι μια κυματική εξίσωση που περιγράφει καταστάσεις ελεύθερων σωματιδίων. Είναι δευτεροτάξια ως προς το χρόνο, όπως θα έπρεπε να το περιμένουμε αφού η ενέργεια εμφανίζεται τετραγωνισμένη στην σχετικιστική εξίσωση ενέργειας-ορμής.

3.2.1. Προβλήματα της εξίσωσης Klein-Gordon

Η παραπάνω εξίσωση έχει τα παρακάτω προβλήματα.

1. Η εξίσωση επιδέχεται και λύσεις αρνητικής ενέργειας.

Η (3) ικανοποιείται από την κυματοσυνάρτηση

$$\psi(t,\vec{r}) = e^{-i(E\cdot t-\vec{p}\cdot\vec{r})}$$

όπου η ενέργεια $E = \pm(p^{-2}+m^2)^{1/2}$ έχει και αρνητικές τιμές.

2. Μη ύπαρξη κάτω φράγματος στην ενέργεια.

Το ενεργειακό φάσμα στην αρνητική περιοχή δεν έχει κάτω φράγμα. Έτσι ένα σωμάτιο που καταλαμβάνει μία ενεργειακή στάθμη θα μπορεί να μεταπίπτει για πάντα σε μία χαμηλότερη στάθμη (αφού πάντα θα υπάρχει μία) αποδίδοντας άπειρη ενέργεια.

3. Αδυναμία ερμηνείας κάποιας ποσότητας ως ρεύμα πιθανότητας.

Παρατηρούμε ότι αφού η (3) περιέχει παράγωγο ως προς τον χρόνο 2ης τάξης, καταρρέει η κλασική εικόνα της πυκνότητας πιθανότητας, μιας και η ποσότητα:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\psi d^3r$$

δεν είναι ανεξάρτητη του χρόνου και συνεπώς δεν διατηρείται. Συμφώνως με την (3) αν υπολογίσει κανείς τα διατηρήσιμα ρεύματα διαπιστώνει ότι χάνεται η ερμηνεία του ρεύματος πιθανότητας αφού μπορεί πλέον να παίρνει και αρνητικές τιμές. Πράγματι:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 t} - \vec{\nabla}^2\psi + m^2\psi = 0 \rightarrow \psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 t} - \psi^*\vec{\nabla}^2\psi + m^2\psi^*\psi = 0$$

$$\frac{\partial^2\psi^*}{\partial^2 t} - \vec{\nabla}^2\psi^* + m^2\psi^* = 0 \rightarrow \psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial^2 t} - \psi\vec{\nabla}^2\psi^* + m^2\psi^*\psi = 0$$

αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω εκφράσεις προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(i\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)\right) + \vec{\nabla}\left(-i\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right)\right)$$

Το ρεύμα πιθανότητας τώρα θα είναι:

$$J_0 = \rho = \frac{i}{2m}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)$$

το οποίο πράγματι δεν είναι θετικά ορισμένο αφού για παράδειγμα αν δοκιμάσουμε την $e^{i(\vec{k}\vec{x}+\omega t)}$ θα πάρουμε:

$$\rho = -\frac{\omega}{m} = -\frac{(\vec{k}^2 + m^2)^{1/2}}{m}$$

Συνοψίζοντας, σύμφωνα με τη εξίσωση Klein-Gordon τα σωματίδια στο σύμπαν θα έπρεπε να είχαν εξαφανιστεί δίνοντας την θέση τους σε μια μεγάλη λάμψη άπειρης ενέργειας! Προφανώς κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει και πρόκειται για παράδοξο της θεωρίας, στο οποίο απάντηση δίνει η προσέγγιση του Dirac. Η εξίσωση Klein-Gordon αποτυγχάνει σαν μια εξίσωση για την εξήγηση των φαινομένων του μικρόκοσμου σε ταχύτητες κοντά στην ταχύτητα του φωτός.

3.3. Η εξίσωση Dirac

Τα προβλήματα ερμηνείας της εξίσωσης Klein-Gordon είχαν ως γενεσιουργό αιτία τους τον δεύτερης τάξης χαρακτήρα της, ο οποίος οφείλεται στο γεγονός ότι η σχετικιστική σχέση ενέργειας-ορμής

$$E^2 = p^2 + m^2$$

περιέχει την ενέργεια στο τετράγωνο κι όχι γραμμικά όπως στην μη σχετικιστική περίπτωση.

Η εξίσωση Dirac είναι μία προσπάθεια να διατυπωθεί μία σχετικιστική εξίσωση η οποία να μην εξαρτάται σε δεύτερη τάξη από την χρονική παράγωγο όπως συνέβαινε στην εξίσωση Klein-Gordon δημιουργώντας τόσα προβλήματα. Μία εξίσωση που θα εξαρτάται σε πρώτη τάξη ως προς τον χρόνο θα έπρεπε να είχε και την ίδια εξάρτηση ως προς τις θέσεις και τέλος να μπορεί να αναπαράγει την σωστή σχέση μεταξύ ενέργειας και ορμής.

Ο Dirac πρότεινε την ακόλουθη εξίσωση[2-4]:

$$H\psi = (\vec{\alpha}\vec{P} + \beta m)\psi \qquad (4)$$

όπου οι συντελεστές α και β θα είναι στοιχεία μιας μη μεταθετικής άλγεβρας με προφανή υποψήφιο τις τετραγωνικές μήτρες. Από τη σχέση (4) προκύπτει:

$$H^2\psi = \sum_i (a_i p_i + \beta m)\sum_j (a_j p_j + \beta m)\psi =$$

$$\sum_{i\rangle j}\left(a_i^2 p_i^2 + (a_i a_j + a_j a_i)p_i p_j + (a_i\beta + \beta a_i)p_i m + \beta^2 m^2\right)\psi = \sum_{i\rangle j}\left(p_i^2 + m^2\right)$$

Για να πάρουμε την σωστή σχέση για την ενέργεια θα πρέπει να ισχύουν τα παρακάτω:

$$a_i^2 = 1 \qquad a_i\beta + \beta a_i = 0$$

$$a_i a_j + a_j a_i = 0 \qquad \beta^2 = 1$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι τα α_i,β δεν μπορούν να είναι αριθμοί, και θα πρέπει να είναι πίνακες. Οι πίνακες α_i,β πρέπει να είναι ερμιτιανοί αφού η Hamiltonian είναι

ερμιτιανός τελεστής και εξαρτάται αποκλειστικά από αυτούς. Οι ιδιοτιμές τους θα είναι ±1 όπως προκύπτει από τις $\alpha_i^2=1, \beta^2=1$. Τέλος μπορεί να δείξει κανείς για τους πίνακες αυτούς ότι έχουν μηδενικό ίχνος. Αυτό προκύπτει ως εξής:

$$a_i\beta+\beta a_i=0\rightarrow a_i\beta^2=-\beta\alpha_i\beta\rightarrow a_i=-\beta\alpha_i\beta\rightarrow$$

$$\mathrm{Tr}a_i=-\mathrm{Tr}\beta a_i\beta\rightarrow\mathrm{Tr}a_i=-\mathrm{Tr}\beta^2 a_i\rightarrow\mathrm{Tr}a_i=-\mathrm{Tr}a_i\rightarrow\mathrm{Tr}a_i=0$$

Όμως ως ίχνος ορίζεται το άθροισμα των ιδιοτιμών που στην περίπτωσή μας είναι οι ±1. Συνεπώς η διάσταση των πινάκων αυτών είναι άρτια. Η ελάχιστη ικανοποιητική διάσταση είναι η N=4 (Για N=2 προκύπτουν μόλις 3 πίνακες με την αντιμεταθετική ιδιότητα). Δύο αναπαραστάσεις που ικανοποιούν την παραπάνω άλγεβρα και τις παρατηρήσεις είναι οι αναπαραστάσεις Dirac-Pauli και Weyl [243,244] με πιο συνηθισμένη την Dirac-Pauli:

Αναπαράσταση Weyl:

$$\alpha_i=\begin{pmatrix}-\sigma_i & 0\\ 0 & \sigma_i\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}0 & \mathrm{I}\\ \mathrm{I} & 0\end{pmatrix}$$

Αναπαράσταση Dirac-Pauli:

$$a_i=\begin{pmatrix}0 & \sigma_i\\ \sigma_i & 0\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}\mathrm{I} & 0\\ 0 & -\mathrm{I}\end{pmatrix}$$

με τους πίνακες σ_i να είναι οι γνωστοί μας πίνακες του Pauli:

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

3.3.1. Λύση της εξίσωσης Dirac - Ερμηνεία των λύσεων

Ας υποθέσουμε αρχικά την απλούστερη περίπτωση κατά την οποία το σωμάτιο μας ηρεμεί (p=0, E=m). Δοκιμάζοντας λύσεις της μορφής $\psi=e^{ipx}u(p)$ προκύπτει η παρακάτω εξίσωση ιδιοτιμών για την ενέργεια:

$$H\psi=\beta m\psi=\mathrm{E}\psi$$

όπου στην αναπαράσταση Dirac-Pauli γράφεται:

$$\begin{pmatrix}mI & 0\\ 0 & -mI\end{pmatrix}u=Eu$$

Οι ιδιοτιμές είναι m, m, -m, -m, στις οποίες αντιστοιχούν τα παρακάτω ιδιοδιανύσματα (spinors):

$$u^1(0)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad u^2(0)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\quad v^1(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\quad v^2(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Όπως αναμέναμε και από την διάσταση των πινάκων a_i, β προκύπτουν 4 ανεξάρτητες καταστάσεις. Συγκεκριμένα εμφανίζεται ένα ζευγάρι spinors θετικής ενέργειας $(u^1(0), u^2(0))$ και ένα ζευγάρι αρνητικής ενέργειας $(v^1(0), v^2(0))$ [245-246]. Στους spinors της θετικής ενέργειας αποδόθηκε η περιγραφή σωματίων με spin "πάνω" και "κάτω". Το άλλο ζευγάρι περιέχει μία ανάλογη περιγραφή για το spin αλλά και ένα νέο "εξωτικό" σωμάτιο, το αντισωμάτιο του ηλεκτρονίου, το ποζιτρόνιο [6-10].

3.3.2. Τα βασικά χαρακτηριστικά της εξίσωσης Dirac

Τα βασικά χαρακτηριστικά της εξίσωσης Dirac είναι:

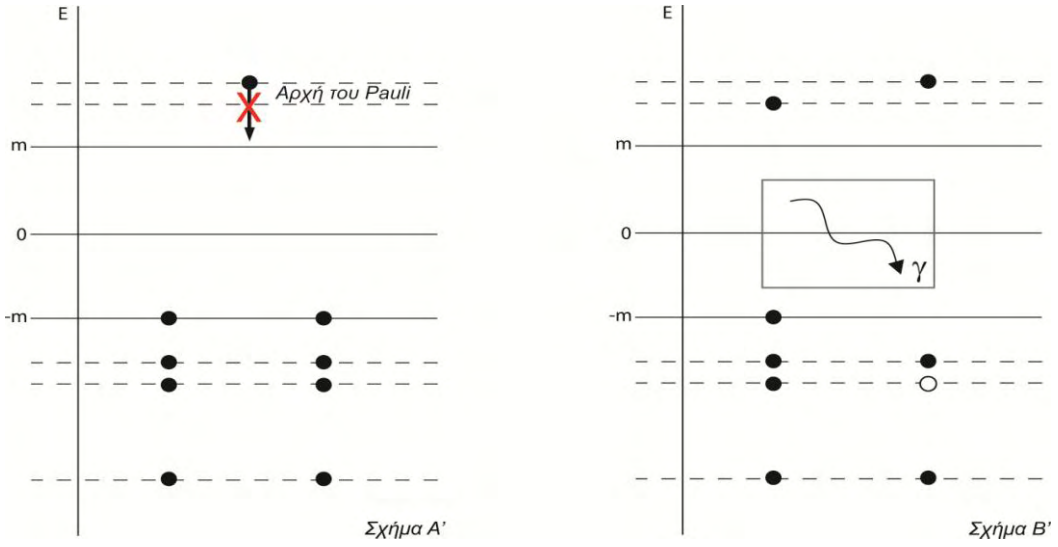
1. Ερμηνεία των λύσεων της σχετικιστικής εξίσωσης ως αντισωματίου.

2. Εξίσωση που εμπεριέχει-προβλέπει το spin του σωματίου.

3. Δυνατότητα απόδοσης της πυκνότητας πιθανότητας σε σχετικιστική εξίσωση. (Εξάλειψη της αδυναμίας της εξίσωσης Klein-Gordon).

4. Αντιμετώπιση της έλλειψης κάτω φράγματος στην ενέργεια.

Ένα από τα κεντρικά προβλήματα της εξίσωσης Klein-Gordon εμφανίζεται και στην εξίσωση Dirac. Το φάσμα των αρνητικών ενεργειών δεν είναι κάτω φραγμένο. Ο Dirac για να το αντιμετωπίσει αυτό πρότεινε μία ερμηνεία στην οποία δόθηκε η ονομασία "θάλασσα του Dirac" (Σχήμα 1).



Σχήμα 1: "θάλασσα του Dirac"

Αφού οι καταστάσεις αρνητικής ενέργειας δεν μπορούν να αποκλειστούν με νόμους, θα πρέπει τουλάχιστον να εμποδιστεί η πρόσβαση σε αυτές με τον μόνο μηχανισμό που έχει στην διάθεσή της μια κβαντική θεωρία για να το επιτύχει, την αρχή του Pauli. Σύμφωνα με τον Dirac όλες οι καταστάσεις αρνητικής ενέργειας είναι κατειλημμένες από σωματίδια, δημιουργώντας ένα άκαμπτο υπόστρωμα, όπου κάθε περαιτέρω κίνηση είναι αδύνατη αφού δεν υπάρχουν άλλες διαθέσιμες ενεργειακές καταστάσεις, εκτός

εκείνων με θετική ενέργεια που χωρίζονται όμως από τις προηγούμενες μ' ένα μεγάλο ενεργειακό χάσμα.

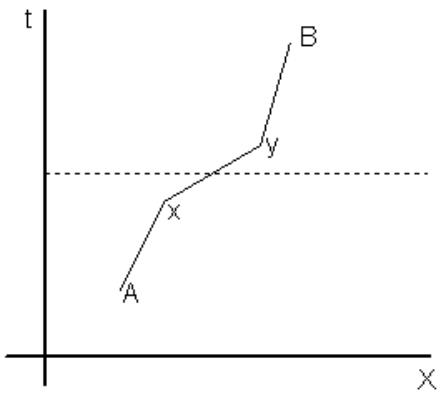
Δημιουργείται δηλαδή μια «συμπαγής θάλασσα» η «θάλασσα του Dirac», στην οποία δεν χωρά κανένα άλλο σωμάτιο από την περιοχή των θετικών ενεργειών. Το φορτίο και η ενέργεια της θάλασσας αυτής θα είναι άπειρα, ωστόσο αυτό δεν αποτελεί πρόβλημα, καθώς η θάλασσα αποτελεί την κατάσταση κενού των σωματιδίων και οι ενέργειες που μετράμε είναι πάντα διεγέρσεις από αυτή την στάθμη ενέργειας του κενού. Εφόσον, όμως οι στάθμες θετικής ενέργειας δεν είναι όλες κατειλημμένες, θα παρατηρείται διέγερση σε αυτές από τις αρνητικές ενέργειες για κάποια σωματίδια, δημιουργώντας έτσι μια οπή στην θάλασσα. Αυτή η απουσία μιας κατάστασης αρνητικής ενέργειας ισοδυναμεί με μια κατάσταση θετικής ενέργειας, αλλά αντιθέτου φορτίου, μιας κατάστασης διαφορετικής μορφής ύλης, που πήρε την ονομασία αντιύλη [247-249].

5. Ερμηνεία των λύσεων αρνητικής ενέργειας.

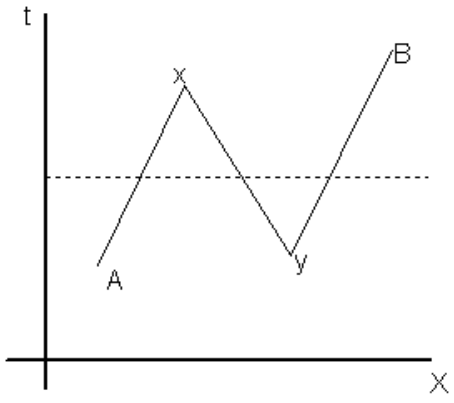
Το τελευταίο πρόβλημα ήταν η ύπαρξη λύσεων αρνητικής ενέργειας. Αρκετά αργότερα προτάθηκε και έγινε αποδεκτή μία ερμηνεία των Feynman-Stuckelberg]. Προτάθηκε οι αρνητικές λύσεις να αντιστοιχούν σε σωμάτια τα οποία διαδίδονται πίσω στον χρόνο ή αντισωμάτια τα οποία διαδίδονται μπροστά στο χρόνο. Τα "καινούρια" αυτά σωμάτια ονομάστηκαν αντισωμάτια [250,251]. Μαθηματικά η παραπάνω "παράξενη" φυσική εικόνα μπορεί να εκφραστεί με προφανή τρόπο από το μετασχηματισμό:

$$e^{-i(-E)(-t)} \equiv e^{-iEt}$$

Αυτή η προς τα πίσω διάδοση μας επιβάλει μία εικόνα κατά την οποία ο αριθμός των σωματιδίων που μετέχουν σε μία διαδικασία γενικά μεταβάλλεται (σχήμα 2).



Σχήμα (2α)



Σχήμα (2β)

Στο σχήμα 2(α) απεικονίζεται μία διαδικασία κατά την οποία ένα σωμάτιο θετικής ενέργειας αλληλεπιδρώντας μετακινείται από τη θέση Α στην Β. Αν επιτρέψουμε προς τα πίσω διάδοση παίρνουμε μία εικόνα ανάλογη με αυτή του σχήματος 2(β). Μεταξύ των χρονικών στιγμών ψ, x στο σχήμα (β) υπάρχουν τρία σωμάτια. Στην διαδικασία αυτή η αλληλεπίδραση μετέβαλε τον συνολικό αριθμό των σωματιδίων. Άρα υπάρχει η ανάγκη

να διατυπωθεί μία φυσική θεωρία η οποία να μπορεί να περιγράψει τέτοιες διαδικασίες. Η κβαντική θεωρία πεδίου είναι μία τέτοια θεωρία αφού μπορεί να περιγράψει συστήματα με άπειρους βαθμούς ελευθερίας.

Συνοψίζοντας, ο Dirac με τις προτάσεις του, έδωσε απαντήσεις στα προβλήματα που αντιμετώπισαν οι Klein-Gordon, ωστόσο, η εξίσωσή του παραμένει μια μονοσωματιδιακή εξίσωση. Η εξίσωση Dirac δεν μπορεί να σταθεί ως μια θεωρία πεπερασμένου αριθμού σωματιδίων αφού η κυματοσυνάρτηση της θα εξαρτάται από περισσότερες της μιας συντεταγμένες. Θα πρέπει να επανερμηνευθεί ως μια θεωρία με μεταβλητό αριθμό σωματιδίων και αντισωματιδίων ώστε να υπάρχει η δυνατότητα δημιουργίας και καταστροφής τους. Διότι εκεί ακριβώς βρίσκεται η ειδοποιός διαφορά μεταξύ μιας σχετικιστικής και μιας μη σχετικιστικής κβαντικής θεωρίας, δηλαδή στην δυνατότητα παραγωγής ή εξαφάνισης σωματιδίων σε μια αντίδραση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Θεωρία Πεδίων

In mathematical theories the question of notation, while not of primary importance, is yet worthy of careful consideration, since a good notation can be of great value in helping the development of a theory, by making it easy to write down those quantities or combinations of quantities that are important, and difficult or impossible to write down those that are unimportant. The summation convention in tensor analysis is an example, illustrating how specially appropriate a notation can be.

P.A.M. Dirac 1939

4.1. Εισαγωγή

Τα θεωρητικά μοντέλα που περιγράφηκαν στην προηγούμενη ενότητα και βασίζονται σε διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες περιγράφουν μονοσωματιδιακές καταστάσεις, δείχνουν να είναι καταδικασμένα να αποτύχουν. Η ιδέα για την λύση στο αδιέξοδο αυτό ήρθε πάλι από τον Dirac, ο οποίος πρότεινε ότι πρέπει να βρεθεί τρόπος ώστε οι εξισώσεις της θεωρίας να μην αφορούν μεμονωμένα σωματίδια, αλλά να εφαρμόζονται στο συνεχές. Πρότεινε δηλαδή την ανάγκη δημιουργίας θεωρίας πεδίου [252,253].

Το νέο στοιχείο που προκύπτει από την σύζευξη κβαντομηχανικής και σχετικότητας - η μεταβλητότητα του αριθμού των σωματιδίων και η ύπαρξη ύλης και αντιύλης - δεν αποτελεί περιθωριακό χαρακτηριστικό του φυσικού μας κόσμου, αλλά συστατικό στοιχείο ενός μεγάλου σχεδίου που εμπεριέχει την δυνατότητα της ύπαρξής μας.

Υπάρχει όμως μαθηματικός φορμαλισμός ικανός να περιγράψει ένα φυσικό σύστημα που ο αριθμός των σωματιδίων του μπορεί να μεταβάλλεται στην διάρκεια μιας διαδικασίας; Ο φορμαλισμός αυτός είναι γνωστός ως *δεύτερη κβάντωση* ή γενικότερα πεδιακή κβάντωση. Στην περίπτωση των εξισώσεων Klein-Gordon και Dirac αυτή η δεύτερη κβάντωση συνίσταται στην προαγωγή των μονοσωματιδιακών τους κυματοσυναρτήσεων ψ(r) σε τελεστές που ορίζονται σε κάθε σημείο του χώρου και του χρόνου, δηλαδή σε τελεστικά ή κβαντικά πεδία που η δράση τους πάνω στις κβαντικές καταστάσεις μπορεί να αυξομειώνει τον αριθμό των σωματιδίων που είναι παρόντα. Ο φορμαλισμός αυτός δεν είναι παρά μια πολύ φυσιολογική γενίκευση της αλγεβρικής θεωρίας του αρμονικού ταλαντωτή με την δράση κατάλληλων τελεστών, που είναι οι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής.

Πρώτη κβάντωση είναι η προαγωγή των κλασικών σωματιδιακών μεγεθών (θέση, ορμή, ενέργεια κλπ.) σε κβαντικούς τελεστές και η κατασκευή μέσω αυτών μιας κυματικής εξίσωσης για την κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου, η οποία είναι μια συνήθης συνάρτηση, δηλαδή ένα κλασικό πεδίο στο χώρο και στο χρόνο [254]. Δεύτερη κβάντωση είναι ακριβώς η μετατροπή αυτού του κλασικού πεδίου που προέκυψε από την πρώτη κβάντωση σε κβαντικό πεδίο [255].

Έτσι η σχετικιστική κβαντομηχανική βρίσκει τελικά την σωστή της έκφραση στο επίπεδο των κβαντικών πεδίων, που είναι μια φυσική οντότητα με άπειρο πλήθος βαθμών ελευθερίας. Το μοναδικό εργαλείο που θα χρειαστούμε για την διαδικασία της δεύτερης κβάντωσης είναι ο Λαγκρανζιανός φορμαλισμός της κλασικής μηχανικής και η επέκτασή του σε κλασικές πεδιακές εξισώσεις.

4..2. Λαγκρανζιανός φορμαλισμός

4.2.1. Συστήματα με πεπερασμένο πλήθος βαθμών ελευθερίας

Οι εξισώσεις κίνησης ενός μηχανικού συστήματος προκύπτουν από την αρχή του Hamilton (η λεγόμενη αρχή της ελάχιστης δράσης), η οποία καταλήγει στις λεγόμενες

εξισώσεις Euler-Lagrange στις οποίες υπεισέρχεται η Λαγκρανζιανή. Ο φορμαλισμός των Lagrange και Hamilton θεωρείται γενικότερος από εκείνον του Νεύτωνα στην κλασική μηχανική, καθώς βασίζεται σε έννοιες όπως είναι οι συμμετρίες, οι γενικευμένες συντεταγμένες και, στην περίπτωση του φορμαλισμού του Hamilton, τον χώρο των φάσεων [256,257]. Η Λαγκρανζιανή (L) ενός μηχανικού συστήματος είναι συνάρτηση των γενικευμένων συντεταγμένων (p, q), η χρονική εξέλιξη των οποίων καθορίζει την τροχιά ενός σώματος που κινείται κάτω από την επίδραση δεδομένου δυναμικού. Αν T την κινητική ενέργεια και V το δυναμικό, τότε η Λαγκρανζιανή ενός συστήματος ισούται με: L=T-V. Για παράδειγμα, η Λαγκρανζιανή ενός μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή μάζας m και κυκλικής συχνότητας ω δίνεται από τη σχέση:

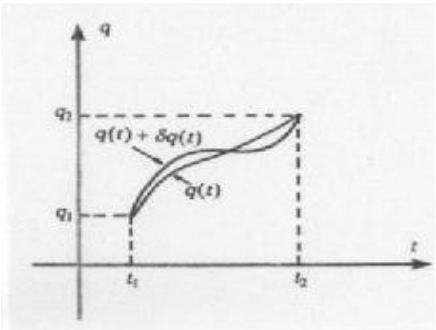
$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

όπου x η μετατόπιση του σώματος από τη θέση ισορροπίας και $\dot{x}$ η ταχύτητά του.

Σύμφωνα με την αρχή ελάχιστης δράσης του Hamilton, η τροχιά ενός συστήματος N βαθμών ελευθερίας, που περιγράφεται από μία Λαγκρανζιανή L=T-V, καθορίζεται από την ελαχιστοποίηση της δράσης:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t))dt \qquad (1)$$

όπου q(t) η θέση του σωματιδίου και $\dot{q}(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ η ταχύτητά του. Η συνάρτηση S δεν είναι απλά μια συνάρτηση του t, αλλά είναι ένα συναρτησιακό του q(t). Θεωρούμε μια μικρή αλλαγή δq(t) στη τροχιά από το $q(t_1)$ στο $q(t_2)$. Για όλες τις δυνατές τροχιές $q_i(t)$ στο διάγραμμα q(t)-t (σχήμα 3) υπολογίζουμε το S. Η πραγματική τροχιά είναι εκείνη για την οποία η S είναι ελάχιστη.



Σχήμα 3: Υπολογισμός Ελάχιστης Δράσης

Στο ελάχιστο, η αλλαγή δS στη δράση που αντιστοιχεί στην αλλαγή δq(t), θα πρέπει να μηδενίζεται. Η αλλαγή στη δράση δίνεται από την σχέση:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q(t)} \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \delta \dot{q}(t) \right) dt \qquad (2)$$

Επειδή $\delta \dot{q}(t) = \frac{d(\delta q(t))}{dt}$ και ολοκληρώνοντας τον δεύτερο όρο της σχέσης (2) κατά παράγοντες έχουμε:

$$\delta S = \int_{t1}^{t_2} \delta q(t) \left[\frac{\partial L}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \right] dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \delta q(t) \right]_{t_1}^{t_2}$$

Δεδομένου όμως ότι όλες οι πιθανές τροχιές ξεκινούν τη χρονική στιγμή t_1 και σταματούν τη χρονική στιγμή t_2, σημαίνει ότι $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ οπότε η μεταβολή της δράσης θα είναι:

$$\delta S = \int_{t1}^{t_2} \delta q(t) \left[\frac{\partial L}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \right] dt = 0$$

η οποία πρέπει να ισχύει για κάθε $\delta q(t)$, οπότε καταλήγουμε στην:

$$\frac{\partial L}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} = 0 \qquad (3)$$

που είναι η περίφημη εξίσωση Euler-Lagrange [258-260]. Η λύση της (3) $q_0(t)$ δίνει την πραγματική τροχιά που ακολουθεί το σωματίδιο. Π.χ. για $L = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x)$ θα έχουμε ότι $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = p$, και τελικά θα έχουμε $F = -m\ddot{x}$ που ταυτίζεται με τον 2ο νόμο του Νεύτωνα.

4.2.2. Συστήματα με συνεχές πλήθος βαθμών ελευθερίας - Θεωρία πεδίου

Η προσέγγιση των Lagrange και Hamilton για το πεδίο προτείνει ότι οι γενικευμένες συναρτήσεις $q_r(t)$ πρέπει να αντικατασταθούν από τις πεδιακές συναρτήσεις φ(x,t):

$$r \to x \qquad q_r(t) = q(r,t) \to \phi(x,t) \qquad (4)$$

όπου το x είναι μία συνεχής μεταβλητή που επισημαίνει την μετατόπιση της χορδής. Η εγκάρσια ταλάντωση της χορδής περιγράφεται από το πεδίο φ(x,t). Σε κάθε σημείο x της χορδής , το φ(x,t) μετράει τη μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας, τη χρονική στιγμή t, ενός μικρού στοιχείου της χορδής γύρω από το σημείο x. Σε κάθε σημείο x έχουμε έναν ανεξάρτητο βαθμό ελευθερίας φ(x,t), έτσι το σύστημα πεδίο έχει ένα συνεχές άπειρο βαθμών ελευθερίας. Η (4) μας υποδεικνύει ότι το φ έχει διάσταση μήκους, επομένως το L έχει διαστάσεις ενέργεια/μήκος και γενικά ενέργεια/όγκο. Ένα νέο χαρακτηριστικό εμφανίζεται δεδομένου ότι το φ είναι συνεχής συνάρτηση του x: η L μπορεί να εξαρτάται και από την dφ/dx, επιπλέον των φ και dφ/dt, δηλαδή:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \dot{\phi} \right) \qquad (5)$$

όπου η συνάρτηση $\mathcal{L}$ ονομάζεται Λαγκρανζιανή πυκνότητα.

Η δράση S δίνεται από την σχέση: $S = \int \mathcal{L} dt$ όπου το $\mathcal{L}$ δίνεται από τη σχέση (5):

$$S[\phi] = \int L dt = \int dt \int \mathcal{L}\left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \dot{\phi}\right) dx$$

Θέτουμε αξιωματικά την ίδια θεμελιώδη αρχή δS=0 με την έννοια ότι η δυναμική του πεδίου φ καθορίζεται από την ελαχιστοποίηση της δράσης S:

$$\delta S = \int dt \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x)}\delta\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\delta\dot{\phi}\right] dx =$$

$$= \int dt \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x)}\frac{\partial}{\partial x}(\delta\phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\frac{d}{dt}(\delta\phi)\right] dx$$

αφού

$$\delta\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\delta\phi) \qquad \delta\dot{\phi} = \frac{d}{dt}(\delta\phi)$$

Ολοκληρώνοντας το $\frac{d}{dt}(\delta\phi)$ κατά παράγοντες στο t, και το $\frac{\partial}{\partial x}(\delta\phi)$ κατά παράγοντες στο x και αμελώντας τους «επιφανειακούς» όρους προκύπτει:

$$\delta S = \int dt \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x)}\right)\delta\phi - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right)\delta\phi\right] dx + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x)}\delta\phi\right]_{x_1}^{x_2} + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\delta\phi\right]_{t_1}^{t_2}$$

Οι δύο τελευταίοι όροι μηδενίζονται από τις αρχικές συνθήκες:

$$\delta\phi(x_1) = \delta\phi(x_2) = 0$$

οπότε προκύπτει:

$$\delta S = \int dt \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x)}\right)\delta\phi - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right)\delta\phi\right] dx$$

και η απαίτηση δS=0 μας δίνει τις εξισώσεις πεδίου Euler-Lagrange [258-260]:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x)}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) = 0 \qquad (6)$$

Η γενίκευση της (6) στις 3 διαστάσεις είναι:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \nabla\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi)}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) = 0 \qquad (7)$$

Για τα σχετικιστικά πεδία η εξίσωση Euler-Lagrange γράφεται σε αναλλοίωτη μορφή:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) = 0 \qquad (8)$$

Σαν παράδειγμα θα εξετάσουμε την (8) με την Λαγκρανζιανή:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

και θα έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial\phi}\Big(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\frac{1}{2}m^2\phi^2\Big)-\partial_\mu\Big(\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\phi)}\big(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\frac{1}{2}m^2\phi^2\big)\Big)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial\phi}\Big(\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial\phi}{\partial t}\Big)^2-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2-\frac{1}{2}m^2\phi^2\Big)-\nabla\Big(\frac{\partial}{\partial(\nabla\phi)}\big(\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial\phi}{\partial t}\Big)^2-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2-\frac{1}{2}m^2\phi^2\big)\Big)-$$

$$-\frac{\partial}{\partial\phi}\Big(\frac{\partial}{\partial\dot{\phi}}\big(\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial\phi}{\partial t}\Big)^2-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2-\frac{1}{2}m^2\phi^2\big)\Big)=0$$

$$-\mathrm{m}^2\varphi+\nabla^2\varphi-\frac{\partial^2\varphi}{\partial\mathrm{t}^2}=0 \qquad (9)$$

που είναι η εξίσωση Klein-Gordon για το πεδίο φ(x,t).

Το πεδίο φ(x,t) είναι ένα βαθμωτό πεδίο. Βαθμωτό πεδίο σημαίνει ότι το πεδίο έχει μόνο μία ανεξάρτητη συνιστώσα σε κάθε σημείο (x,t), σε αντίθεση με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, στο οποίο η ανάλογη ποσότητα έχει τέσσερις συνιστώσες φτιάχνοντας ένα τετραδιάστατο διανυσματικό πεδίο $A^\mu(x,t)=(A_0(x,t),A(x,t))$. Στην κβαντική περίπτωση τα βαθμωτά πεδία είναι κατάλληλα για να περιγράψουν σωματίδια με σπιν 0.

4.3. Συμμετρίες και νόμοι διατήρησης

"Κάτι είναι συμμετρικό αν δρώντας πάνω του με κάποιο τρόπο αυτό παραμένει όπως ήταν αρχικά".

Hermann Weyl

Ένα από τα βασικά πλεονεκτήματα της Λαγκρανζιανής θεώρησης είναι ότι αποκαλύπτει με άμεσο τρόπο ποσότητες που διατηρούνται κατά την κίνηση ενός φυσικού συστήματος. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η περίπτωση μιας γενικευμένης συντεταγμένης, έστω της q_k, η οποία δεν εμφανίζεται αναλυτικά στη Λαγκρανζιανή. Σε αυτή την περίπτωση, επειδή είναι:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k}=0$$

από τις εξισώσεις Euler-Lagrange προκύπτει ότι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\right)=0$$

και επομένως η γενικευμένη ορμή $p_k=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}$, η συζυγής της συντεταγμένης q_k διατηρείται κατά την κίνηση. Οι συντεταγμένες που δεν εμφανίζονται στη Λαγκρανζιανή συνάρτηση ονομάζονται κυκλικές. Συμπεραίνουμε ότι η γενικευμένη ορμή που είναι συζυγής μιας κυκλικής μεταβλητής είναι διατηρούμενη ποσότητα.

Σαν δεύτερο παράδειγμα ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο που κινείται σε ένα επίπεδο υπό επίδραση ενός κεντρικού πεδίου που περιγράφεται από το δυναμικό V(r), όπου r η απόσταση του σωματιδίου από το κέντρο των συντεταγμένων. Η Λαγκρανζιανή συνάρτηση του σωματιδίου σε πολικές συντεταγμένες (r,θ) είναι:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\theta^2) - V(r)$$

και δεν έχει καμία εξάρτηση από τη γωνία $\dot{\theta}$, επομένως και η συζυγής ως προς τη γωνία θ ορμή:

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta}$$

διατηρείται κατά την κίνηση. Η διατηρούμενη αυτή ορμή, είναι η στροφορμή του σωματιδίου ως προς το κέντρο της δύναμης εκφρασμένη σε πολικές συντεταγμένες. Η στροφορμή, απ' ότι γνωρίζουμε διατηρείται σε κεντρικά πεδία.

<u>Και τώρα εισερχόμαστε στην έννοια του μετασχηματισμού:</u> Το γεγονός ότι η Λαγκρανζιανή του σωματιδίου δεν εξαρτάται από τη γωνία θ, σημαίνει ότι αν μετασχηματίσουμε τις γωνίες από θ σε Θ(ε)=θ+ε, (όπου ε είναι μία συνεχής παράμετρος) διατηρώντας όμως τις αποστάσεις ίδιες, r→R=r, η Λαγκρανζιανή παραμένει αναλλοίωτη, ανεξάρτητα από την τιμή της παραμέτρου ε. Ο μετασχηματισμός αυτός των συντεταγμένων είναι στην ουσία στροφή του σωματιδίου κατά γωνία ε. Αυτό σημαίνει ότι η Λαγκρανζιανή, υπολογισμένη στις νέες συντεταγμένες:

$$L(\varepsilon) = L(R, \dot{R}, \Theta, \dot{\Theta}) = L(r, \dot{r}, \theta + \varepsilon, \dot{\theta})$$

είναι ίση με την αρχική Λαγκρανζιανή $L(\varepsilon) = L(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta})$.

Με άλλα λόγια η Λαγκρανζιανή σωματιδίου σε κεντρικό πεδίο είναι αναλλοίωτη σε στροφές, δηλαδή είναι συμμετρική ως προς τον συνεχή μετασχηματισμό στροφών. Επειδή η παράμετρος ε είναι συνεχής, μπορούμε να παραγωγίσουμε τη Λαγκρανζιανή ως προς ε και να εκφράσουμε τη συμμετρία της Λαγκρανζιανής ισοδύναμα ως :

$$\left.\frac{\partial L(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$$

Ο μηδενισμός της παραγώγου στο ε=0, αν και στο συγκεκριμένο παράδειγμα φαίνεται να μην έχει κανένα ιδιαίτερο νόημα (η παράγωγος είναι ίδια, ανεξαρτήτως τιμής του ε), είναι η μοναδική συνθήκη που εξασφαλίζει την ύπαρξη διατηρούμενων ποσοτήτων. Εδώ εξασφαλίζεται από το γεγονός ότι:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

μια σχέση που συνεπάγεται τη διατήρηση της στροφορμής p_θ. Συμπεραίνουμε δηλαδή, *ότι η διατήρηση της στροφορμής πηγάζει από την αναλλοιότητα της Λαγκραυζιανής σε στροφές* [261].

Ας εξετάσουμε άλλο ένα παράδειγμα, όπου <u>η χωρική μετάθεση αποτελεί συμμετρία</u>, ώστε να μπορέσουμε να γενικεύσουμε τα προηγούμενα συμπεράσματά μας. Έστω δυο σωματίδια,

τα οποία κινούνται σε μια ευθεία και αλληλεπιδρούν με κάποιο δυναμικο Νευτώνειου τύπου. Η Λαγκρανζιανή του συστήματος των σωματιδίων θα είναι:

$$L = \frac{1}{2}(m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2) - V(|x_1 - x_2|)$$

όπου x_1 και x_2 οι θέσεις του πρώτου και του δεύτερου σωματιδίου αντίστοιχα.

Ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων, ο οποίος αφήνει αναλλοίωτη τη Λαγκρανζιανή, είναι:

$$x_1 \rightarrow X_1(\varepsilon) \equiv x_1 + \varepsilon \quad \text{και} \quad x_2 \rightarrow X_2(\varepsilon) \equiv x_2 + \varepsilon$$

διότι αφενός η κινητική ενέργεια ($\dot{X}_i(\varepsilon) = \dot{x}_i$ με i=1,2) δεν μεταβάλλεται και αφετέρου η δυναμικη ενέργεια παραμένει η ίδια, αφού η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων δεν επηρεάζεται από αυτόν τον μετασχηματισμό. Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, επειδή:

$$\left.\frac{\partial L_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$$

ισχύει επίσης ότι:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$

αφού είναι:

$$\left.\frac{\partial L_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \left[\frac{\partial L_\varepsilon}{\partial X_1(\varepsilon)}\frac{\partial X_1(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L_\varepsilon}{\partial X_2(\varepsilon)}\frac{\partial X_2(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial L}{\partial x_2}$$

Έτσι, οι δύο εξισώσεις Euler-Lagrange προστιθέμενες δίνουν:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = 0$$

Το γεγονός, λοιπόν, ότι *η Λαγκρανζιανή είναι αναλλοίωτη σε μεταθέσεις οδηγεί σε διατήρηση* της ποσότητας:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2$$

δηλαδή της ολικής ορμής του συστήματος των σωματιδίων. Από τη Νευτώνεια Μηχανική γνωρίζουμε ότι η διατήρηση της ολικής ορμής είναι αποτέλεσμα του τρίτου νόμου του Νεύτωνα, τον οποίο στην ουσία έχουμε λάβει υπόψη μας στην κατασκευή του δυναμικου αλληλεπίδρασης, θεωρώντας ότι το V είναι συνάρτηση του x_1-x_2 και όχι μια αυθαίρετη συνάρτηση των x_1,x_2. Στο παραπάνω παράδειγμα δείξαμε ότι η διατήρηση της ολικής ορμής είναι συνέπεια της αναλλοιότητας του δυναμικου σε χωρικές μεταθέσεις. Καταρχάς δεν θα μπορούσαμε να αποφανθούμε ποιος από τους δυο νόμους, ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα ή η αναλλοιότητα της Λαγκρανζιανής ενός απομονωμένου συστήματος σε χωρικές μεταθέσεις του

συστήματος συντεταγμένων, είναι πιο θεμελιώδης από τον άλλο. Εφόσον, όμως, η διατήρηση της ολικής ορμής που συνεπάγεται η αναλλοιότητα της Λαγκρανζιανής υπό κάποιο συνεχή μετασχηματισμό των συντεταγμένων έχει ευρύτερη εφαρμογή, μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι η αναλλοιότητα της Λαγκρανζιανής σε κάποιους μετασχηματισμούς, ως αντανάκλαση των αντίστοιχων συμμετριών του Σύμπαντος, κατέχει πιο θεμελιώδη θέση από τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα ο οποίος περιορίζεται μόνο σε μηχανικά συστήματα.

Η παρατήρηση αυτή, ότι οι διατηρούμενες ποσότητες προκύπτουν από την αναλλοιότητα της Λαγκρανζιανής σε κάποιους συνεχείς μετασχηματισμούς έχει την ισχύ θεωρήματος, του επονομαζόμενου θεωρήματος Noether (1918) [71]. *Όταν η Λαγκραυζιανή παραμένει αναλλοίωτη σε κάποιο συνεχή μετασχηματισμό, ο μετασχηματισμός αυτός λέγεται (συνεχής) συμμετρία της Λαγκραυζιανής,* με την ίδια λογική που ο ορθός κύλινδρος λέμε ότι παρουσιάζει κυλινδρική συμμετρία, αφού δεν υφίσταται καμία διαφοροποίηση, όταν στραφεί γύρω από τον άξονα του. Στα παραδείγματα που ήδη εξετάσαμε διαφαίνεται η ανάγκη θεώρησης μετασχηματισμών που εξαρτώνται συνεχώς και με διαφορίσιμο τρόπο από κάποια παράμετρο ε. Οι διατηρούμενες ποσότητες προέκυψαν από τη διαφόριση της Λαγκρανζιανής ως προς αυτήν ακριβώς την παράμετρο. *Αυτό δεν θα ήταν εφικτό αν η συμμετρία ήταν διακριτή.* Ως παράδειγμα διακριτής συμμετρίας μπορούμε να θεωρήσουμε τον κατοπτρισμό των συντεταγμένων $x_\iota \rightarrow X_\iota \equiv - x_\iota$ στο πρόβλημα των δυο αλληλεπιδρώντων σωματιδίων. Αυτός ο μετασχηματισμός που δεν εξαρτάται από κάποια συνεχή παράμετρο αποτελεί διακριτή συμμετρία της Λαγκρανζιανής, η οποία στην κλασσική μηχανική, αντίθετα απ ότι συμβαίνει στην κβαντική μηχανική, δεν οδηγεί σε καμία διατηρούμενη ποσότητα. Μια άλλη διακριτή συμμετρία, για το ίδιο πρόβλημα, αν τα σωματίδια έχουν ίδια μάζα, είναι η εναλλαγή των σωματιδίων $x_1 \rightarrow x_2$, $x_2 \rightarrow x_1$. Και αυτή η συμμετρία, όντας διακριτή, δεν οδηγεί στη διατήρηση κάποιας ποσότητας στην κλασσική μμηχανική.

Από την παραπάνω ανάλυση φαίνεται ότι για την κατασκευή της διατηρούμενης ποσότητας αρκεί να γνωρίζουμε μόνο την απειροστή, δηλαδή σε πρώτη τάξη, εξάρτηση του μετασχηματισμού από την παράμετρο ε. Η απειροστή αυτή μορφή του μετασχηματισμού, όπως θα δούμε, αρκεί για να προσδιορίσουμε πλήρως το μετασχηματισμό, αφού μπορούμε βήμα-βήμα να οικοδομήσουμε το μετασχηματισμό για κάθε πεπερασμένη τιμή του ε.

Οι νόμοι της συμμετρίας της Φύσης σχετίζονται άμεσα με τις διασπάσεις των συμμετριών. Στο χώρο των σωματιδίων, υπάρχουν τρεις κύριες συμμετρίες [262]. Ο κατοπτρισμός ως προς τον χρόνο T (Time Reversal), ο κατοπτρισμός ως προς το χώρο (Space Inversion), που λέγεται ομοτιμία P (Parity) και τέλος ο κατοπτρισμός ως προς το φορτίο C (Charge Conjugation). Και οι τρείς συμμετρίες λέγονται με μία λέξη CPT.

Α. Διατήρηση της ενέργειας και συμμετρία μεταφοράς χρόνου

Τόσο στην Κλασική Μηχανική όσο και στην Κβαντομηχανική, η διατήρηση της ενέργειας σ' ένα απομονωμένο κλειστό σύστημα, θεωρείται το αναγκαστικό αποτέλεσμα της αρχής της ομοιογένειας του χρόνου.

Η ενέργεια είναι διατηρήσιμο μέγεθος κατά την κίνηση μέσα σε ένα χρονικά ανεξάρτητο εξωτερικό πεδίο. Η χρονική ανεξαρτησία μπορεί να θεωρηθεί και σαν συμμετρία μεταφοράς χρόνου αφού όποτε και να ελέγξουμε το σύστημα το πεδίο εξακολουθεί να είναι το ίδιο. Σε αυτό το σύστημα δεν έχει σημασία η αρχή του χρόνου αλλά μόνο η αρχική του κατάσταση. Αυτή η φυσική απαίτηση αποκαλείται συνήθως αρχή της ομοιογένειας του χρόνου.

Αντίστοιχα, αν επεκταθούμε και σε άλλες ανεξαρτησίες θα έχουμε και τις αντίστοιχες συμμετρίες. Για παράδειγμα η χωρική μετατόπιση έχει ως συνέπεια την διατήρηση της ορμής ενώ συμμετρία ως προς την στροφή έχει ως αποτέλεσμα την διατήρηση της στροφορμής.

Β. Αντιστροφή του χώρου (P)

Μπορούμε να δούμε σαν αντιστροφή του χώρου την πράξη $r \rightarrow -r$, οπότε κάθε σημείο του χώρου απεικονίζεται στο αντιδιαμετρικό του ως προς την αρχή των αξόνων. Εξετάζοντας την περίπτωση ενός δυναμικού όπου έχουμε $V(r)=V(-r)$ η Χαμιλτονιανή παραμένει επίσης αμετάβλητη αφού η Λαπλασιανή περιέχει παραγώγους δευτέρας τάξεως ως προς το r. Έτσι στα δυναμικά $V(r)$ με άρτια συνάρτηση του r, η Χαμιλτονιανή H παραμένει αναλλοίωτη στην αντιστροφή του χώρου. Βάσει των προηγούμενων θα πρέπει αυτή η συμμετρία να δίνει επαγωγικά ένα διατηρήσιμο μέγεθος. Ένα τέτοιο μέγεθος είναι ο τελεστής parity ή τελεστής αντιστροφής χώρου (P). Αυτός ο τελεστής είναι ερμιτιανός με ιδιοτιμές ±1 ($P^2=1$) και πραγματοποιεί πάνω στις κυματοσυναρτήσεις την πράξη της αντιστροφής, $P\psi(r)=\psi(-r)$.

Για να διατηρείται η ισοτιμία, πρέπει η Χαμιλτονιανή να έχει συμμετρία αντιστροφής χώρου, κάτι το οποίο πρακτικά σημαίνει ότι αν η κυματοσυνάρτηση ενός φυσικού συστήματος σε μια δεδομένη χρονική στιγμή είναι π.χ. άρτια ή περιττή, θα παραμείνει άρτια ή περιττή, αντίστοιχα. Αυτές οι σκέψεις φαίνεται να οδηγούν σε ανάλογα συμπεράσματα και για το χρόνο, όμως, όπως είναι γνωστό, για το χρόνο δεν υπάρχει αντίστοιχος ερμιτιανός τελεστής. Επίσης εκεί όπου εμπλέκεται ο χρόνος, όπως στην ταχύτητα με το θεώρημα του Ehrenfest, για να πάρουμε τις κλασικές εξισώσεις της κίνησης θα πρέπει να πάρουμε τις μέσες τιμές των φυσικών μεγεθών, όπως για παράδειγμα της θέσης. Έτσι στην εξέλιξη του συστήματος στο χρόνο περνάμε στις πιθανότητες, οπότε και καταρρέει κάθε προσπάθεια ανάλογης αντιστροφής του χρόνου ακόμα και στα συστήματα με σταθερή ενέργεια, όπου όπως αναφέρθηκε είναι ανεξάρτητα του χρόνου.

Για να περνάμε από την κβαντομηχανική στην κλασική μηχανική τα απαραίτητα θεωρήματα με τις συμβάσεις τους, όπως το ανωτέρω, μας εμποδίζουν να αντιστρέψουμε το χρόνο καθώς χρησιμοποιούν όρους πιθανοτικούς, άρα μη αντιστρέψιμους στο χρόνο.

Αναλυτικά η αντιστροφή του χώρου r → -r σε καρτεσιανές συντεταγμένες δίνεται από το (x, y, z)→(-x, -y, -z), ενώ σε πολικές συντεταγμένες από το μετασχηματισμό r → -r, θ → π-θ, φ → φ+π. Με την αντιστροφή, ένα δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων μετατρέπεται σε αριστερόστροφο. Μερικά φυσικά μεγέθη ανταποκρίνονται στο μετασχηματισμό αντιστροφής, όπως παρακάτω: r→-r, p→-p, ορμή, σ→σ, σπιν, E→-E, ηλεκτρικό πεδίο, B→B, μαγνητικό πεδίο, J→J, στροφορμή, σB→σB, μαγνητική διπολική ροπή, σP →σP, διαμήκης πόλωση, σE→-σE ηλεκτρική διπολική ροπή. Τα αξονικά διανύσματα δεν αλλάζουν σημείο με την αντιστροφή. Η μελέτη των φαινομένων, τα οποία οφείλονται στη βαρύτητα, τις ηλεκτρομαγνητικές και τις ισχυρές δυνάμεις έδειξε ότι δεν υπάρχουν φαινόμενα τα οποία να διαφοροποιούνται όταν κάνουμε χωρική αντιστροφή. Δηλαδή τα αποτελέσματα των πειραμάτων είναι αναλλοίωτα σε σχέση με τα δεξιόστροφα ή τα αριστερόστροφα συστήματα συντεταγμένων, έχουμε λοιπόν διατήρηση της ομοτιμίας. Στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις όμως, αυτό δεν συμβαίνει [Lee-Yang 1956] όπως έδειξαν οι προαναφερόμενοι με πείραμα στη διάσπαση ^{60}Co.

C. Η Συζυγία φορτίου (C)

Όπως είναι γνωστό σε κάθε σωμάτιο αντιστοιχεί και ένα αντισωμάτιο το οποίο έχει την ίδια μάζα και αντίθετους όλους τους προσθετικούς αριθμούς, δηλαδή το ηλεκτρικό φορτίο Q, τον βαρυονικό αριθμό B, την παραδοξότητα S κ.τ.λ.

Ο τελεστής C της συζυγίας φορτίου αντικαθιστά κάθε σωμάτιο ενός συστήματος με το αντισωμάτιό του, δηλαδή η συζυγία φορτίου κάνει αντίθετους όλους τους προσθετικούς αριθμούς οι οποίοι χαρακτηρίζουν ένα σωμάτιο. Δεν επηρεάζει το σπιν και αντιστρέφει την μαγνητική ροπή. Διατηρείται στις ηλεκτρομαγνητικές και ισχυρές αλληλεπιδράσεις και παρά τις επίμονες έρευνες δεν έχει βρεθεί παραβίαση αυτής της διατήρησης μέχρι τώρα. Παραβιάζεται όμως πλήρως στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις.

D. Συμμετρία CP

Στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις παραβιάζεται τόσο η ομοτιμία (P), όσο και η συζυγία φορτίου (C), παραβιάζεται όμως με τέτοιο τρόπο ώστε ο συνδυασμός CP να διατηρείται εκτός από τις ασθενείς διασπάσεις των ουδέτερων k-μεσονίων όπου δεν διατηρείται περίπου σε ποσοστό 0.1%.

E. Αντιστροφή του χρόνου T

Ένα σύστημα θεωρείται ότι έχει συμμετρία με αντιστροφή του χρόνου, εάν ενώ αυτό έχει εξελιχθεί από μια αρχική κατάσταση σε μια τελική, είναι δυνατόν ξεκινώντας από την τελική κατάσταση να μπορούμε να φτάσουμε στην αρχική αντιστρέφοντας την φορά κίνησης των

συνιστωσών του συστήματος. Στην χρονική αντιστροφή έχουμε τις παρακάτω αλλαγές στα διάφορα φυσικά μεγέθη: r→r, p→-p, ορμή, σ→-σ, σπιν, E→E, ηλεκτρικό πεδίο, B→B, μαγνητικό πεδίο, σB→σB, μαγνητική διπολική ροπή, σP →σP, διαμήκης πόλωση, σE →-σE ηλεκτρική διπολική ροπή.

Ο τελεστής T είναι αντιμοναδιαίος και μη γραμμικός δηλαδή, όχι ερμιτιανός και δεν υπάρχει καμία φυσική ποσότητα να αντιστοιχεί σε αυτόν. Οι ιδιοτιμές του δεν είναι μετρήσιμες φυσικές ποσότητες.

F. Θεώρημα CPT

Σαν σύνθεση των παραπάνω στην Κβαντική Θεωρία Πεδίου προκύπτει το βασικό θεώρημα των Luders - Pauli, γνωστό και ως θεώρημα CPT, όπου το γινόμενο CPT παραμένει αναλλοίωτο σ' όλες τις αλληλεπιδράσεις ανεξάρτητα με τη σειρά με την οποία παίρνουμε τους τρεις τελεστές C, P και T. Αυτό το θεώρημα ισχύει για κάθε Κβαντική Θεωρία Πεδίου η οποία είναι αναλλοίωτη από τους μετασχηματισμούς Lorentz και σέβεται την αρχή της μικροαιτιότητας δηλαδή τη σωστή αντιστοιχία μεταξύ σπιν και στατιστικής. Σημαντικά συμπεράσματα τα οποία επαληθεύονται και πειραματικά είναι, ότι κάθε σωμάτιο καθώς και το αντίστοιχο αντισωμάτιό του θα πρέπει να έχουν την ίδια μάζα, τον ίδιο χρόνο ζωής και το ίδιο spin. Μια πειραματική απόδειξη ότι παραβιάζεται η συμμετρία T είναι να μετρήσουμε την ηλεκτρική διπολική ροπή κάποιου σωματίου, π.χ. του νετρονίου. Εάν η συμμετρία T δεν παραβιάζεται τότε η διπολική ηλεκτρική ροπή θα πρέπει να είναι μηδέν. Έτσι η διπολική ηλεκτρική ροπή σE με την επίδραση των P και T γίνεται -σE και -σE αντίστοιχα. Αλλάζει δηλαδή το πρόσημο και η ύπαρξη μιας μη μηδενικής διπολικής ροπής θα είναι μια απόδειξη ότι οι συμμετρίες P, T και φυσικά η CP παραβιάζονται. Στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 1) βλέπουμε την συμπεριφορά των διαφόρων αλληλεπιδράσεων στις συμμετρίες P, C, T και των συνδυασμών τους. Το (+) σημαίνει διατήρηση και το (–) παραβίαση.

Αλληλεπιδράσεις	P	C	CP	T	CPT
Ισχυρές	+	+	+	+	+
Ηλεκτρομαγνητικές	+	+	+	+	+
Ασθενείς	-	-	+	+	+
(μικρό ποσοστό Ασθενών)	-	-	-	-	+
Βαρύτητα	+	+	+	+	+

Πίνακας 1: Διατήρηση και παραβίαση συμμετριών C, P, T

Έχει βρεθεί ότι σημαντικοί νόμοι της φυσικής έχουν άμεση σχέση με κάποια συμμετρία. Η συμμετρία γενικά περιγράφεται στα μαθηματικά με την *θεωρία ομάδων* [263]. Σημαντικό θεώρημα είναι αυτό της Noether όπου αποδεικνύει ότι: *Για κάθε συνεχή συμμετρία που διέπει ένα ιδιαίτερο φυσικό φαινόμενο (δηλαδή αφήνει αναλλοίωτη την αντίστοιχη συνάρτηση Lagrange) υπάρχει μια φυσική ποσότητα η οποία διατηρείται.* Η ποσότητα αυτή δίνεται από τον γεννήτορα της αντίστοιχης ομάδας [264].

4.3.1. Συνεχείς Συμμετρίες

Για ένα φυσικό σύστημα που περιγράφεται από τις N συντεταγμένες q_i, όπου i=1,2….N, συνεχής συμμετρία είναι ένας συνεχής μετασχηματισμός [265] των συντεταγμένων που αφήνει αναλλοίωτη την Λαγκρανζιανή.

Έστω ότι οι συντεταγμένες μετασχηματίζονται, δηλ. $q_i \rightarrow Q_i(q,\varepsilon)$, όπου ε μια συνεχής παράμετρος που χαρακτηρίζει τον ανωτέρω μετασχηματισμό, με την ιδιότητα όταν ε=0 να δίνει τον ταυτοτικό μετασχηματισμό: $Q_i(q,0)=q_i$.

Θεωρούμε, κατ' αρχάς, για ευκολία μετασχηματισμούς οι οποίοι είναι ανεξάρτητοι του χρόνου, οπότε η χρονική παράγωγος των μετασχηματισμένων συντεταγμένων είναι:

$$\dot{Q}_i(q,\varepsilon) = \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\dot{q}_k$$

Ο μετασχηματισμός $q_i \rightarrow Q_i(q,\varepsilon)$, λέγεται συνεχής συμμετρία της Λαγκρανζιανής εάν:

$$L(Q,\dot{Q},t) = L(q,\dot{q},t)$$

Επειδή η παράμετρος ε είναι συνεχής μπορούμε να θεωρήσουμε την οικογένεια των απειροστών μετασχηματισμών:

$$Q_i(q,0) + \varepsilon \left.\frac{\partial Q_i}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = q_i + \varepsilon K_i(q)$$

οι οποίοι προσεγγίζουν τον $Q_i(q,\varepsilon)$, για μικρά ε.

Οι απειροστοί μετασχηματισμοί επαναλαμβανόμενοι μπορούν να οικοδομήσουν το πεπερασμένο μετασχηματισμό. Ο μετασχηματισμός δηλαδή, προσδιορίζεται πλήρως από τις συναρτήσεις K(q), οι οποίες λέγονται και γεννήτορες του μετασχηματισμού. Εάν η Λαγκρανζιανή είναι συμμετρική ως προς αυτούς τους απειροστούς μετασχηματισμούς τότε:

$$L(Q,\dot{Q},t) = L(q+\varepsilon K,\dot{q}+\varepsilon\dot{K},t) = L(q,\dot{q},t) + \varepsilon\left(K_i\frac{\partial L}{\partial q_i} + \dot{K}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + O(\varepsilon^2)$$

οπότε και πρέπει να ισχύει:

$$K_i\frac{\partial L}{\partial q_i} + \dot{K}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Ας εξετάσουμε ένα απλό, αλλά σημαντικό, παράδειγμα, *τη χωρική μετάθεση*. Έστω N σωματίδια στο χώρο, η θέση των οποίων είναι $\vec{x}_i$. Χωρική μετάθεση κατά τη διεύθυνση $\vec{a}$

είναι ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων $\vec{x}_i \to \vec{X}_i(\vec{x},\varepsilon) = \vec{x}_i + \varepsilon\vec{a}$. Κάθε χωρική μετάθεση, είναι συμμετρία της Λαγκρανζιανής των σωματιδίων που αλληλεπιδρούν με Νευτώνειο δυναμικό:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \,|\dot{\vec{x}}_i|^2 - \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{N} V(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|)$$

Για τις χωρικές μεταθέσεις $\vec{K}_i = \vec{a}$, αφού όλα τα σωματίδια μετατίθενται το ίδιο θα έχουμε $\dot{\vec{K}}_i = 0$ (εδώ έχουμε $3N$ συντεταγμένες και τα $\vec{K}_i$ λαμβάνονται για κάθε σωματίδιο, οπότε και είναι διανύσματα). Συνεπώς η συμμετρία στις χωρικές μεταθέσεις συνεπάγεται ότι η Λαγκρανζιανή πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$\vec{a}\cdot\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{x}_i} = 0$$

για κάθε $\vec{a}$, οπότε ισοδυνάμως απαιτείται από την Λαγκρανζιανή $\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{x}_i} = 0$, δηλαδή η Λαγκρανζιανή πρέπει να εξαρτάται από τη θέση των σωματιδίων μόνο μέσω της σχετικής απόστασης των σωματιδίων $|\vec{x}_i - \vec{x}_j|$.

4.3.2. Θεώρημα της Noether

Επιστρέφοντας στη γενική περίπτωση ας θεωρήσουμε την ποσότητα:

$$\sum_i K_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Η χρονική παράγωγος αυτής της ποσότητας είναι:

$$\frac{d}{dt}\sum_i K_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{K}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i K_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Εάν η q(t) είναι φυσική τροχιά, τότε ικανοποιείται η εξίσωση Euler-Lagrange και η απαίτηση της συμμετρίας της Λαγκρανζιανής συνεπάγεται ότι:

$$\frac{d}{dt}\sum_i K_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{K}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i K_i \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

δηλαδή η ποσότητα:

$$\sum_i K_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \equiv \sum_i p_i K_i$$

διατηρείται κατά τη κίνηση. Δηλαδή διατηρείται η 'συνισταμένη' των γενικευμένων ορμών, $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, στη 'διεύθυνση' των γεννητόρων της συμμετρίας.

Άρα κάθε συνεχής συμμετρία της Λαγκρανζιανής που προσδιορίζεται από τους γεννήτορες K_i *συνεπάγεται τη διατήρηση της ποσότητας:* $\sum_i p_i K_i$ *. Αυτή είναι η πρώτη μορφή του θεωρήματος της Noether (1919)* [71].

Για τις χωρικές μεταθέσεις της Λαγκρανζιανής ενός απομονωμένου συστήματος σωματιδίων που αλληλεπιδρούν με Νευτώνειες δυνάμεις, το θεώρημα της Noether συνεπάγεται τη διατήρηση της:

$$\vec{a} \cdot \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i}$$

για κάθε $\vec{a}$, άρα συνεπάγεται τη διατήρηση της:

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i \equiv M\dot{\vec{X}}_i$$

δηλαδή της συνολικής ορμής των σωματιδίων που αντιστοιχεί στην ορμή του κέντρου μάζας των σωματιδίων, $\vec{P} = M\dot{\vec{X}}$, όπου $\vec{X} = \frac{\sum_i m_i \vec{x}_i}{M}$, και $M = \sum_i m_i$ η συνολική μάζα. Η ομογένεια του χώρου συνεπάγεται συνεπώς τη διατήρηση της ορμής του κέντρου μάζας των σωματιδίων. Προφανώς εάν η Λαγκρανζιανή είναι συμμετρική στις χωρικές μεταθέσεις μόνο κατά τη διεύθυνση $\vec{a}$, τότε η συνιστώσα της ολικής ορμής διατηρείται μόνο σε αυτή τη διεύθυνση.

Όπως η *ομογένεια* του χώρου συνεπάγεται τη διατήρηση της συνολικής ορμής των σωματιδίων, η *ισοτροπία* του χώρου συνεπάγεται τη διατήρηση της συνολικής στροφορμής των σωματιδίων. Αν η Λαγκρανζιανή είναι συμμετρική ως προς τις στροφές γύρω από κάποιο άξονα $\vec{n}$ τότε διατηρείται η στροφορμή ως προς τον άξονα αυτόν. Θεωρούμε την απειροστή στροφή κατά γωνία:

$$\varepsilon : \vec{x} \to \vec{x} + \varepsilon \vec{n} \times \vec{x}$$

Τότε $\vec{K} = \vec{n} \times \vec{x}$ και η συμμετρία της Λαγκρανζιανής συνεπάγεται από το θεώρημα Noether τη διατήρηση της:

$$\sum_i (\vec{n} \times \vec{x}_i) \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i} = -\vec{n} \cdot \sum_i \vec{x}_i \times \vec{p}_i = -\vec{n} \cdot \vec{L}$$

δηλαδή τη διατήρηση της συνιστώσας της στροφορμής $\vec{L} = \sum_i \vec{x}_i \times \vec{p}_i$ στη διεύθυνση $\vec{n}$.

Όταν η Λαγκρανζιανή είναι σφαιρικά συμμετρική, δηλαδή είναι συμμετρική σε στροφές γύρω από οποιοδήποτε άξονα τότε διατηρείται η ολική στροφορμή $\vec{L}$.

Συμπερασματικά, το θεώρημα της Noether μας επιτρέπει, αφού διαπιστώσουμε τις συνεχείς συμμετρίες της Λαγκρανζιανής του φυσικού συστήματος, να προσδιορίσουμε διατηρούμενες ποσότητες.

4.3.3. Γενική μορφή του θεωρήματος της Noether

Μέχρι τώρα έχουμε θεωρήσει μόνο μετασχηματισμούς στις χωρικές συντεταγμένες. Έστω μία οικογένεια απειροστών χωροχρονικών μετασχηματισμών (q,t)→(Q,T) που προσδιορίζονται από τους γεννήτορες K_i και τ :

$$Q_i(q,t) = q_i + \varepsilon K_i(q,t) \qquad T(q,t) = t + \varepsilon\tau(q,t) \qquad \text{(M)}$$

Οι μετασχηματισμοί αυτοί θα λέγονται συμμετρία αν αφήνουν τη δράση αναλλοίωτη. Δηλαδή η δράση υπολογισμένη στη διαδρομή $q(t)$ με t στο διάστημα $[t_1, t_2]$ να ισούται με τη δράση της μετασχηματισμένης σύμφωνα με το (M) διαδρομής $Q(T)$ με το T στο διάστημα $[T_1, T_2]$, με

$$T_1 = t_1 + \varepsilon\tau(q(t_1), t_1) \text{ και } T_2 = t_2 + \varepsilon\tau(q(t_2), t_2)$$

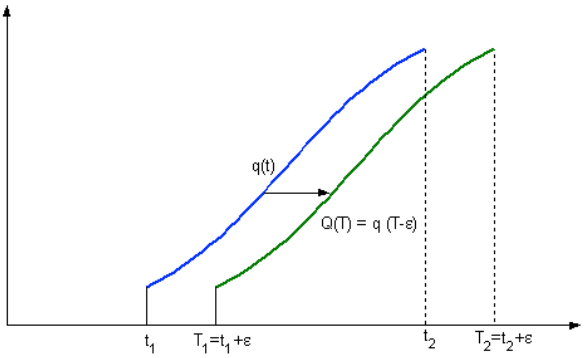
Ενώ ο παραπάνω μετασχηματισμός (M) ορίζει την απεικόνιση κάθε σημείου των αρχικών θέσεων και του χρόνου (q,t)→(Q,T), για να υπολογισθεί η απεικόνιση της τροχιάς πρέπει να υπολογισθεί η σύνθεση των μετασχηματισμών, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.

Σχήμα 4: Σύνθεση μετασχηματισμών για την απεικόνιση τροχιάς

Δηλαδή ο μετασχηματισμός M είναι χωροχρονική συμμετρία όταν:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt = \int_{T_1}^{T_2} L(Q, \dot{Q}, T)dT$$

Θα αποδείξουμε ότι σε κάθε χωροχρονικό μετασχηματισμό που αφήνει τη δράση αναλλοίωτη (συμμετρία της δράσης) αντιστοιχεί και μία διατηρήσιμη ποσότητα. Αυτή είναι μία *γενικότερη μορφή του θεωρήματος της Noether* [264].



Σχήμα 5: Αρχική τροχιά q(t) και η μετασχηματισμένη τροχιά Q(T)

Πριν προχωρήσουμε στον γενικό προσδιορισμό της διατηρήσιμης ποσότητας που αντιστοιχεί σε μία γενική χωροχρονική συμμετρία ας περιορισθούμε στην περίπτωση Λαγκρανζιανών της μορφής $L(q,\dot{q})$ με ένα βαθμό ελευθερίας. Θεωρούμε τον απλό μετασχηματισμό: Q(T)=q(t), T=t+ε που αντιστοιχεί σε μία χρονική μετάθεση της αρχής του χρόνου κατά ε . Σε αυτό το φυσικό σύστημα δεν υπάρχει εκπεφρασμένη και άμεση εξάρτηση από το χρόνο και είναι αναμενόμενο η δράση να παραμένει αναλλοίωτη και η χρονική μετάθεση είναι συμμετρία. Η αρχική τροχιά q(t) και η μετασχηματισμένη τροχιά Q(T) παρουσιάζονται στο σχήμα 5.

Επομένως πρέπει να δείξουμε, ότι η δράση δεν μεταβάλλεται όταν πραγματοποιείται ένας τέτοιος μετασχηματισμός. Γράφουμε τη μετασχηματισμένη δράση ως συνάρτηση της αρχικής τροχιάς:

$$S(\varepsilon)=\int_{T_1}^{T_2} L(Q,dQ/dT)dT=\int_{T_1}^{T_2} L(q(T-\varepsilon),dq(T-\varepsilon)/dT)dT \qquad (1)$$

και αλλάζουμε την μεταβλητή ολοκλήρωσης από T→t .

Επειδή για τον μετασχηματισμό της χρονικής μετάθεσης είναι dT=dt και q(T-ε)=q(t), η δράση S(ε) γράφεται ως προς τη μεταβλητή t:

$$S(\varepsilon)=\int_{t_1}^{t_2} L(q(t),dq/dt)dt$$

αποδεικνύοντας την προφανή αναλλοιότητα της δράσης στις χρονικές μεταθέσεις.

Για να προσδιορίσουμε τη διατηρήσιμη ποσότητα υπολογίζουμε από την (1) την μεταβολή πρώτης τάξης της δράσης ως προς το ε. Η μεταβολή της δράσης προέρχεται από την εξάρτηση των ορίων ολοκλήρωσης από το ε και την εξάρτηση της ολοκληρωτέας ποσότητας από το ε. Συνεπώς:

$$\frac{\partial S(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}=\frac{\partial T_2}{\partial\varepsilon}L(q(T_2-\varepsilon),dq(T_2-\varepsilon)/dT)-\frac{\partial T_1}{\partial\varepsilon}L(q(T_1-\varepsilon),dq(T_1-\varepsilon)/dT)+\int_{T_1}^{T_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q}\frac{\partial q(T-\varepsilon)}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\frac{\partial\dot{q}(T-\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right]dt$$

Επειδή : $\frac{\partial q(T-\varepsilon)}{\partial\varepsilon}=-\frac{\partial q(T-\varepsilon)}{\partial T}$ και $\frac{\partial\dot{q}(T-\varepsilon)}{\partial\varepsilon}=\frac{\partial\dot{q}(T-\varepsilon)}{\partial T}=\frac{\partial^2 q(T-\varepsilon)}{\partial T}$, καθώς επίσης $dT=dt$ και $\frac{\partial T}{\partial\varepsilon}=1$, η μεταβολή της δράσης θα είναι:

$$\frac{\partial S(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}=L(q(t_2),dq(t_2)/dt)-L(q(t_1),dq(t_1)/dt)-\int_{T_1}^{T_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q}\frac{\partial q(T-\varepsilon)}{\partial T}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\frac{\partial^2 q(T-\varepsilon)}{\partial T}\right]dT$$

Αν η μεταβολή της δράσης υπολογισθεί για ε=0, τότε θα είναι:

$$\frac{\partial L}{\partial q}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\right)$$

και επειδή $\left.\frac{\partial S(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = L(q(t_2), dq(t_2)/dt) - L(q(t_1), dq(t_1)/dt) - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}\right)dt = \left.\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}\right)\right|_{t_1}^{t_2} = 0$

η ποσότητα $E(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L$ είναι χρονικά ανεξάρτητη άρα και διατηρήσιμη, δεδομένου ότι για οποιεσδήποτε χρονικές στιγμές t_1, t_2 δείξαμε ότι: $E(t_2)=E(t_1)$.

Αν η Λαγκρανζιανή είναι:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q),$$

τότε η διατηρήσιμη ποσότητα είναι η γνώριμη ενέργεια:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + V(q)$$

Επανερχόμαστε στη γενική περίπτωση. Για να προσδιορίσουμε τη δράση μιας φυσικής τροχιάς q(t) στις μετασχηματισμένες συντεταγμένες, υπολογίζουμε την δράση στις συντεταγμένες Q,T. Επειδή για κάθε βαθμό ελευθερίας ισχύει:

$$Q_i(q,t) = q_i(t) + \varepsilon K_i(q,t) \quad \text{και} \quad T(q,t) = t + \varepsilon\tau(q,t)$$

κρατώντας όρους πρώτης τάξης στο ε, έχουμε:

$$\dot{Q}_i = \left.\frac{dQ_i}{dt}\right|_T \left.\frac{dt}{dT}\right|_T \approx \left(\dot{q}_i(t) + \varepsilon\dot{K}_i\right)\left(1 - \varepsilon\dot{\tau}\right) \approx \dot{q}_i(t) + \varepsilon(\dot{K}_i - \dot{\tau}\dot{q}_i)$$

Αλλάζουμε τα όρια ολοκλήρωσης του δευτέρου ολοκληρώματος από T→t για να αποφύγουμε την εξάρτηση των ορίων από το ε και έχουμε σε πρώτη τάξη στο ε:

$$S = \int_{T_1}^{T_2} L(Q,\dot{Q},T)dT = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t) + \varepsilon K, \dot{q}(t) + \varepsilon(\dot{K} - \dot{\tau}\dot{q}), t + \varepsilon\tau)dt\left(1 + \varepsilon\dot{\tau}\right)$$

$$\approx S + \varepsilon\int_{t_1}^{t_2} G dt$$

όπου $G(t,\varepsilon) = \frac{\partial L}{\partial q_i}K_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(\dot{K}_i - \dot{\tau}\dot{q}_i\right) + \frac{\partial L}{\partial t}\tau + L\dot{\tau}$, οπότε $\left.\frac{\partial S(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} G(t,0)dt$.

Κάνοντας χρήση των εξισώσεων Euler-Lagrange που ισχύουν για την αρχική τροχιά και προσθαφαιρώντας τον όρο:

$$\sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i\tau + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q}\tau$$

η ολοκληρωτέα συνάρτηση γίνεται:

$$G(t,0) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}K_i + L\tau - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\tau\right) = \frac{dN}{dt}$$

όπου

$$N = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} K_i + L\tau - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \tau$$

Η απαίτηση της συμμετρίας συνεπάγεται ότι:

$$\varepsilon \int_{t_1}^{t_2} G dt = 0$$

και άρα $N(t_2) = N(t_1)$.

Επομένως, επειδή οι χρόνοι είναι αυθαίρετοι καταλήγουμε ότι η ποσότητα:

$$N = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} K_i + L\tau - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \tau \qquad (2)$$

διατηρείται κατά τη κίνηση.

Το θεώρημα της Noether σε αυτήν τη γενική μορφή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδειχθεί πως όταν η δράση είναι αναλλοίωτη στις χρονικές μεταθέσεις δηλαδή στους μετασχηματισμούς της μορφής:

$$Q_i(q,t) = q_i \text{ και } T(q,t) = t + \varepsilon$$

δηλαδή σε μετασχηματισμούς που δεν μετασχηματίζουν τις χωρικές συντεταγμένες της τροχιάς και απλώς τις μεταθέτουν χρονικά, οπότε ο χωρικός γεννήτορας είναι μηδενικός, K_i=0, και ο χρονικός γεννήτορας είναι σταθερός: τ=1 . Αντικαθιστώντας στην (2) προκύπτει ότι διατηρείται η ενέργεια του συστήματος:

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \qquad (3)$$

Δηλαδή *η ομογένεια του φυσικού συστήματος στο χρόνο συνεπάγεται τη διατήρηση της «ενέργειας» του συστήματος, η οποία ορίζεται από τη παραπάνω έκφραση* (3).

Η γενικευμένη ενέργεια που διατηρείται, ως απόρροια της χρονικής ομογένειας, δεν είναι πάντοτε το άθροισμα κινητικής και δυναμικής ενέργειας. Αν όμως η Λαγκρανζιανή έχει τη συνήθη μορφή, L=T-V, της διαφοράς μεταξύ κινητικής ενέργειας T και της δυναμικής ενέργειας V, η κινητική ενέργεια είναι μία τετραγωνική συνάρτηση των γενικευμένων ταχυτήτων, δηλαδή είναι της μορφής:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i M_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

και η δυναμική ενέργεια δεν εξαρτάται από τη ταχύτητα, τότε η γενικευμένη ενέργεια ταυτίζεται με το άθροισμα της κινητικής και δυναμικής ενέργειας.

Επειδή είναι σχεδόν αδιανόητο οι θεμελιώδεις νόμοι της φύσης να μην έχουν αιώνια ισχύ, αναμένουμε η Λαγκρανζιανή που περιγράφει τους θεμελιώδεις νόμους της φύσης να είναι ομογενής στο χρόνο και συνεπώς να ισχύει για όλα τα φυσικά φαινόμενα η αρχή της διατήρησης της ενέργειας.

Με παρόμοια επιχειρηματολογία οδηγούμαστε σε αντίστοιχα αποτελέσματα όταν εργαζόμαστε με την *Λαγκρανζιανή πυκνότητα ενός πεδίου*. Στην περίπτωση αυτή, οι συμμετρίες, οι μετασχηματισμοί των οποίων αφήνουν την Λαγκρανζιανή αμετάβλητη, συνεπάγονται την ύπαρξη διατηρούμενου ρεύματος $J^{\mu}(x)$. Η Λαγκρανζιανή αρκεί να είναι αναλλοίωτη κάτω από τον μετασχηματισμό $\varphi \to \varphi'$ μέχρι και την τετραπαραγώγιση:

$$\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(x) + a\vartheta_{\mu} J^{\mu}(x) \qquad \text{για κάποιο } J^{\mu} \qquad (4)$$

Αν εφαρμόσουμε ένα μετασχηματισμό της μορφής:

$$\phi \to \phi' = \phi + a\delta\phi$$

η αλλαγή στην Λαγκρανζιανή θα είναι ένας επιπλέον όρος:

$$a\delta\mathcal{L} = a\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + a\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\delta(\partial_{\mu}\phi)$$

Όμως η διαφορά των παραγώγων ισούται με την παράγωγο της διαφοράς:

$$\delta(\partial_{\mu}\phi) \equiv \partial_{\mu}\phi' - \partial_{\mu}\phi = \partial_{\mu}(\phi' - \phi) = \partial_{\mu}\delta\phi$$

κι έτσι η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$a\delta\mathcal{L} = a\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + a\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\partial_{\mu}(\delta\phi) \ldots\ldots = a\partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\delta\phi\right)$$

Τελικά μέσω της (4) προκύπτει:

$$a\partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\delta\phi\right) = a\partial_{\mu}J^{\mu} \Rightarrow a\partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\delta\phi - J^{\mu}(x)\right) = 0 \Rightarrow \partial_{\mu}j^{\mu}(x) = 0 \qquad (5)$$

όπου

$$j^{\mu}(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\delta\phi - J^{\mu}(x)$$

Το αποτέλεσμα αυτό υποδηλώνει ότι το ρεύμα j^{μ} διατηρείται. *Η (5) καλείται δεύτερο θεώρημα Noether και η ποσότητα j^{μ} ρεύμα Noether* [265]. Είναι φανερό πως η ύπαρξη του διατηρούμενου ρεύματος Noether, συνεπάγεται την ύπαρξη ενός διατηρούμενου φορτίου Noether, το οποίο ορίζεται ως:

$$Q = \int_{\chi\acute{\omega}\rho o} j^{\mu} d^3x$$

κι είναι σταθερό στο χρόνο.

4.3.4. Γενικές παρατηρήσεις

1. *Η γενικότερη συμμετρία της δράσης και διατηρούμενες ποσότητες*

   Σε διακριτά μηχανικά συστήματα, δηλαδή σε συστήματα που αποτελούνται από πεπερασμένο πλήθος σωματιδίων, το γενικό θεώρημα της Noether ορίζεται ως εξής: Εάν ένας απειροστός συνεχής μετασχηματισμός των χωροχρονικών συντεταγμένων ενός συστήματος με

γεννήτορες K_i (i=1,2,...N) των γενικευμένων συντεταγμένων και τ του χρόνου, αλλάζει τη δράση του συστήματος, το πολύ κατά το ολοκλήρωμα μιας τελείας χρονικής παραγώγου dG(q,t)/dt, τότε υπάρχει μια ποσότητα η οποία διατηρείται κατά την κίνηση του συστήματος. Αυτή είναι:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} K_i + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \tau - G$$

Η καινούργια αυτή ποσότητα G που αφαιρείται από τη διατηρούμενη ποσότητα που κατασκευάσαμε παραπάνω (2) είναι απλώς συνέπεια του γεγονότος ότι οι δυο δράσεις, πριν και μετά το μετασχηματισμό, δεν συμπίπτουν, αλλά διαφέρουν κατά το ολοκλήρωμα της τέλειας χρονικής παραγώγου dG/dt. Έτσι, η μεταβολή της δράσης, αντί να ισούται με τη μεταβολή της ποσότητας εντός των τετραγώνων αγκυλών της σχέσης (2), ισούται με τη μεταβολή της G. Εξισώνοντας αυτές τις δυο χρονικές παράγωγους, συμπεραίνουνε ότι η διαφορά των δυο ποσοτήτων είναι μια σταθερά.

2. *Θεώρημα της Noether και πεδία:*

   Το θεώρημα της Noether, όπως διατυπώθηκε από την ίδια, αναφέρεται σε πεδία και όχι σε διακριτά συστήματα. Η εφαρμογή του θεωρήματος σε πεδία οδηγεί σε συσχέτιση ομαδοθεωρητικών συμμετριών της δράσης πεδίων με αντίστοιχες διατηρούμενες ποσότητες, όπως για παράδειγμα η συμμετρία βαθμίδας U(1) του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, η οποία σχετίζεται με τη διατήρηση του ηλεκτρικού φορτίου. Η επέκταση της εφαρμογής του θεωρήματος της Noether σε διακριτά συστήματα είναι άμεση και οδηγεί με σχετικά απλό τρόπο στη σύνδεση των γνωστών από τη μηχανική διατηρούμενων ποσοτήτων με τις συμμετρίες του σύμπαντος, προσδίδοντας στις πρώτες κάποιο βαθύτερο νόημα.

3. *Θεώρημα της Noether και γενική σχετικότητα:*

   Αξίζει να αναφερθεί ότι η Noether, δουλεύοντας πάνω στο ομώνυμο θεώρημα, έδωσε απαντήσεις σε δύσκολα νοητικά προβλήματα που εμφανίστηκαν τα πρώτα χρόνια μετά το 1915, τη χρονιά που ο Hilbert και ο Αϊνστάιν, σχεδόν ταυτόχρονα, αλλά ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον, διατύπωσαν τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας. Παράδειγμα ενός τέτοιου προβλήματος ήταν η φαινόμενη μη διατήρηση τοπικά της ενέργειας και της ορμής. Η Noether όχι μόνο έδειξε πως θα πρέπει να αναδιατυπωθούν οι αντίστοιχοι νόμοι διατήρησης στη σχετικότητα, αλλά κατασκεύασε ακόμη ένα διαφωτιστικό, ανάλογο με τη σχετικότητα, παράδειγμα όπου η Νευτώνεια μορφή των νόμων διατήρησης δεν ίσχυε.

4. *Συνέπειες του θεωρήματος της Noether*

   - Το γεγονός ότι όλα τα φυσικά συστήματα είναι αναλλοίωτα σε μετατοπίσεις στον χρόνο έχει ως αποτέλεσμα την διατήρηση της ενέργειας.
   - Το γεγονός ότι τα φυσικά συστήματα είναι αναλλοίωτα σε μετατοπίσεις στον χώρο έχει ως αποτέλεσμα την διατήρηση της ορμής.

- Το γεγονός ότι τα φυσικά συστήματα είναι αναλλοίωτα σε περιστροφές στον χώρο έχει ως αποτέλεσμα την διατήρηση της στροφορμής.
- Έχουν βρεθεί οι συμμετρίες στις οποίες οφείλεται και η διατήρηση άλλων φυσικών μεγεθών όπως για παράδειγμα του ηλεκτρικού φορτίου, που οφείλεται στο γεγονός ότι η Λαγκρανζιανή παραμένει αναλλοίωτη σε αυθαίρετες μετατοπίσεις της φάσης των κυματοσυναρτήσεων των φορτισμένων σωματιδίων. Αυτό δεν σημαίνει όμως ότι η διατήρηση της ενέργειας πρέπει να δώσει την συμμετρία του χρόνου, δηλαδή την αντιστροφή του, αφού ένα σύστημα το οποίο ξεκινά με δεδομένη αρχική κινητική και δυναμική ενέργεια μπορεί να βρεθεί σε μια θέση με την ίδια μηχανική ενέργεια αλλά αντιστρέφοντας τον χρόνο με ελεύθερο το διάνυσμα της ταχύτητας μπορεί να βρεθεί σε άπειρες θέσεις με την ίδια μηχανική ενέργεια την οποία είχε στην αρχή και όχι απαραίτητα μόνο στην αρχική του θέση.

4.4. Λαγκρανζιανός φορμαλισμός και κανονική κβάντωση

Θα δούμε εδώ πως ο Λαγκρανζιανός φορμαλισμός που αναπτύχθηκε στις προηγούμενες παραγράφους μας προσφέρει το κατάλληλο πλαίσιο για την κβάντωση ενός τυχόντος κλασσικού συστήματος που επιδέχεται Λαγκρανζιανή περιγραφή. Αφετηρία μας θα είναι οι θεμελιώδεις μεταθετικές σχέσεις μεταξύ των συνιστωσών της θέσης x_i και της ορμής p_i ενός σωματιδίου οι οποίες αποτελούν το θεμέλιο της κβαντικής περιγραφής της κίνησής του. Υπενθυμίζουμε ότι:

$$[x_i, p_j] = i\delta_{ij} \text{ και } [x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0 \qquad (1)$$

όπου θέσαμε ħ=1 στην πρώτη σχέση.

Η κανονική κβάντωση δεν είναι τίποτα άλλο παρά η εύλογη ιδέα να επεκτείνουμε τις σχέσεις (1) σε ένα τυχόν σύστημα αντιστοιχίζοντας τις συντεταγμένες x_j με τις γενικευμένες συντεταγμένες q_j και τις συνήθεις ορμές p_i με τις γενικευμένες ορμές $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$.

Η κβάντωση του συστήματος συνίσταται τότε στην προαγωγή των βασικών μεγεθών q_j και p_j σε τελεστές [256, 257] που θα ικανοποιούν τις θεμελιώδεις μεταθετικές σχέσεις (1). Σε τελεστές θα προαχθούν και όλα τα άλλα φυσικά μεγέθη τα οποία είναι συναρτήσεις των q_j και p_j. Για παράδειγμα, η Χαμιλτονιανή θα περιγράφεται από τον τελεστή:

$$H = p_j \dot{q}_j - L(p_i, \dot{q}_i)$$

στον οποίο οι παράγωγοι $\dot{q}_j$ θα πρέπει να εκφραστούν συναρτήσει των βασικών ποσοτήτων q_j και p_j. Αυτό είναι καταρχήν δυνατόν βάσει της σχέσης που ορίζει τις γενικευμένες ορμές:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = F(q_j, \dot{q}_j) \qquad (2)$$

Με αυτόν τον τρόπο η Χαμιλτονιανή θα γραφεί σαν συνάρτηση των συντεταγμένων και των ορμών $H=H(q_j,p_j)$. Η συγκεκριμένη μορφή του τελεστή Η θα καθοριστεί από την αναπαράσταση που έχουμε διαλέξει για τα q_j, p_j. Στην αναπαράσταση της θέσης, τα q_j, δρουν πολλαπλασιαστικά και τα p_j ως παραγωγίσεις, ενώ στην αναπαράσταση της ορμής γίνεται το αντίθετο.

Μια τελευταία σημαντική παρατήρηση αφορά στη χρήση της αναπαράστασης Schrodinger όπου οι τελεστές είναι ανεξάρτητοι του χρόνου και η χρονική εξέλιξη δίνεται από τις κυματοσυναρτήσεις ή την αναπαράσταση Heisenberg όπου οι τελεστές μεταβάλλονται και οι κυματοσυναρτήσεις είναι ανεξάρτητες του χρόνου. Οι θεμελιώδεις μεταθετικές σχέσεις και για τους τελεστές Heisenberg $q_j(t)$ και $p_j(t)$ υπό τον όρο ότι αναφέρονται την ίδια χρονική στιγμή. Δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις:

$$q_i(t), p_j(t) = i\delta_{ij} \text{ και } [q_i(t), q_j(t)] = [p_i(t), p_j(t)] = 0 \qquad (3)$$

Οι σχέσεις αυτές είναι γνωστές ως ισόχρονες μεταθετικές σχέσεις και ισχύουν μόνο εφόσον οι δύο τελεστές του μεταθέτη έχουν κοινή χρονική μεταβλητή. Η ισχύς των (3) είναι προφανής αν θυμηθούμε ότι οι τελεστές Heisenberg συνδέονται με τους τελεστές Schrodinger με ένα μοναδιαίο μετασχηματισμό κάτω από τον οποίο όλες οι μεταθετικές σχέσεις διατηρούν την μορφή τους.

Η γενίκευση των παραπάνω σε ένα Λαγκρανζιανό σύστημα με συνεχές πλήθος βαθμών ελευθερίας, δηλαδή σε μια Λαγκρανζιανή θεωρία πεδίου είναι τελείως άμεση αρκεί να ανακαλέσουμε την αντιστοιχία:

$$q_i(t) \equiv q(i,t) \to u(x,t) \qquad p_j(t) \equiv p(j,t) \to \pi(x,t)$$

$$i \to x, q \to u \qquad j \to x, p \to \pi$$

όπου π(x,t) είναι η συζυγής ορμή του πεδίου u(x,t) η οποία έχει οριστεί μέσω της σχέσης:

$$\pi(x,t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}}$$

που είναι το συνεχές ανάλογο της $p_j = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$.

Αν στα παραπάνω προστεθεί ότι το συνεχές ανάλογο του συμβόλου του Kronecker δ_{ij} είναι η συνάρτηση $\delta(x-x')$, τότε η γενίκευση των παραπάνω ισόχρονων μεταβατικών σχέσεων για ένα συνεχές πεδίο θα έχουν ως εξής:

$$[u(x,t), u(x',t)] = [\pi(x,t), \pi(x',t)] = 0 \text{ και } [u(x,t), \pi(x',t)] = i\delta(x-x') \qquad (4)$$

Η κβάντωση ενός κλασσικού πεδίου συνίσταται λοιπόν στην προαγωγή της πεδιακής ποσότητας u(x,t) σε έναν τελεστή οριζόμενο σε όλα τα σημεία του χώρου και του χρόνου. Ένα τελεστικό πεδίο δηλαδή, του οποίου ο τελεστικός χαρακτήρας ορίζεται από τις μεταθετικές σχέσεις (4). Στις επόμενες παραγράφους θα δούμε ότι τα κβαντικά πεδία που προκύπτουν με αυτόν τον μαθηματικό μηχανισμό είναι πραγματικά κβαντισμένα με τη φυσική σημασία του

όρου. Η ενέργεια και η ορμή τους μεταφέρεται από κβάντα που δεν είναι παρά σωματίδια που υπόκεινται στην αρχή του κυματοσωματιδιακού δυισμού.

4.4.1. Η κβάντωση του πεδίου Klein-Gordon

Α. Ο αρμονικός ταλαντωτής ως μια θεωρία πεδίου

Ένα προκαταρκτικό παράδειγμα είναι ο αρμονικός ταλαντωτής ως μια θεωρία πεδίου σε ένα σημείο. Σκοπός αυτής της προκαταρκτικής εισαγωγής είναι να παρουσιαστεί η αλγεβρική θεωρία του αρμονικού ταλαντωτή με έναν τρόπο κατάλληλο με εκείνον που θα ακολουθήσουμε στη συνέχεια για την κβάντωση του πεδίου Klein-Gordon. Όπως και για την κβάντωση ενός τυχόντος Λαγκρανζιανού συστήματος το σημείο εκκίνησης θα είναι η Λαγκρανζιανή του ταλαντωτή:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \qquad (5)$$

Για την ανάπτυξη που θα ακολουθήσει θέτουμε m=1 αλλά κρατάμε το ω όπως είναι για να έχουμε την ευχέρεια να εξετάσουμε συστήματα πολλών αρμονικών ταλαντωτών με διαφορετικές συχνότητες που δεν μπορούν να γίνουν μονάδα, οπότε προκύπτει:

$$L = \frac{1}{2} \dot{x}^2 - \frac{1}{2} \omega^2 x^2 \qquad (6)$$

που είναι μια μορφή ανάλογη της Λαγκρανζιανής πυκνότητας του πεδίου Klein-Gordon:

$$L = \frac{1}{2} \varphi_t^{\,2} - \frac{1}{2} \varphi_x^{\,2} - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \qquad (7)$$

με το φ(x,t) στη θέση του x(t), το m στη θέση του ω και την αυτονόητη απουσία από την (5) του όρου $\varphi^2{}_x$ αφού το x(t) δεν έχει χωρική εξάρτηση. Δηλαδή είναι ένα πεδίο ορισμένο σε ένα σημείο του χώρου.

Η συζυγής ορμή p(t) θα ισούται με $p = \partial L / \partial \dot{x}$ και η κανονική κβάντωση του συστήματος συνίσταται στο να επιβάλουμε τους τελεστές Heisenberg x(t) και p(t) στην ισόχρονη μεταθετική σχέση (3).

Β. Το κβαντωμένο πεδίο Klein-Gordon και η φυσική του ερμηνεία

Στην παράγραφο αυτή θα προχωρήσουμε στη λεγόμενη δεύτερη κβάντωση της εξίσωσης Klein-Gordon από την οποία θα προκύψει μια συνεπής σχετικιστική θεωρία των σωματιδίων με σπιν μηδέν [266]. Έχουμε τονίσει προηγουμένως ότι η μαθηματική διαδικασία της κβάντωσης ενός πεδίου συνίσταται στην προαγωγή του πεδιακού μεγέθους φ=φ(x,t) σε ένα τελεστικό πεδίο που θα υπακούει στις ισόχρονες μεταθετικές σχέσεις (4). Θα

κατασκευάσουμε τις κβαντικές καταστάσεις, θα μελετήσουμε τις ιδιότητές τους και θα αποδείξουμε ότι τα σωματίδια Klein-Gordon είναι μποζόνια.

Αφετηρία είναι η θεμελιώδης κατάσταση της Χαμιλτονιανής του πεδίου που συμβολίζεται πάντα ως $|0\rangle$ ονομάζεται κατάσταση κενού. Το κενό χαρακτηρίζεται μονοσήμαντα από τη συνθήκη:

$$a_k|0\rangle = 0 \text{ για κάθε k,}$$

που εκφράζει το γεγονός ότι είναι η χαμηλότερη ενεργειακή κατάσταση του συστήματος και επομένως η δράση όλων των τελεστών καταστροφής a_κ θα πρέπει να την μηδενίζει αφού δεν είναι δυνατόν να μεταβούμε σε μια κατάσταση ακόμη χαμηλότερης ενέργειας. Η κατάσταση:

$$|k\rangle = a_k^+|0\rangle \text{ για κάθε κ}$$

που προκύπτει από το κενό με τη δράση του τελεστή δημιουργίας a_k^+, είναι η κατάσταση ενός σωματιδίου με ορμή ίση με k και ενέργεια ίση με:

$$\omega_k = E_k = \sqrt{k^2 + m^2}$$

Επομένως, στη νέα θεώρηση, τα σωματίδια είναι κβάντα του πεδίου $(a, a^\dagger)$, που προκύπτουν από διεγέρσεις στην κατάσταση του κενού $|0\rangle$. Έστω ότι το πεδίο φ(x) είναι ένας ερμιτιανός τελεστής, του οποίου το ανάπτυγμα Fourier είναι:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}[a(k)e^{-ikx} + a^\dagger(k)e^{ikx}] \qquad (1)$$

όπου $\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}$ και οι συντελεστές $a(k)$, $a^\dagger(k)$ είναι οι τελεστές καταστροφής και δημιουργίας. *Οι ποσότητες μέσα στο ολοκλήρωμα του αναπτύγματος δίνουν μια σχετικιστικά αναλλοίωτη έκφραση*. Η εξήγηση δίνεται αμέσως παρακάτω:

Για το πεδίο Klein-Gordon έχουμε τη συνθήκη $k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2 = m^2$, άρα για τις θετικές ενέργειες $(k_0 > 0)$, ένα αναλλοίωτο στοιχείο του χώρου φάσεων θα είναι:

$$\frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi\delta(k^2 - m^2)\theta(k_0) = \frac{d^4k}{(2\pi)^3}\delta(k_0^2 - \omega_k^2)\theta(k_0) =$$

$$= \frac{d^4k}{(2\pi)^3}\delta[(k_0 + \omega_k)(k_0 - \omega_k)]\theta(k_0)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνάρτησης δ:

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x)|_{x_i}}\sum_i \delta(x - x_i)$$

όπου x_i οι ρίζες της f(x), η τελευταία ισότητα γράφεται:

$$\frac{d^4k}{(2\pi)^3}\delta[(k_0 + \omega_k)(k_0 - \omega_k)]\theta(k_0) = \frac{d^4k}{(2\pi)^3}\cdot\frac{1}{2k_0}[\delta(k_0 + \omega_k) + \delta(k_0 - \omega_k)]\theta(k_0) = \frac{d^3k dk_0}{(2\pi)^3 2k_0}\delta(k_0 - \omega_k)$$

Η ολοκλήρωση ως προς τη χρονική συνιστώσα δίνει:

$$\int \frac{dk_0}{2k_0}\delta(k_0-\omega_k)=\frac{1}{2\omega_k}$$

Καταλήγουμε στην ισοδύναμη σχετικιστικά αναλλοίωτη έκφραση:

$$\frac{d^4k}{(2\pi)^4}2\pi\delta(k^2-m^2)\theta(k_0)=\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}$$

Τώρα θα ορίσουμε τις μεταθετικές σχέσεις στις οποίες υπακούν οι κβαντικοί τελεστές. Οι βασικές μεταθετικές σχέσεις είναι οι:

$$[x_i,p_j]=i\delta_{ij} \text{ και } [x_i,x_j]=[p_i,p_j]=0$$

όπου η ορμή p_i ορίζεται ως:

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

και τα $\vec{x},\vec{p}$ αναφέρονται στην ορμή και τη θέση του σωματιδίου μετρούμενα την ίδια χρονική στιγμή. Στη θεωρία του βαθμωτού πεδίου, η $\phi(\vec{x},t)$ παίζει ανάλογο ρόλο με το $\vec{x}(t)$ και περιγράφει ένα σύστημα με άπειρους βαθμούς ελευθερίας. Γνωρίζοντας ότι:

$$\pi(x,t)=\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}(x,t)}$$

οι μεταθετικές σχέσεις του Heisenberg επεκτείνονται στις:

$$[\phi(\vec{x},t),\pi(\vec{x}',t)]=i\delta(\vec{x}-\vec{x}') \text{ και } [\phi(\vec{x},t),\phi(\vec{x}',t)]=[\pi(\vec{x},t),\pi(\vec{x}',t)=0 \ , \qquad (2)$$

που ισχύουν πάντα για ίδιους χρόνους και είναι γνωστές ως Equal Time Commutation Relations.

Στη συνέχεια *θα βρούμε τις μεταθετικές σχέσεις μεταξύ των τελεστών* $a,a^\dagger$. Παρατηρούμε ότι οι λύσεις θετικής ενέργειας:

$$f_k(x)=\frac{1}{[(2\pi)^3 2\omega_k]^{1/2}}e^{-ikx}$$

σχηματίζουν το ορθοκανονικό σύνολο:

$$\int[f_k^*(x)i\partial_0 f_{k'}(x)-\partial_0 f_k^*(x)f_{k'}(x)]d^3x=\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i(\vec{k}-\vec{k}')x}d^3x=\delta^3(\vec{k}-\vec{k}')$$

Το πεδίο γίνεται τώρα:

$$\phi(x)=\int\frac{d^3k}{[(2\pi)^3 2\omega_k]}\left[f_k(x)a(k)+f_k^*(x)a^\dagger(k)\right]$$

Για να βρούμε τις εκφράσεις των τελεστών $a,a^\dagger$ εκτελούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier:

$$\int d^3x e^{i\vec{p}\vec{x}}\phi(\vec{x},t)=\int \frac{d^3k}{[(2\pi)^3 2\omega_k]}\int d^3x e^{i(\vec{p}-\vec{k})\vec{x}}\left[e^{ik_0x_0}a^\dagger(k)+e^{-ik_0x_0}a(k)\right]=\frac{1}{2\omega_p}\left[e^{ik_0x_0}a^\dagger(k)+e^{-ik_0x_0}a(k)\right]$$

Εφαρμόζουμε αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier στην $\partial_0\phi(x)$, για να λύσουμε ως προς $a, a^\dagger$, εφόσον η παράγωγος δεν έχει γραμμική εξάρτηση με την αρχική συνάρτηση:

$$\partial_0\phi(x)=\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\left[(-ik_0)a(k)e^{-ikx}+ik_0a^\dagger(k)e^{ikx}\right]\Rightarrow$$

$$\int d^3x e^{e\vec{p}\vec{x}}\partial_0\phi(\vec{x},t)=\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\int d^3x e^{i(\vec{p}-\vec{k})\vec{x}}\left[(-ik_0)e^{-ik_0x_0}a(k)+ik_0e^{ik_0x_0}a^\dagger(k)\right]=$$

$$=\frac{i}{2}\left[e^{ik_0x_0}a^\dagger(k)-e^{-ik_0x_0}a(k)\right]$$

Λύνοντας ως προς a και $a^\dagger$ παίρνουμε:

$$a(k)=\int d^3x[(2\pi)^3 2\omega_k]^{1/2} f_k^*(x)i\overleftrightarrow{\partial}_0\phi(x)$$

$$a^\dagger(k)=\int d^3x[(2\pi)^3 2\omega_k]^{1/2}\phi(x)i\overleftrightarrow{\partial}_0 f_k(x)$$

Ο μεταθέτης των a και $a^\dagger$ βρίσκουμε ότι είναι:

$$[a(k),a^\dagger(k')]=(2\pi)^3 2\omega_\kappa\delta^3(\vec{k}-\vec{k}') \quad \text{και} \quad [a(k),a(k')]=[a^\dagger(k),a^\dagger(k')]=0$$

Κατασκευάζουμε τον τελεστή:

$$N(k)=\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k}a^\dagger(k)a(k)$$

Χρησιμοποιώντας τις μεταθετικές σχέσεις βρίσκουμε ότι:

$$[N(k),N(k')]=\frac{1}{(2\pi)^6 4\omega_k\omega_{k'}}[a^\dagger(k)a(k),a^\dagger(k')a(k')]=$$

$$=a^\dagger(k)a(k)-a^\dagger(k)a(k)=0\,.$$

Επίσης αποδεικνύονται οι παρακάτω σχέσεις:

$$[N(k),a^\dagger(k)]=\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k}[a^\dagger(k)a(k)a^\dagger(k)-a^\dagger(k)a^\dagger(k)a(k)]=a^\dagger(k)$$

και

$$[N(k),a(k)]=\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k}[a^\dagger(k)a(k)a(k)-a(k)a^\dagger(k)a(k)]=-a(k)$$

Άρα ισχύει ότι:

$$N(k)a^\dagger(k)\,|\,n(k)\rangle=a^\dagger(k)N(k)\,|\,n(k)\rangle+a^\dagger(k)\,|\,n(k)\rangle=$$

$$=[n(k)+1]a^\dagger(k)\,|\,n(k)\rangle$$

και

$$N(k)a(k)\,|\,n(k)\rangle=a(k)N(k)\,|\,n(k)\rangle-a(k)\,|\,n(k)\rangle=$$

$$=[n(k)-1]a(k)\,|\,n(k)\rangle$$

Αυτές οι εξισώσεις δείχνουν ότι εάν η $|n(k)>$ έχει ιδιοτιμή $n(k)$, τότε οι καταστάσεις $a^{\dagger}(k)|n(k)\rangle$ και $a(k)|n(k)\rangle$ είναι ιδιοκαταστάσεις του $N(k)$ με αντίστοιχες ιδιοτιμές $n(k)+1$ και $n(k)-1$. Όμως, το ιδιοδιάνυσμα του $N(k)$ με ιδιοτιμή $n(k)-1$ είναι το $|n(k)-1\rangle$ αφού:

$$[N(k)-1]|n(k)-1\rangle=[n(k)-1]|n(k)-1\rangle$$

και ομοίως για $n(k)+1$. Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα $a(k)|n(k)>$ είναι η κατάσταση $|n(k)-1\rangle$, και μάλιστα αφού:

$$\|a(k)|n(k)\rangle\|=\langle n(k)|a^{\dagger}(k)a(k)|n(k)\rangle=n(k)(2\pi)^3 2\omega_k$$

θα ισχύει

$$a(k)|n(k)\rangle=\sqrt{n}\ \ [(2\pi)^3 2\omega_k]^{1/2}\,|n(k)-1\rangle$$

Με την ίδια σκέψη καταλήγουμε για τον τελεστή $a^{\dagger}$:

$$a^{\dagger}(k)|n(k)\rangle=\sqrt{n+1}\ \ [(2\pi)^3 2\omega_k]^{1/2}\,|n(k)+1\rangle\,.$$

Ο τελεστής N(k) έχει άμεση σχέση με τον αριθμό των σωματιδίων του συστήματος και ονομάζεται τελεστής αριθμού σωματιδίων ή τελεστής πυκνότητας σωματιδίων. Αυτό φαίνεται αν αντικαταστήσουμε το ανάπτυγμα της φ(x) (2) στην Χαμιλτονιανή, οπότε καταλήγουμε σε:

$$H=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0}\frac{k_0}{2}[a^{\dagger}(k)a(k)+a(k)a^{\dagger}(k)]=$$

$$=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2}(2\pi)2k_0\left(N(k)+\frac{1}{2}\right)\Rightarrow$$

$$H=\int d^3k k_0\left(N(k)+\frac{1}{2}\right)$$

όπου $(k_0=\omega_k)$, και ομοίως η ορμή του πεδίου είναι:

$$\vec{P}=\int d^3k\vec{k}=\left(N(k)+\frac{1}{2}\right)$$

Οι εκφράσεις αυτές δείχνουν ότι ο τελεστής N αφορά τον αριθμό των σωματιδίων του συστήματος με ορμή $\vec{k}$ και ενέργεια k_0. Για να αποτρέψουμε το $N(k)$ να γίνει αρνητικό θα πρέπει να ορίσουμε μια βασική κατάσταση $|0\rangle$ στην οποία θα ισχύει

$$a(k)|0\rangle=0$$

και συνεπώς

$$N(k)|0\rangle=a^{\dagger}(k)a(k)|0\rangle=0\,.$$

Η κατάσταση $|0\rangle$ είναι ακριβώς η κατάσταση απουσίας σωματιδίων οποιασδήποτε ορμής, δηλαδή η κατάσταση του κενού. Οι τελεστές $a(k)$ και $a^{\dagger}(k)$ όταν επιδρούν πάνω στις ιδιοκαταστάσεις του τελεστή N, αφαιρούν ή προσθέτουν αντίστοιχα ένα σωματίδιο με 4-ορμή

k. *Έτσι γίνεται κατανοητή η νέα περιγραφή που δίνει η Κβαντική Θεωρία Πεδίου στις σωματιδιακές καταστάσεις* [267].

Συγκεκριμένα θεωρώντας τις συζυγείς κανονικές μεταβλητές:

$$P(k) = \left(\frac{\omega_k}{2}\right)^{1/2} [a(k) + a^\dagger(k)]$$

$$Q(k) = \frac{i}{(2\omega_k)^{1/2}} [a(k) - a^\dagger(k)]$$

η Χαμιλτονιανή παίρνει την μορφή:

$$H = \int d^3k \left[\frac{1}{2} P^2(k) + \frac{\omega_k^2}{2} Q^2(k)\right]$$

που είναι ακριβώς η Χαμιλτονιανή του κβαντικού αρμονικού ταλαντωτή. *Δηλαδή μπορούμε να προσεγγίσουμε το πεδίο Klein-Gordon με ένα άθροισμα άπειρων κβαντικών ταλαντωτών.*

Εφόσον ο τελεστής $N(k)$ έχει μη αρνητικές ιδιοτιμές, η ενέργεια του πεδίου, όπως φαίνεται από τη μορφή της Χαμιλτονιανής θα είναι και αυτή μη αρνητική. Επειδή στην ενέργεια του κενού συνεισφέρουν οι ενέργειες της βασικής κατάστασης όλων των άπειρων κβαντικών ταλαντωτών, μπορούμε να αφαιρέσουμε από την Χαμιλτονιανή τον όρο $\frac{1}{2}\int d^3k\omega_k$ και να την ορίσουμε ως:

$$H = \int d^3k \omega_k N(k)$$

όπου είναι

$$\langle 0 | H | 0 \rangle = \int d^3k k_0 \langle 0 | a^\dagger(k) a(k) | 0 \rangle = 0 .$$

Αυτό είναι ισοδύναμο με το να γράψουμε όλους τους τελεστές καταστροφής δεξιά από τους τελεστές δημιουργίας σε μια έκφραση. Η μέθοδος αυτή ονομάζεται κανονική διάταξη. Για να καταλάβουμε πως λειτουργεί η κανονική διάταξη θα σπάσουμε το φ σε συνιστώσες θετικής ενέργειας και αρνητικής ενέργειας. Αυτές ορίζονται ως:

$$\phi(x) = \phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x)$$

όπου

$$\phi^{(+)}(x) = \int \frac{d^3k}{[(2\pi)^3 2\omega_k]^{1/2}} a(k) f_k(x) \quad \text{και} \quad \phi^{(-)}(x) = \int \frac{d^3k}{[(2\pi)^3 2\omega_k]^{1/2}} a^\dagger(k) f_k^*(x) ,$$

οπότε θα είναι

$$:\phi(x)\phi(y): = \phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(y)\phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(y)$$

δηλαδή όλα τα a μπαίνουν δεξιά των $a^\dagger$.

Στη συνέχεια θα δούμε τι είδους σωματίδια περιγράφουν τα κβάντα αυτού του πεδίου Klein-Gordon. Ο τελεστής $a^\dagger$ δημιουργεί ένα σωμάτιο ορμής k:

$$a^{\dagger}(k)\,|\,n(k)\rangle = \sqrt{n+1}[(2\pi)^3 2\omega_k]^{1/2}\,|\,n(k)+1\rangle$$

ή πιο συγκεκριμένα για σωματίδια διαφόρων ορμών:

$$a^{\dagger}(k_i)\,|\,n(k_1), n(k_2), \ldots n(k_i), \ldots\rangle = \sqrt{n(k_i)+1}[(2\pi)^3 2\omega_{k_i}]^{1/2}\,|\,n(k_1), n(k_2), \ldots n(k_i)+1, \ldots\rangle$$

Ομοίως για τον τελεστή καταστροφής έχουμε:

$$a(k_i)\,|\,n(k_1), n(k_2), \ldots n(k_i), \ldots\rangle = \sqrt{n(k_i)}[(2\pi)^3 2\omega_{k_i}]^{1/2}\,|\,n(k_1), n(k_2), \ldots n(k_i)-1, \ldots\rangle$$

Με την ερμηνεία που έχουμε δώσει στον τελεστή δημιουργίας, η κατάσταση n σωματιδίων με ορμή k θα είναι:

$$|\,n(k)\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}[(2\pi)^3 2\omega_{k_i}]^{n/2}}[a^{\dagger}(k)]^n\,|\,0\rangle\ .$$

Γενικεύοντας, μια τυχαία κανονικοποιημένη κατάσταση με $n(k_1)$ σωματίδια ορμής k_1, $n(k_2)$ σωματίδια ορμής k_2 κ.ο.κ. θα έχουμε:

$$|\,n(k_1), n(k_2), \ldots\rangle = \prod_i \left\{ \frac{1}{\sqrt{n(k_i)!}[(2\pi)^3 2\omega_{k_i}]^{n(k_i)/2}}[a^{\dagger}(k_i)]^{n(k_i)} \right\} |\,0\rangle$$

Δηλαδή δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός στον αριθμό n(k). Ο παρανομαστής προκύπτει από την κανονικοποίηση. Το γινόμενο δίνει τελεστές δημιουργίας που δρώντας στην κατάσταση κενού δημιουργούν σωματίδια συγκεκριμένης ορμής k_i. Η δύναμη του $a^{\dagger}$ προκύπτει από το γεγονός ότι θέλουμε να δημιουργήσουμε έναν αριθμό σωματιδίων n σε κάθε κατάσταση συγκεκριμένης ορμής. *Το πεδίο Klein-Gordon περιγράφει μποζόνια αφού μπορούμε στην κάθε κατάσταση ορμής να κατασκευάσουμε οποιουδήποτε αριθμό σωματιδίων* [268].

Τώρα θα δούμε *κατά πόσο οι μεταθετικές σχέσεις που χρησιμοποιήσαμε για το πεδίο Klein-Gordon είναι αναλλοίωτες*. Με μια πρώτη ματιά βλέπουμε ότι οι σχέσεις (2) δεν είναι γραμμένες σε αναλλοίωτη κατά Lorentz μορφή, αφού ο χρόνος αντιμετωπίζεται απλά ως μια παράμετρος κι όχι σαν διάσταση με τις χωρικές μεταβλητές.

Θεωρούμε το πραγματικό πεδίο Klein-Gordon σαν άθροισμα θετικών και αρνητικών συχνοτήτων:

$$\phi(x) = \phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x)$$

όπου ο τελεστής a εμφανίζεται στη συνιστώσα θετικής συχνότητας και ο $a^{\dagger}$ στη συνιστώσα αρνητικής συχνότητας. Δηλαδή

$$\phi^{(+)} \to a \quad \text{και} \quad \phi^{(-)} \to a^{\dagger}$$

Θεωρούμε τώρα το γενικό μεταθέτη σε διαφορετικά χωροχρονικά σημεία:

$$[\phi(x), \phi(y)] = \phi(x)\phi(y) - \phi(y)\phi(x) =$$

$$= [\phi^{(+)}(x), \phi^{(+)}(y)] + [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] + [\phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}(y)] + [\phi^{(-)}(x), \phi^{(-)}(y)]$$

Λόγω των σχέσεων

$$[a(k), a^{\dagger}(k')] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$$

$$[a(k), a^{\dagger}(k')] = [a^{\dagger}(k), a^{\dagger}(k')] = 0$$

μόνο οι δύο από τους 4 μεταθέτες, είναι μη μηδενικοί.

Ισχύει ότι

$$[\phi(x), \phi(y)] = [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] + [\phi^{(+)}(x), \phi^{(+)}(y)]$$

οπότε έχουμε

$$[\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] = \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6 4\omega_k \omega_{k'}} [a(k), a^{\dagger}(k')] e^{-ikx+ik'y} =$$

$$= \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6 4\omega_k \omega_{k'}} (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')] e^{-ikx+ik'y} =$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{-ik)(x-y)}$$

Ομοίως είναι:

$$[\phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}(y)] = \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6 4\omega_k \omega_{k'}} [a^{\dagger}(k'), a(k)] e^{ik'x+iky} =$$

$$= -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{-ik)(x-y)}$$

Ορίζουμε την συνάρτηση:

$$\Delta^{(+)}(x) = -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{-ikx}$$

οπότε θα είναι

$$[\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] = -i\Delta^{(+)}(x-y) \quad \text{και} \quad [\phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}(y)] = -i\Delta^{(+)}(x-y) \equiv i\Delta^{(-)}(x-y)$$

Τελικά προκύπτει:

$$[\phi(x), \phi(y)] = i[\Delta^{(+)}(x-y) + \Delta^{(-)}(x-y)] \equiv \Delta(x-y)$$

όπου

$$\Delta(x-y) = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega_k} \sin k(x-y) \, .$$

Η συνάρτηση $\Delta(x-y)$ έχει τις εξής ιδιότητες:

- Είναι περιττή, αφού περιέχει το ημίτονο που είναι περιττή συνάρτηση
- Ικανοποιεί την εξίσωση Klein-Gordon

Θα δείξουμε ότι ισχύει:

$$(\varphi_x + m^2)\Delta(x - \psi) = 0$$

Θεωρούμε τον τελεστή k_x, όπου προφανώς θα ισχύει:

$$k_x \phi^{(+)}(x) \neq 0 \quad \text{και} \quad k_x \phi^{(-)}(y) = 0$$

Εφόσον ισχύει:

$$\Delta(x-y) = -i[\phi(x),\phi(y)] = -i\{[\phi^{(+)}(x),\phi^{(-)}(y)] + [\phi^{(-)}(x),\phi^{(+)}(y)]\}$$

θα δράσουμε με αυτόν τον τελεστή στους μεταθέτες:

$$[\phi^{(+)}(x),\phi^{(-)}(y)] \qquad \text{και} \qquad [\phi^{(-)}(x),\phi^{(+)}(y)]$$

Ισχύει ότι:

$$k_x\phi^{(+)}(x) = (\partial_0^2 - \nabla^2)\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} a(k)e^{-ikx} =$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0}(-k_0^2 + \vec{k}^2)a(k)e^{-ikx}$$

Άρα θα είναι:

$$k_x[\phi^{(+)}(x),\phi^{(-)}(y)] = [k_x\phi^{(+)}(x),\phi^{(-)}(y)] =$$

$$= -(k_0^2 - \vec{k}^2)\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} e^{-ikz}$$

Ομοίως, ισχύει ότι:

$$k_x\phi^{(-)}(x) = (\partial_0^2 - \nabla^2)\int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2k_0'} a\dagger(k')e^{ik'x} =$$

$$= \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2k_0'}(-k_0'^2 + \vec{k}'^2)e^{ik'x}$$

Άρα επίσης θα είναι:

$$k_x[\phi^{(-)}(x),\phi^{(+)}(y)] = [k_x\phi^{(-)}(x),\phi^{(+)}(y)] =$$

$$= (k_0^2 + \vec{k}^2)\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} e^{ikz}$$

όπου $z = x - y$.

Τελικά προκύπτει ότι:

$$k_x[\varphi(x),\varphi(\psi)] = [-(k_0^2 - \vec{k}^2) + (k_0^2 - \vec{k}^2)]\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} e^{-ikxz} = 0$$

Σκοπός μας ήταν να αποδείξουμε ότι οι μεταθετικές σχέσεις του πεδίου Klein-Gordon έχουν αναλλοίωτη μορφή. Τώρα θα δείξουμε ότι αυτό πράγματι ισχύει, καθώς η συνάρτηση $\Delta(x-y)$ μπορεί να πάρει μορφή, η οποία να είναι αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς Lorentz.

$$\Delta(x-y) = \Delta(z) = -i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}(e^{-ikz} - e^{ikz}) =$$

$$= -i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\varepsilon(k)_0[\delta(k_0 - \omega_k) + \delta(k_0 + \omega_k)]e^{-ikz}$$

Από την ιδιότητα της συνάρτησης δ έχουμε:

$$\delta(f(x) - f(x_0)) = \frac{1}{|f'(x_0)|}\sum_i \delta(x - x_i) \Rightarrow$$

$$= \delta(k_0^2 - \omega_k^2) = \delta(k^2 - m^2)$$

Άρα καταλήγουμε στην μορφή:

$$\Delta(x-y) = -i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^3}\varepsilon(k_0)\delta(k^2-m^2)e^{-ik(x-y)}$$

Παρατηρούμε επίσης, ότι για τους ίδιους χρόνους ισχύει:

$$[\phi(\vec{x},t),\phi(\vec{y},t)] = i\Delta(\vec{x}-\vec{y},0) = 0$$

αφού θα είναι:

$$\Delta(x-y) = -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\sin[-\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})] = 0$$

λόγω του ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι περιττή. Το συμπέρασμα αυτό έχει μεγάλη σημασία, καθώς ο μηδενισμός αυτού του μεταθέτη για ίσους χρόνους, σημαίνει ότι τα δύο πεδία δεν αλληλεπιδρούν.

Τελειώνουμε με την έννοια του *διαδότη Feynman ή απλά διαδότη του βαθμωτού πεδίου.* Το

$$i\Delta^{(+)}(x-y) = [\phi^{(+)}(x),\phi^{(-)}(y)]$$

είναι αριθμός μιγαδικός. Άρα ισχύει

$$i\Delta^{(+)}(x-y) = \langle 0|[\phi^{(+)}(x),\phi^{(-)}(y)]|0\rangle = \langle 0|\phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(y)|0\rangle =$$

$$= \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}e^{-ik(x-y)}$$

Από την κβαντομηχανική γνωρίζουμε ότι το στοιχείο πίνακα $\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle$ έχει τη μορφή πλάτους πιθανότητας μιας μετάβασης από το ψ στο x. Ορίζουμε τώρα το T:

$$T\{\phi(x),\phi(y)\} = \theta(x^0-y^0)\phi(x)\phi(y) + \theta(y^0-x^0)\phi(y)\phi(x)$$

όπου

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, t>0 \\ 0, t<0 \end{cases}$$

δηλαδή οι τελεστές μπαίνουν σε χρονολογική διάταξη.

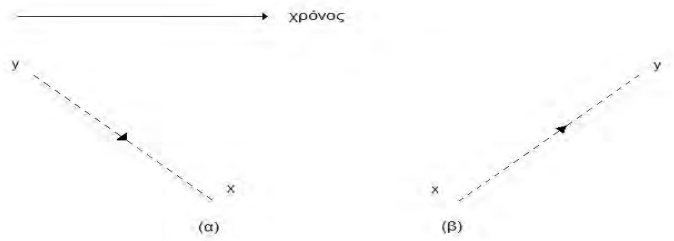
Ορίζουμε τη συνάρτηση Δ του Feynman:

$$i\Delta_F(x-y) \equiv \langle 0|T\{\phi(x)\phi(y)\}|0\rangle$$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα θα έχουμε:

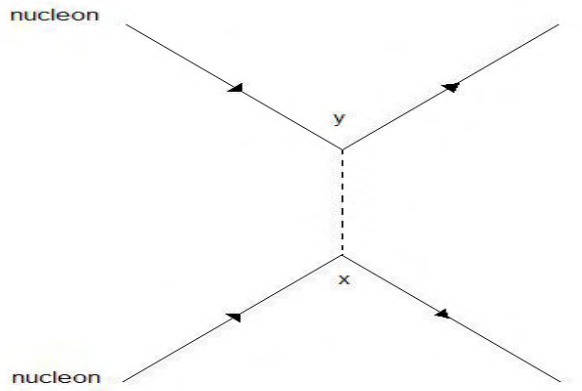
$$\Delta_F(x-y) = \theta(x^0-y^0)\Delta^{(+)}(x-y) - \theta(y^0-x^0)\Delta^{(-)}(x-y)$$

Η συνάρτηση αυτή αποτελεί τον ορισμό του διαδότη Feynmam και παραστατικά φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (σχήμα 6). Για $x^0 > y^0$ ο διαδότης είναι $i\Delta_F(x-y) = \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle$ ενώ για $y^0 > x^0$ είναι $i\Delta_F(x-y) = \langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle$.



Σχήμα 6: Διαδότης Feynmam

Βλέπουμε πως υπάρχουν δύο τρόποι διάδοσης για το μεσόνιο του πεδίου Klein-Gordon. Ο καθένας χωριστά δεν είναι αναλλοίωτος κατά Lorentz. Θεωρώντας όμως και τις δύο περιπτώσεις μαζί, ο διαδότης έχει τη μορφή του παρακάτω σχήματος (σχήμα 7).



Σχήμα 7: Ο αναλλοίωτος κατά Lorentz διαδότης Klein-Gordon

Η αναπαράσταση του μεσονικού διαδότη στο χώρο των ορμών είναι:

$$\Delta_F(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{CF} \frac{d^4 k e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2}$$

Η αναπαράσταση αυτή στο μιγαδικό επίπεδο είναι πολύ χρήσιμη, καθώς μέσω παραμόρφωσης δρόμου γύρω από τους δύο πόλους του ολοκληρώματος, μπορεί να υπολογισθεί αναλυτικά, μέσω του ολοκληρώματος Cauchy, η έκφραση για το πλάτος διάδοσης του μεσονίου Klein-Gordon [269].

C. Το μιγαδικό πεδίο Klein-Gordon

Το μιγαδικό βαθμωτό πεδίο περιγράφει το πεδίο που δημιουργείται από ηλεκτρικό φορτίο. Εφόσον το κλασικό πεδίο δεν είναι πραγματικό, το αντίστοιχο κβαντικό πεδίο περιμένουμε να μην είναι ερμιτιανό. Αναπτύσσουμε σε σειρές Fourier:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_k} [a(k) e^{-ikx} + b^\dagger(k) e^{ikx}]$$

$$\phi^{\dagger}(x)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}[b(k)e^{-ikx}+a^{\dagger}(k)e^{ikx}]$$

Οι τελεστές b και $b^{\dagger}$ εισάγονται ως συνιστώσες των όρων θετικής και αρνητικής ενέργειας αντίστοιχα. Οι μεταθετικές σχέσεις γίνονται:

$$[a(k),a^{\dagger}(k')]=(2\pi)^3 2\omega_k\delta^3(\vec{k}-\vec{k}')$$

$$[b(k),b^{\dagger}(k')]=(2\pi)^3 2\omega_k\delta^3(\vec{k}-\vec{k}')$$

Για να δούμε το ρόλο που παίζουν τα δύο σύνολα τελεστών δημιουργίας και καταστροφής a και b, ελέγχουμε τα διατηρούμενα μεγέθη του πεδίου. Το φορτίο θα είναι:

$$Q=\int J^0 d^3x=\int i\left(\phi^{\dagger}\frac{\partial\phi}{\partial t}-\phi\frac{\partial\phi^{\dagger}}{\partial t}\right)d^3x$$

Παίρνουμε κανονική κατάσταση για να αποφύγουμε απειρίες και έχουμε

$$Q=i\int:\phi^{\dagger}\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{\partial\phi^{\dagger}}{\partial t}\phi:d^3x\ \Rightarrow$$

$$Q=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}[a^{\dagger}(k)a(k)-b^{\dagger}(k)b(k)].$$

Η Χαμιλτονιανή του πραγματικού πεδίου:

$$:H:=\int d^3k\omega_k N(k)$$

επεκτείνεται σε

$$H=\int d^3k\omega_k[a^{\dagger}(k)a(k)+b^{\dagger}(k)b(k)]$$

ενώ ισχύει ότι:

$$\frac{\partial Q}{\partial t}=i[Q,H]=0$$

δηλαδή το συνολικό φορτίο διατηρείται. Επίσης το φορτίο που ισοδύναμα μπορεί να γραφτεί ως:

$$Q=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}[N_a(k)-N_b(k)]$$

δεν είναι θετικά ορισμένο, ωστόσο αυτό δεν ενοχλεί, αφού στη φύση υπάρχουν τόσο θετικά, όσο και αρνητικά φορτία.

Το Q είναι το ολοκλήρωμα της πυκνότητας p. Κατά την κβάντωση της θεωρίας το p ερμηνεύεται πλέον ως πυκνότητα φορτίου και έτσι δεν το απαιτούμε θετικό. Οι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής τώρα, ερμηνεύονται ως τελεστές δημιουργίας και καταστροφής των σωματιδίων ίδιας μάζας, αλλά αντιθέτου φορτίου, δηλαδή δημιουργίας και καταστροφής σωματίου και αντισωματίου αντίστοιχα. Τώρα θα υπολογίσουμε τον μεταθέτη $[\phi(x),\phi^{\dagger}(y)]$.

Θεωρώντας:

$$k_0 = \omega_k = (\vec{k}^2 + m^2)^{1/2}$$

έχουμε

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)] = \frac{1}{(2\pi)^6} \iint \frac{d^3k d^3k'}{2k_0 2k_0'} \left\{ [a(k), a^\dagger(k')] e^{-ikx+ik'y} + [b^\dagger(k), b(k')] e^{ikx-ik'y} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{k_0} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \sin k_0(x_0 - y_0)$$

ενώ σύμφωνα με τα προηγούμενα θα είναι:

$$\Delta(x-y) = -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \sin k(x-y)$$

Συνεπώς:

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)] = -i\Delta(x-y)$$

ενώ

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)]_{x^0=y^0} = 0$$

Άρα και στην περίπτωση του μιγαδικού βαθμωτού πεδίου Klein-Gordon ισχύει η αρχή της μικροαιτιότητας και δεν παραβιάζεται, αρκεί το κάθε σωμάτιο να έχει ίδια μάζα με το αντισωμάτιό του.

D. Γενικές παρατηρήσεις στο κβαντωμένο πεδίο Klein-Gordon

Καταλήξαμε στο πολύ σημαντικό συμπέρασμα ότι τα σωματίδια του κβαντωμένου πεδίου Klein-Gordon είναι υποχρεωτικά μποζόνια. Οι καταστάσεις που τα περιγράφουν έχουν εκ κατασκευής την συμμετρία που απαιτεί η γενικευμένη αρχή του Paulli για μποζόνια. Ξέρουμε από την άλλη πλευρά ότι επειδή το πεδίο Klein-Gordon είναι πραγματικά Βαθμωτό περιγράφει σωματίδια με σπιν ίσο με το μηδέν. Το συμπέρασμα αυτό μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: *"Στα πλαίσια της σχετικιστικής Κβαντομηχανικής τα σωματίδια με σπιν μηδέν είναι αναγκαστικά μποζόνια"* [270].

Η διαφορά με την μη σχετικιστική κβαντομηχανική ως προς αυτό το σημείο είναι θεμελιώδης. Εκεί η σύνδεση σπιν και στατιστικής (διάκριση μποζονίου και φερμιονίου) είναι ανύπαρκτη. Ανεξάρτητα από το σπιν τους μια συλλογή ταυτόσημων σωματιδίων μπορεί να περιγραφεί είτε με συμμετρικές είτε με αντισυμμετρικές κυματοσυναρτήσεις. Η επιλογή του κατάλληλου τύπου συμμετρίας γίνεται με βάση το εμπειρικό δεδομένο ότι τα σωματίδια με ημιακέραιο σπιν υπακούουν στην αρχή του Paulli ενώ τα άλλα όχι.

Στη σχετικιστική κβαντομηχανική αυτή η θεμελιώδης θεωρητική εκκρεμότητα αίρεται. Τουλάχιστον για σωματίδια με σπιν μηδέν ο μποζονικός τους χαρακτήρας είναι αναγκαστικός. Όμως σε αυτό το βασικό ζήτημα θα επανέλθουμε στην επόμενη παράγραφο όπου θα επιχειρηθεί η κβάντωση ενός μόνο πεδίου, του πεδίου Dirac που περιγράφει τα σωματίδια με σπιν ½. Μόνο τότε θα γίνει πραγματικά κατανοητό πως η τιμή του σπιν

επιβάλλει την κατάλληλη στατιστική για το κάθε είδος σωματιδίων. Η σύνδεση σπιν και στατιστικής όπως θα αποδειχθεί είναι ένα από τα θεμελιώδη επιτεύγματα της σχετικιστικής κβαντομηχανικής.

4.4.2. Η κβάντωση του πεδίου Dirac

Α. Λαγκρανζιανός φορμαλισμός εξίσωσης Dirac

Η εξίσωση Dirac μπορεί να προκύψει μέσω των εξισώσεων Euler-Lagrange χρησιμοποιώντας τη Λαγκρανζιανή:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}[\bar{\psi}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}\psi) - (\partial_{\mu}\bar{\psi})\gamma^{\mu}\psi] - m\bar{\psi}\psi \Rightarrow$$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi + \partial_{\mu}J^{\mu}$$

όπου

$$J^{\mu} = \bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$$

ενώ τα ψ και $\bar{\psi}$ είναι δύο δυναμικά ανεξάρτητα πεδία.

Επίσης ισχύει:

$$\partial_{\mu}J^{\mu} = 0$$

Άρα μπορούμε να εξάγουμε τη συζυγή ορμή και τη Χαμιλτονιανή του πεδίου μέσω της Λαγκρανζιανής

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi \ .$$

Η ορμή για το ψ θα είναι:

$$\pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}(x)} = i\bar{\psi}\gamma^{0} = i\psi^{\dagger}(x)$$

ενώ για το $\bar{\psi}$ είναι:

$$\pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\bar{\psi}}(x)} = i\gamma^{0}\psi(x)$$

Η Χαμιλτονιανή πυκνότητα του πεδίου θα είναι:

$$\mathcal{H} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}}\dot{\psi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\bar{\psi}}}\dot{\bar{\psi}} - \mathcal{L} =$$

$$= i\psi^{\dagger}\dot{\psi} + i\gamma^{0}\psi\dot{\bar{\psi}} - i\bar{\psi}\gamma^{0}\dot{\bar{\psi}} - \bar{\psi}i\gamma^{i}\partial_{i}\psi + m\bar{\psi}\psi = \psi^{\dagger}\gamma^{0}(-i\gamma^{i}\theta_{i} + m)\psi + i\gamma^{0}\psi\gamma^{0}\dot{\psi}^{\dagger}$$

Όμως:

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu})\psi = 0 \Rightarrow (-i\gamma^{i}\partial_{i} + m)\psi = i\gamma^{0}\partial_{0}\psi$$

Άρα ισχύει:

$$\mathcal{H} = \psi^{\dagger}\gamma^{0}i\gamma^{0}\partial_{0}\psi + i\psi\dot{\psi}^{\dagger} =$$

$$= i\left[\psi^{\dagger}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\psi\frac{\partial\psi^{\dagger}}{\partial t}\right]$$

Όμως οι λύσεις αρνητικής ενέργειας θα συνεισφέρουν αρνητικά στην Χαμιλτονιανή και άρα η ενέργεια δεν είναι θετικά ορισμένη. Θα επιχειρήσουμε να λύσουμε αυτό το πρόβλημα όπως και στην περίπτωση του πεδίου Klein-Gordon με κβάντωση του πεδίου.

Β. Το κβαντωμένο πεδίο Dirac

Για την κβάντωση, πρέπει να αναπτυχθούν τα πεδία σε σειρές Fourier [266-268]:

$$\psi(x)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{m}{k_0}\sum_{a=1,2}[b_a(k)u^{(a)}(k)e^{-ikx}+d_a^{\dagger}(k)\upsilon^{(a)}(k)e^{ikx}] \qquad (1)$$

$$\bar{\psi}(x)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{m}{k_0}\sum_{a=1,2}[b_a^{\dagger}(k)\bar{u}^{(a)}(k)e^{-ikx}+d_a(k)\bar{\upsilon}^{(a)}(k)e^{-ikx}] \qquad (2)$$

όπου τα $u^{1,2}$ και $\upsilon^{1,2}$ είναι spinors θετικής και αρνητικής ενέργειας αντίστοιχα.

Το πεδίο Dirac, όπως το ορίσαμε παραπάνω είναι μη ερμιτιανό και περιγράφει φορτισμένα σωματίδια και αντισωματίδια. Η ενέργεια του πεδίου θα είναι:

$$H=\int d^3x\mathscr{H}=\int d^3x[\psi^{\dagger}(x)i\frac{\partial\psi(x)}{\partial t}-i\frac{\partial\psi^{\dagger}(x)}{\partial t}\psi(x)]=$$

$$=\int d^3x\sum_{a,a'}\frac{i}{2}\int\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\frac{m^2}{k_0k_0'}\{[b_a^{\dagger}(k)u^{\dagger(a)}(k)e^{ikx}+d_a(k)\upsilon^{\dagger(a)}(k)e^{-ikx}]$$

$$\cdot[b_{a'}(k')u^{(a')}(k')e^{-ik'x}(-ik_0')+d_{a'}^{\dagger}(k')\upsilon^{(a')}(k')(ik_0')e^{ik'x}]-[b_a^{\dagger}(k)u^{\dagger(a)}(k)(ik_0)e^{ikx}+$$

$$+d_a(k)\upsilon^{\dagger(a)}(k)(-ik_0)e^{-ikx}\,d_{a'}^{\dagger}(k')\upsilon^{(a')}(k')e^{ik'x}+d_{a'}^{\dagger}(k')\upsilon^{(a')}(k')e^{ik'x}]\}\ldots..$$

Η ολοκλήρωση ως προς d^3x θα εμφανίσει τη συνάρτηση $\delta^3(\vec{k}-\vec{k}')$, οπότε στη συνέχεια εκτελώντας την ολοκλήρωση ως προς d^3k' θα έχουμε μετά από πολλές πράξεις:

$$H=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}m\sum_a[b_a^{\dagger}(k)b_a(k)-d_a(k)d_a^{\dagger}(k)]$$

Παρατηρούμε ότι η ενέργεια του πεδίου εξακολουθεί να μην είναι θετικά ορισμένη, καθώς οι τελεστές $d\,,d^{\dagger}$ έχουν αρνητική συνεισφορά. Ο μόνος τρόπος θεραπείας αυτής της παθογένειας, ώστε να έχουμε ορισμένη ενέργεια είναι να θεωρήσουμε διαφορετικές μεταθετικές σχέσεις για τους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής. Για την ακρίβεια υιοθετούμε προσθετικές μεταθετικές σχέσεις της μορφής:

$$\{A,B\}\equiv AB+BA$$

Άρα ορίζουμε:

$$\{b_a(k),b_{a'}(k')\}=\{d_a(k),d_{a'}^{\dagger}(k')\}=(2\pi)^3\frac{k_0}{m}\delta^3(\vec{k}-\vec{k}')\delta_{aa'}$$

$$\{b_a(k), b_{a'}(k')\} = \{b_a^\dagger(k), b_{a'}^\dagger(k')\} = \{d_a(k), d_{a'}(k')\} = \{d_a^\dagger(k), d_{a'}^\dagger(k')\} = 0$$

Αφού $dd^\dagger = 1 - d^\dagger d$, μπορούμε να ορίσουμε την κανονική κατάσταση του πεδίου Dirac, όπως και στο Βαθμωτό πεδίο, μόνο που εδώ ισχύει:

$$:dd^\dagger := -d^\dagger d$$

Άρα τελικά η ενέργεια ορίζεται θετικά ως:

$$H = \int d^3x : \mathscr{H} :\Rightarrow$$

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} m \sum_a [b_a^\dagger(k) b_a(k) + d_a^\dagger(k) d_a(k)]$$

Εφόσον:

$$\{b_a^\dagger(k), b_a^\dagger(k)\} = 0 \Rightarrow b_a^\dagger(k) b_a^\dagger(k) = 0$$

ισχύει

$$b_a^\dagger(k) b_a^\dagger(k) \,|\, 0\rangle = 0$$

Δηλαδή, είναι αδύνατον δύο κβάντα του πεδίου Dirac να βρίσκονται στην ίδια ενεργειακή κατάσταση. *Συνεπώς τα σωματίδια που περιγράφει το πεδίο Dirac θα πρέπει να υπακούν στην απαγορευτική αρχή του Pauli, να είναι δηλαδή φερμιόνια* [270]. Κάτι τέτοιο θα έπρεπε να είναι αναμενόμενο, καθώς ήδη από τη μεταχείριση της εξίσωσης Dirac ως μονοσωματιδιακής εξίσωσης είχαμε δει ότι περιγράφει τα σωματίδια που έχουν σπιν ½.

Ο τελεστής φορτίου για το πεδίο Dirac θα είναι

$$Q = \int d^3x : J^0(x) := \int d^3x : \psi^\dagger(x)\psi(x) :\Rightarrow$$

$$Q = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_a [b_a^\dagger(k) b_a(k) - d_a^\dagger(k) d_a(k)]$$

όπου ο $b^\dagger$ δημιουργεί σωματίδια και ο $d^\dagger$ δημιουργεί αντισωματίδια, ενώ οι b, d καταστρέφουν σωματίδια και αντισωματίδια αντίστοιχα.

Τώρα θα υπολογίσουμε τον βασικό αντιμεταθέτη $\{\psi(\vec{x},t), \psi^\dagger(\vec{x}',t)\}$. Έχουμε:

$$\{\psi_i(\vec{x},t), \psi_j^\dagger(\vec{x}',t)\} = \sum_{a,a'} \iint \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6} \frac{m^2}{k_0 k_0'} [u_i^{(a)}(k) \bar{u}_k^{(a')}(k') \gamma_{kj}^0 \{b_a(k), b_{a'}^\dagger(k')\} e^{-ikx+ik'x'} +$$

$$+ \upsilon_i^{(a)}(k) \bar{\upsilon}_k^{(a')}(k') \gamma_{kj}^0 \{d_a^\dagger(k), d_{a'}(k')\} e^{ikx-ik'x'}] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow$$

$$\{\psi_i(\vec{x},t), \psi_j^\dagger(\vec{x}',t)\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \delta_{ij}.$$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε τον μεταθέτη $\{\psi_a(x), \psi_b(y)\}$. Μέσω των παραπάνω σχέσεων (1,2) έχουμε:

$$\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} [\gamma \cdot p + m)_{ab} e^{-ip(x-y)} + (\gamma \cdot p - m)_{ab} e^{ip(x-y)}]$$

Θεωρώντας:

$$\gamma_\mu p^\mu = i\gamma_\mu \partial_x^\mu$$

έχουμε:

$$\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\} = (i\partial_x + m)_{ab}[\phi(x), \phi(y)] \quad \text{ή} \quad \{\psi_a^{\pm}(x), \bar{\psi}_b^{\mp}(y)\} = i(i\partial_x + m)_{ab}\Delta^{\pm}(x-y)$$

και

$$\psi^{(+)}(x) = \int \frac{d^3km}{(2\pi)^3 k_0} \sum_a b_a(k) u^{(a)}(k) e^{-ikx}$$

$$\bar{\psi}^{(+)}(x) = \int \frac{d^3km}{(2\pi)^3 k_0} \sum_a b_a^\dagger(k) \bar{u}^{(a)}(k) e^{ikx}$$

Τώρα θα ορίσουμε το φερμιονικό διαδότη Feynman. Ο φερμιονικός διαδότης Feynman είναι:

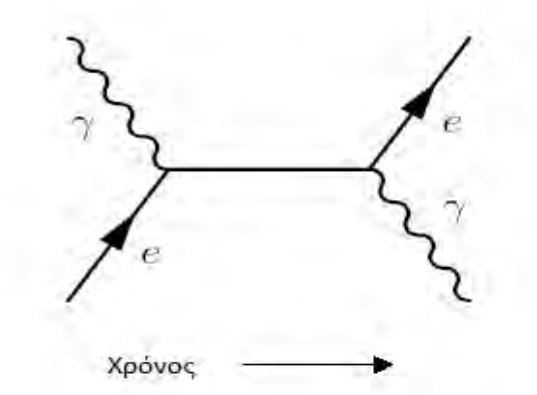
$$iS_F(x-y) = \langle 0 | T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\} | 0 \rangle$$

όπου

$$S_F(x-y) = \theta(x^0 - y^0) S^{(+)}(x-y) - \theta(y^0 - x^0) S^{(-)}(x-y) =$$

$$= (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\Delta_F(x-y)$$

Η αναπαράσταση είναι σε πλήρη αναλογία με το μεσονικό διαδότη, καθώς η αναλλοίωτη κατά Lorentz μορφή περιέχει τη συνεισφορά τόσο της $x^0 > y^0$ όσο και της $x^0 < y^0$ συνιστώσας, σε ένα κοινό διάγραμμα (σχήμα 8).



Σχήμα 8: Ο φερμιονικός διαδότης είναι $iS_F(x-y) = \langle 0 | T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\} | 0 \rangle$

C. Φερμιονική και μποζονική κβάντωση

Αντιπαραβάλουμε τις Χαμιλτονιανές συναρτήσεις των δύο πεδίων:

$$H = (1/2)\int \left(\phi_t^2 + \phi_x^2 + m^2\phi^2\right) dx \qquad \text{(Klein-Gordon)}$$

$$\mathcal{H} = \int \psi^\dagger (H\psi) dx \qquad \text{(Dirac)}$$

Η διαφορά είναι θεμελιώδης. Αν τα φ και ψ θεωρηθούν προς στιγμήν ως κλασικά πεδία, τότε η Χαμιλτονιανή του πεδίου Klein-Gordon είναι μια θετικά ορισμένη ποσότητα, ενώ εκείνη του πεδίου Dirac, όχι.

Σε κλασικό επίπεδο, η Χαμιλτονιανή Klein-Gordon δεν διατρέχει κανέναν κίνδυνο να δώσει αρνητικές τιμές όσο ισχυρή κι αν είναι η συμμετοχή των λύσεων αρνητικής ενέργειας στο ανάπτυγμα του πεδίου φ σε επίπεδα κύματα. Η ενέργεια του πεδίου θα είναι πάντα μια θετική ποσότητα. Η ενέργεια του πεδίου Dirac, αντίθετα, θα είναι μια αόριστη έκφραση, που μπορεί να γίνει απεριόριστα θετική ή απεριόριστα αρνητική. Δεν έχει ούτε πάνω ούτε και κάτω φράγμα.

Όταν τα πεδία γίνουν κβαντικά και η άλγεβρα είναι μποζονική, τότε θα έχουμε πάντα:

$$AB = BA + 1 \quad \text{ή} \quad AB=0$$

δηλαδή οι τελεστές ή θα μετατίθενται, ή, αν όχι, η αλλαγή της σειράς τους θα προκαλεί την εμφάνιση ενός σταθερού όρου, αν βέβαια οι εκφράσεις που υπολογίζουμε είναι πολυώνυμα δευτέρου βαθμού ως προς τους τελεστές του προβλήματος, όπως συμβαίνει στην περίπτωση των ελεύθερων πεδίων. Η χρήση μποζονικής άλγεβρας θα διατηρήσει τα πρόσημα σε όλους τους όρους τού αντίστοιχου κλασικού υπολογισμού και θα τον τροποποιήσει μόνο κατά κάποιους σταθερούς προσθετέους οι οποίοι απορρίπτονται.

<u>Το συμπέρασμα είναι σαφές</u>. Η χρήση μποζονικής άλγεβρας διατηρεί τον θετικό, αρνητικό ή αόριστο χαρακτήρα της αρχικής κλασικής έκφρασης. Αν ήταν θετική θα την μετατρέψει σε έναν θετικά ορισμένο τελεστή και αν ήταν μεταβλητού πρόσημου το ίδιο θα ισχύει και για τις μέσες τιμές ή τις ιδιοτιμές του αντίστοιχου κβαντικού τελεστή.

Τα πράγματα δεν είναι έτσι με την φερμιονική άλγεβρα. Εδώ για ένα τυχόν ζεύγος τελεστών Α, Β θα είναι:

$$AB = -BA + 0 \quad \text{ή} \quad 1$$

το οποίο σημαίνει ότι η αλλαγή σειράς προκαλεί αλλαγή πρόσημου και προσθέτει κάποιους σταθερούς όρους που δεν έχουν φυσική σημασία. Η φερμιονική άλγεβρα έχει την δυνατότητα να μεταβάλλει το ανεπιθύμητο αρνητικό πρόσημο κάποιων όρων της αντίστοιχης κλασικής έκφρασης και να την μετατρέψει από αόριστη σε θετικά ορισμένη.

Είναι πλέον φανερή η αιτία της διαφορετικής κβάντωσης των πεδίων Klein-Gordon και Dirac. Παρ' ότι και στα δύο υπάρχουν λύσεις αρνητικής ενέργειας, εν τούτοις δεν επηρεάζουν το πρόσημο της Χαμιλτονιανής με τον ίδιο τρόπο. Στο πεδίο Klein-Gordon η κλασική Χαμιλτονιανή είναι μια θετικά ορισμένη έκφραση και αυτή η θετικότητα σίγουρα διατηρείται με την κβάντωσή του ως μποζονικού πεδίου. Στο πεδίο Dirac, που διέπεται από μια εξίσωση τύπου Schrodinger, η πεδιακή Χαμιλτονιανή θα έχει την μορφή μιας κβαντομηχανικής μέσης τιμής, οπότε απαιτείται φερμιονική κβάντωση ώστε να αλλάξουν πρόσημο οι όροι που προέρχονται από τις λύσεις αρνητικής ενέργειας και να φτάσουμε έτσι σε μια θετικά ορισμένη κβαντική έκφραση. Ο βασικός παράγοντας που καθορίζει το είδος της κβάντωσης ενός

σχετικιστικού πεδίου είναι λοιπόν η θετικότητα ή ο αόριστος χαρακτήρας της κλασικής του Χαμιλτονιανής [266-270].

4.4.3. Το κβαντωμένο πεδίο Schrodinger

Θα δούμε τι συμβαίνει αν επιχειρήσουμε μια δεύτερη κβάντωση της εξισώσεως Schrodinger [266,267]. Θεωρούμε τη κυματοσυνάρτηση ψ(x,t) ως ένα κβαντικό πεδίο που ο τελεστικός του χαρακτήρας θα προσδιορίζεται από τις κανονικές μποζονικές μεταθετικές σχέσεις:

$$[\psi(x,t),\psi(x',t)] = [\psi^{\dagger}(x,t),\psi^{\dagger}(x',t)] = 0$$

$$[\psi(x,t),\psi^{\dagger}(x',t)] = \delta(x-x')$$

ή ενδεχομένως τις κανονικές φερμιονικές μεταθετικές σχέσεις:

$$\{\psi(x,t),\psi(x',t)\} = \{\psi^{\dagger}(x,t),\psi^{\dagger}(x',t)\} = 0$$

$$\{\psi(x,t),\psi^{\dagger}(x',t)\} = \delta(x-x')$$

Ως γνωστόν η μονοδιάστατη εξίσωση του Schrodinger παράγεται από την Λαγκρανζιανή $\mathcal{L} = \psi^{*}(i\partial_t - H)\psi$ και άρα η συζυγής ορμή του πεδίου ψ θα είναι $\pi_{\psi} = i\psi^{*}$.

Η γενική λύση της χρονεξαρτημένης εξίσωσης Schrodinger $i\dfrac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi$ θα γράφεται σαν:

$$\psi(x,t) = \sum_n \alpha_n \psi_n e^{-iE_n t}$$

και υπάρχουν μόνο όροι θετικής συχνότητας, άρα και οι τελεστές α_n θα είναι υποχρεωτικά τελεστές καταστροφής. Οι τελεστές δημιουργίας $\alpha_n^{\dagger}$ θα εμφανιστούν στο συζυγές πεδίο του ψ τού οποίου το ανάπτυγμα θα έχει την μορφή:

$$\psi^{\dagger} = \sum_n \alpha_n^{\dagger} \psi_n^{*}(x) e^{iE_n t}$$

Από την πεδιακή Χαμιλτονιανή $\mathcal{H} = \int \psi^{\dagger}(H\psi)dx$ παίρνουμε:

$$\mathcal{H} = \sum_n a_n^{\dagger} a_n E_n$$

όπου πρόκειται για την γνωστή έκφραση της μέσης ενέργειας:

$$< E >= \sum |a_n|^2 E_n$$

<u>*Συμπέρασμα:*</u>

Η εξίσωση Schrodinger μπορεί να κβαντωθεί είτε με μεταθετικές είτε με αντιμεταθετικές σχέσεις. Σαν κβαντωμένο πεδίο μπορεί να περιγράψει είτε μποζόνια είτε φερμιόνια. Σε αντίθεση με τις σχετικιστικές εξισώσεις, που επιδέχονται μόνο το ένα ή το άλλο είδος κβάντωσης, η εξίσωση Schrodinger είναι συμβιβαστή και με τα δύο.

Α. Η δεύτερη κβάντωση - Κατασκευή κυματοσυναρτήσεων

Για δύο σωματίδια θα έχουμε:

$$|x_1, x_2> = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi^\dagger(x_1)\psi^\dagger(x_2)|0> \quad \text{και} \quad |x_2, x_1> = \pm|x_1, x_2>$$

ανάλογα με το αν τα σωματίδια θεωρηθούν *μποζόνια (πρόσημο+)* ή *φερμιόνια (πρόσημο-)* οπότε οι τελεστές $\psi^\dagger(x_1), \psi^\dagger(x_2)$ θα μετατίθενται ή θα αντιμετατίθενται αντίστοιχα.

Για την κατάσταση δύο σωματιδίων στις στάθμες n και m,

$$|n, m> = a_n^\dagger a_m^\dagger |0>$$

η αντίστοιχη κυματοσυνάρτηση θα είναι:

$$\psi(x_1, x_2) = < x_1, x_2 | n, m >$$

ή σαν

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{i,k}\psi_t(x_1)\psi_k(x_2) < 0 | a_t a_k a_n^\dagger a_m^\dagger | 0 >$$

ή

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_m(x_1)\psi_n(x_2) \pm \psi_n(x_1)\psi_m(x_2)\right)$$

που είναι η αναμενόμενη έκφραση με τη συμμετροποίηση πού επιβάλλει ο μποζονικός ή φερμιονικός χαρακτήρας των σωματιδίων.

Το συμπέρασμα είναι σαφές. Από άποψη Φυσικής η δεύτερη κβάντωση της εξίσωσης Schrodinger δεν εισάγει τίποτα νέο [268]. Εκτός από την συνήθη περιγραφή, ενός ή περισσοτέρων σωματιδίων, διατηρείται και στην νέα περίπτωση.

Ο φορμαλισμός της δεύτερης κβάντωσης διαθέτει ένα σημαντικό τεχνικό πλεονέκτημα έναντι της συνήθους περιγραφής συστημάτων με πολλά ταυτόσημα σωματίδια. Ο τύπος συμμετρίας των καταστάσεων (πλήρως συμμετρικές ή πλήρως αντισυμμετρικές) είναι εξ αρχής ενσωματωμένος στην αλγεβρική δομή της θεωρίας και δεν επιβάλλεται εξωτερικά όπως στην συνήθη περιγραφή. Για συστήματα με περισσότερα από δύο σωματίδια π.χ. πολυηλεκτρονικά άτομα, πυρήνες, στερεά, αυτό είναι ένα σαφές πλεονέκτημα που κατατάσσει τον φορμαλισμό της δεύτερης κβάντωσης στα σημαντικά εργαλεία της σύγχρονης θεωρητικής Φυσικής.

Β. Εντοπισιμότητα και διατήρηση του αριθμού των σωματιδίων

Η εντοπισιμότητα (δηλαδή η δυνατότητα να εντοπίσουμε το σωμάτιο σε ένα σημείο) και η διατήρηση του αριθμού των σωματιδίων είναι μια θεμελιώδης διαφορά μεταξύ σχετικιστικών και μη σχετικιστικών θεωριών. Στην μη σχετικιστική κβαντομηχανική έχουμε την δυνατότητα να προσδιορίσουμε την θέση ενός σωματιδίου με όση ακρίβεια επιθυμούμε, φθάνοντας μέχρι και τον απόλυτο εντοπισμό. Σε μια σχετικιστική θεωρία αυτό δεν είναι πια δυνατόν.

Αν το απειλούμενο με υπερβολικό εντοπισμό σωματίδιο φέρει φορτίο ή κάποιον άλλο προσθετικό κβαντικό αριθμό, τότε η απόκριση της θεωρίας θα είναι η παραγωγή ζευγών σωματιδίων-αντισωματιδίων, έτσι ώστε το υλικό φορτίο μέσα στην περιοχή εντοπισμού να παραμείνει σταθερό. Αν το σωματίδιο δεν φέρει κανένα τέτοιο φορτίο - όπως τα σωματίδια ενός πραγματικού πεδίου Klein-Gordon - τότε θα υπάρξει παραγωγή κι άλλων όμοιών σωματιδίων, αφού κανένας νόμος διατήρησης δεν το απαγορεύει. Αντιλαμβανόμαστε ότι η εντοπισιμότητα (ή μη) και η διατήρηση (ή μη) του αριθμού των σωματιδίων δεν είναι παρά οι όψεις του ίδιου νομίσματος.

Στην μη σχετικιστική κβαντομηχανική ο αριθμός των σωματιδίων είναι μια διατηρήσιμη ποσότητα. Ένα εντοπιζόμενο σωματίδιο θα παραμείνει ένα σωματίδιο, όση κινητική ενέργεια κι αν έχει αποκτήσει. Στην σχετικιστική κβαντομηχανική αντίθετα, είτε δεν υπάρχει κανένας σχετικός νόμος διατήρησης (περίπτωση ενός πραγματικού πεδίου), είτε αν υπάρχει (περίπτωση ενός μιγαδικού πεδίου) αυτός θα αφορά το ολικό φορτίο, δηλαδή την διαφορά του αριθμού των σωματιδίων και αντισωματιδίων. Και στις δύο περιπτώσεις ο αριθμός των σωματιδίων του ίδιου είδους δεν αποτελεί διατηρήσιμη ποσότητα και η θεωρία έχει τη δυνατότητα να μεταφέρει την ενέργεια εντοπισμού σε νέα σωματίδια. Ο απόλυτος εντοπισμός γίνεται έτσι αδύνατος.

Φορμαλιστικά αυτή η βασική διαφορά μεταξύ σχετικιστικών και μη σχετικιστικών θεωριών εκδηλώνεται με τον παρακάτω τρόπο. Όπως στο πεδίο Dirac, έτσι και στο πεδίο Schrodinger ο μετασχηματισμός φάσης $\psi \to e^{ia}\psi$ είναι μια συμμετρία της Λαγκρανζιανής, με αντίστοιχη διατηρήσιμη ποσότητα το ολικό φορτίο:

$$Q = \int \psi^{\dagger}(x)\psi(x)dx$$

που στην μονοσωματιδιακή θεωρία δεν είναι παρά το ολοκλήρωμα κανονικοποίησης της κατάστασης επαλληλίας και άρα θα ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των συντελεστών της, το οποίο στην κβαντική θεωρία θα μετατρέπεται στην τελεστική έκφραση:

$$Q = \sum_n a_n^{\dagger} a_n = \sum_n N_n = N$$

που προφανώς μετράει τον ολικό αριθμό σωματιδίων που είναι παρόντα στις διάφορες καταστάσεις του συστήματος.

Διαπιστώνουμε έτσι, ότι στο μη σχετικιστικό πεδίο Schrodinger, ο ίδιος ο αριθμός των σωματιδίων είναι μια διατηρήσιμη ποσότητα σε αντίθεση με την εξίσωση Dirac όπου μόνο η ολική διαφορά σωματιδίων αντισωματιδίων υπόκειται σε διατήρηση. Όσο για την εντοπισιμότητα των κβάντων του πεδίου Schrodinger, μπορούμε να την εξετάσουμε στα πλαίσια του αντίστοιχου φορμαλισμού αν χρησιμοποιήσουμε τελεστή:

$$\mathrm{N}_{\upsilon} = \int_{\upsilon} \psi^{\dagger}(x)\psi(x)dx \qquad (1)$$

ο οποίος μετράει τον αριθμό των σωματιδίων που βρίσκονται μέσα στον όγκο v. Εάν λοιπόν η κατάσταση:

$$|x_0>=\psi^\dagger(x_0)|0> \qquad (2)$$

παριστάνει πράγματι ένα σωματίδιο απόλυτα εντοπισμένο στη θέση, τότε θα πρέπει να είναι μια ιδιοκατάσταση - με ιδιοτιμή μονάδα - του τελεστή για κάθε όγκο v που περικλείει το σημείο x_0. Για να το ελέγξουμε, δρούμε πάνω στην (2) με τον (1) και παίρνουμε:

$$N_\upsilon|x_0>=\int_\upsilon \psi^\dagger(x)\psi(x)\psi^\dagger(x_0)|0>dx \qquad (3)$$

Δεδομένου όμως ότι:

$$[\psi(x),\psi^\dagger(x_0)]_\pm \equiv \psi(x)\psi^\dagger(x_0)\pm\psi^\dagger(x_0)\psi(x)=\delta(x-x_0) \qquad (4)$$

και ότι $\psi(x)|0>=0$, η δράση των δύο μελών της (4) πάνω στο κενό θα δώσει:

$$\psi(x)\psi^\dagger(x_0)|0>=\delta(x-x_0)|0>$$

οπότε η (3) θα γράφεται:

$$N_\upsilon|x_0>=\int_\upsilon \delta(x-x_0)\psi^\dagger(x)|0>=\psi^\dagger(x_0)|0>=|x_0>\equiv 1\cdot|x_0>$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο: Μέσα στον όγκο v, που περικλείει το x_0, υπάρχει ακριβώς ένα σωματίδιο. Η απόδειξη ισχύει όσο μικρός κι αν είναι ο όγκος v. Μέσα σε αυτόν θα βρίσκουμε πάντα ένα και μόνο σωματίδιο. Η εντοπισιμότητα είναι απόλυτη.

Με ανάλογο τρόπο ελέγχεται και ο εντοπισμός των σωματιδίων της γενικής κατάστασης:

$$|x_1,...,x_N>=\frac{1}{\sqrt{N!}}\psi^\dagger(x_1)...\psi^\dagger(x_N)|0>.$$

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι N εξισώσεις ιδιοτιμών:

$$N_{\upsilon i}|x_1,...,x_N>=1\cdot|x_1...x_N> \qquad (i=1,...N)$$

με την προϋπόθεση ότι καθένας από τους όγκους $v_1...v_N$ περιέχει μόνο το αντίστοιχο σημείο (ο v_1 το x_1, ο v_2 το x_2, κ.λ.π.). Για έναν τυχόντα όγκο v θα είναι:

$$N_\upsilon|x_1,...,x_N>=m|x_1...x_N>$$

όπου m ο αριθμός των σημείων $x_1...x_N$ που περιέχονται μέσα σε αυτόν.

Με ανάλογο τρόπο, αλλά με αρνητικό αποτέλεσμα, διερευνάται η δυνατότητα κατασκευής εντοπισμένων κβάντων σε ένα σχετικιστικό πεδίο. Το ανάπτυγμα ενός σχετικιστικού πεδίου σε τελεστές δημιουργίας και καταστροφής περιέχει και τα δύο είδη, ενώ το μη σχετικιστικό πεδίο Schrodinder μόνο το ένα.

Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι η σύνθεση κβαντομηχανικής και σχετικότητας καταργεί την αφθαρσία της ύλης και επιτρέπει την ελεύθερη μετατρεψιμότητα των μορφών της κάτω από τον μοναδικό περιορισμό του σεβασμού των νόμων διατήρησης (ενέργειας, ορμής, στροφορμής και ηλεκτρικού φορτίου). Οποιαδήποτε μετατροπή, που δεν παραβιάζει αυτούς τους νόμους, είναι δυνατόν να συμβεί, αλλά με μια ορισμένη πιθανότητα που το μέγεθός της το καθορίζει η θεμελιώδης αλληλεπίδραση (ισχυρή, ηλεκτρασθενής ή βαρυτική) που είναι υπεύθυνη για αυτή την μετατροπή [266-270].

4.4.4. Η Κβάντωση του ΗΜ πεδίου

Α. Περιγραφή του ΗΜ μέσω ενός διανυσματικού δυναμικού

Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο κατέχει μια μοναδική θέση στην ιστορία της φυσικής. Σχεδόν όλες οι θεμελιώδεις φυσικές ανακαλύψεις προήλθαν από τη μελέτη αυτού του πεδίου. Η σταθερότητα της ταχύτητας του φωτός, οδήγησε στη θεωρία της σχετικότητας, ενώ η θερμική ισορροπία ύλης και ακτινοβολίας έφερε στην επιφάνεια την αφετηριακή ιδέα της κβαντικής θεωρίας. Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο αποτέλεσε επίσης το πρώτο επιτυχές υπόδειγμα ενοποίησης δυο φαινομενικά διαφορετικών δυνάμεων – των ηλεκτρικών και των μαγνητικών – ενώ αναγνωρίζεται σήμερα ως το πρότυπο πεδίο για την ενοποίηση όλων των θεμελιωδών δυνάμεων του μικρόκοσμου με εξαίρεση το πεδίο βαρύτητας. Φαίνεται λοιπόν ότι όλες οι δυνάμεις της φύσεως συντίθενται σε ένα είδος γενικευμένου ηλεκτρομαγνητισμού. Είναι όλες Θεωρίες Βαθμίδας.

Η κβάντωση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι τεχνικά πιο περίπλοκη [268]. Πρώτον διότι πρόκειται για ένα διανυσματικό πεδίο και δεύτερον διότι η περιγραφή του είναι σκόπιμο να γίνει μέσω δύο βοηθητικών πεδίων, ενός βαθμωτού και ενός διανυσματικού, τα οποία δεν ορίζονται μονοσήμαντα και περιέχουν πρόσθετους και μάλλον αφύσικους βαθμούς ελευθερίας.

Οι εξισώσεις Maxwell στον κενό χώρο περιγράφουν το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο ως αυτόνομη φυσική οντότητα ανεξάρτητη από τις πηγές που το δημιούργησαν. Οι εξισώσεις Maxwell έχουν την μορφή:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \qquad (1)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (2)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \qquad (3)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad (4)$$

Η εξίσωση (3) ικανοποιείται αυτόματα αν θέσουμε:

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \qquad (5)$$

όπου Α το λεγόμενο *διανυσματικό δυναμικό*.

Εισάγοντας την (5) στην (2), παίρνουμε:

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0$$

η οποία ικανοποιείται αν θέσουμε:

$$\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\vec{\nabla}\phi\Rightarrow\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad (6)$$

όπου το αρνητικό πρόσημο στο Βαθμωτό Δυναμικό τέθηκε ώστε να υπάρχει συμφωνία με την ηλεκτροστατική περίπτωση, οπότε η (6) καταλήγει στην γνωστή σχέση $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$.

Θα δείξουμε ότι τα δυναμικά $(\vec{A}, \phi)$ δεν ορίζονται μονοσήμαντα. Θεωρούμε τα ακόλουθα νέα δυναμικά:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f \quad \text{και} \quad \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \qquad (7)$$

όπου $f(\vec{r}, t)$ μια αυθαίρετη συνάρτηση. Ισχύει ότι

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \left(\vec{A} + \vec{\nabla} f\right) = \vec{\nabla} \times \vec{A}' + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

δηλαδή τα νέα δυναμικά $\vec{A}', \phi$ δίνουν το ίδιο μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ και

$$-\vec{\nabla}\phi' - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla}\left(\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A} + \vec{\nabla} f\right) = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Οι σχέσεις (7) ορίζουν τους λεγόμενους μετασχηματισμούς βαθμίδας και περιγράφουν το σύνολο των φυσικά ισοδύναμων δυναμικών, μέσω μιας αυθαίρετης συνάρτησης f που συνήθως αποκαλείται συνάρτηση βαθμίδας. Με κατάλληλη εκλογή βαθμίδας μπορούμε να φθάσουμε σε δυναμικά φ και Α τέτοια ώστε:

$$\phi = 0 \quad \text{και} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \qquad (8)$$

που είναι μια εκλογή γνωστή ως *βαθμίδα Coulomb* και θα μας χρησιμεύσει στην διαδικασία της κβάντωσης [266-270].

Β. Το κβαντωμένο ΗΜ - Ανάπτυγμα του διανυσματικού δυναμικού σε επίπεδα κύματα

Στα πλαίσια της κλασσικής ηλεκτροδυναμικής το διανυσματικό δυναμικό είναι ένα δυναμικό του οποίου ο ρόλος στην κβαντική θεωρία είναι θεμελιώδης. Στην συνήθη κβαντομηχανική, το διανυσματικό δυναμικό είναι εκείνο που εμφανίζεται στην εξίσωση Schrodinger και όχι τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$.

Στην διαδικασία της κβάντωσης τού ίδιου του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου δεν μπορούμε να κάνουμε χωρίς αυτό. Το τυχόν ηλεκτρομαγνητικό πεδίο έχει μόνο δύο ανεξάρτητους βαθμούς ελευθερίας, αφού καθετί μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει του διανυσματικού δυναμικού, που έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας και επί πλέον ικανοποιεί την συνθήκη $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, η οποία περιορίζει τελικά τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας στους δύο (όσες και οι ανεξάρτητες κατευθύνσεις πόλωσης στα επίπεδα κύματα).

Τους ίδιους βαθμούς ελευθερίας διαθέτει τόσο το ηλεκτρικό, όσο και το μαγνητικό πεδίο αφού και τα δύο ικανοποιούν, στον ελεύθερο χώρο, την συνθήκη εγκαρσιότητας που εκφράζεται από τις σχέσεις $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ ή $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$.

Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε το $\vec{E}$ ως το ανεξάρτητο πεδίο και να προχωρήσουμε στην διαδικασία της κβάντωσης αναπτύσσοντάς το σε επίπεδα κύματα και ερμηνεύοντας τους συντελεστές με τον γνωστό τρόπο δηλαδή, ως τελεστές δημιουργίας και καταστροφής.

Για να υπολογίσουμε την ολική ενέργεια του πεδίου που δίνεται από την σχέση:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{8\pi}\int\left(E^2 + B^2\right)dV \qquad (9)$$

πρέπει το $\vec{B}$ να εκφρασθεί συναρτήσει του $\vec{E}$ και αυτό απαιτεί να λυθεί αναλυτικά η τέταρτη εξίσωση (4) του Maxwell, διαδικασία που όμως είναι λανθασμένη.

Τα πράγματα είναι ριζικά διαφορετικά αν το διανυσματικό δυναμικό θεωρηθεί ως το βασικό πεδίο. Τα $\vec{E}$ και $\vec{B}$ που θα εισαχθούν στην (9) εκφράζονται μέσω διαφορικών (τοπικών) σχέσεων του $\vec{A}$. Έτσι το πλήθος των ανεξάρτητων βαθμών ελευθερίας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι διασφαλισμένο και η διαδικασία της κβάντωσης μπορεί να προχωρήσει ανεμπόδιστα.

Το βασικό πεδίο για την κβάντωση είναι το $\vec{A}$, και το πρώτο βήμα είναι να γράψουμε το ανάπτυγμα:

$$A = \sum_{k,s} a_{k,s} f_{k,s} + a_{k,s}^{\dagger} f_{k,s}^{*}$$

το οποίο θα εισαχθεί στις εκφράσεις:

$$E = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} \quad \text{και} \quad B = \nabla \times A$$

δίνοντας δύο παρόμοια αναπτύγματα για τα πεδία Ε και Β, που με την σειρά τους θα εισαχθούν στην (9). Το αποτέλεσμα θα έχει την μορφή:

$$H = \sum_{k,s} a_{k,s}^{\dagger} a_{k,s} \omega_k \qquad (10)$$

Οι $a_{k,s}^{\dagger}$ και $a_{k,s}$ είναι οι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής φωτονίων με καθορισμένη ορμή και πόλωση. Θα πρέπει να διευκρινιστεί το θέμα της κανονικοποίησης των λύσεων της $f_{k,s}$. Ας θεωρήσουμε ότι είναι:

$$f_{k,s} = \mathcal{N}_k \hat{e}_{k,s} \frac{e^{i(k\cdot r - \omega_k t)}}{\sqrt{V}}$$

Για τον υπολογισμό της (9) θα χρειαστούμε το ολοκλήρωμα: $\int E^2\, dV$. Στην συνέχεια υπολογίζουμε την ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου:

$$E = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{k,s} a_{k,s} f_{k,s} + a_{k,s}^{\dagger} f_{k,s}^{*}\right) =$$

$$= \sum_{k,s} \frac{i\omega_k}{c} a_{k,s} f_{k,s} - \frac{i\omega_k}{c} a_{k,s}^{\dagger} f_{k,s}^{*} =$$

$$= \sum_{k,s} b_{k,s} f_{k,s} + b_{k,s}^{\dagger} f_{k,s}^{*}$$

όπου θέσαμε:

$$b_{k,s} = \frac{i\omega_k}{c} a_{k,s} \Rightarrow b_{k,s}^{\dagger} = -\frac{i\omega_k}{c} a_{k,s}^{\dagger}$$

Με αντικατάσταση στο ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\int E^2 dV = \sum_{k,s,k',s'} \int \left(b_{k,s} f_{k,s} + b_{k,s}^{\dagger} f_{k,s}^{*} \right) \cdot \left(b_{k',s'} f_{k',s'} + b_{k',s'}^{\dagger} f_{k',s'}^{*} \right) dV =$$

$$= \sum b_{k,s} b_{k',s'} \int f_{k,s} \cdot f_{k',s'} dV + \sum b_{k,s}^{\dagger} b_{k',s'}^{\dagger} \int f_{k,s}^{*} \cdot f_{k',s'}^{*} + \qquad (11)$$

$$+ \sum b_{k,s} b_{k',s'}^{\dagger} \int f_{k,s} \cdot f_{k',s'}^{*} dV + \sum b_{k,s}^{\dagger} b_{k',s'} \int f_{k,s}^{*} \cdot f_{k',s'} dV \qquad (12)$$

Οι όροι στην (11) δεν θα εμφανιστούν στο τελικό αποτέλεσμα, αφού η Χαμιλτονιανή είναι ανεξάρτητη του χρόνου. Για τα ολοκληρώματα στους όρους της (12) θα έχουμε:

$$\int f_{k,s}^{*} \cdot f_{k',s'} dV = \mathcal{N}_k \mathcal{N}_{k'} \hat{e}_{k,s} \cdot \hat{e}_{k',s'} e^{i(\omega_k - \omega_{k'})t} \frac{1}{V} \int e^{-ik \cdot r} e^{ik' \cdot r} dV = \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots = \mathcal{N}_k^2 \delta_{ss'} \delta_{k,k'}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την σχέση ορθογωνιότητας των επίπεδων κυμάτων μέσα στον όγκο V καθώς και την σχέση ορθογωνιότητας των δύο διανυσμάτων πόλωσης του κύματος k. Τελικά έχουμε:

$$\int E^2 dV = \sum_{k,s} \mathcal{N}_k^2 \frac{\omega_k^2}{c^2} \left(a_{k,s}^{\dagger} a_{k,s} + a_{k,s} a_{k,s}^{\dagger} \right)$$

και για την Χαμιλτονιανή του πεδίου καταλήγουμε:

$$H = \frac{1}{2\pi c^2} \sum_{k,s} \mathrm{N}_{k^2} \omega_k^2 a_{k,s}^{\dagger} a_{k,s} \qquad (13)$$

Αντιπαραβάλλοντας την (13) με την (10) παρατηρούμε ότι συμπίπτουν εάν οι σταθερές κανονικοποίησης, $\mathcal{N}_k$, επιλεχθούν να είναι:

$$\frac{1}{2\pi c^2} \mathcal{N}_k^2 \omega_k^2 = \omega_k \Rightarrow \mathcal{N}_k = \frac{c\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\omega_k}} \equiv c\sqrt{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} .$$

Εκτός από την ενέργεια (≡ Χαμιλτονιανή) η δεύτερη σημαντική ποσότητα ενός πεδίου είναι η ορμή του. Στην περίπτωση του ηλεκτρομαγνητικού η πεδιακή ορμή θα δίνεται από την έκφραση:

$$P = \frac{1}{c^2} \int S dV \qquad (14)$$

όπου

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}$$

είναι το γνωστό διάνυσμα Poynting που περιγράφει την ροή της ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας (πόση ενέργεια διασχίζει την μονάδα επιφάνειας ανά δευτερόλεπτο). Η ροή κάθε χωρικά κατανεμημένης φυσικής ποσότητας συνδέεται με την πυκνότητα κατανομής της μέσω της σχέσης:

Ροή= πυκνότητα x ταχύτητα

οπότε για την *πυκνότητα ορμής* του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (≡ ορμή ανά μονάδα όγκου) θα ισχύει η σχέση:

$$P(r) = \frac{S/c}{c} = \frac{S}{c^2}$$

απ' όπου η (14) προκύπτει με ολοκλήρωση σε όλο το χώρο.

Τις εκφράσεις τόσο για την ενέργεια όσο και την ορμή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, θα μπορούσαμε να τις είχαμε βρει ξεκινώντας από την Λαγκρανζιανή του και εφαρμόζοντας τους σχετικούς γενικούς τύπους της Noether.

Ο Λαγκρανζιανός φορμαλισμός δεν χρησιμοποιήθηκε πουθενά για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Η κβάντωσή του δεν έγινε με αφετηρία τις κανονικές μεταθετικές σχέσεις για το βασικό πεδίο, αλλά κατ' ευθείαν μέσω της άλγεβρας των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής.

C. Οι καταστάσεις του κβαντωμένου ΗΜ και το φυσικό τους περιεχόμενο

Ξεκινάμε με την κατάσταση κενού η οποία ορίζεται από την συνθήκη:

$$a_{k,s}\,|0>=0$$

από την οποία προκύπτουν οι σχέσεις

$$H\,|0>=0 \quad \text{και} \quad P\,|0>=0$$

που εκφράζουν το αυτονόητο γεγονός ότι η κατάσταση του κενού έχει μηδενική ενέργεια και μηδενική ορμή αφού κανένα φωτόνιο δεν είναι παρόν.

Για την κατάσταση ενός φωτονίου ορμής k και με διάνυσμα πόλωσης $\vec{e}_{k,s}$ θα έχουμε:

$$|k,s>=a^{\dagger}_{k,s}\,|0>$$

Αυτή η κατάσταση ικανοποιεί τις ακόλουθες εξισώσεις ιδιοτιμών

$$H\,|k,s>=\omega_k\,|k,s> \quad \text{και} \quad P\,|k,s>=k\,|k,s>$$

Οι εξισώσεις αυτές επιβεβαιώνουν ότι πράγματι η κατάσταση $|k,s>$ έχει καθορισμένη ενέργεια ίση με $E=\hbar\omega$ και ορμή $p=\hbar k$. Παρόμοια για τις καταστάσεις δύο φωτονίων με χαρακτηριστικά k_1,s_1 και k_2,s_2 θα έχουμε:

$$|k_1,s_1;k_2,s_2>=a^{\dagger}_{k_1,s_1}a^{\dagger}_{k_2,s_2}\,|0>$$

Λόγω μεταθετικότητας των τελεστών $a^{\dagger}_{k_1,s_1}$ και $a^{\dagger}_{k_2,s_2}$ ισχύει η ακόλουθη σχέση συμμετρίας:

$$|k_1,s_1;k_2,s_2>=|k_2,s_2;k_1,s_1>$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Θεωρία Ομάδων

"The universe is an enornous direct product of representations of symmetry groups".

Steven Weinberg

Steven Weinberg, Sheldon Glashow, and Abdus Salam were awarded the 1979 Nobel Prize in Physics for their incorporation of the weak and electromagnetic interactions into a single theory.

5.1. Εισαγωγή

Η Θεωρία Ομάδων είναι ένας από τους πλέον βασικούς κλάδους της Άλγεβρας με εφαρμογές εκτεινόμενες σε όλο το φάσμα των θετικών επιστημών.

Η έννοια της αλγεβρικής δομής της ομάδας εμφανίστηκε στα μαθηματικά στις αρχές του19ου αιώνα. Η ανάπτυξη της αντίστοιχης θεωρίας οφείλεται στην πρωτοποριακή συμβολή των μαθηματικών Gauss, Cauchy, Abel, Hamilton, Galois, Sylvester, Caley και άλλων. Όμως η θεωρία αυτή δεν βρήκε εφαρμογή στη φυσική παρά μόνο ύστερα από την θεμελίωση της κβαντομηχανικής το 1925.

Η θεωρία των ομάδων έγινε χρήσιμη στη φυσική από τη στιγμή που διαπιστώθηκε ότι οι μετασχηματισμοί συμμετρίας, που αφήνουν ένα φυσικό σύστημα αναλλοίωτο, αποτελούν ομάδα. Η έννοια της συμμετρίας δεν είναι βέβαια καινούργια. Οι γεωμετρικές συμμετρίες ήταν οι πρώτες που αναγνωρίστηκαν και η εφαρμογή της θεωρίας των ομάδων ήταν π.χ. στην κρυσταλλογραφία πιο άμεση. Η αναγνώριση των δυναμικών συμμετριών, δηλ. εκείνων που αφήνουν τις εξισώσεις της κίνησης αναλλοίωτες, ήρθε αργότερα [271].

Στα πλαίσια της κλασικής φυσικής τα αποτελέσματα της θεωρίας των ομάδων είναι σχεδόν προφανή. Στην κβαντομηχανική τα αποτελέσματα υπήρξαν σχεδόν αναπάντεχα. Εδώ οι συμμετρίες γεννούν μετασχηματισμούς, οι οποίοι αφήνουν αναλλοίωτο τον τελεστή του Hamilton. Η αναγνώριση τέτοιων συμμετριών διευκολύνει πολύ στη λύση προβλημάτων της κβαντομηχανικής.

Η θεωρία ομάδων αναγνωρίζεται σήμερα από όλους τους φυσικούς σαν πάρα πολύ χρήσιμο εργαλείο ιδιαίτερα στις εξής περιπτώσεις:

A. Όταν υπάρχει γεωμετρική συμμετρία, όπως π.χ. στις περιπτώσεις συμμετρικών μορίων ή στην κρυσταλλογραφία [272].
B. Όταν το σύστημα χαρακτηρίζεται από μεγάλο βαθμό δυναμικής συμμετρίας, όπως π.χ. το πρόβλημα του ατόμου του υδρογόνου. Με την θεωρία των ομάδων αποφεύγονται πολύπλοκες πράξεις.
C. Όταν θέλουμε να κατασκευάσουμε τις εξισώσεις κινήσεως. Τότε οι συμμετρίες χρησιμοποιούνται σαν περιορισμοί που πρέπει αναγκαστικά να πληρούν οι υπό κατασκευήν εξισώσεις, π.χ. οι συναρτήσεις Lagrange και Hamilton, που περιγράφουν συστήματα της κβαντικής θεωρίας, θα πρέπει να είναι αναλλοίωτες ως προς τους μετασχηματισμούς Lorentz της ειδικής θεωρίας σχετικότητας [271].
D. Όταν το σύστημα έχει κατά προσέγγιση συμμετρίες. Τότε η αναγνώριση και χρησιμοποίηση τους μας βοηθάει να διαλέξουμε την κατάλληλη βάση, η οποία μειώνει αρκετά τις διαστάσεις των αναγκαίων πινάκων

Τελειώνοντας την μικρή αυτή εισαγωγή πρέπει να πούμε ότι για τους φυσικούς παρουσιάζουν ενδιαφέρον οι ομάδες των μετασχηματισμών των φυσικών συστημάτων και ιδίως των συμμετρικών μετασχηματισμών, που αφήνουν ένα σύστημα αναλλοίωτο [273]. *Το*

σύνολο όλων των μετασχηματισμών συμμετρίας ενός συστήματος αποτελεί ομάδα. Γι' αυτό το λόγο είναι απαραίτητο να εισάγουμε τις βασικές μαθηματικές έννοιες που χρειάζονται για την κατανόηση των αναπαραστάσεων των αφηρημένων ομάδων.

5.2. Πεπερασμένες Ομάδες

5.2.1. Ορισμός της Ομάδας

Ας θεωρήσουμε το σύνολο των ακεραίων αριθμών $Z=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο αυτό σε σχέση με την πράξη της πρόσθεσης, έχει τις εξής ιδιότητες:

- Το άθροισμα δυο οποιονδήποτε ακεραίων είναι πάλι ακέραιος αριθμός: $(\forall n,m\in Z)[m+n\in Z]$
- Το σύνολο Z περιέχει ένα στοιχείο 0, το μηδέν, με την ιδιότητα: $(\forall n\in Z)[n+0=0+n=n]$
- Για κάθε στοιχείο $n\in Z$ υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο n' του Z τέτοιο ώστε $n+n'=n'+n=0$, (προφανώς $n'=-n$), δηλ.: $(\forall n\in Z)(\exists n'\in Z)[n+n'=n'+n=0]$
- Ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα: $(\forall n,m,p\in Z)[(n+m)+p=n+(m+p)]$

Υπάρχουν και άλλα σύνολα με τα ίδια χαρακτηριστικά, όπως είναι το σύνολο U(n) των μοναδιαίων πινάκων. (Ένας πίνακας U λέγεται μοναδιαίος όταν ο συζυγοανάστροφος του συμπίπτει με τον αντίστροφο του, δηλ.$U^t=U^{-1}$). Συγκεκριμένα:

- εάν A, B είναι δυο μοναδιαίοι πίνακες τότε το γινόμενο AB τους είναι πάλι ένας μοναδιαίος πίνακας.
- το σύνολο U(n) περιέχει τον ταυτοτικό πίνακα I με την ιδιότητα: AI=IA=A για κάθε $A\in U(n)$.
- Για κάθε πίνακα A υπάρχει ένας μοναδικός πίνακας A' τέτοιος ώστε $AA'=A'A=I$, (προφανώς ο A' είναι ο αντίστροφος του A, δηλ, $A'=A^{-1}$).
- Για τρεις οποιουσδήποτε πίνακες A,B,Γ ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα: (AB)Γ=A(BΓ)

Έτσι σε γενικό και αφηρημένο επίπεδο ο ορισμός της ομάδας έχει ως εξής:

<u>*Ορισμός 1:*</u> Ένα σύνολο $G\neq\varnothing$ εφοδιασμένο με μια πράξη εσωτερικής συνθέσεως, που θα την συμβολίζουμε με (*), που συνήθως είναι η πρόσθεση ή ο πολλαπλασιασμός, λέγεται ομάδα, (group), εάν ικανοποιούνται οι εξής ιδιότητες:

A. $(\forall\alpha,\beta,\gamma\in G)[(\alpha*\beta)*\gamma=\alpha*(\beta*\gamma)]$ προσεταιριστική ιδιότητα
B. $(\exists e\in G)(\forall\alpha\in G)[\alpha*e=e*\alpha=\alpha]$ ύπαρξη ουδετέρου στοιχείου
C. $(\forall\alpha\in G)\ (\exists\alpha'\in G)[\alpha*\alpha'=\alpha'*\alpha=e]$ ύπαρξη συμμετρικού στοιχείου

<u>*Ορισμός 2:*</u> Εάν η πράξη (*) της ομάδας G ικανοποιεί επί πλέον την ιδιότητα :

D. $(\alpha,\beta\in G)[\alpha*\beta=\beta*\alpha]$

τότε η ομάδα G λέγεται αντιμεταθετική ή αβελιανή.

<u>*Ορισμός 3:*</u> Μια ομάδα που περιέχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων ονομάζεται πεπερασμένη ομάδα, ενώ αν περιέχει άπειρο πλήθος στοιχείων ονομάζεται άπειρη ομάδα. Μια άπειρη ομάδα ονομάζεται διακεκριμένη ή συνεχής ανάλογα εάν το πλήθος των στοιχείων είναι

αριθμήσιμο ή συνεχές. Το πλήθος των στοιχείων μιας πεπερασμένης ομάδας ονομάζεται τάξη της ομάδας.

5.2.2. Η ομάδα των μετασχηματισμών

Το σύνολο όλων των μετασχηματισμών συμμετρίας ενός συστήματος αποτελεί ομάδα. Πρώτα παρατηρούμε ότι εάν εκτελέσουμε διαδοχικά δυο μετασχηματισμούς συμμετρίας, το σύστημα παραμένει αναλλοίωτο [273,274]. Έτσι η σύνθεση δυο οποιονδήποτε μετασχηματισμών συμμετρίας είναι πάλι ένας μετασχηματισμός συμμετρίας και επομένως το σύνολο των μετασχηματισμών συμμετρίας είναι κλειστό ως προς την σύνθεση των μετασχηματισμών. Μπορούμε να ορίσουμε το ταυτοτικό στοιχείο να είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός, που αφήνει το σύστημα αμετάβλητο και προφανώς ανήκει στο σύνολο. Για κάθε μετασχηματισμό συμμετρίας υπάρχει ο αντίστροφος του με την έννοια ότι ο αντίστροφος ξαναφέρνει το σύστημα στην αρχική του θέση. Τέλος η διαδοχική εφαρμογή των μετασχηματισμών συμμετρίας υπακούει την προσεταιριστική ιδιότητα.

5.2.3. Γεννήτορες πεπερασμένης ομάδας

Τα στοιχεία μιας ομάδας μπορούν να παράγονται από ορισμένα στοιχεία χρησιμοποιώντας τις δυνάμεις και τα γινόμενα αυτών των στοιχείων. Τα στοιχεία αυτά, των οποίων το πλήθος είναι το μικρότερο δυνατό λέμε ότι αποτελούν γεννήτορες της ομάδας.

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε μια ομάδα G τάξης n με γεννήτορες ένα μόνο στοιχείο A. Επειδή το A είναι στοιχείο της ομάδας τότε στοιχεία της ομάδας θα είναι και όλες οι δυνάμεις του. Έτσι παράγουμε νέα στοιχεία τα: A^2, A^3,… και η διαδικασία αυτή σταματά στο $A^n=A\cdot A\cdot A\cdots=E$ όπου n όπου n ο μικρότερος φυσικός αριθμός που ικανοποιεί τη σχέση. Οι μεγαλύτερες από την A^n δυνάμεις δεν δίνουν νέα στοιχεία διότι $A^{n+k}=A^k$. Τελικά, η ομάδα που επιθυμούμε να κατασκευάσουμε από το στοιχείο A θα περιέχει τα στοιχεία: $\{A,A^2,\ldots,A^{n-1}, A^n=E\}$, της οποίας η τάξη είναι n, ο δε γεννήτορας αυτής της ομάδας είναι το στοιχείο A. Για την ομάδα G={1,-1,I,-I} με νόμο εσωτερικής συνθέσεως τον πολλαπλασιασμό, το στοιχείο {i} είναι γεννήτορας, διότι οι δυνάμεις του γεννούν τα υπόλοιπα στοιχεία: $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$).

Ας κατασκευάσουμε τώρα την ομάδα από δυο στοιχεία A, B, που να ικανοποιούν τις σχέσεις: $A^2=B^3=(AB)^2=E$. Η ομάδα πρέπει να περιέχει τα στοιχεία E, A, B και B^2, (εφόσον $A^2=E$ και $B^3=E$), όπως επίσης και όλα τα γινόμενα των A, B και B^2, δηλαδή, τα AB, BA, AB^2, B^2A. Εξετάζουμε εάν τα στοιχεία AB και BA μετατίθενται. Έστω ότι μετατίθενται. Τότε από την σχέση $(AB)^2=E$ θα έχουμε: $E=ABAB=A(BA)B=A(AB)B=A^2B^2=B^2$, δηλαδή $E=B^2$ που δεν αληθεύει. Επομένως τα AB και BA είναι διαφορετικά στοιχεία. Τα δε στοιχεία AB^2, B^2A ισούνται με BA και AB αντίστοιχα, δηλαδή $AB^2=BA$ και $B^2A=AB$. Πράγματι, από τις σχέσεις:

$$A^2=E=(AB)^2 \Rightarrow A^2=(AB)(AB) \Rightarrow A=BAB \Rightarrow AB^2=BAB^3=BA \Rightarrow AB^2=BA$$

και επίσης από τις σχέσεις:

$$B^3=E=(AB)^2 \Rightarrow B^3=(AB)(AB) \Rightarrow B^2=ABA \Rightarrow B^2A=ABA^2 \Rightarrow B^2A=AB$$

Επομένως τα στοιχεία που έχουμε δημιουργήσει είναι τα εξής 6: E, A, B, B^2, AB, BA.

5.2.4. Κυκλικές ομάδες

Εάν A είναι ένα στοιχείο μιας ομάδας G, τότε όλες οι δυνάμεις του A: A^2, A^3,.... πρέπει να είναι στοιχεία της G, αλλά εάν η G είναι μια πεπερασμένη ομάδα τότε κάποια από αυτές τις δυνάμεις θα είναι το ταυτοτικό στοιχείο δηλαδή A^n =E. Ο μικρότερος θετικός ακέραιος n που ικανοποιεί την σχέση A^n=E, ονομάζεται τάξη του στοιχείου A.

Μια ομάδα, που γεννάται από ένα μόνο στοιχείο A, ονομάζεται κυκλική ομάδα. Μια τέτοια ομάδα είναι η ομάδα $\{A,A^2,\ldots,A^{n-1},A^n=E\}$.

5.2.5. Υποομάδες

Ένα υποσύνολο H μιας ομάδας G ονομάζεται υποομάδα της G εάν από μόνο του είναι ομάδα ως προς την ίδια πράξη εσωτερικής συνθέσεως. Κάθε ομάδα G έχει δυο τετριμμένες υποομάδες, το ταυτοτικό στοιχείο και την ίδια την ομάδα, δηλαδή όταν H={E} και H=G. Κάθε άλλη υποομάδα $H\neq E,G$ θα λέγεται γνήσια υποομάδα. Αποδεικνύεται ότι ένα υποσύνολο $H\subset G$ είναι υποομάδα εάν ισχύει:

$$(\forall x,y\in H)[xy^{-1}\in H]$$

5.2.6. Συζυγή στοιχεία και κλάσεις μιας ομάδας

Θεωρούμε δυο στοιχεία A, B μιας ομάδας G. Τα στοιχεία αυτά θα λέγονται συζυγή στοιχεία εάν υπάρχει ένα στοιχείο P της ομάδας τέτοιο ώστε να ικανοποιείται η σχέση: $B=P^{-1}AP$, η δε αντίστοιχη πράξη θα λέγεται μετασχηματισμός ομοιότητας, δηλαδή η μετάβαση από το στοιχείο A στο στοιχείο B.

Είναι προφανές ότι εάν $B=P^{-1}AP$, τότε και $A=Q^{-1}BQ$ με $Q=P^{-1}$ δηλαδή η σχέση της συζυγίας είναι συμμετρική, που σημαίνει ότι εάν ένα στοιχείο A είναι συζυγές προς το B, τότε και το B είναι συζυγές προς το A. Επίσης είναι και αυτοπαθής, διότι $A=E^{-1}AE$, (δηλαδή κάθε στοιχείο είναι συζυγές προς τον εαυτόν του), όπως και μεταβατική, δηλαδή εάν $A=P^{-1}BP$ και $B=Q^{-1}CQ$ τότε $A=P^{-1}(Q^{-1}CQ)P=(QP)^{-1}C(QP)$. Είναι δηλαδή σχέση ισοδυναμίας και σαν τέτοια χωρίζει την ομάδα σε υποσύνολα, που ονομάζονται **κλάσεις συζυγίας** ή απλώς κλάσεις. Τα στοιχεία κάθε κλάσης είναι μεταξύ τους συζυγή. Δεν είναι όμως συζυγή τα στοιχεία που ανήκουν σε διαφορετικές κλάσεις.

Το ταυτοτικό στοιχείο κάθε ομάδας αποτελεί από μόνο του κλάση, διότι για κάθε στοιχείο A ισχύει $A^{-1}EA=E$. Δεν μπορεί όμως το E να είναι συζυγές με οποιοδήποτε άλλο στοιχείο A, διότι τότε θα υπήρχε ένα στοιχείο P τέτοιο ώστε $A=P^{-1}EP$, που είναι αδύνατο διότι θα είχαμε A=E. Επίσης και κάθε άλλο στοιχείο αποτελεί από μόνο του κλάση εάν και μόνο εάν

μετατίθεται με όλα τα άλλα στοιχεία. Έτσι σε μια αβελιανή ομάδα κάθε στοιχείο αποτελεί και κλάση. Πράγματι $P^{-1}AP=P^{-1}PA=A$.

5.2.7. Κανονική υποομάδα και ομάδα πηλίκο

Εάν τα αριστερά και δεξιά συσύνολα μιας υποομάδας H ως προς όλα τα στοιχεία $X \in G$ συμπίπτουν, τότε η H ονομάζεται κανονική υποομάδα ή αναλλοίωτη υποομάδα της G, (normal, invariant), δηλαδή θα έχουμε:

$$XH=HX \Rightarrow H=X^{-1}HX \quad \forall X \in G$$

ή ισοδύναμα κάθε στοιχείο του XH θα ισούται με κάποιο στοιχείο του HX, οπότε:

$$XHi = HjX \Rightarrow X^{-1}Hj\,X=Hi \qquad 1 \le i,j \le h$$

Αλλά η σχέση αυτή είναι η σχέση συζυγίας μεταξύ των στοιχείων Hi και Hj και δείχνει ότι εάν ένα στοιχείο Hi ανήκει σε μια κανονική υποομάδα H της G, τότε όλα τα στοιχεία τα συζυγή του Hi ανήκουν και αυτά στην υποομάδα H. Τα παραπάνω συχνά διατυπώνονται λέγοντας ότι μια κανονική υποομάδα αποτελείται από κλάσεις. Το αντίστροφο επίσης αληθεύει, δηλαδή εάν μια υποομάδα αποτελείται από κλάσεις, τότε είναι κανονική. Επίσης η σχέση $H=X^{-1}HX$ $\forall X \in G$ δικαιολογεί την έκφραση αναλλοίωτη υποομάδα, με την έννοια ότι η υποομάδα H παραμένει αναλλοίωτη ως προς τους μετασχηματισμούς ομοιότητας.

Κάθε ομάδα G έχει τουλάχιστον δυο τετριμμένες κανονικές υποομάδες την {E} και την G. Μία ομάδα ονομάζεται απλή (simple) όταν περιέχει μόνο τις τετριμμένες κανονικές υποομάδες και ημιαπλή, (semi-simple), εάν περιέχει κανονική υποομάδα που δεν είναι αβελιανή.

Εάν H είναι μια κανονική υποομάδα της G, τότε το σύνολο όλων των συσυνόλων της H αποτελεί ομάδα με πράξη εσωτερικής συνθέσεως τον πολλαπλασιασμό συσυνόλων, που ορίζεται ως εξής: εάν XH και YH δυο συσύνολα, ορίζουμε σαν γινόμενο αυτών το συσύνολο ZH όπου Z=XY. Αποδεικνύεται ότι το ίδιο συσύνολο παίρνουμε εάν πολλαπλασιάσουμε κάθε στοιχείο του πρώτου συσυνόλου XH με κάθε στοιχείο του δεύτερου συσυνόλου YH. Η ομάδα αυτή των συσυνόλων ονομάζεται ομάδα πηλίκο ή παραγοντική ομάδα και συμβολίζεται με R=G/H.

5.2.8. Ισομορφισμός και ομομορφισμός ομάδων

Ο πολλαπλασιαστικός πίνακας μιας ομάδας, χαρακτηρίζει πλήρως την ομάδα και περιέχει όλες τις σχετικές πληροφορίες με την αναλυτική δομή της ομάδας. Όλες οι ομάδες, που έχουν όμοιους πολλαπλασιαστικούς πίνακες, έχουν την ίδια δομή. Οι ομάδες αυτές λέγονται ισομορφικές. Έτσι εάν G={E, A, B, C, …} και G'={E′, A′, B′, C′, …} είναι δυο ομάδες της ίδιας τάξεως g, με αντίστοιχες εσωτερικές πράξεις * και °, και υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση:

$$f: G \rightarrow G'$$

(που αναγκαστικά θα είναι και επί), με την ιδιότητα να διατηρεί τις πράξεις:

$$(\forall A,B\in G)[f(A*B)=f(A)\circ f(B)]$$

τότε οι ομάδες G και G' είναι ισομορφικές και η απεικόνιση f λέγεται ισομορφισμός. Ο πολλαπλασιαστικός πίνακας της G' μπορεί να προκύψει από τον πολλαπλασιαστικό πίνακα της G αντικαθιστώντας τα στοιχεία της G με τα αντίστοιχα στοιχεία της G'.

Εάν η απεικόνιση f δεν είναι αμφιμονοσήμαντη, αλλά διατηρεί τις πράξεις, τότε οι ομάδες G και G' λέγονται ομομορφικές και η απεικόνιση f ομομορφισμός. Στην περίπτωση αυτή οι δυο ομάδες δεν μπορεί να είναι της ίδιας τάξεως. Παράδειγμα ομομορφικών ομάδων είναι η ομάδα G και η ομάδα πηλίκο $R=G/H$.

5.2.9. Οι ομάδες των μεταθέσεων

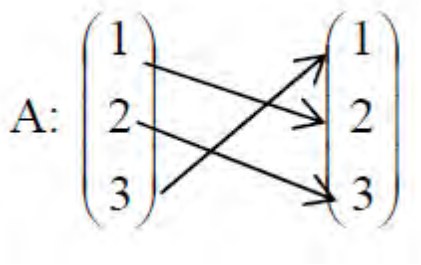
Οι ομάδες αυτές έχουν μεγάλο ενδιαφέρον για την Κβαντομηχανική και ιδίως για την περίπτωση των ταυτοτικών σωματίων. Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα αποτελούμενο από n ταυτοτικά αντικείμενα. Εάν εναλλάξουμε την θέση οποιωνδήποτε δυο ή περισσοτέρων από αυτά τα αντικείμενα, η κατάσταση που θα δημιουργηθεί δεν θα διακρίνεται από την αρχική. Μπορούμε να θεωρήσουμε κάθε τέτοια εναλλαγή, μετάθεση, σαν ένα μετασχηματισμό του συστήματος. Το σύνολο αυτό των μετασχηματισμών αποτελεί ομάδα, της οποίας η τάξη είναι n!, εφ' όσον όλες οι μεταθέσεις n αντικειμένων είναι n!. Η ομάδα αυτή ονομάζεται ομάδα μεταθέσεων n αντικειμένων ή συμμετρική ομάδα βαθμού n και συμβολίζεται με S_n.

Εάν το σύνολο αποτελείται από τρία αντικείμενα, τότε οι 3!=6 δυνατές μεταθέσεις είναι:

$$E=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix} \qquad F=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix} \tag{1}$$

Π.χ. η μετάθεση A είναι ένας μετασχηματισμός: κατά τον οποίον το αντικείμενο που είναι στη θέση 1 πηγαίνει στη θέση 2, το αντικείμενο που είναι στη θέση 2 πηγαίνει στη θέση 3 και το αντικείμενο που είναι στη θέση 3 πηγαίνει στη θέση 1.



Οι δείκτες 1,2,3 αναφέρονται στις θέσεις των τριών αντικειμένων παρά στα ίδια τα αντικείμενα. Το σύστημα έχει πιθανές "καταστάσεις", που τις συμβολίζουμε με:

$$\Psi_1=(1\ 2\ 3) \quad \Psi_2=(2\ 3\ 1) \quad \Psi_3=(3\ 1\ 2)$$

$$\Psi_4=(2\ 1\ 3) \quad \Psi_5=(3\ 2\ 1) \quad \Psi_6=(1\ 3\ 2)$$

πάνω στις οποίες μπορούν να επιδράσουν οι "πράξεις" (1) των μεταθέσεων. Π.χ.

$$C\Psi_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}(2\ 3\ 1)=(3\ 2\ 1)=\Psi_5$$

5.3. Αναπαραστάσεις Ομάδων

Οι έννοιες της ομάδας, του διανυσματικού χώρου, της άλγεβρας κ.λ.π. είναι αφηρημένες μαθηματικές δομές. Οποιοδήποτε συγκεκριμένο μαθηματικό σύστημα, με κατάλληλες ιδιότητες και πράξεις, λέμε ότι αποτελεί μια πραγμάτωση μιας αφηρημένης μαθηματικής δομής, εάν μπορούμε να ορίσουμε μια απεικόνιση ή αντιστοιχία μεταξύ της αφηρημένης δομής και του συγκεκριμένου μαθηματικού συστήματος, έτσι ώστε από την απεικόνιση αυτή, οι πράξεις της αφηρημένης δομής να "καθρεφτίζονται" στις πράξεις που έχουν ορισθεί στο μαθηματικό σύστημα.

Σε κάθε συγκεκριμένη πραγμάτωση μπορεί να συμβεί οι πράξεις, που έχουν ορισθεί στο μαθηματικό σύστημα, να έχουν περισσότερες ιδιότητες από ότι χρειάζονται για την πραγμάτωση. Αυτές οι επί πλέον ιδιότητες χαρακτηρίζουν την φύση της πραγμάτωσης.

Η έννοια της ομάδας, όπως είναι γνωστό, προήλθε από τις ιδιότητες των απεικονίσεων μεταξύ των συνόλων. Η έννοια της πραγμάτωσης μιας ομάδας στηρίζεται σ' αυτές τις απεικονίσεις και ο ορισμός της έχει ως εξής:

Έστω G μια ομάδα με στοιχεία A,B,C,..., S κάποιο σύνολο με στοιχεία x,y,z,... και M(S) το σύνολο των μετασχηματισμών του S:

$$M(S)=\{f\ /\ f:S\rightarrow S,\ f=\text{αμφιμονοσήμαντος και επί}\}$$

Εάν μπορούμε να βρούμε μια απεικόνιση T:

$$T:\ G \rightarrow M(S)$$

$$T:\ A\in G \rightarrow T\ (A)\ =T_A\in M(S)$$

με την ιδιότητα σε κάθε στοιχείο $A\in G$, αντιστοιχεί ένας μετασχηματισμός T_A του S, δηλαδή:

$$T_A:\ S \rightarrow S \qquad (1)$$

ο οποίος είναι αμφιμονοσήμαντος και επί, έτσι ώστε ή σύνθεση δυο τέτοιων μετασχηματισμών T_AT_B να υπάρχει και να είναι ο μετασχηματισμός T_{AB} δηλαδή:

$$T_AT_B=T_{AB} \qquad (2)$$

τότε λέμε ότι έχουμε μια πραγμάτωση, της ομάδας G μέσα από τους μετασχηματισμούς του S. Το περιεχόμενο της σχέσης (2) μπορεί να εκφρασθεί λέγοντας ότι ο εσωτερικός νόμος σύνθεσης της ομάδας G παριστάνεται από την σύνθεση των αντίστοιχων μετασχηματισμών. Επίσης μπορούμε να δούμε ότι, επειδή η σύνθεση των μετασχηματισμών αυτόματα

ικανοποιεί την προσεταιριστική ιδιότητα, απαιτείται ο εσωτερικός νόμος μιας ομάδας να είναι προσεταιριστικός.

Μια ενδιαφέρουσα κατηγορία πραγμάτωσης μιας ομάδας είναι αυτή που λέγεται αναπαράσταση ή πιο σωστά γραμμική αναπαράσταση. Η κατηγορία αυτή προκύπτει όταν το σύνολο S είναι ένας πραγματικός ή μιγαδικός γραμμικός διανυσματικός χώρος V, και οι μετασχηματισμοί $T_A, T_B, \ldots$ είναι μη ιδιάζοντες γραμμικοί μετασχηματισμοί (τελεστές) σ' αυτόν τον χώρο. Είναι γνωστό από την θεωρία των τελεστών ότι σε κάθε τελεστή, που επενεργεί σ' ένα διανυσματικό χώρο, αντιστοιχεί ένας τετραγωνικός πίνακας τάξης n ως προς κάποια βάση, όπου n=dimV η διάσταση του διανυσματικού χώρου.

Η έννοια της αναπαράστασης συνδυάζει δυο βασικές αλγεβρικές δομές: της ομάδας και του διανυσματικού χώρου. Από τον συνδυασμό αυτό προκύπτουν πίνακες, που αναπαριστούν τα στοιχεία της ομάδας. Η μελέτη αυτών των πινάκων γίνεται με την βοήθεια της θεωρίας των αναπαραστάσεων [273,274].

5.3.1. Αναπαράσταση πεπερασμένων ομάδων

Έστω G={E,A,B,C,...} μια πεπερασμένη ομάδα τάξης g με E το ταυτοτικό στοιχείο και M ένα σύνολο πινάκων, που είναι τετραγωνικοί, μη ιδιάζοντες και της ίδιας τάξης, έστω n. Το σύνολο των πινάκων M εκλέγεται έτσι ώστε μεταξύ της ομάδας G και του συνόλου M να υπάρχει μια αντιστοιχία:

$$T: G \rightarrow M$$

με την ιδιότητα:

$$(\forall A,B \in G)[T(A)T(B)=T(AB)]$$

όπου T(A)T(B) είναι το γινόμενο των πινάκων T(A) και T(B). Η απεικόνιση T, ουσιαστικά το σύνολο των πινάκων M, ονομάζεται αναπαράσταση της ομάδας G. Η τάξη των πινάκων του συνόλου M ονομάζεται διάσταση της αναπαράστασης. Οι πίνακες όμως αυτοί μπορούν να θεωρηθούν σαν αναπαραστάσεις κάποιων τελεστών, που επενεργούν σ' ένα διανυσματικό χώρο V διαστάσεως n. Υπενθυμίζουμε ότι ένας τελεστής T: V → V, ως προς μια βάση $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$, μπορεί να λάβει την μορφή τετραγωνικού πίνακα τάξης n με στοιχεία T_{ij}, που προκύπτουν από τις σχέσεις:

$$T_{e_i} = \sum_{j=1}^{n} T_{ij} e_j$$

Επομένως σε κάθε τελεστή T αντιστοιχεί ένας πίνακας T_{ij} ως προς μια δεδομένη βάση και κάθε στοιχείο A της ομάδας G μπορούμε να το δούμε σαν τελεστή T_A πάνω σ' ένα διανυσματικό χώρο.

Πρέπει κανείς να προσέξει ότι το σύνολο M των πινάκων δεν αποτελεί πάντα ομάδα ως προς το γινόμενο δυο πινάκων, διότι όλοι οι πίνακες του συνόλου M δεν χρειάζεται να είναι διαφορετικοί μεταξύ τους. Μπορεί σε δυο διαφορετικά στοιχεία A,B της ομάδας G να

αντιστοιχεί ο ίδιος πίνακας, δηλ. T(A)=T(B). Εάν όμως όλοι οι πίνακες είναι διακεκριμένοι, δηλ. η απεικόνιση T είναι αμφιμονοσήμαντη και επί, τότε το σύνολο των πινάκων M αποτελεί ομάδα και οι ομάδες G και M είναι ισομορφικές. Σ' αυτή την περίπτωση η αναπαράσταση λέγεται πιστή αναπαράσταση. Εάν όμως οι πίνακες δεν είναι διακεκριμένοι, τότε η απεικόνιση T δεν είναι αμφιμονοσήμαντη, είναι όμως ένας ομομορφισμός μεταξύ της ομάδας G και του συνόλου M και η αναπαράσταση ονομάζεται εκφυλισμένη ή μη πιστή.

Η απλούστερη αναπαράσταση είναι εκείνη που σε κάθε στοιχείο A της ομάδας G αντιστοιχεί τον ταυτοτικό πίνακα E οποιασδήποτε τάξης. Η αναπαράσταση αυτή ονομάζεται ταυτοτική αναπαράσταση της G και προφανώς είναι μη πιστή και χωρίς ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Εάν οι πίνακες μιας αναπαράστασης είναι μοναδιαίοι τότε η αναπαράσταση λέγεται μοναδιαία αναπαράσταση.

5.3.2. Ιδιότητες αναπαραστάσεων

Επειδή το ταυτοτικό στοιχείο E της ομάδας G έχει την ιδιότητα $EA=AE=A \ \forall A\in G$, θα πρέπει να ισχύει αντίστοιχη σχέση στο σύνολο των πινάκων M, που αποτελούν μια αναπαράσταση της G, δηλαδή:

$$T(E)T(A)=T(A)T(E)=T(A)$$

Όμως αυτή η σχέση ικανοποιείται μόνο όταν ο T(E) είναι ο ταυτοτικός πίνακας. Έτσι σε κάθε αναπαράσταση το ταυτοτικό στοιχείο E της ομάδας G θα αναπαρίσταται από τον ταυτοτικό πίνακα, τον οποίο θα συμβολίζουμε με το ίδιο γράμμα.

Εάν στη σχέση T(A)T(B)=T(AB) θέσουμε $B=A^{-1}$ βλέπουμε ότι:

$$T(A)T(A^{-1})=T(AA^{-1})=T(E)=E \Rightarrow T(A^{-1})=(T(A))^{-1}$$

δηλαδή η αναπαράσταση διατηρεί την πράξη της αντιστροφής.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δυο αναπαραστάσεις T^1 και T^2 της ομάδας G. Εάν υπάρχει ένας μη ιδιάζων πίνακας S έτσι ώστε:

$$(\forall A\in G)[\ T^1(A)=S^{-1}T^2(A)S\ ] \qquad (4)$$

τότε οι αναπαραστάσεις T^1 και T^2 ονομάζονται ισοδύναμες. Αυτό σημαίνει ότι οι πίνακες του πρώτου συνόλου M_1 μπορούν να προκύψουν από τους πίνακες του δεύτερου συνόλου M_2 με ένα μετασχηματισμό ομοιότητας. Τα παραπάνω αποδίδονται γραφικά από το εξής διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "S"] \arrow[d, "T^2(A)"'] & V \arrow[d, "T^1(A)"] \\ V \arrow[r, "S"] & V \end{tikzcd}$$

Εάν δυο αναπαραστάσεις δεν είναι ισοδύναμες θα λέγονται διακεκριμένες.

5.3.3. Αναλλοίωτοι υπόχωροι

Εάν ο διανυσματικός χώρος V έχει έναν γνήσιο υπόχωρο $U \subset V$ με την ιδιότητα να είναι κλειστός ως προς τους μετασχηματισμούς που ορίζουν τα στοιχεία της G, δηλαδή:

$$(\forall A \in G)(\forall v \in U)[\ T(A)v \in U\ ] \qquad (5)$$

τότε ο υπόχωρος U ονομάζεται αναλλοίωτος, υπόχωρος ως προς την ομάδα G και ο διανυσματικός χώρος V ονομάζεται αναγώγιμος ως προς την ομάδα G.

5.3.4. Αναγωγιμότητα μιας αναπαράστασης

Εάν ο U είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος διαστάσεως m του διανυσματικού χώρου V, που είναι διαστάσεως n, τότε ως προς κάποια κατάλληλη βάση οι πίνακες της αναπαράστασης μπορούν να λάβουν την μορφή:

$$T(A)=\left(\begin{array}{c|c} D^1(A) & \mathbf{0} \\ \hline X(A) & D^2(A) \end{array}\right)$$

όπου $D^1(A)$, $D^2(A)$ είναι τετραγωνικοί πίνακες τάξης m, n-m αντίστοιχα, ο X(A) είναι τύτου και $(n-m)\times m$ και ο 0 ο μηδενικός πίνακας τύπου $m\times(n-m)$.

Εάν συμβαίνουν όλα τα παραπάνω, τότε λέμε ότι η T είναι μια αναγώγιμη αναπαράσταση. Η αναγωγιμότητα μιας αναπαράστασης συνδέεται με την ύπαρξη ενός γνήσιου αναλλοίωτου υποχώρου U του αρχικού χώρου V.

Θεώρημα 1: Κάθε αναπαράσταση T μιας πεπερασμένης ομάδας G, της οποίας οι πίνακες μπορεί να μην είναι μοναδιαίοι, είναι ισοδύναμη με την βοήθεια ενός μετασχηματισμού ομοιότητας, με μια αναπαράσταση Γ μοναδιαίων πινάκων. Συγκεκριμένα υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας W τέτοιος ώστε:

$$\Gamma(A)=W^{-1}T(A)W \qquad \forall A \in G$$

όπου Γ(A) μοναδιαίος πίνακας. Η αναπαράσταση Γ(A) ονομάζεται μοναδιαία.

5.3.5. Ομάδες πινάκων

Οι πίνακες παίζουν έναν πολύ βασικό ρόλο στις αναπαραστάσεις των ομάδων γι' αυτό πρέπει να μελετηθούν ξεχωριστά.

Θεωρούμε το σύνολο $M(n\times n)$ όλων των ομαλών πινάκων $n\times n$. (Ένας πίνακας λέγεται ομαλός ή μη ιδιάζων, αν έχει ορίζουσα διάφορη του μηδενός, έτσι ώστε να υπάρχει ο αντίστροφός του και επομένως το σύνολο των ομαλών πινάκων να αποτελεί ομάδα ως προς την πράξη του πολλαπλασιασμού των πινάκων). Η ομάδα αυτή είναι πολύ γενική για να είναι χρήσιμη, ενώ ορισμένες υποομάδες της είναι πολύ σημαντικές τόσο στα μαθηματικά όσο και στη φυσική [275,276]. Οι υποομάδες αυτές ταξινομούνται ως εξής:

1. *Γενική Γραμμική Ομάδα GL(n), (General Linear Group).* Η ομάδα αυτή χωρίζεται σε δυο κατηγορίες ανάλογα με το αν τα στοιχεία των πινάκων είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί:
   - *Α.1.Πραγματική Γενική Γραμμική Ομάδα GL(n,R),* αποτελείται από όλους τους ομαλούς πίνακες A_{nxn} με πραγματικά στοιχεία. Ο αριθμός των ανεξαρτήτων παραμέτρων κάθε πίνακα είναι n^2, αφού ο μόνος περιορισμός που οφείλουν να ικανοποιούν είναι $\det A \neq 0$.
   - *Μιγαδική Γενική Γραμμική Ομάδα GL(n,C),* αποτελείται από τους ομαλούς πίνακες A_{nxn} με μιγαδικά στοιχεία. Ο αριθμός των ανεξαρτήτων παραμέτρων είναι$2n^2$.
2. Ειδική Γραμμική Ομάδα SL(n), (Special Linear Group). Χωρίζεται σε δυο κατηγορίες:
   - *Πραγματική Ειδική Γραμμική Ομάδα SL(n,R).* Αποτελείται από τους ομαλούς πίνακες με πραγματικά στοιχεία των οποίων η ορίζουσα είναι +1. Ο αριθμός των ανεξαρτήτων παραμέτρων είναι n^2-1.
   - *Μιγαδική Ειδική Γραμμική Ομάδα SL(n,C).* Αποτελείται από τους ομαλούς πίνακες με μιγαδικά στοιχεία των οποίων η ορίζουσα είναι +1. Ο αριθμός των ανεξαρτήτων παραμέτρων είναι $2(n^2-1)$.
3. *Μοναδιαία Ομάδα U(n) (Unitary Group).* Αποτελείται από τους μοναδιαίους, πίνακες που διατηρούν το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων και κατά συνέπεια το μέτρο ενός διανύσματος, στον μιγαδικό χώρο, δηλ. $U^+U=E$. Η σχέση αυτή γράφεται:

$$\sum_{k=1}^{n} U_{ik}^{*} U_{kj} = \delta_{ij} \quad \text{ή} \quad \sum_{k=1}^{n} U_{ik} U_{jk}^{*} = \delta_{ij}$$

   από την οποία συμπεραίνουμε ότι:

   α) οι παράμετροι της ομάδας U(n) είναι φραγμένες $|U_{ij}|<1$

   β) ο αριθμός των ανεξαρτήτων παραμέτρων είναι: $2n^2 - n^{-2} - 2\binom{n}{2} = n^2$

4. *Ειδική Μοναδιαία Ομάδα SU(n).* Αποτελείται από τους πίνακες U(n) με ορίζουσα $\det U=+1$. Ο αριθμός των ανεξαρτήτων παραμέτρων είναι n^2-1
5. Ορθογώνια Ομάδα O(n). Αποτελείται από το σύνολο των πινάκων O που ικανοποιούν την σχέση: $O^tO=E$. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:
   - Τα στοιχεία των πινάκων είναι πραγματικοί αριθμοί. Τότε η ομάδα συμβολίζεται με O(n,R) και ο αριθμός των ανεξαρτήτων παραμέτρων είναι:

$$2n^2 - n - \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

   - Τα στοιχεία των πινάκων είναι μιγαδικοί αριθμοί. Τότε η ομάδα συμβολίζεται με O(n,C) και ο αριθμός των ανεξαρτήτων παραμέτρων είναι:

$$2n^2 - 2n - 2\binom{n}{2} = n(n-1)$$

Για την ορθογώνια ομάδα, επειδή ισχύει detOt=detO και $O^tO=E$, έπεται ότι detO=±1, δηλαδή η ομάδα αυτή χωρίζεται σε δυο υποσύνολα και δεν μπορούμε να πάμε από το ένα στο άλλο κατά συνεχή τρόπο.

6. *Ειδική Ορθογώνια υποομάδα SO(n).* Αποτελείται από τους ορθογώνιους πίνακες με ορίζουσα +1. Χωρίζεται στις εξής δυο υποομάδες:
   - *Ειδική Μιγαδική Ορθογώνια υποομάδα SO(n,C).* Αποτελείται από το σύνολο των ορθογωνίων πινάκων O(n,C) με στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς και ορίζουσα +1 και αποτελεί μια υποομάδα της O(n,C) με αριθμό ανεξαρτήτων παραμέτρων n(n-1)-1.
   - *Ειδική Πραγματική Ορθογώνια υποομάδα SO(n,R).* Αποτελείται από το σύνολο των ορθογωνίων πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς και ορίζουσα +1 και αποτελεί μια υποομάδα της O(n,R), με αριθμό ανεξαρτήτων παραμέτρων n(n-1)/2-1.

   Οι ορθογώνιοι πίνακες με ορίζουσα -1 δεν αποτελούν ομάδα, διότι δεν περιέχουν τον ταυτοτικό πίνακα.

   Οι ορθογώνιοι πίνακες O(n,R) διατηρούν το εσωτερικό γινόμενο σ' ένα πραγματικό διανυσματικό χώρο, διότι $<Ox|Oy>=<x|O^tOy>=<x|y>$. Άμεση συνέπεια είναι ότι αφήνουν αναλλοίωτη την ευκλείδεια απόσταση : $<x|x>=\Sigma xi$. Ανάλογη ιδιότητα δεν έχουν οι μιγαδικοί πίνακες O(n,C).

7. *Συμπλεκτική ομάδα.* Αποτελείται από τους πίνακες που αφήνουν αναλλοίωτη μια αντισυμμετρική διγραμμική μορφή. Εάν για μια αντισυμμετρική μορφή χρησιμοποιήσουμε την αντίστοιχη υπερβολική βάση, τότε ένας πίνακας M είναι συμπλεκτικός εάν έχουμε:

$$<M_x|M_y>_\alpha=<x|y>_\alpha=xJ_y$$

   Οι πίνακες αυτές επιδρούν μόνο σε χώρους άρτιας διάστασης και χωρίζονται σε δυο υποομάδες Sp(2n,R) και Sp(2n,C) για πραγματικούς και μιγαδικούς χώρους αντίστοιχα. Ο αριθμός των ανεξαρτήτων παραμέτρων είναι:

$$2n^2\binom{2n}{2}=n(2n+1) \quad \text{για την Sp(2n,R)}$$

$$2(2n^2)-2\binom{2n}{2}=2n(2n+1) \quad \text{για την Sp(2n,C)}$$

   Οι πίνακες M της συμπλεκτικής ομάδας Sp(2n) ικανοποιούν την σχέση $T^tMT=E$ με T οποιοδήποτε πίνακα και E ο ταυτοτικός πίνακας. Εάν οι συνιστώσες των διανυσμάτων x και y είναι:

$$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{-1},x_{-2},\ldots,x_{-n}) \quad \text{και} \quad y=(y_1,y_2,\ldots,y_n,y_{-1},y_{-2},\ldots,y_{-n})$$

   τότε η έκφραση: $xJ_\psi=\sum_{i=1}^{n}x_i\psi_{-i}-x_{-i}\psi_i$ είναι αναλλοίωτη.

5.4. Συνεχείς ομάδες

Μια άλλη κατηγορία ομάδων με μεγάλο ενδιαφέρον και με σημαντικές εφαρμογές είναι οι άπειρες ομάδες [275,276], στις οποίες το πλήθος των στοιχείων είναι άπειρο. Εδώ διακρίνουμε δυο
κατηγορίες:
Α) τις διακεκριμένες ομάδες, (το πλήθος των στοιχείων είναι άπειρο αλλά αριθμήσιμο) και
Β) τις συνεχείς ομάδες, (το πλήθος των στοιχείων είναι άπειρο αλλά μη αριθμήσιμο).

5.4.1. Πεπερασμένες συνεχείς ομάδες

Τα στοιχεία μιας συνεχούς ομάδας μπορούν να χαρακτηρισθούν από ένα σύνολο πραγματικών παραμέτρων $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, των οποίων μια τουλάχιστον μεταβάλλεται κατά συνεχή τρόπο σ' ένα ορισμένο διάστημα. Το σύνολο των παραμέτρων πρέπει να είναι ικανό και αναγκαίο για να προσδιορίσει όλα τα στοιχεία της ομάδας. Έστω r, $(1 \le r \le n)$ το πλήθος των συνεχών παραμέτρων. Εάν ο αριθμός αυτός είναι πεπερασμένος, τότε η συνεχής ομάδα λέγεται πεπερασμένη συνεχής ομάδα και το r ονομάζεται τάξη της συνεχούς ομάδας.

5.4.2. Τοπολογικές ομάδες

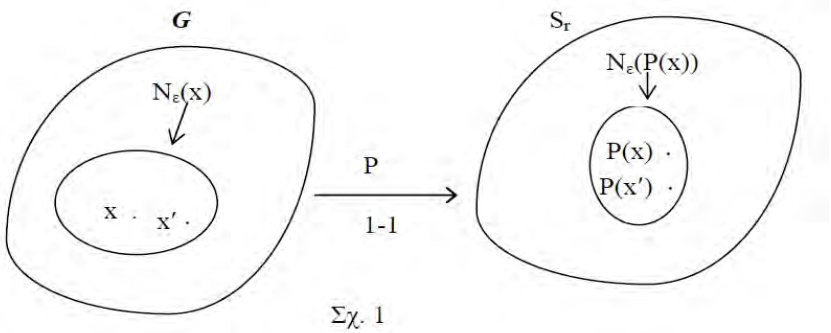
Επειδή η μετάβαση από ένα στοιχείο μιας συνεχούς ομάδας σ' ένα άλλο γίνεται κατά συνεχή τρόπο, είναι επιθυμητό να εισάγουμε μια τοπολογία στην ομάδα έτσι ώστε να μπορούμε να μιλάμε για την συνέχεια του νόμου εσωτερικής συνθέσεως, θεωρώντας τον σαν απεικόνιση δυο μεταβλητών. Για απλότητα θα περιοριστούμε σε ομάδες των οποίων τα στοιχεία μπορούν να τεθούν σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τα σημεία ενός υποσυνόλου S_r ενός r-διάστατου πραγματικού χώρου R^r εσωτερικού γινομένου από το οποίο ορίζεται μια norm $||\cdots||$. Το υποσύνολο S_r θα ονομάζεται παραμετρικός χώρος . Έστω P(x) το σημείο του S_r, που αντιστοιχεί στο στοιχείο x της ομάδας *G*, δηλαδή η εικόνα του x στο Σχήμα 1.

Θεωρούμε τώρα μια ε-περιοχή $N_\varepsilon(P(x))$ του σημείου P(x) στο S_r,

$$N_\varepsilon(P(x))=\{P(x')\in S_r \ / \ ||P(x')-P(x)||<\varepsilon\} \qquad (6)$$

όπως και μια ε-περιοχή Νε(x) του στοιχείου x:

$$N_\varepsilon(x)=\{x'\in \boldsymbol{G} \ / \ ||P(x')-P(x)||<\varepsilon\} \qquad (7)$$



Σχήμα 1:Ορισμός ε-περιοχής

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε την συνέχεια του νόμου εσωτερικής συνθέσεως όπως και την συνέχεια της αντιστροφής των στοιχείων της ομάδας. Θεωρούμε την σύνθεση των στοιχείων x_1 και x_2:

$$x_1x_2=x_3 \qquad (8)$$

Ο νόμος εσωτερικής συνθέσεως λέγεται **συνεχής ως προς** x_2 εάν:

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)[x\in N_\delta(x_2) \rightarrow x_1x\in N_\varepsilon(x_3)] \qquad (9)$$

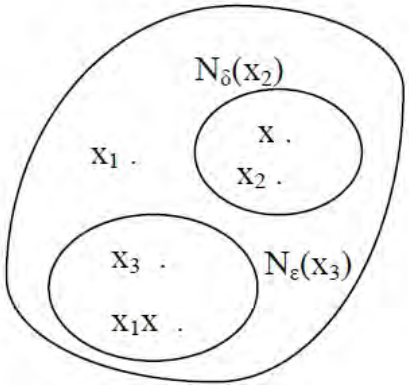
Δηλαδή $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)[||P(x)-P(x_2)||<\delta \rightarrow ||P(x_1x)-P(x_3)||<\varepsilon]$ (10)

Με όμοιο τρόπο ορίζεται η συνέχεια του νόμου συνθέσεως ως προς x_1. Η διαισθητική ερμηνεία των παραπάνω σχέσεων είναι η εξής: Μια μικρή αλλαγή στους παράγοντες του γινομένου x_1x_2 επιφέρει μικρή αλλαγή στο αποτέλεσμα x_3 (Σχήμα 2).

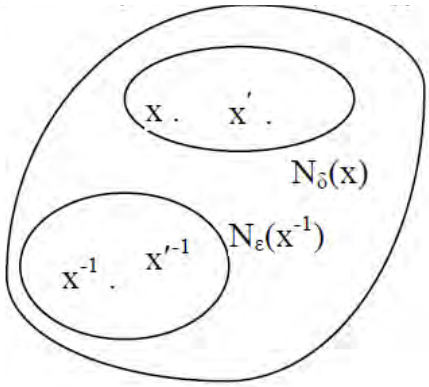
Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε την συνέχεια της αντιστροφής των στοιχείων της ομάδας:

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)[x'\in N_\delta(x) \rightarrow x'^{-1}\in N\varepsilon(x^{-1})]$$

με την διαισθητική ερμηνεία ότι μια μικρή μεταβολή στο στοιχείο x επιφέρει μικρή μεταβολή στο αντίστροφο στοιχείο x^{-1} (Σχήμα 3).



Σχήμα 2



Σχήμα 3

Σαν τοπολογική ομάδα ορίζουμε τώρα μια ομάδα στην οποία οι νόμοι της εσωτερικής συνθέσεως και της αντιστροφής των στοιχείων είναι συνεχείς απεικονίσεις.

5.4.3. Συνεκτική και Συμπαγής ομάδα

Θεωρούμε δυο τυχαία στοιχεία x_1 και x_2 μιας τοπολογικής ομάδας *G* με εικόνες $P(x_1)$ και $P(x_2)$ στον παραμετρικό χώρο S_r. Εάν μπορούμε να συνδέσουμε τα σημεία $P(x_1)$ και $P(x_2)$ με μια καμπύλη, που κείται εξ' ολοκλήρου στον παραμετρικό χώρο S_r, τότε ο παραμετρικός χώρος λέγεται συνεκτικός, διαφορετικά λέγεται μη συνεκτικός.

Έστω *G* μια ομάδα, της οποίας ο παραμετρικός χώρος είναι συνεκτικός και θεωρούμε μια καμπύλη C, που συνδέει τα σημεία $P(x_1)$ και $P(x_2)$. Το σύνολο των στοιχείων x της *G*, των οποίων οι εικόνες P(x) είναι σημεία της καμπύλης C, θα ονομάζεται καμπύλη που συνδέει τα στοιχεία x_1 και x_2.

Μια ομάδα *G* λέγεται συνεκτική ομάδα εάν για δυο δεδομένα στοιχεία της *G* υπάρχει μια καμπύλη, που συνδέει τα δυο αυτά στοιχεία, δηλαδή όταν ο παραμετρικός χώρος είναι συνεκτικός. Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η ιδιότητα της συνεκτικότητας είναι διαφορετική από την συνέχεια της ομάδας, η οποία εξαρτάται από την συνεχή μεταβολή μιας ή περισσοτέρων παραμέτρων της ομάδας. Έτσι μια συνεχής ομάδα μπορεί να μην είναι συνεκτική. Και αυτό συμβαίνει όταν ο παραμετρικός χώρος είναι μη συνεκτικός, όταν π.χ. αποτελείται από δυο ή περισσότερα διακεκριμένα υποσύνολα έτσι ώστε κάθε υποσύνολο να είναι συνεκτικό αλλά να μην μπορούμε να πάμε από το ένα υποσύνολο στο άλλο χωρίς να βγούμε έξω από το παραμετρικό χώρο.

Μια συνεχής συνεκτική ομάδα λέγεται πολλαπλά συνεκτική αν υπάρχουν κλειστές καμπύλες στον παραμετρικό χώρο S_r, οι οποίες δεν μπορούν να συσταλούν και να εκφυλιστούν σε σημείο χωρίς να εγκαταλείψουν τον χώρο ή ισοδύναμα όταν υπάρχουν καμπύλες οι οποίες δεν μπορούν να παραμορφωθούν κατά συνεχή τρόπο για να συμπέσουν. Αυτό, διαισθητικά, συμβαίνει όταν ο χώρος περιέχει κενά. Εάν τα κενά είναι σε πλήθος k, τότε ο χώρος λέγεται k-πολλαπλά συνεκτικός.

Εάν μια τοπολογική ομάδα έχει r συνεχείς παραμέτρους και n-r διακεκριμένες, ο παραμετρικός της χώρος S_r θα αποτελείται από n-r διακεκριμένους υπόχωρους. Στην περίπτωση αυτή και η ομάδα *G* θα αποτελείται από n-r διακεκριμένα υποσύνολα, τα οποία βρίσκονται σε αμφιμονοσύμαντη αντιστοιχία με τους n-r διακεκριμένους υπόχωρους του S_r. Τις αναλυτικές ιδιότητες της ομάδας τις μελετάμε μόνο στο υποσύνολο της ομάδας που περιέχει το ουδέτερο στοιχείο.

Τέλος, μια τοπολογική ομάδα λέγεται συμπαγής αν ο παραμετρικός χώρος της είναι συμπαγής χώρος, δηλ. κλειστός και φραγμένος.

5.4.4. Ομάδες Lie

Η εξάρτηση των στοιχείων x_1, x_2, κ.λ.π. μιας τοπολογικής ομάδας G από τις r συνεχείς παραμέτρους μπορεί να γραφεί αναλυτικά:

$$x_1 \equiv x_1(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)\ ,\ x_2 \equiv x_2(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r) \text{ κ.λ.π.}$$

Έστω $x_1x_2=x_3\equiv x_3(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_r)$ και $x_1^{-1}=x_4\equiv x_4(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_r)$

Οι παράμετροι των x_3 και x_4 μπορούν να εκφραστούν σαν συναρτήσεις των παραμέτρων των x_1 και x_2, δηλαδή:

$$\gamma_i\equiv\gamma_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_r\ ;\beta_1,\ldots,\beta_r)$$

$$\delta_i\equiv\delta_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\ i=1,\ldots,r \qquad (11)$$

Μια τοπολογική ομάδα G ονομάζεται Lie-ομάδα r διαστάσεων αν υπάρχει μια γειτονιά N του ουδέτερου στοιχείου e έτσι ώστε οι συνεχείς παράμετροι του γινομένου δυο στοιχείων και οι παράμετροι του αντιστρόφου ενός στοιχείου της N να είναι συνεχείς διαφορίσιμες συναρτήσεις των παραμέτρων των στοιχείων, (δηλαδή αναλυτικές συναρτήσεις). Πιο

συγκεκριμένα τα γ_i και δ_i των σχέσεων (11) είναι αναλυτικές συναρτήσεις των α_i και β_i για στοιχεία της γειτονιάς N, με την προϋπόθεση τα x_3, $x_4 \in N$ όταν x_1, $x_2 \in N$.

Για απλότητα και χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να επιλέξουμε τις συνεχείς παραμέτρους μιας Lie-ομάδας έτσι ώστε η εικόνα του ουδέτερου στοιχείου e της ομάδας να είναι η αρχή των αξόνων του παραμετρικού χώρου:

$$e \equiv x(0,0,\ldots,0)$$

Με αυτή την παραμετρικοποίηση, ένα στοιχείο x, γειτονικό του ταυτοτικού, μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor γύρω από την αρχή, και αυτό μπορεί να γίνει χάρη των αναλυτικών ιδιοτήτων της Lie-ομάδας ως εξής:

$$\begin{aligned} x(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_r) &= x(0,0,0,\ldots,0) + \sum_{\kappa=1}^{r} \alpha_\kappa \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_\kappa}\right)_{\alpha_\kappa=0} + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{\kappa=1}^{r}\sum_{\lambda=1}^{r} \alpha_\kappa \alpha_\lambda \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_\kappa}\right)_{\alpha_\kappa=0} \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_\lambda}\right)_{\alpha_\lambda=0} + \ldots \end{aligned} \qquad (12)$$

Εάν περιοριστούμε μέχρι των όρων πρώτης τάξης και θέσουμε:

$$X_\kappa = iJ_k = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_\kappa}\right)_{\alpha_\kappa=0} \qquad (13)$$

με $i^2=-1$ έχουμε:

$$x(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_r) = x(0,0,0,\ldots,0) + i\sum_{\kappa=1}^{r} \alpha_\kappa J_\kappa$$

Θεωρούμε το στοιχείο x, που αντιστοιχεί στις τιμές των παραμέτρων:

$$\alpha_i = \begin{cases} \varepsilon & i = \kappa \\ 0 & i \neq \kappa \end{cases} \qquad \text{με } \varepsilon = \text{απειροστό}$$

Δηλαδή: $x(0,\ldots,\varepsilon,\ldots 0) = x(0,0,0,\ldots,0) + i\varepsilon J_\kappa = e + i\varepsilon J_\kappa$

Για ένα οποιοδήποτε άλλο στοιχείο της μορφής $x=x(0,\ldots,\alpha_\kappa,\ldots 0)$ "απομακρυσμένο" από το ουδέτερο στοιχείο e, μπορούμε να θέσουμε:

$$\alpha_\kappa = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0 \\ N\to\infty}} (\varepsilon N)$$

και επειδή:

$$\begin{aligned} x(0,\ldots,\varepsilon N,\ldots 0) &= x(0,\ldots,\varepsilon,\ldots 0)x(0,\ldots,\varepsilon,\ldots 0)\ldots\ldots x(0,\ldots,\varepsilon,\ldots 0) = \\ &= (e+i\varepsilon J_\kappa)(e+i\varepsilon J_\kappa)\ldots\ldots(e+i\varepsilon J_\kappa) = (e+i\varepsilon J_\kappa)^N \end{aligned}$$

θα έχουμε:

$$x(0,\ldots,\alpha_\kappa,\ldots 0) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0 \\ N\to\infty}} x(0,\ldots,\varepsilon N,\ldots 0) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0 \\ N\to\infty}} (e+i\varepsilon J_\kappa)^N =$$

$$= \lim_{N\to\infty}(e + i(\frac{\alpha_k}{N})J_\kappa)^N = \exp(i\alpha_\kappa J_\kappa)$$

Επομένως: $x=x(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)= \exp(i\alpha_1 J_1)\ \exp(i\alpha_2 J_2)\ldots\ \exp(i\alpha_r J_r)$. (14)

Έτσι όλα τα στοιχεία της Lie-ομάδας, που ανήκουν στο υποσύνολο που περιέχει το ταυτοτικό στοιχείο e, μπορούν να προκύψουν από τους απειροστούς τελεστές J_κ δίνοντας κατάλληλες τιμές στις παραμέτρους $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$. Γι' αυτό τον λόγο οι τελεστές Jκ λέγονται γεννήτορες της ομάδας. Μια Lie-ομάδα με r συνεχείς παραμέτρους έχει r γεννήτορες. Με την υπόθεση ότι οι τελεστές J_κ δρουν με την σειρά της εξισώσεως (14), μπορούμε να γράψουμε:

$$x(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_r) = \exp(\sum_{\kappa=1}^{r} i\alpha_\kappa J_\kappa) \qquad (15)$$

Τα απειροστά στοιχεία μιας Lie-ομάδας αποτελούν από μόνα τους μια αβελιανή ομάδα. Πράγματι έστω:

$$x_\kappa \equiv x(0,\ldots,\varepsilon\kappa,\ldots,0)=e+i\varepsilon_\kappa J_\kappa$$

$$x_\lambda \equiv x(0,\ldots,\varepsilon\lambda,\ldots,0)=e+i\varepsilon_\lambda J_\lambda$$

τότε: $x_\kappa x_\lambda = x_\lambda x_\kappa = e+i(\varepsilon_\kappa J_\kappa+\varepsilon_\lambda J_\lambda)$ που είναι και αυτό ένα απειροστό στοιχείο της Lie-ομάδας G.

5.4.5. Αναπαράσταση μιας συνεχούς ομάδας

Θεωρούμε ένα σύνολο πινάκων M(x), που είναι μια αναπαράσταση της Lie-ομάδας G, δηλαδή $M(x_1)M(x_2)=M(x_3)$ όταν $x_1x_2=x_3$ και $M(x)M(x')=M(e)$ όταν $xx'=e$. Η αναπαράσταση M λέγεται συνεχής αναπαράσταση όταν:

$$\lim_{x\to x_0} M(x) = M(x_0)$$

Η ομάδα G είναι ομομορφική προς την ομάδα M των πινάκων, οι οποίοι μπορούν να προσδιοριστούν από τις ίδιες παραμέτρους που προσδιορίζουν τα στοιχεία της G.

Εάν περιοριστούμε στην μελέτη των συνεχών αναπαραστάσεων μιας συμπαγούς ομάδας, τότε ισχύουν τα παρακάτω σημαντικά θεωρήματα:

Θεώρημα 1: Κάθε αναπαράσταση έχει μια ισοδύναμη αναπαράσταση, της οποίας οι πίνακες είναι μοναδιαίοι και η αναπαράσταση λέγεται μοναδιαία.

Θεώρημα 2: Κάθε μοναδιαία αναπαράσταση είναι πλήρως αναγωγίσιμη, δηλαδή κάθε πίνακας της αναπαράστασης μπορεί να γραφεί υπό block μορφή π.χ.:

$$M(x) = \begin{pmatrix} M^1(x) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & M^s(x) \end{pmatrix}$$

Θεώρημα 3: Κάθε μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση είναι πεπερασμένης διαστάσεως.

5.4.6. Η Lie άλγεβρα μιας Lie ομάδας

Θεωρούμε μια Lie-ομάδα *G* με r παραμέτρους α_1, α_2,..., α_r, και με r γεννήτορες J_1, J_2,...,J_r. Από τα προηγούμενα είδαμε ότι κάθε στοιχείο της Lie-ομάδας μπορεί να εκφρασθεί υπό την μορφή:

$$x(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_r)=\exp(\sum_{\kappa=1}^{r} i\alpha_\kappa J_\kappa) \qquad (16)$$

Όταν η ομάδα G είναι πεπερασμένη, τότε όλες οι ιδιότητες μπορούν να προκύψουν από την δομή του πολλαπλασιαστικού της πίνακα. Στην περίπτωση μιας Lie-ομάδας θα δούμε ότι οι μεταθέτες των γεννητόρων της καθορίζουν την δομή της ομάδας. Πράγματι: Ας θεωρήσουμε δυο συγκεκριμένα στοιχεία της Lie-ομάδας της μορφής:

$$x_\kappa \equiv x(0,\ldots,\alpha_\kappa,\ldots,0)=\exp(i\alpha_\kappa J_k)$$

$$x_\lambda \equiv x(0,\ldots,\alpha_\lambda,\ldots,0)=\exp(\alpha_\lambda J_\lambda)$$

Το γινόμενο αυτών των δυο στοιχείων, $\exp(i\alpha_\kappa J_k)\exp(i\alpha_\lambda J_\lambda)$ πρέπει να ανήκει στην ομάδα και επομένως πρέπει να εκφράζεται υπό την μορφή (16) με κατάλληλες τιμές των παραμέτρων α_k. Επειδή τώρα οι γεννήτορες μιας Lie-ομάδας γενικά δεν μετατίθενται, δεν υπάρχει κάποιος απλός τρόπος για να γράψουμε το γινόμενο αυτό. Μπορούμε όμως να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι ένα τέτοιο γινόμενο περιέχει τον μεταθέτη των J_k και J_λ. Για να ανήκει το γινόμενο $\exp(i\alpha_\kappa J_k)\exp(i\alpha_\lambda J_\lambda)$ στην ομάδα πρέπει ο μεταθέτης $[J_\kappa,J_\lambda]=J_\kappa J_\lambda-J_\lambda J_k$ να είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των γεννητόρων, δηλαδή:

$$[J_k, J_\lambda]=\sum_{j=1}^{r} c_{k\lambda}^{j} J_j \quad \text{με} \quad \lambda<k,\ \lambda<r \qquad (17)$$

με $c_{k\lambda}^{j}$ συγκεκριμένοι συντελεστές. Οι μεταθέτες των γεννητόρων μιας Lie-ομάδας ορίζουν πλήρως την δομή της Lie-ομάδας κατά αναλογία προς τον πολλαπλασιαστικό πίνακα μιας πεπερασμένης ομάδας. Οι συντελεστές $c_{k\lambda}^{j}$ ονομάζονται δομικές σταθερές της Lie-ομάδας, αποτελούν χαρακτηριστική ιδιότητα και δεν εξαρτώνται από τις αναπαραστάσεις της. Όμως δεν είναι μοναδικές εφ' όσον οι γεννήτορες μιας Lie-ομάδας δεν είναι μοναδικοί.

Όπως είδαμε παραπάνω, κάθε γραμμικός συνδυασμός γεννητόρων με πραγματικούς συντελεστές μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν γεννήτορας της ομάδας. Είναι επομένως προφανές ότι οι r γεννήτορες της Lie-ομάδας αποτελούν βάση ενός γραμμικού διανυσματικού χώρου L διαστάσεως r.

Η εξίσωση (17) μας παρέχει και έναν δεύτερο νόμο εσωτερικής συνθέσεως μεταξύ των στοιχείων του διανυσματικού χώρου *L* έτσι ώστε ο διανυσματικός αυτός χώρος να είναι άλγεβρα και μάλιστα Lie-άλγεβρα, αφού ικανοποιούνται οι απαραίτητες ιδιότητες, που είναι:

- $(\forall x,y\in L)[[x,y]=xy-yx\in L]$
- $(\forall x,y\in L)\ [[x,y]=-[y,x]]$
- $(\forall x,y,z,)\ [\ [x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0]$ (ταυτότητα Jacobi)

Γενικά όταν ο δεύτερος νόμος εσωτερικής συνθέσεως μιας άλγεβρας ικανοποιεί τις παραπάνω τρεις ιδιότητες, η έκφραση [x,y], (που δεν χρειάζεται να εκφράζεται από την διαφορά xy-yx), ονομάζεται Lie παρένθεση.

Επειδή οι μεταθέτες (17) των γεννητόρων της Lie-ομάδας *G* ικανοποιούν τις παραπάνω ιδιότητες, ισχύουν οι εξής σχέσεις μεταξύ των δομικών σταθερών $c^j_{k\lambda}$:

$$c^j_{k\lambda} = -c^j_{\lambda k}$$
$$\sum_{m=1}^{r}[c^m_{k\lambda}c^s_{jm} + c^m_{\lambda j}c^s_{km} + c^m_{jk}c^s_{\lambda m}] = 0 \qquad (18)$$

και επειδή οι γεννήτορες J_k είναι ερμιτιανοί, από την (17) συμπεραίνουμε ότι οι δομικές σταθερές είναι καθαρά φανταστικοί αριθμοί. Η πρώτη των σχέσεων (18) οφείλεται στην αντιμεταθετικότητα και η δεύτερη στην προσεταιριστικότητα του νόμου εσωτερικής συνθέσεως.

Η σπουδαιότητα της Lie-άλγεβρας βρίσκεται στο γεγονός ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε μια αναπαράσταση της Lie-ομάδας G θεωρώντας μια αναπαράσταση πινάκων της Lie-άλγεβρας L. Έτσι αν μπορέσουμε να βρούμε r τετραγωνικούς πίνακες, έστω τάξης p, που να ικανοποιούν τις σχέσεις μεταθέσεως (17) με τις δεδομένες δομικές σταθερές και τους χρησιμοποιήσουμε στη θέση των J_k στη σχέση (16), τότε θα έχουμε μια p διαστάσεως αναπαράσταση της Lie-ομάδας G. Σαν κανόνα, μπορούμε να διατυπώσουμε το εξής: *Κάθε αναπαράσταση μιας Lie-άλγεβρας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δώσει μια αναπαράσταση της αντίστοιχης Lie-ομάδας*.

Σαν παράδειγμα των παραπάνω θα χρησιμοποιήσουμε την ομάδα SU(2) για την οποία θα μιλήσουμε στην επόμενη παράγραφο. Οι σχέσεις που δίνουν τους γεννήτορες της:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (19)$$

είναι οι τρεις πίνακες του Pauli, που περιγράφουν το spin στην κβαντομηχανική και ικανοποιούν τις σχέσεις μεταθέσεως:

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i\sum_{\lambda}\varepsilon_{jk\lambda}\sigma_\lambda \qquad (20)$$

όπου $\varepsilon_{jk\lambda}$, (σύμβολο των Levi-Civita), είναι ο αντισυμμετρικός τανυστής τάξης 3, του οποίου τα μόνα μη μηδενικά στοιχεία είναι:

$$\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=-\varepsilon_{213}=-\varepsilon_{132}=-\varepsilon_{321}=1 \qquad (21)$$

Οι συνιστώσες του τανυστή $\varepsilon_{jk\lambda}$ πολλαπλασιασμένοι με 2i αποτελούν τις δομικές σταθερές της ομάδας SU(2). Η Lie-άλγεβρα της SU(2) αποτελείται από το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των πινάκων σ_x, σ_y, σ_z με πραγματικούς συντελεστές.

Μια άλλη αναπαράσταση της ομάδας SU(2) αποτελούν και οι πίνακες:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (22)$$

οι οποίοι ικανοποιούν τις ίδιες σχέσεις μεταθέσεως:

$$[\lambda_j, \lambda_k] = 2i \sum_{\lambda} \varepsilon_{jk\lambda} \lambda_\lambda$$

Ο ελάχιστος αριθμός των γεννητόρων μιας Lie-ομάδας, που μετατίθενται μεταξύ τους ονομάζεται τάξη της Lie-ομάδας. Ένας γεννήτορας που μετατίθεται με όλους τους γεννήτορες μιας Lie-ομάδας ονομάζεται τελεστής Casimir. Από το θεώρημα του Racah, ο αριθμός των ανεξαρτήτων τελεστών Casimir μιας Lie-ομάδας ισούται με την τάξη της ομάδας. Ο ίδιος ο Casimir είχε αναγνωρίσει ότι ένας τέτοιος τελεστής πάντα μπορεί να κατασκευαστεί παίρνοντας έναν κατάλληλο διγραμμικό συνδυασμό των γεννητόρων. Η Ομάδα SU(2) επίσης έχει έναν μόνο τελεστή Casimir τον $\sigma^2 \equiv \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2$.

5.4.7. Η ειδική μοναδιαία ομάδα SU(2)

Έστω V διανυσματικός χώρος επί του σώματος C των μιγαδικών αριθμών διαστάσεων 2 και ένα διάνυσμα $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ αυτού του χώρου. Μια περιστροφή σ' αυτόν τον χώρο μετασχηματίζει το διάνυσμα $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ στο $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ που συνδέονται με την σχέση:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \qquad (23)$$

όπου a,b,c,d είναι μιγαδικοί αριθμοί και επομένως ο πίνακας μετασχηματισμού περιέχει 8 πραγματικές παραμέτρους. Εάν θεωρήσουμε τώρα εκείνες τις περιστροφές U που αφήνουν τα μέτρα των διανυσμάτων αναλλοίωτα:

$$u_1u_1^* + u_2u_2^* = v_1v_1^* + v_2v_2^*$$

βλέπουμε ότι ο πίνακας μετασχηματισμού (23) πρέπει να είναι ένας μοναδιαίος πίνακας U, δηλαδή:

$$UU^+ = E \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} |a|^2 + |c|^2 & a^*b + c^*d \\ b^*a + d^*c & |b|^2 + |d|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

δηλαδή: $|a|^2 + |c|^2 = 1,\ |b|^2 + |d|^2 = 1, ac^* + bd^* = 0 \qquad (24)$

Επειδή οι συντελεστές είναι μιγαδικοί αριθμοί, η τελευταία σχέση των (24) ισοδυναμεί με δυο συνθήκες. Οι σχέσεις (24), που είναι 4 σε πλήθος, ανάγουν τον αριθμό των παραμέτρων της σχέσεως (23) από 8 σε 4. Από τις σχέσεις (23) μπορούμε να γράψουμε:

$$a=\cos\theta e^{i\alpha},\ b=-\sin\theta e^{i(\beta-\gamma)},\ c=\sin\theta e^{i\gamma}\ ,\ d=\cos\theta e^{i(\beta-\alpha)}$$

και ο πίνακας U παίρνει τη μορφή:

$$U(\alpha,\beta,\gamma,\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta e^{i\alpha} & -\sin\theta e^{i(\beta-\gamma)}\\ \sin\theta e^{i\gamma} & \cos\theta e^{i(\beta-\alpha)}\end{pmatrix} \qquad (25)$$

από την οποία βλέπουμε ότι τα α,β,γ,θ είναι οι τέσσερεις πραγματικοί παράμετροι.

Το σύνολο όλων αυτών των μετασχηματισμών αποτελεί την ομάδα U(2), η οποία είναι ισομορφική προς την ομάδα των μοναδιαίων πινάκων τάξης 2. Η ομάδα U(2) είναι τετραπαραμετρική, συνεχής, συνεκτική, συμπαγής και Lie-ομάδα.

Η υποομάδα της U(2) με ορίζουσα +1 είναι ειδικού ενδιαφέροντος για την φυσική. Από την σχέση (25) και απαιτώντας να ισχύει detU=1, προκύπτει ότι $\cos^2\theta e^{i\beta}+\sin^2\theta e^{i\beta}=1$. Η σχέση αυτή ισχύει μόνο για β=0. Επομένως η (25) παίρνει την μορφή:

$$U(\alpha,\beta,\gamma,\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta e^{i\alpha} & -\sin\theta e^{-i\gamma}\\ \sin\theta e^{i\gamma} & \cos\theta e^{i\alpha}\end{pmatrix}$$

και εάν αντικαταστήσουμε το γ με το –β η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$U(\alpha,\beta,\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta e^{i\alpha} & \sin\theta e^{i\beta}\\ -\sin\theta e^{i\beta} & \cos\theta e^{i\alpha}\end{pmatrix} \qquad (26)$$

Επίσης εάν θέσουμε στην (26) $a=\cos\theta e^{i\alpha}$ και $b=\sin\theta e^{i\beta}$ προκύπτει η μορφή:

$$U(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}a & b\\ -b^* & a*\end{pmatrix} \text{ με } |a|^2+|b|^2=1 \qquad (27)$$

Η υποομάδα αυτή των μετασχηματισμών, με αναπαράσταση τους πίνακες (27), ονομάζεται ειδική μοναδιαία ομάδα SU(2). Εξαιτίας της σχέσεως detU=+1, η ομάδα SU(2) είναι 3παραμετρική. Όμως και η ομάδα SO(3) είναι 3-παραμετρική. Αυτό μας κάνει να σκεφθούμε ότι υπάρχει σχέση μεταξύ αυτών των δυο ομάδων. Η ομάδα SO(3), σαν ομάδα περιστροφών στον χώρο R3 αφήνει αναλλοίωτη την ποσότητα $x^2+y^2+z^2$ ενώ η ομάδα SU(2) αφήνει την ποσότητα $|u_1|^2+|u_2|^2$ αναλλοίωτη. Είναι επομένως λογικό να εξετάσουμε εάν η ομάδα SU(2) αφήνει αναλλοίωτη και την ποσότητα $x^2+y^2+z^2$. Γι' αυτό, θεωρούμε έναν πίνακα M, 2×2, που είναι γραμμικός συνδυασμός των τριών πινάκων του Pauli:

$$M=x\sigma_1+y\sigma_2+z\sigma_3 \Rightarrow M=\begin{pmatrix}z & x-i\psi\\ \chi+i\psi & -z\end{pmatrix} \qquad (28)$$

(του οποίου η ορίζουσα είναι $-(x^2+y^2+z^2)$, δηλαδή η ποσότητα που θέλουμε να ελέγξουμε ότι παραμένει αναλλοίωτη), και τον μετασχηματισμό ομοιότητας:

$$M \rightarrow M'=TMT^+ \qquad (29)$$

όπου $U(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$ με $|a|^2+|b|^2=1$.

Η (29) γράφεται:

$$\begin{pmatrix} z' & x'-iy' \\ x'+iy' & -z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix} \qquad (30)$$

με $$x'=\frac{1}{2}(a^2+a^{*2}-b^2-b^{*2})x-\frac{i}{2}(a^2-a^{*2}+b^2-b^{*2})y-(ab+a^*b^*)z$$

$$y'=\frac{i}{2}(a^2-a^{*2}-b^2+b^{*2})x+\frac{1}{2}(a^2+a^{*2}+b^2+b^{*2})y-i(ab-a^*b^*)z \qquad (31)$$

$$z'=(a^*b+ab^*)x+i(a^*b-ab^*)y+(aa^*-bb^*)z$$

Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι οι συντελεστές των x, y, z, είναι πραγματικοί αριθμοί και μπορούμε να εκφράσουμε τα x', y', z' σαν συνάρτηση των x, y, z και των παραμέτρων a και b της ομάδας SU(2). Επειδή τώρα ο μετασχηματισμός ομοιότητας διατηρεί την τιμή της ορίζουσας έχουμε:

$$d\,\mathrm{et}(M')=\det(M)\Rightarrow -(x^2+y^2+z^2)=-((x')^2+(y')^2+(z')^2) \qquad (32)$$

Συνεπώς ο μετασχηματισμός U διατηρεί επίσης την ποσότητα $x^2+y^2+z^2$ αναλλοίωτη. Η εξίσωση (32) συνεπάγεται ότι ο μετασχηματισμός (31) είναι ορθογώνιος. Σ' αυτόν αντιστοιχεί ο ορθογώνιος πίνακας:

$$(O)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a^2+a^{*2}-b^2-b^{*2}) & -\frac{i}{2}(a^2-a^{*2}+b^2-b^{*2}) & -(ab+a^*b^*) \\ \frac{i}{2}(a^2-a^{*2}-b^2+b^{*2}) & \frac{1}{2}(a^2+a^{*2}+b^2+b^{*2}) & -i(ab+a^*b^*) \\ (a^*b+ab^*) & i(a^*b-ab^*) & (aa^*-bb^*) \end{pmatrix} \qquad (33)$$

Άρα εάν μας δοθεί ένας ειδικός μοναδιακός πίνακας, SU(2), κατασκευάζεται από αυτόν ένας ορθογώνιος 3×3 πίνακας τέτοιος ώστε $\det(O)=1$, δηλαδή:

$$U(a,b)\to SO(3)$$

Ειδικότερα:

1. αν $a=\exp\left(i\frac{\alpha}{2}\right)$ και $b=0$ $(a^2+a^{*2}=2\cos\alpha\,,\,a^2-a^{*2}=2i\sin\alpha)$ παίρνουμε:

$$U(e^{i\frac{\alpha}{2}},0)=\begin{bmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. αν $a=\cos\frac{\beta}{2}$ και $b=\sin\frac{\beta}{2}$ $(a^2+b^2=1=a^{*2}+b^{*2}=1,\ ab=a^*b=\frac{\sin\beta}{2})$ παίρνουμε:

$$U(\cos\frac{\beta}{2},\sin\frac{\beta}{2})=\begin{bmatrix}\cos\frac{\beta}{2} & \sin\frac{\beta}{2}\\ -\sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta\end{bmatrix}$$

Συνεπώς:

$$U\left(i\frac{\alpha}{2},0\right)U\left(\cos\frac{\beta}{2},\sin\frac{\beta}{2}\right)U\left(i\frac{\gamma}{2},0\right)=$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\frac{\beta}{2}e^{i(\alpha+\gamma)/2} & \sin\frac{\beta}{2}e^{-i(\gamma-\alpha)/2}\\ -\sin\frac{\beta}{2}e^{i(\alpha-\gamma)/2} & \cos\frac{\beta}{2}e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\end{bmatrix}\to R(\alpha,\beta,\gamma) \qquad (34)$$

όπου $R(\alpha,\beta,\gamma)$ ο πίνακας στροφής που αντιστοιχεί σε γωνίες Euler α,β,γ. Παρατηρούμε ότι ο πίνακας 2×2 της αντιστοιχίας (34) έχει τη γενική μορφή του πίνακα SU(2) όπως δίνεται από την εξίσωση (26). Επίσης, αν δοθεί ο πίνακας SU(2) μπορούμε σ' αυτόν να αντικαταστήσουμε ένα πίνακα R(3).

Βλέπουμε τέλος ότι ο ταυτοτικός πίνακας του R(3) ικανοποιεί την σχέση:

$$R(0,0,0)=R(0,2\pi,0)$$

Όμως στον πίνακα $R(0,0,0)$ αντιστοιχεί ο πίνακας $(\varepsilon)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ της SU(2) ενώ στον πίνακα $R(0,2\pi,0)$ αντιστοιχεί ο πίνακας $I=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-(\varepsilon)$.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι:

$$U(\alpha,\beta+2\pi,\gamma)\to R(\alpha,\beta+2\pi,\gamma)$$

$$U(\alpha,\beta,\gamma)\to R(\alpha,\beta,\gamma)$$

Όμως ενώ ισχύει

$$R(\alpha,\beta,\gamma)=R(\alpha,\beta+2\pi,\gamma) \qquad (35)$$

οι πίνακες U ικανοποιούν τη σχέση:

$$U(\alpha,\beta,\gamma)=-U(\alpha,\beta+2\pi,\gamma) \qquad (36)$$

δηλαδή στον πίνακα $R(\alpha,\beta,\gamma)$ αντιστοιχούν δύο πίνακες οι $U(\alpha,\beta,\gamma)$ και $U(\alpha,\beta+2\pi,\gamma)$ δηλαδή οι ομάδες SO(3) και SU(2) δεν είναι ισομορφικές, αλλά απλά ομομορφικές.

5.4.8. Οι γεννήτορες των ομάδων U(n) και SU(n)

Υπενθυμίζουμε ότι η ομάδα U(n) αποτελείται από το σύνολο των μοναδιαίων πινάκων, (με μιγαδικά στοιχεία), τάξης n, ενώ η ομάδα SU(n) από το σύνολο των μοναδιαίων πινάκων τάξης n με ορίζουσα +1. Προφανώς η ομάδα SU(n) είναι υποομάδα της U(n). Επειδή ένας μοναδιαίος πίνακας τάξης n έχει n^2 πραγματικά ανεξάρτητα στοιχεία, η ομάδα U(n) είναι μια

συνεχής, συνεκτική, n^2-παραμετρική, συμπαγής, Lie-ομάδα. Τα στοιχεία της ομάδας SU(n) ικανοποιούν μια επί πλέον συνθήκη: η ορίζουσα τους πρέπει να είναι +1. Επομένως η SU(n) είναι μια συνεχής, συνεκτική, (n^2-1)-παραμετρική, συμπαγής, Lie-ομάδα.

Οι γεννήτορες της ομάδας U(n), που είναι σε πλήθος n^2, μπορούν να προκύψουν ως εξής: Κατ' αρχήν θυμίζουμε ότι εάν H είναι ένας ερμιτιανός πίνακας, δηλαδή $H=H^+$, τότε ο πίνακας exp(iH) είναι μοναδιαίος. Το αντίστροφο επίσης αληθεύει, δηλαδή εάν U είναι ένας μοναδιαίος πίνακας, τότε μπορεί να γραφεί σαν:

$$U=\exp(iH) \qquad (37)$$

$$U=\exp\left[i\sum_{j=1}^{N}a_jH_j\right] \rightarrow \; H^+=H$$

όπου H ερμιτιανός πίνακας. Επίσης κάθε γραμμικός συνδυασμός ερμιτιανών πινάκων με πραγματικούς συντελεστές είναι ερμιτιανός πίνακας. Επομένως υπάρχουν το πολύ n^2 ανεξάρτητοι ερμιτιανοί πίνακες τάξης n, από τους γραμμικούς συνδυασμούς των οποίων, (με την βοήθεια της εκθετικής συναρτήσεως), μπορεί να προκύψει κάθε μοναδιαίος πίνακας U. Έστω τώρα H_1, H_2,...,H_N ένα σύνολο n^2 ανεξαρτήτων ερμιτιανών πινάκων με $N=n^2$ και a_j, $(1\leq j\leq N)$, n^2 πραγματικοί παράμετροι. Τότε προφανώς κάθε μοναδιαίος πίνακας τάξης n μπορεί να γραφεί:

$$U=\exp\left[i\sum_{j=1}^{N}a_jH_j\right] \qquad (38)$$

δηλαδή όλα τα στοιχεία της U(n) μπορούν να παραχθούν από το δεξιό μέλος της (38) δίνοντας όλες τις δυνατές τιμές στις N πραγματικές παραμέτρους aj. Επομένως οι N το πλήθος ανεξάρτητοι ερμιτιανοί πίνακες H_j είναι οι γεννήτορες της ομάδας U(n). Προφανώς δεν είναι οι μοναδικοί, οποιοιδήποτε N γραμμικοί συνδυασμοί αυτών των ερμιτιανών πινάκων μπορούν εξ' ίσου καλά να χρησιμοποιηθούν σαν γεννήτορες της ομάδας U(n).

Εάν A είναι ένας τετραγωνικός πίνακας, τότε:

$$\det(e^A)=e^{trA} \qquad (39)$$

όπου trA=ίχνος του A= άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του A.

Από την (37) βλέπουμε ότι:

$$\det U=\det(e^{iH})=\exp(itrH) \qquad (40)$$

Επειδή τα διαγώνια στοιχεία ενός ερμιτιανού πίνακα H είναι πραγματικοί αριθμοί, πραγματικός αριθμός είναι και το ίχνος του trH=α και επομένως η ορίζουσα detU=exp(iα) έχει μέτρο 1, δηλαδή $|\det U|=|\exp(i\alpha)|=1$.

Για την ομάδα τώρα SU(n) γράφουμε τα στοιχεία της σαν $U_0=\exp(iH_0)$ και επειδή $\det U_0=1$ πρέπει $trH_0=0$. Δηλ. υπάρχουν το πολύ n^2-1 ανεξάρτητοι ερμιτιανοί πίνακες με ίχνος μηδέν κατάλληλα επιλεγμένοι ώστε να αποτελούν τους γεννήτορες της ομάδας SU(n). Πρακτικά είναι πιο βολικό να διαλέξουμε πρώτα τους n^2-1 γεννήτορες της SU(n) και μετά να

προσθέσουμε τον ταυτοτικό πίνακα τάξης n για να προκύψουν οι n^2 γεννήτορες της ομάδας U(n).

Εφόσον οι μετασχηματισμοί ομοιότητας διατηρούν το ίχνος ισχύει:

$$tr(H) = 0 \qquad (41)$$

Σύμφωνα με τις συνθήκες (37) και (40) συνάγεται ότι ο 2×2 πίνακας H μπορεί να γραφεί:

$$H = \begin{pmatrix} \alpha & \beta + i\gamma \\ \beta - i\gamma & -\alpha \end{pmatrix} \text{ όπου } \alpha, \beta, \gamma \text{ πραγματικοί}$$

Παρατηρούμε ότι

$$H = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα κάθε ερμιτιανός πίνακας H εκφράζεται ως συνάρτηση των τριών βασικών πινάκων του Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad \sigma_y \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad \sigma_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \quad \text{ όπου } i, j, k = x, y, z$$

ή

$$[s_i, s_j] = i\varepsilon_{ijk} s_k \quad \text{ όπου } \quad s_i = \frac{1}{2}\sigma_i$$

Οι πίνακες

$$s_x = \frac{1}{2}\sigma_x \qquad s_y = \frac{1}{2}\sigma_y \qquad s_z = \frac{1}{2}\sigma_z$$

είναι οι γεννήτορες της ομάδας SU(2), δηλαδή:

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = \exp(i\alpha s_z)\exp(i\beta s_y)\exp(i\gamma s_z)$$

ή

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = \exp(i\frac{\alpha}{2}\sigma_z)\exp(i\frac{\beta}{2}\sigma_y)\exp(i\frac{\gamma}{2}\sigma_z)\,.$$

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι γεννήτορες της ομάδας SU(2) είναι ερμιτιανοί πίνακες με ίχνος μηδέν. Αυτό μπορεί να γενικευτεί για οποιαδήποτε ομάδα SU(n). Π.χ. η ομάδα πινάκων SU(3), η οποία είναι πολύ βασική στη θεωρία στοιχειωδών σωματίων ως και στην πυρηνική φυσική, γεννιέται από τους εξής γεννήτορες:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

5.4.9. Εφαρμογές της ομάδας SU(2) στη Φυσική

1. Σωμάτιο με σπιν ½ (ηλεκτρόνιο, πρωτόνιο, νετρόνιο, νετρίνο, κουάρκ κ.λπ.). Το σπιν μπορεί να έχει δύο προβολές:

$$m_s = \frac{1}{2} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad m_s = -\frac{1}{2} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Ισοσπίν. Το πρωτόνιο και το νετρόνιο θεωρούνται ως οι δύο κβαντικές καταστάσεις ενός σωματίου το οποίο λέγεται νουκλεόνιο.

$$\text{πρωτόνιο} \leftrightarrow \text{ισοσπίν πάνω} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{νετρόνιο} \leftrightarrow \text{ισοσπίν κάτω} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Στη σύγχρονη θεωρία στοιχειωδών σωματίων το πρωτόνιο και το νετρόνιο θεωρούνται σύνθετα σωμάτια. Βασικά σωμάτια είναι τα κουάρκς. Π.χ.

$$\begin{array}{l} \textit{Άνω quark} \quad u \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{Κ}\textit{άτω quark} \quad d \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{δηλαδή } q \leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

3. ***Ασθενές ισοσπίν.*** Το αριστερόστροφο ηλεκτρόνιο και το νετρίνο του θεωρούνται σαν μέλη μιας διάδας λεπτονίων

$$e_L^- \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\nu_e)_L \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \ell \leftrightarrow \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L$$

Το ίδιο και για τα αριστερόστροφα κουάρκς u_L και d_L. Οι ομάδες αυτές είναι διαφορετικές. Έχουν όμως όλες την ίδια μαθηματική δομή.

5.4.10. Η ειδική μοναδιαία ομάδα SU(3)

Η ομάδα SU(3) αποτελείται από όλους τους μοναδιαίους πίνακες τάξης 3 με ορίζουσα +1. Έχει 3^2-1=8 γεννήτορες, οι οποίοι συνήθως συμβολίζονται με λ_1, λ_2, …, λ_8 και μπορούν να επιλεγούν κατά πολλούς τρόπους. Έχει καθιερωθεί να χρησιμοποιούνται οι εξής πίνακες:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad (42)$$

Οι μεταθέτες των γεννητόρων είναι:

$$[\lambda_j, \lambda_k] = 2i \sum_{\lambda} c_{jk\lambda} \lambda_{\lambda}$$

όπου οι μόνες μη μηδενικές συνιστώσες του τανυστή $c_{jk\lambda}$ είναι:

$c_{123}=1$

$c_{147}=c_{516}=c_{246}=c_{257}=c_{345}=c_{637}=1/2$

$c_{458}=c_{678}=(3/2)^{1/2}$

Οι δομικές αυτές σταθερές είναι μια χαρακτηριστική ιδιότητα της ομάδας SU(3) και δεν εξαρτώνται από την συγκεκριμένη αναπαράσταση (42).

Οι πίνακες λ_3 και λ_8 είναι διαγώνιοι και επομένως μετατίθενται μεταξύ τους. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι κανένας άλλος πίνακας δεν μετατίθεται με τους λ_3 και λ_8 . Η τάξη επομένως της ομάδας SU(3) είναι 2. Η ομάδα SU(3) έχει επίσης δυο τελεστές Casimir. Ένας από αυτούς είναι ένας τετραγωνικός συνδυασμός των γεννητόρων:

$$C_{\lambda} = \sum_{i=1}^{8} \lambda_i^2$$

Ο άλλος τελεστής Casimir δίνεται από έναν πολύπλοκο τριγραμμικό συνδυασμό των γεννητόρων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Θεωρίες Βαθμίδας

"We did not know how to make the theory fit experiment.It was our judgement, however,that the beauty of the idea alone merited attention".

C.N. Yang

6.1. Εισαγωγή

Οι θεωρίες βαθμίδας βασίζονται στην ιδέα ότι κάποιοι μετασχηματισμοί συμμετρίας μπορούν να εφαρμοστούν και τοπικά αλλά και ολικά. Οι θεωρίες Βαθμίδας είναι πολύ σημαντικές, καθώς παρέχουν έναν ενιαίο φορμαλισμό περιγραφής των κβαντικών θεωριών του πεδίου [277]. Η θεωρία που περιγράφει με τον ενιαίο αυτό τρόπο το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο μαζί με το ασθενές και το ισχυρό πυρηνικό πεδίο ονομάστηκε καθιερωμένο πρότυπο.

Τα πλέον επιτυχημένα μοντέλα της σωματιδιακής φυσικής βασίζονται στην ιδέα της συμμετρίας βαθμίδας. Συμμετρία βαθμίδας είναι για παράδειγμα η εξάρτηση του έργου σε ένα βαρυτικό πεδίο από την διαφορά δυναμικού. Διάφορα πεδία σε αυτή τη θεωρία μπορούν να μετασχηματιστούν το ένα στο άλλο. Η ύπαρξη συμμετρίας στα ηλεκτρικά δυναμικά είναι συνέπεια της διατήρησης του φορτίου.

Η θεωρία βαθμίδας αναφέρεται σε μια πολύ γενική κατηγορία των κβαντικών θεωριών πεδίου, που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή των στοιχειωδών σωματιδίων και των αλληλεπιδράσεών τους [278-288]. Οι θεωρίες βαθμίδας χαρακτηρίζονται από την παρουσία των διανυσματικών πεδίων, και σαν τέτοιες θεωρούνται ως μια γενίκευση της παλαιότερης Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής (QED), η οποία περιγράφει μόνο τις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις των στοιχειωδών φορτισμένων σωματιδίων με σπιν ½.

Όταν οι φυσικοί τη δεκαετία του 1920 προσπάθησαν να συνδυάσουν την κβαντομηχανική των Heisenberg και Schroedinger με την ειδική θεωρία της σχετικότητας του Αϊνστάιν, αναπτύχθηκε τότε η σχετικιστική κβαντική θεωρία πεδίου. Η εφαρμογή αυτής της θεωρίας πεδίου στον κλασικό ηλεκτρομαγνητισμό του Μάξγουελ άνοιξε τον ασκό του Αιόλου, γιατί οι εξισώσεις του Maxwell διαθέτουν μια ιδιαίτερη τοπική συμμετρία, που ονομάζεται αναλλοίωτη βαθμίδα σύμφωνα με την οποία το πεδίο του φωτονίου μετασχηματίζεται έτσι ώστε αυτή η μετατροπή να αφήνει την ισχύ του πεδίου και όλα τα φυσικά παρατηρήσιμα μεγέθη αναλλοίωτα. Στην περίπτωση του ηλεκτρομαγνητισμού, οι μετασχηματισμοί που αφήνουν τη δράση αμετάβλητη σχηματίζει μια ομάδα βαθμίδας γνωστή ως ενιαία ομάδα U(1).

Η κατανόηση των κβαντικών πτυχών της αναλλοίωτης βαθμίδας οδήγησε στην ανάπτυξη της κβαντικής θεωρίας βαθμίδος πεδίου. Η συμμετρία της αναλλοίωτης βαθμίδας είναι μια ισχυρή συμμετρία που τιθασεύει τους ανεξέλεγκτους απειρισμούς στα κβαντικά πλάτη, που δυστυχώς υπάρχουν, και κωδικοποιεί τη συμμετρία των φορτίων που διατηρούνται, όπως παρατηρήθηκαν στην φυσική των στοιχειωδών σωματιδίων.

Σήμερα, τρεις από τις δυνάμεις που παρατηρήθηκαν στη Φύση έχουν περιγραφεί με μεγάλη επιτυχία ως θεωρίες συμμετρίας βαθμίδας, και αποδεικνύεται ότι οι τρεις αυτές δυνάμεις μπορούν να περιγραφούν με όρους ενιαίων ομάδων με διαφορετικές διαστάσεις. Οι φυσικοί γράφουν αυτό το συνδυασμό των ομάδων βαθμίδας, σαν SU(3) x SU(2) x U(1). Μια θεωρία βαθμίδας που περιγράφεται από την ομάδα SU(N), τότε στην ομάδα αυτή υπάρχουν

N^2-1 μποζόνια βαθμίδας. Για παράδειγμα η ομάδα SU(3) είναι η ομάδα βαθμίδας της θεωρίας των ισχυρών αλληλεπιδράσεων, γνωστή και ως κβαντική χρωμοδυναμική QCD. Το άμαζο πεδίο βαθμίδας αυτής της θεωρίας είναι γνωστό ως γλουόνιο. Η ομάδα SU(3) έχει οκτώ γεννήτορες, και διαπιστώθηκε ότι αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν και οκτώ είδη γλουονίων που προβλέπεται σωστά από τη θεωρία.

Το τμήμα SU(2) x U(1) που απομένει είναι λίγο πιο περίπλοκο. Είναι εύκολο να σκεφτεί κάποιος ότι η ενιαία ομάδα U(1) αναφέρεται στον ηλεκτρομαγνητισμό, με ένα άμαζο μποζόνιο βαθμίδας, που είναι γνωστό σε όλους σαν φωτόνιο. Έτσι, απομένει η ομάδα βαθμίδας SU(2) που πρέπει κανονικά να αναφέρεται στην ασθενή αλληλεπίδραση. Η ομάδα SU(2) έχει τρεις γεννήτορες συμμετρίας βαθμίδας και αυτοί θα μας δώσουν τρία άμαζα μποζόνια βαθμίδας για να διαδώσουν την ασθενή πυρηνική δύναμη. Αλλά το τελευταίο αυτό συμπέρασμα είναι απλό αλλά λάθος: Η ασθενής πυρηνική δύναμη είναι μια δύναμη μικρής εμβέλειας, και συμπεριφέρεται ως εάν τα μποζόνια βαθμίδας να είναι πολύ βαριά. Για να κάνουν μια θεωρία βαθμίδας αναλλοίωτη για την ασθενή πυρηνική δύναμη, οι θεωρητικοί έπρεπε να βρούνε έναν τρόπο να κάνουν βαριά μποζόνια βαθμίδας με έναν τρόπο που δεν θα καταστρέψει τη συνοχή της κβαντικής θεωρίας.

Τα κυριότερα χαρακτηριστικά μιας θεωρίας βαθμίδας είναι τα παρακάτω:

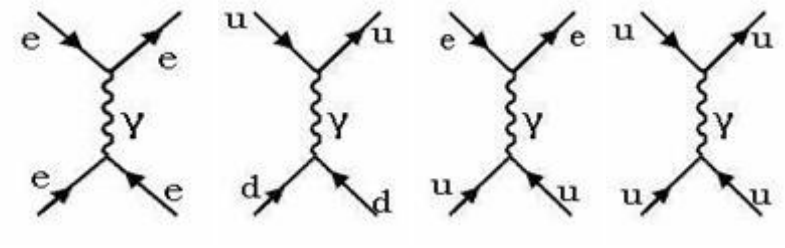
1. Αυτόματη παρουσία του σωματιδίου – διαδότη της αλληλεπίδρασης
2. Ο διαδότης της αλληλεπίδρασης έχει σπιν 1, ενώ όλα τα σωματίδια της ύλης – δηλαδή τα κουάρκ και τα λεπτόνια – έχουν σπιν 1/2 και μηδενική μάζα
3. Το μαθηματικό υπόβαθρο της θεωρίας περιγράφεται από τη θεωρία των Ομάδων. Κάθε ομάδα μπορεί να περιγραφεί πλήρως από ένα πεπερασμένο πλήθος παραμέτρων, που καλούμε γεννήτορες της ομάδας.
4. Η ομάδα είναι υπεύθυνη:
   A. Για τον αριθμό των αναγκαίων διαδοτών της αλληλεπίδρασης, που είναι ίσος με τον αριθμό των γεννητόρων
   B. Για την κατάταξη των σωματιδίων σε πολλαπλότητες
5. Οι εξισώσεις που περιγράφουν την αλληλεπίδραση πρέπει να μένουν αναλλοίωτες σε μετασχηματισμούς που υπαγορεύει η συγκεκριμένη μαθηματική ομάδα.

6.2. Η θεωρία βαθμίδας και οι τρεις αλληλεπιδράσεις

6.2.1. Ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση

Η ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση ασκείται μεταξύ όλων των φορτισμένων σωματιδίων, δηλαδή των u (up) και d (down) κουάρκ καθώς και του ηλεκτρονίου (σαφώς έχουμε και τα αντισωματίδια τους). Ο φορέας της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης είναι το άμαζο και χωρίς φορτίο φωτόνιο. Στο κβαντικό επίπεδο η αλληλεπίδραση περιγράφεται από την Κβαντική Ηλεκτροδυναμική.

Το μαθηματικό υπόβαθρο αποτελείται από την ομάδα U(1) που μπορεί να περιγραφεί πλήρως με μια μόνο παράμετρο. Αποτέλεσμα είναι να έχουμε μόνο ένα γεννήτορα και ένα φορέα της αλληλεπίδρασης: το φωτόνιο γ. Κάθε ένα από τα 3 σωματίδια – μεταξύ των οποίων αναπτύσσονται ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις – δηλαδή το ηλεκτρόνιο, το κουάρκ up και το down κουάρκ – αποτελεί μόνο του και μία πολλαπλότητα δηλαδή εδώ έχουμε 3 τετριμμένες πολλαπλότητες. Παραδείγματα αυτής της αλληλεπίδρασης (σχήμα 1), υπό μορφή διαγραμμάτων του Feynman, βλέπουμε παρακάτω.



Σχήμα 1: Διαγράμματα Feynman για ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση

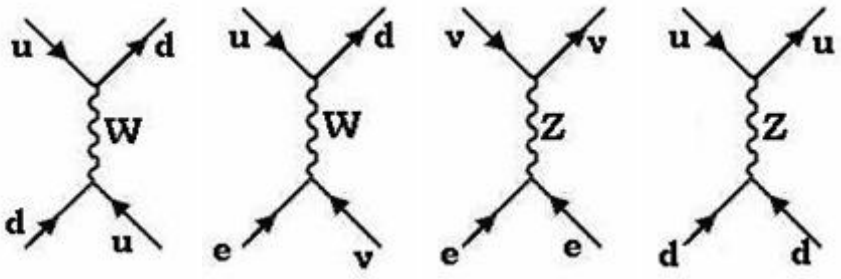
6.2.2. Ασθενής αλληλεπίδραση

Ασκείται μεταξύ και των 4 στοιχειωδών σωματιδίων: των κουάρκ up (u) και down (d), του ηλεκτρονίου (e) καθώς και του νετρίνου (ν_e), που ανήκουν στην πρώτη γενιά σωματιδίων και φτιάχνουν σχεδόν όλη την ύλη στον κόσμο. Το μαθηματικό υπόβαθρο της θεωρίας αποτελεί η λεγόμενη ομάδα SU(2) η οποία περιγράφεται από 3 γεννήτορες. Γι' αυτό ακριβώς και προϋποθέτει την ύπαρξη 3 διαδοτών-φορέων της δύναμης.

Τα σωματίδια κατατάσσονται σε ζεύγη ή διπλέτες: το ζεύγος των δύο κουάρκ up και down και το ζεύγος των δύο λεπτονίων (ηλεκτρονίου και του νετρίνο του). Η ασθενής αλληλεπίδραση δρα στα σωματίδια της ίδιας διπλέτας, μετατρέποντας το ένα μέλος του ζεύγους στο άλλο (με τη βοήθεια των διαδοτών W^+ και W^-, ή κρατώντας αναλλοίωτο το σωματίδιο (με τη βοήθεια του διαδότη Z^o).

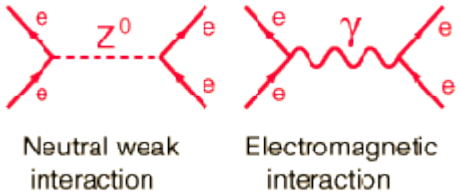
Οι φορείς-διαδότες της ασθενούς αλληλεπίδρασης είναι τα σωματίδια W^+, W^- και Z^o, τα οποία έχουν μάζες της τάξεως των 80 έως 90 GeV, ενώ η αρχή της αβεβαιότητας υπαγορεύει μια περιοχή δράσης τους περίπου 10^{-18} m, που είναι περίπου το 0.1% της διαμέτρου του πρωτονίου (δρουν μόνο μέσα στο πρωτόνιο ή νετρόνιο). Επίσης, η ασθενής αλληλεπίδραση είναι 10^{-4} φορές ασθενέστερη της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης, αλλά όμως παίζει έναν πολύ κρίσιμο ρόλο στην δομή του σύμπαντος εξ αιτίας του ρόλου της στον μετασχηματισμό του πρωτονίου σε νετρόνιο, ώστε να μπορεί να σχηματισθεί το δευτέριο, και ακολούθως να μπορεί να γίνει η σύντηξη του δευτερίου σε ήλιο μέσα στα αστέρια. Συγχρόνως, η ασθενής αλληλεπίδραση είναι αναγκαία για την κατασκευή των βαρέων πυρήνων. Παραδείγματα ασθενούς αλληλεπίδρασης (σχήμα 2) είναι τα παρακάτω: Βλέπετε πως αλλάζει το είδος των σωματιδίων μετά την ανταλλαγή του διαδότη W, ενώ με την ανταλλαγή του ουδέτερου διαδότη Z δεν έχουμε καμία αλλαγή των σωματιδίων. Επίσης,

φαίνεται καθαρά πως οι αλληλεπιδράσεις με την ανταλλαγή των μποζονίων γίνονται πάντα μέσα στην ίδια διπλέτα των κουάρκ ή των δύο λεπτονίων.



Σχήμα 2: *Διαγράμματα Feynman για ασθενή αλληλεπίδραση*

Η ομάδα SU(2) εισάγει μια σημαντική καινοτομία ως προς την ομάδα του ηλεκτρομαγνητισμού: επιτρέπει την αλληλεπίδραση μεταξύ των φορέων και αυτό οφείλεται στη μη αντιμεταθετικότητα των στοιχείων της ομάδας κάτω από την πράξη του πολλαπλασιασμού της ομάδας. Μπορούμε, επίσης, να δούμε πώς γίνεται η διάσπαση ενός νετρονίου σε πρωτόνιο, (η πιο κλασική ασθενής αλληλεπίδραση), από τη σκοπιά των κουάρκ τα οποία δομούν το νετρόνιο (udd) και το πρωτόνιο (uud). Έτσι, η διάσπαση του νετρονίου δεν είναι τίποτα περισσότερο από την μετατροπή ενός d κουάρκ σε u κουάρκ, με την ταυτόχρονη παραγωγή ενός ζευγαριού λεπτονίων (ηλεκτρόνιο και νετρίνο). Πρώτα ένα down κουάρκ μετατρέπεται σε up. Το σωμάτιο W που ελευθερώνεται μπορεί να αλληλεπιδράσει με ένα νετρίνο και να προκύψει ένα βήτα σωματίδιο. Παρατηρείται επίσης πως αλλάζει το είδος των σωματιδίων μέσω της ανταλλαγής του W, αλλά η αλλαγή αυτή γίνεται στην ίδια διπλέτα των λεπτονίων (ηλεκτρόνιο-νετρίνο του) και στην διπλέτα των κουάρκ (το up κουάρκ μετατρέπεται σε down). Παράδειγμα ασθενούς αλληλεπίδρασης είναι η παρακάτω αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο ηλεκτρονίων μέσω του διαδότη Z^0 και η αντίστοιχη ηλεκτρομαγνητική.



Σχήμα 3: *Διαγράμματα Feynman για ασθενή και ΗΜ αλληλεπίδραση*

6.2.3. Ισχυρή αλληλεπίδραση

Το βασικό σωματίδιο ανταλλαγής των ισχυρών δυνάμεων είναι το γλουόνιο, που είναι ο φορέας της ισχυρής δύναμης μεταξύ των κουάρκ. Επειδή όμως τα γλουόνια και τα κουάρκ περιέχονται μέσα στο πρωτόνιο και νετρόνιο, οι μάζες που αποδίδονται σε αυτά δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να προβλέψουμε την περιοχή δράσης των δυνάμεων.

Η ιδιότητα των γλουονίων να μετατρέπονται σε ζεύγη κουάρκ και αντικουάρκ κάθε στιγμή, κάνει το πρωτόνιο να είναι γεμάτο από μια ολόκληρη "θάλασσα" από κουάρκ, αντικουάρκ και

γλουόνια. Όταν λοιπόν δούμε κάτι να εξέρχεται από ένα πρωτόνιο ή ένα νετρόνιο, τότε αυτό πρέπει να είναι ένα ζευγάρι κουάρκ-αντικουάρκ. Όπως αναφέρει η θεωρία της Κβαντικής Χρωμοδυναμικής (QCD), η ισχυρή δύναμη δεν αναπτύσσεται ανάμεσα στα νουκλεόνια, όπως πίστευε στην αρχή ο Yukawa, αλλά ανάμεσα σε κουάρκ με διαφορετικά χρώματα. Γι' αυτό λέγεται και δύναμη του χρώματος. Τα κουάρκ εκπέμπουν και απορροφούν γλουόνια πολύ συχνά μέσα σε ένα αδρόνιο σε σημείο που είναι αδύνατο να παρατηρήσει κανείς το χρώμα ενός συγκεκριμένου κουάρκ. Μέσα σ' ένα αδρόνιο το χρώμα των δύο κουάρκ - που ανταλλάσσουν ένα γλουόνιο - θα αλλάξει με τέτοιο τρόπο που να κρατά το σύστημα σε χρωματικά ουδέτερη κατάσταση.

Εδώ όμως υπάρχει και κάτι αξιοπερίεργο. Επειδή τα κουάρκ μέσα στα νουκλεόνια έχουν τέτοιο συνδυασμό χρώματος, ώστε να είναι άχρωμα, πώς λοιπόν αναπτύσσονται ισχυρές ελκτικές δυνάμεις ανάμεσα στα πρωτόνια που να υπερισχύουν των απωστικών ηλεκτρικών δυνάμεων; Η απάντηση είναι απλή. Η ισχυρή δύναμη μεταξύ των κουάρκ ενός πρωτονίου με τα κουάρκ ενός άλλου πρωτονίου είναι συντριπτικά ισχυρότερη από την ηλεκτρομαγνητική δύναμη και αυτή βασικά είναι η αιτία που κρατά τον πυρήνα ενωμένο.

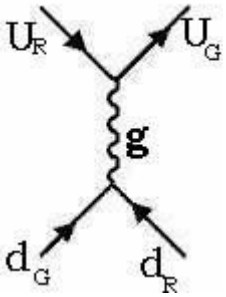
Τα βασικά γνωρίσματα των ισχυρών αλληλεπιδράσεων είναι τα παρακάτω:

- Εμφανίζονται μόνο μεταξύ κουάρκ και γλουονίων
- Ο φορέας τους είναι το γλουόνιο, που υπάρχει σε 8 ανεξάρτητες καταστάσεις χρώματος (συνδυασμοί χρωμάτων-αντιχρωμάτων)
- Υπάρχουν τρία φορτία χρώματος (κόκκινο-μπλε-πράσινο) σε αντίθεση με τα δύο ηλεκτρικά φορτία
- Το χρώμα είναι το "φορτίο" των ισχυρών δυνάμεων.
- Επειδή τα γλουόνια δεν έχουν γεύση, η αλληλεπίδρασή τους δεν εξαρτάται από τη γεύση των κουάρκ.
- Το μέγεθος της σταθεράς σύζευξης α των ισχυρών είναι περίπου 1. Δηλαδή είναι 137 φορές μεγαλύτερη της ηλεκτρομαγνητικής δύναμης.
- Η περιοχή δράσης είναι της τάξεως των 1.5×10^{-15} m

Όλα αυτά που αναφέραμε περιγράφονται από την Κβαντική Χρωμοδυναμική, η οποία εισάγει ένα επιπλέον χαρακτηριστικό στα κουάρκ: το χρώμα. Δηλαδή, κάθε κουάρκ εμφανίζεται με 3 διαφορετικές μορφές: π.χ. U_R,U_B και U_G,U_R,U_B και d_G,d_R,d_B, όπου τα R,G,B αντιστοιχούν στα χρώματα κόκκινο, πράσινο και μπλε. Βέβαια, αυτές οι ονομασίες δεν έχουν καμιά σχέση με τα χρώματα αυτά καθαυτά. Απλά, η ονομασία αυτή βολεύει μερικές φορές να κατανοήσουμε ορισμένες ιδιότητες της κβαντικής χρωμοδυναμικής. Τέλος, η θεωρία της ισχυρής αλληλεπίδρασης προβλέπει ότι δεν μπορούν να παρατηρηθούν ελεύθερα κουάρκ, άρα δεν μπορούμε να παρατηρήσουμε το χρώμα ενός σωματιδίου, αλλά πάντοτε τα κουάρκ είναι μέσα στα βαρυόνια (σύμπλεγμα 3 κουάρκ) ή στα μεσόνια (σύμπλεγμα 2 κουάρκ) με κατάλληλους συνδυασμούς χρωμάτων, ώστε αυτές οι καταστάσεις να παρουσιάζονται ως άχρωμες (σχήμα 4).

Σχήμα 4: Παραδείγματα ισχυρών αλληλεπιδράσεων. Αριστερά γίνεται αλλαγή των χρωμάτων χωρίς μεταβολή της γεύσης και δεξιά βλέπουμε μια τυπική διάσπαση του πρωτονίου σε νετρόνιο (μεταβολή σε επίπεδο κουάρκ) μέσω του μιονίου

Στο σχήμα 5 παρατηρήστε την αλλαγή του χρώματος των δύο κουάρκ που αλληλεπιδρούν με τη βοήθεια ενός γλουονίου, χωρίς να αλλάξει η γεύση του ίδιου του κουάρκ.



Σχήμα 5: Αλληλεπίδραση αλλαγής χρώματος

Το μαθηματικό υπόβαθρο της ισχυρής αλληλεπίδρασης περιγράφεται από την ομάδα SU(3) η οποία έχει 8 γεννήτορες, και επομένως έχουμε ισάριθμα γλουόνια – διαδότες που είναι υπεύθυνα για την μετάδοση της αλληλεπίδρασης. Η ομάδα κατατάσσει τα κουάρκ σε τριπλέτες χρώματος. Και εδώ όπως στην ασθενή αλληλεπίδραση, η ομάδα επιτρέπει την αλληλεπίδραση των γλουονίων.

6.3. Κβαντική Ηλεκτροδυναμική (QED)

Η κβαντική ηλεκτροδυναμική (QED) είναι μια κβαντική θεωρία που περιγράφει τις αλληλεπιδράσεις της ακτινοβολίας με την φορτισμένη ύλη, εκτός της βαρύτητας και της ραδιενέργειας. Η θεωρία της ηλεκτροδυναμικής γεννήθηκε το 1931 προκειμένου να τεθεί σε συμφωνία η θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού, κατά τον Maxwell, με τις νέες αρχές της κβαντικής φυσικής. Από την εποχή που ανακαλύφθηκε η σωματιδιακή φύση του φωτός η αλληλεπίδραση των κβάντων με την ύλη πέρασε από πολλά θεωρητικά στάδια. Η σημερινή μορφή οφείλεται στις εργασίες των Julian Schwinger, Sin-Itiro Tomonaga, Richard Feynman, αλλά και στις εργασίες των Freeman, Dyson και Ward [46-57].

Το 1931 ο Βρετανός φυσικός Paul Dirac έβαλε τα θεμέλια οικοδόμησης της QED με την ανακάλυψη μιας εξίσωσης που περιέγραφε την κίνηση και την περιστροφή των ηλεκτρονίων ενσωματώνοντας την κβαντική θεωρία και τη θεωρία της ειδικής σχετικότητας.

Όταν όμως διαμορφώθηκε στη δεκαετία του '50 εξήγησε όχι μόνο τις αλληλεπιδράσεις ακτινοβολίας και ύλης αλλά περιέγραψε τόσο τις χημικές όσο και τις βιολογικές αντιδράσεις. Η κβαντική ηλεκτροδυναμική είναι μια σχετικιστική θεωρία από τις εξισώσεις της οποίας προκύπτουν οι εξισώσεις της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας. Η κβαντική ηλεκτροδυναμική θεωρεί ότι οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις οφείλονται στην εκπομπή και την απορρόφηση φωτονίων ως σωματιδίων ανταλλαγής, τα οποία αντιπροσωπεύουν διαταραχές των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων. Κατά τρόπο ανάλογο και τα ηλεκτρόνια μπορούν να θεωρηθούν ως διαταραχές αντίστοιχων κβαντισμένων πεδίων.

Αυτά όμως τα φωτόνια είναι εικονικά δηλαδή δεν μπορούν να ανιχνευθούν με κανένα τρόπο επειδή η ύπαρξή τους παραβιάζει την διατήρηση της ενέργειας και της ορμής. Η ανταλλαγή σωματιδίων είναι όμοια με τη "δύναμη" της αλληλεπίδρασης, επειδή τα αλληλεπιδρώντα σωματίδια αλλάζουν την ταχύτητα και την κατεύθυνση της κίνησης τους καθώς αυτά ελευθερώνουν ή απορροφούν την ενέργεια ενός φωτονίου. Τα φωτόνια μπορούν επίσης να εκπεμφθούν σε μια ελεύθερη κατάσταση, οπότε μόνο σ' αυτή την περίπτωση μπορούν να παρατηρηθούν. Η αλληλεπίδραση των δύο φορτισμένων σωματιδίων συμβαίνει σε μια σειρά διαδικασιών αυξανόμενης πολυπλοκότητας. Στον απλούστερο τρόπο, μόνο ένα εικονικό φωτόνιο μπορεί να περιληφθεί. Σε μια διαδικασία δεύτερης τάξης, υπάρχουν δύο φωτόνια και ούτω καθ' εξής.

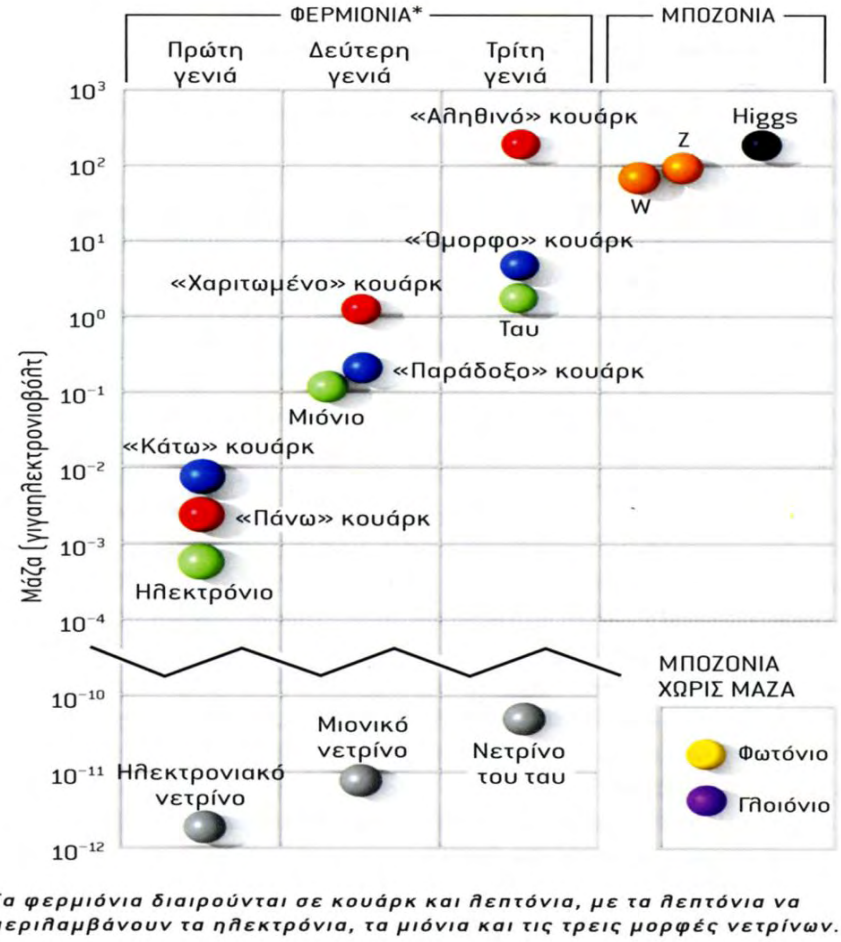
6.3.1. Το πρόβλημα των απειρισμών

Στις αρχές η κβαντική ηλεκτροδυναμική (QED), παρουσίασε αξεπέραστες θεωρητικές δυσκολίες. Η χρήση της QED έγινε προκειμένου να υπολογιστεί μια φυσική ποσότητα με ακρίβεια. Όμως όταν αυξήθηκε η επιθυμητή ακρίβεια, κάνοντας κάποιες μικρές διορθώσεις αυτές τότε έδωσαν όρους με μηδέν ή άπειρο. Το γνωστό πρόβλημα των απειρισμών δεν αντιστοιχεί σε καμιά φυσική ποσότητα.

Η εξαφάνιση αυτών των απειρισμών, στον υπολογισμό αυτών των φυσικών ποσοτήτων έγινε το 1946 [47], κυρίως από τον Ιάπωνα S. Tomonaga, με την εφαρμογή αυτής της θεωρίας κατά συνεπή τρόπο. "Επανακανονικοποίησε" τη μάζα και το φορτίο του ηλεκτρονίου, λαμβάνοντας υπόψη πως η αντίδραση του πεδίου του ηλεκτρονίου τροποποιούσε αυτά τα μεγέθη. Κατά την επανακανονικοποίηση όλοι οι όροι που απειρίζονται αλληλοαναιρούνται μεταξύ τους και έτσι το τελικό αποτέλεσμα είναι πεπερασμένο. Το βαθύτερο αίτιο της ιδιότητας αυτής βρίσκεται στο γεγονός ότι στη συγκεκριμένη θεωρία είναι δυνατό να αντικατασταθεί το "γυμνό" φορτίο του ηλεκτρονίου με κάποιο πεπερασμένο που μετράται σε δεδομένη απόσταση από το σημειακό φορτίο. Μετά τη χρήση της επανακανονικοποίησης όλες οι προβλέψεις συμφωνούν με τα πειραματικά αποτελέσματα, μέσα σε ανεκτά όρια σφάλματος. Το σημαντικότερο παράδειγμα που μπορεί να αναφερθεί είναι η μαγνητική ροπή του ηλεκτρονίου. Ο Dirac προβλέποντας ότι το ηλεκτρόνιο συμπεριφέρεται ως ένας μικρός

μαγνήτης διατύπωσε μια σχετικιστική θεωρία του ηλεκτρονίου, στην οποία η μαγνητική ροπή του ηλεκτρονίου έχει τιμή 1. Σε αυτή τη θεωρία δεν είχε ληφθεί υπόψη η αλληλεπίδραση του ηλεκτρονίου με το πρωτόνιο. Αντιθέτως αν στους υπολογισμούς ληφθεί αυτή η αλληλεπίδραση τότε η θεωρητική πρόβλεψη 1.00115965221 ταιριάζει απόλυτα μέχρι και τον 9ο δεκαδικό αριθμό με την πειραματική τιμή.

Η κβαντική ηλεκτροδυναμική δεν ασχολείται μόνο με τα φωτόνια και τα ηλεκτρόνια αλλά έχει γίνει ένα μοντέλο για την εξήγηση των πυρηνικών φαινομένων, τα οποία οφείλονται στα κουάρκ, στα γλουόνια και πολλά άλλα σωματίδια (σχήμα 6).



Σχήμα 6: Διάκριση Σωματιδίων που συμμετέχουν στις αλληλεπιδράσεις

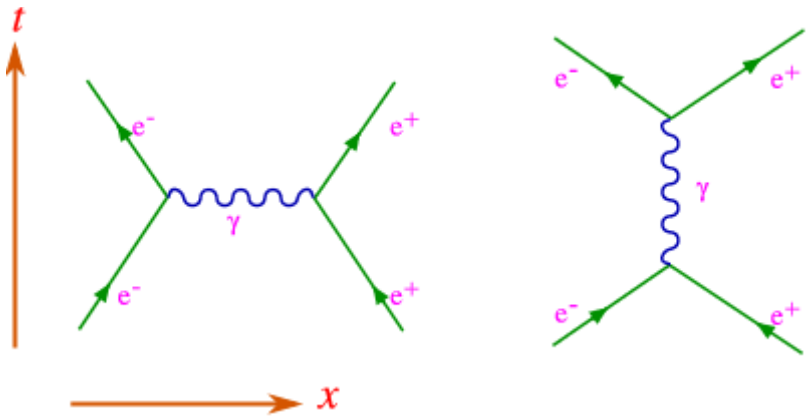
6.3.2. Επιτυχείς προβλέψεις της QED

1. Στο άτομο του υδρογόνου η κατάσταση 2p, με σπιν=1/2, είναι ελαφρώς χαμηλότερη από την κατάσταση 2s, με σπιν=1/2, και κατά συνέπεια υπάρχει μια μικρή μετατόπιση της αντίστοιχης φασματικής γραμμής. Οφείλεται σύμφωνα με την κβαντική ηλεκτροδυναμική (QED) στις αλληλεπιδράσεις του ηλεκτρονίου με τον εαυτό του ή με το πρωτόνιο του πυρήνα εκπέμποντας ή απορροφώντας εικονικά φωτόνια. Το φαινόμενο αυτό λέγεται μετατόπιση Lamb [58-66] και αποτελεί μια διόρθωση στην θεμελιώδη αλληλεπίδραση μεταξύ ηλεκτρονίου και πρωτονίου. Το ηλεκτρόνιο μπορεί για

παράδειγμα να εκπέμψει και να ξανασυλλάβει ένα εικονικό φωτόνιο, ή το φωτόνιο που ανταλλάσσεται μεταξύ πρωτονίου και ηλεκτρονίου να εξαφανιστεί γεννώντας ένα εικονικό ζεύγος ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου, τα οποία να εξαϋλωθούν αναδημιουργώντας το αρχικό φωτόνιο. Οι αλληλεπιδράσεις αυτές του ηλεκτρονίου με τον εαυτό του απεικονίζονται και υπολογίζονται ως διαταραχές στο διάγραμμα Feynman.

2. Στο άτομο πάλι του υδρογόνου υπάρχει μια υπέρλεπτη υφή (Hfs) που οφείλεται στην διαφορά των καταστάσεων 3s και 1s του συστήματος ηλεκτρονίου-πρωτονίου. Αυτή είναι συνέπεια της αλληλεπίδρασης της πυρηνικής μαγνητικής ροπής με τη μαγνητική ροπή του ηλεκτρονίου.
3. Λόγω διορθώσεων υπάρχει η λεγόμενη ανώμαλη μαγνητική ροπή του ηλεκτρονίου και του μ-μεσονίου. Η κβαντική ηλεκτροδυναμική (QED) ήταν η πρώτη θεωρία που έδωσε στην μέτρησή της μια ακρίβεια τουλάχιστον έξι δεκαδικών ψηφίων.

Η αλληλεπίδραση δύο φορτισμένων σωματιδίων μπορεί να πραγματοποιηθεί με μια σειρά διαδικασιών αυξανόμενης πολυπλοκότητας, που σε κάθε μία εκπέμπεται ένα εικονικό φωτόνιο. Οι διαδικασίες αυτές καλύπτουν όλους τους δυνατούς τρόπους σύμφωνα με τους οποίους τα σωματίδια μπορούν να αλληλεπιδρούν. Κάθε μία από αυτές τις δυνατές διαδικασίες όμως μπορεί να παρασταθεί με τη βοήθεια ενός διαγράμματος Feynman (σχήμα 7).



Σχήμα 7: Παράδειγμα διαγράμματος Feynman

Επιπλέον, η κβαντική ηλεκτροδυναμική θεωρία προβλέπει ότι όσο πιο πολύπλοκη είναι μια διαδικασία (όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των εικονικών φωτονίων που εκπέμπονται) τόσο μικρότερη είναι η πιθανότητα πραγματοποίησης της.Για κάθε επίπεδο πολυπλοκότητας, η συμμετοχή της αντίστοιχης διαδικασίας μειώνεται με ένα συντελεστή $(1/137)^2$, και έτσι η συμμετοχή αυτής της διαδικασίας μετά από λίγα επίπεδα είναι αμελητέα.

6.3.3. Σταθερά σύζευξης

Το μέγεθος με τιμή $(1/137)^2$ λέγεται σταθερά σύζευξης je και ο αριθμός 1/137 είναι η σταθερά λεπτής υφής α ή λεπτοδομής. Η κβαντική ηλεκτροδυναμική συχνά χαρακτηρίζεται

ως "θεωρία διαταραχών" λόγω της πολύ μικρής τιμής της σταθεράς α. Ακόμη δεν προβλέπει την ύπαρξη σωματιδίων με άπειρη μάζα ή άπειρο ηλεκτρικό φορτίο ή άλλες μη φυσικές-πραγματικές τιμές.

Κατά την εξήγηση της λεπτής υφής του φάσματος του υδρογόνου από τον Sommerfeld, εμφανίστηκε στους υπολογισμούς του μια αδιάστατη σταθερά, που την ονόμασε σταθερά λεπτής υφής και την συμβόλισε με το ελληνικό γράμμα α. Ο τύπος που μας την δίνει είναι:

$$a = \frac{e^2}{2\varepsilon_o hc}$$

Στην πραγματικότητα η τιμή της σταθεράς λεπτής υφής α είναι:1/137.0359895 (με μια αβεβαιότητα: 0,045 μέρη στο εκατομμύριο).

όπου:

e =1,60217733 10^{-19} C το φορτίο του ηλεκτρονίου

ε_o= 8,854187817 10^{-12} F m^{-1} διηλεκτρική σταθερά του κενού

h = 6,6260755 10^{-34} J s σταθερά του Planck

c = 299792458 m s^{-1} ταχύτητα του φωτός

Παρατηρούμε δηλαδή ότι η σταθερά a συνδέει το μικρόκοσμο (h) με το μακρόκοσμο (c).

Όμως στην Κβαντική Ηλεκτροδυναμική που περιγράφει τις αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα ηλεκτρόνια και φωτόνια μέσω των κβαντικών θεωριών βαθμίδας εμφανίζεται πάλι η σταθερά λεπτής υφής α, αλλά με άλλη μορφή. Συγκεκριμένα δίνει το αριθμητικό μέτρο της ισχύος της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης. Στο λεγόμενο φυσικό σύστημα μονάδων της Ατομικής φυσικής η σταθερά α ισούται με την ηλεκτροστατική ενέργεια απώθησης δύο ηλεκτρονίων που απέχουν μια μονάδα απόστασης. Υπάρχει τώρα ένας άλλος μαγικός αριθμός, η Σταθερά Σύζευξης je , που είναι το σχετικό πλάτος μιας εκπομπής ή απορρόφησης ενός πραγματικού φωτονίου από ένα πραγματικό ηλεκτρόνιο. Το πλάτος αυτό είναι αρνητικός αριθμός και καθορίστηκε πειραματικά κοντά στη τιμή -0,08542455.

Ο μαγικός αυτός αριθμός, που βρέθηκε εδώ και 70 χρόνια περίπου, παραμένει ένα βαθύ μυστήριο για ποιο λόγο το τετράγωνό του je^2, είναι ακριβώς η σταθερά α.

6.4. Μιγαδικό Βαθμωτό Πεδίο και ΗΜ πεδίο

Το μιγαδικό Βαθμωτό πεδίο αποτελείται από δύο πραγματικές συνιστώσες φ_1 και φ_2 και ορίζεται ως εξής:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \qquad (1)$$

$$\phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2) \qquad (2)$$

Η Λαγκρανζιανή του μιγαδικού βαθμωτού πεδίου θα είναι:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) - m^2 \phi^* \phi \qquad (3)$$

Θεωρώντας τα φ και φ* ως ανεξάρτητα πεδία, εφαρμόζουμε την σχέση (3) στις εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] = 0 \qquad (4)$$

και λαμβάνουμε τις δύο εξισώσεις Klein Gordon:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] = 0 \Rightarrow -m^2\phi^* - \partial_\mu \partial^\mu \phi^* = 0 \Rightarrow (\Box + m^2)\phi^* = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \right] = 0 \Rightarrow -m^2\phi - \partial_\mu \partial^\mu \phi = 0 \Rightarrow (\Box + m^2)\phi = 0 \qquad (6)$$

Η Λαγκρανζιανή (3) είναι αναλλοίωτη κάτω από τον μετασχηματισμό της ομάδας U(1):

$$\varphi \to e^{-i\Lambda}\varphi\,,\ \phi^* \to e^{i\Lambda}\phi^* \qquad (7)$$

όπου Λ μια πραγματική σταθερά. Πράγματι:

$$\mathcal{L} \to (\partial_\mu e^{-i\Lambda}\phi)(\partial^\mu e^{i\Lambda}\phi^*) - m^2 e^{-i\Lambda}\phi e^{i\Lambda}\phi^* = \mathcal{L}$$

Η γεωμετρική μορφή του μετασχηματισμού (7) γίνεται πιο κατανοητή αν αντικαταστήσουμε τα φ και φ* με τους ορισμούς (1) και (2). Η Λαγκρανζιανή γίνεται

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi_1)(\partial^\mu \phi_1) + (\partial_\mu \phi_2)(\partial^\mu \phi_2) - m^2(\phi_1^2 + \phi_2^1) \qquad (8)$$

Τώρα γράφουμε το ϕ ως διάνυσμα σε 2-διάστατο χώρο:

$$\vec{\phi} = \phi_1 \hat{i} + \phi_2 \hat{j} \qquad (9)$$

και η Λαγκρανζιανή γίνεται:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \vec{\phi})(\partial^\mu \vec{\phi}) - m^2 \vec{\phi}\vec{\phi} \qquad (11)$$

Ο μετασχηματισμός (7) γράφεται:

$$\phi_1' + i\phi_2' = e^{-i\Lambda}(\phi_1 + i\phi_2)$$

$$\phi_1' - i\phi_2' = e^{i\Lambda}(\phi_1 - i\phi_2)$$

ή

$$\phi_1' + i\phi_2' = (\cos\Lambda - i\sin\Lambda)(\phi_1 + i\phi_2)$$

$$\phi_1' - i\phi_2' = (\cos\Lambda + i\sin\Lambda)(\phi_1 - i\phi_2)$$

ή

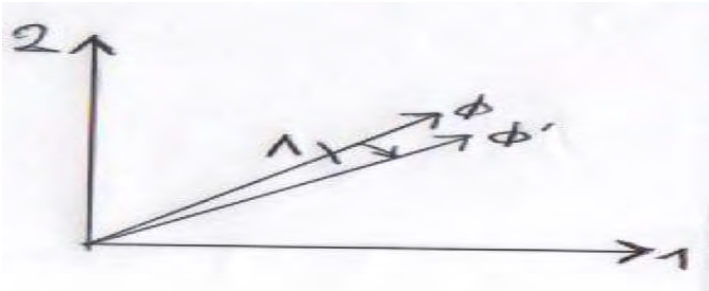
$$\phi_1' = \phi_1 \cos\Lambda + \phi_2 \sin\Lambda$$

$$\phi_2' = -\phi_1 \sin\Lambda + \phi_2 \cos\Lambda$$

ή

$$\begin{pmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Lambda & \sin\Lambda \\ -\sin\Lambda & \cos\Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \qquad (12)$$

που είναι ένας μετασχηματισμός στροφής στο επίπεδο (1,2) του διανύσματος $\vec{\phi}$ κατά γωνία Λ, όπως απεικονίζεται παρακάτω (σχήμα 8). Οι στροφές στο δισδιάστατο επίπεδο αποτελούν την ομάδα SO(2). Αυτό αναμένεται, καθώς οι δύο ομάδες U(1) και SO(2) είναι ισομορφικές.



Σχήμα 8:Μια στροφή του πεδίου φ σε εσωτερικό χώρο

Ο μετασχηματισμός της μορφής (7) ονομάζεται μετασχηματισμός βαθμίδας πρώτου τύπου ή παγκόσμιος μετασχηματισμός. Ο λόγος είναι ο μετασχηματισμός συμβαίνει ταυτόχρονα σε κάθε σημείο του χώρου. Η απειροστή μορφή του είναι:

$$\delta\phi = -i\Lambda\phi\,,\ \delta\phi^* = i\Lambda\phi^* \qquad (13)$$

επομένως

$$\delta(\partial_\mu\phi) = -i\Lambda\partial_\mu\phi\,,\ \delta(\partial_\mu\phi^*) = i\Lambda\partial_\mu\phi^* \qquad (14)$$

Ο μετασχηματισμός δεν περιέχει χωροχρονικές μεταβολές, συνεπώς για τις γενικές σχέσεις μετασχηματισμού ισχύει:

$$\Delta x^\mu = \mathrm{X}^\mu_\nu\delta\omega^\nu\,,\ \Delta\phi = \Phi_\mu\delta\omega^\mu$$

οπότε θα είναι:

$$\Phi = -i\phi\,,\ \Phi^* = i\phi^*\,,\ \mathrm{X} = 0 \qquad (15)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα της Noether, αφού η Λαγκρανζιανή παραμένει αναλλοίωτη σε κάποια συμμετρία, θα υπάρχει ένα διατηρούμενο ρεύμα, το οποίο δίνεται από τη σχέση:

$$J^\mu_\nu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Phi_\nu - \theta^\mu_k\mathrm{X}^k_\nu \qquad (16)$$

Αντικαθιστώντας την (3) στην (19) θα είναι:

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(-i\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}(i\phi^*) =$$

$$= -(\partial^\mu\phi^*)i\phi + (\partial^\mu\phi)i\phi^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J^\mu = i(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*) \qquad (17)$$

Η απόκλιση του παραπάνω ρεύματος είναι 0 όπως αναμενόταν. Πράγματι από τις σχέσεις (5) και (6) προκύπτει:

$$\partial_\mu J^\mu = i[\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi + \phi^*\partial_\mu\partial^\mu\phi - \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - \phi\partial_\mu\partial^\mu\phi^*] =$$

$$= \phi^*(-m^2\phi) - \phi(-m^2\phi^*) \Rightarrow$$

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \qquad (18)$$

και η σχετική διατηρούμενη ποσότητα είναι:

$$Q = \int J^0 dV \Rightarrow$$

$$Q = i\int\left(\phi^* \frac{\partial\phi}{\partial t} - \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right)dV \qquad (19)$$

Αν το φ είναι πραγματικό, τότε Q=0 και δεν υπάρχει διατηρούμενη ποσότητα. Θα μπορούσαμε να αναγνωρίσουμε το Q ως το ηλεκτρικό φορτίο. Τότε είναι διατηρούμενη ποσότητα, εφόσον:

$$\frac{dQ}{dt} = 0.$$

Επιπλέον είναι μια κλασική ποσότητα, αφού δεν περιέχει πουθενά το $\hbar$. Ωστόσο, δεν περιέχει πουθενά το φορτίο του ηλεκτρονίου e. Ακόμη, δείχνει να μην είναι μια κβαντισμένη ποσότητα, οπότε η προσέγγιση μέχρι τώρα, αν και περιέχει θετικά στοιχεία, δεν είναι πλήρης.

6.5. Μετασχηματισμοί Βαθμίδας και Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο

Εφόσον στον μετασχηματισμό (7) ο παράγοντας Λ είναι μια σταθερά, ο μετασχηματισμός αυτός είναι ο ίδιος σε όλα τα σημεία του χωροχρόνου. Δηλαδή, όταν εκτελούμε μια στροφή στον εσωτερικό χώρο του $\vec{\phi}$ σε ένα σημείο κατά γωνία Λ, πρέπει να εκτελέσουμε την ίδια στροφή σε όλα τα υπόλοιπα σημεία ταυτόχρονα. Προφανώς αυτό παραβιάζει την ουσία της σχετικότητας και για να ξεπεράσουμε αυτή την παθογένεια του μετασχηματισμού σταματάμε να θεωρούμε το Λ ως μια σταθερά, αλλά το ορίζουμε ως μια συνάρτηση του χωροχρόνου $\Lambda(x^\mu)$. Αυτός ο μετασχηματισμός ονομάζεται μετασχηματισμός βαθμίδας δεύτερου τύπου ή τοπικός μετασχηματισμός βαθμίδας ή απλά μετασχηματισμός βαθμίδας [289-296]. Το ουσιαστικό σημείο είναι ότι ο τοπικός μετασχηματισμός διαφέρει από σημείο σε σημείο, ενώ ο γενικός όχι.

Βλέπουμε ότι για $\Lambda << 1$ είναι:

$$\phi \to \phi - i\Lambda\phi \Rightarrow \delta\phi = -i\Lambda\phi \qquad (20)$$

και

$$\partial_\mu\phi \to \partial_\mu\phi - i(\partial_\mu\Lambda)\phi - i\Lambda\partial_\mu\phi \Rightarrow \delta(\partial_\mu\phi) = -i\Lambda(\partial_\mu\phi) - i(\partial_\mu\Lambda)\phi \qquad (21)$$

Ομοίως

$$\delta\phi^* = i\Lambda\phi^* \qquad (22)$$

$$\delta(\partial_\mu\phi^*) = i\Lambda(\partial_\mu\phi^*) + i(\partial_\mu\Lambda)\phi^* \qquad (23)$$

Συγκρίνοντας τις παραπάνω σχέσεις με τις σχέσεις μεταβολής του φ (13) και του $\partial_\mu\phi$ (14) στην περίπτωση της γενικής συμμετρίας, παρατηρούμε ότι τώρα εμφανίζεται στο μετασχηματισμό του $\partial_\mu\phi$ ο παράγοντας $\partial_\mu\Lambda$, ο οποίος εμφανίζεται προφανώς διότι το Λ

πλέον είναι συνάρτηση του χωροχρόνου, και έχει ως αποτέλεσμα το $\partial_\mu \phi$ να μην μετασχηματίζεται συναλλοίωτα. Δηλαδή να μην μετασχηματίζεται όπως το ίδιο το φ. Επίσης στην περίπτωση της τοπικής συμμετρίας, η Λαγκρανζιανή παύει να είναι αναλλοίωτη στο μετασχηματισμό. Πράγματι η μεταβολή στη Λαγκρανζιανή είναι:

$$\delta \mathcal{L} = \delta[(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*)] - m^2 \delta(\phi^* \phi) =$$

$$= [\delta(\partial_\mu \phi)](\partial^\mu \phi^*) + (\partial_\mu \phi)[\delta(\partial^\mu \phi^*)] - m^2 (\delta \phi^*)\phi - m^2 \phi^* \delta \phi =$$

$$= [-i\Lambda \partial_\mu \phi) - i(\partial_\mu \Lambda \phi]\partial^\mu \phi^* + [i\Lambda \partial_\mu \phi^* + i(\partial_\mu \Lambda)\phi^*]\partial_\mu \phi - m^2 i\Lambda \phi \phi^* + m^2 \phi^* \Lambda \phi =$$

$$= (\partial_\mu \Lambda)[-i\phi \partial^\mu \phi^* + i\phi^* \partial_\mu \phi] \Rightarrow$$

$$\delta \mathcal{L} = (\partial_\mu \Lambda) J^\mu \neq 0 \qquad (24)$$

Είναι φανερό πως για να μείνει η Λαγκρανζιανή αναλλοίωτη στον μετασχηματισμό βαθμίδας θα πρέπει να εισάγουμε ένα νέο 4-διάνυσμα A_μ, το οποίο συζευγνύεται απευθείας με το ρεύμα J^μ και δίνει έναν επιπλέον όρο στην Λαγκρανζιανή. Ο όρος αυτός θα είναι της μορφής:

$$\mathcal{L}_1 = -eJ^\mu A_\mu \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}_1 = -ie(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) A_\mu$$

Ο όρος $\mathcal{L}_1$ θα πρέπει να έχει διαστάσεις $[Length]^{-4} = [Energy]^4$. Εφόσον τα φ και φ* έχουν διάσταση $[Energy]^1$, θα πρέπει το A_μ να έχει τις ίδιες διαστάσεις με το $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$, ώστε τελικά ο παράγοντας e να είναι αριθμός, ο οποίος ονομάζεται σταθερά σύζευξης του πεδίου A_μ με το ρεύμα J_μ. Εν συνεχεία προσπαθούμε να ορίσουμε το νόμο μεταβολής του A_μ, ώστε να ακυρώνει τον νέο όρο που προέκυψε για τη μεταβολή της ολικής Λαγκρανζιανής.

Απαιτούμε να μετασχηματίζεται το A_μ ως εξής:

$$A_\mu \to A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \Lambda$$

Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} \delta L_1 &= -e(\delta J^\mu)\mathrm{A}_\mu - eJ^\mu(\delta \mathrm{A}_\mu) = \\ &= -e(\delta J^\mu)\mathrm{A}_\mu - J^\mu(\partial_\mu \Lambda) \end{aligned} \qquad (25)$$

Βλέπουμε ότι ο δεύτερος όρος ακυρώνει τον όρο που θέλουμε στην ολική Λαγκρανζιανή (24), όμως τώρα πρέπει να ακυρώσουμε τον πρώτο όρο. Πράγματι έχουμε:

$$\begin{aligned} \delta J^\mu &= i\delta(\varphi^* \partial^\mu \varphi - \varphi \partial^\mu \varphi^*) \\ &= 2\varphi^* \varphi \partial^\mu \Lambda \end{aligned} \qquad (26)$$

οπότε προκύπτει:

$$\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1 = -2eA_\mu(\partial^\mu\Lambda)\phi^*\phi \qquad (27)$$

Για να πετύχουμε την ακύρωση και αυτού του όρου εισάγουμε στην Λαγκρανζιανή τον όρο:

$$\mathcal{L}_2 = e^2 A_\mu A^\mu \phi^*\phi$$

για τον οποίο ισχύει:

$$\delta\mathcal{L}_2 = 2e^2 A_\mu \delta A^\mu \phi^*\phi + e^2 A_\mu A^\mu[(\delta\phi^*)\phi + \phi^*(\delta\phi)] =$$

$$= 2eA_\mu(\partial^\mu\Lambda)\varphi^*\varphi$$

ώστε τελικά

$$\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1 + \delta\mathcal{L}_2 = 0 \qquad (28)$$

Καταφέραμε να κάνουμε την Λαγκρανζιανή αναλλοίωτη στους τοπικούς μετασχηματισμούς της ομάδας U(1), αλλά θα πρέπει να συνυπολογίσουμε στην ολική Λαγκρανζιανή και την συνεισφορά του πεδίου A_μ. Χρειαζόμαστε έναν κινητικό όρο για το A_μ. Κατασκευάζουμε την στροφή του A_μ στις 4 διαστάσεις:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \qquad (29)$$

Εύκολα φαίνεται ότι το $F_{\mu\nu}$ παραμένει αναλλοίωτο και συνεπώς η ορθή μορφή του κινητικού όρου για το A_μ, που θα προστεθεί στην ολική Λαγκρανζιανή θα είναι:

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \qquad (30)$$

Άρα η τελική Λαγκρανζιανή θα είναι:

$$\mathcal{L}_{tot} = (\partial_\mu\phi + ieA_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^* - ieA^\mu\phi^*) - m^2\phi^*\phi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \qquad (31)$$

Ο τανυστής $F_{\mu\nu}$ έχει άμεση σχέση με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο περιγράφεται ως γνωστόν από τις εξισώσεις Maxwell, οι οποίες στο σύστημα Heavyside Lorentz έχουν την εξής μορφή:

$$\nabla \mathrm{E} = \rho \qquad \nabla \mathrm{B} = 0$$

$$\nabla x \mathrm{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} = 0 \qquad \nabla x B - \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{J}{c}$$

Οι εξισώσεις αυτές που είναι αναλλοίωτες κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz μπορούν να γραφούν σε συναλλοίωτη μορφή. Θεωρούμε το 4-διάνυσμα $A_\mu(x)$, το οποίο παριστά την γενίκευση στις 4 διαστάσεις του γνωστού διανυσματικού δυναμικού $\vec{A}(x,t)$, όπου $A_\mu \equiv (A_0 - \vec{A})$, με $A_0 = \Phi$, το γνωστό στατικό δυναμικό Coulomb. Εισάγουμε τώρα τον τανυστή:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Παρατηρούμε ότι με τον τρόπο που ορίσαμε τον $F_{\mu\nu}$ υπάρχει απευθείας σύνδεση με τις συνιστώσες του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου. Για την ακρίβεια ισχύει:

$$E_i = -F_{0i}$$

$$B_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_{jk}$$

Ο αντισυμμετρικός τανυστής $F_{\mu\nu}$ γράφεται σε μορφή πίνακα ως:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

ενώ, αν με τη βοήθεια του $F^{\mu\nu}$ ορίσουμε τον τανυστή

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$$

οι εξισώσεις του Maxwell παίρνουν την συναλλοίωτη μορφή:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \qquad (32)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \qquad (33)$$

όπου η (32) αντιστοιχεί στο πρώτο και η (33) στο δεύτερο ζεύγος εξισώσεων Maxwell αντίστοιχα. Η ομοιότητα των (32) και (33) μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι πρόκειται για την ίδια ποσότητα. Φαίνεται ότι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο προκύπτει φυσιολογικά απαιτώντας αναλλοιότητα της δράσης σε τοπικούς μετασχηματισμούς στροφών της ομάδας U(1) στον εσωτερικό χώρο του μιγαδικού πεδίου φ.

Συμπεράσματα:

1. Το δυναμικό βαθμίδας A_μ συζευγνύεται με το ρεύμα J_μ με σταθερά σύζευξης e. Εύλογα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το e είναι το φορτίο του πεδίου φ, το οποίο δεν εμφανιζόταν πουθενά με την χρήση γενικής συμμετρίας.
2. Αν συγκρίνουμε τις Λαγκρανζιανές:

$$\mathcal{L}_{tot} = (\partial_\mu\phi + ieA_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^* - ieA^\mu\phi^*) - m^2\phi^*\phi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \qquad (31)$$

και

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^*) - m^2\phi^*\phi \qquad (11)$$

παρατηρούμε ότι έχει γίνει αντικατάσταση του $\partial_\mu\phi$ από το $(\partial_\mu\phi + ieA_\mu)\phi$. Αυτή την έκφραση την ονομάζουμε συναλλοίωτη παράγωγο $D_\mu\phi^*$: $D_\mu\phi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi$ όπου πράγματι, μετασχηματίζεται συναλλοίωτα (δηλαδή με τον ίδιο τρόπο με το φ) ,αφού:

$$\delta(D_\mu\phi) = \delta(\partial_\mu\phi) + ie(\delta A_\mu)\phi + ieA_\mu\delta\phi =$$

$$= -i\Lambda(\partial_\mu \phi) + ieA_\mu \phi) =$$

$$= -i\Lambda(D_\mu \phi) \qquad (32)$$

3. Γίνεται φανερό ότι το φ περιγράφει ένα πεδίο με φορτίο e και το φ^*, του οποίου η συναλλοίωτη παράγωγος είναι:

$$D_\mu \phi^* = (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi^* \qquad (33)$$

περιγράφει ένα πεδίο με φορτίο –e. Επομένως τα πραγματικά πεδία φ_1 και φ_2 δεν είναι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή φορτίου. Το $D_\mu \phi^*$ είναι η συναλλοίωτη παράγωγος του ϕ^*, όχι επειδή παίρνουμε το συζυγή του $D_\mu \phi$, αλλά επειδή μετασχηματίζεται με τον ίδιο τρόπο με το ϕ^*.

4. Οι εξισώσεις του Maxwell προκύπτουν μέσω των εξισώσεων Euler-Lagrange, αν εφαρμόσουμε τη Λαγκρανζιανή (31) ως εξής:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -ie(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) + 2e^2 A^\mu |\phi|^2 =$$

$$= -ie(\phi^* D^\mu \phi - \phi D^\mu \phi^*) \equiv -e\mathcal{J}^\mu \qquad (34)$$

όπου το

$$\mathcal{J}^\mu = i(\phi^* D^\mu \phi - \phi D^\mu \phi^*) \qquad (35)$$

είναι η συναλλοίωτη εκδοχή του J^μ και λόγω της αντισυμμετρίας του $F^{\mu\nu}$ θα ισχύει

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial_\mu \mathcal{J}^\mu = 0 \qquad (36)$$

δηλαδή είναι το συναλλοίωτο ρεύμα, το οποίο διατηρείται υπό την παρουσία του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και όχι το J^μ.

5. Οι διαστάσεις των όρων της Λαγκρανζιανής οφείλουν να είναι $[Mass]^4$. Συνεπώς, εφόσον οι διαστάσεις των ϕ και A_μ είναι 1, ο όρος μάζας στη Λαγκρανζιανή θα είναι της μορφής

$$\mathcal{L}_M = m^2 \phi \phi^*.$$

Όπως παρατηρούμε στην (31) δεν υπάρχει όρος της μορφής

$$M^2 A_\mu A^\mu$$

καθώς γίνεται αντιληπτό, ότι ένας τέτοιος όρος δεν υπακούει στη συμμετρία των μετασχηματισμών βαθμίδας που θεωρήσαμε. ***Δηλαδή η αναλλοιότητα σε μετασχηματισμούς βαθμίδας απαιτεί το πεδίο βαθμίδας να είναι άμαζο***. Κάτι τέτοιο βρίσκεται σε συμφωνία με όσα γνωρίζουμε για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, το οποίο έχει άπειρη εμβέλεια και ο διαδότης του είναι το άμαζο φωτόνιο [293-295].

6. Το ηλεκτρικό φορτίο εμφανίζεται να έχει διπλό ρόλο. Είναι διατηρούμενη ποσότητα, με τη διαφορά ότι είναι το $\mathcal{J}^0$ που διατηρείται και όχι το J^0, ωστόσο λειτουργεί και σαν μέτρο της δύναμης με την οποία το πεδίο φ (ή τα σωματίδια, που αποτελούν διεγέρσεις από την κατάσταση κενού του πεδίου φ στο οποίο θα κβαντώσουμε τη θεωρία) αλληλεπιδρά με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Αυτός ο διπλός ρόλος του φορτίου οφείλεται στην αρχή της βαθμίδας και παίζει σημαντικό ρόλο στη Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων, καθώς εφαρμόζεται και σε άλλες διατηρούμενες ποσότητες.

6.6. Το Πεδίο Yang-Mills

Θα μελετήσουμε τώρα την περίπτωση που η Λαγκρανζιανή υπακούει σε ανώτερη συμμετρία από την συμμετρία της ομάδας U(1). Ανώτερες συμμετρίες περιγράφονται από μη Αβελιανές ομάδες και η πιο απλή μη Αβελιανή ομάδα είναι η SU(2) [297].

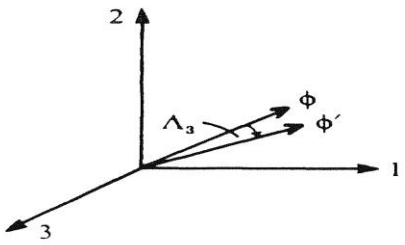
Στην περίπτωση του μιγαδικού βαθμωτού πεδίου που έχει 2 ανεξάρτητες συνιστώσες, η γενίκευση στην περίπτωση της συμμετρίας SU(2) έρχεται αμέσως αν θεωρήσουμε αυτή τη φορά το πεδίο να αποτελείται από 3 συνιστώσες, $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$, οι οποίες μετασχηματίζονται σε έναν εσωτερικό χώρο και οι μετασχηματισμοί είναι στροφές στο χώρο αυτό. Ουσιαστικά πρόκειται για στροφές σε 3-διάστατο χώρο, δηλαδή μετασχηματισμούς της ομάδας SO(3), η οποία είναι μη Αβελιανή και ως γνωστόν ομομορφική με την SU(2). Στην περίπτωση αυτή οδηγούμαστε στη διατήρηση μιας διανυσματικής ποσότητας, κάτι ανάλογο του isospin.

Ιστορικά, πρώτοι οι Yang-Mills το 1954 έκαναν την υπόθεση ότι η συμμετρία του isospin είναι μια τοπική συμμετρία, ενώ αργότερα συνειδητοποιήθηκε πως ανάλογα συμπεράσματα προέκυπταν γενικότερα για μη Αβελιανές συμμετρίες, οι οποίες ήταν συμμετρίες βαθμίδας και μπορούσαν να εφαρμοστούν στις ισχυρές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των quarks και στο ενοποιημένο πλαίσιο ασθενών και ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων. Στην περίπτωση που μελετάμε, οι μετασχηματισμοί στροφών (12) στον εσωτερικό χώρο του, όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα (σχήμα 9), θα είναι της μορφής:

$$\begin{aligned} \phi_1' &= (\cos\Lambda_3)\phi_1 + (\sin\Lambda_3)\phi_2 \\ \phi_2' &= (-\sin\Lambda_3)\phi_1 + (\cos\Lambda_3)\phi_2 \qquad (37) \\ \phi_3' &= \phi_3 \end{aligned}$$

Αν θεωρήσουμε το απειροστό Λ_3,οι σχέσεις γίνονται:

$$\begin{aligned} \phi_1' &= \phi_1 + \Lambda_3\phi_2 \\ \phi_2' &= -\Lambda_3\phi_1 + \phi_2 \qquad (38) \\ \phi_3' &= \phi_3 \end{aligned}$$



Σχήμα 9:Στροφή γύρω από του άξονα 3 στον εσωτερικό χώρο συμμετρίας

και διανυσματικά ισοδυναμούν με τη σχέση:

$$\vec{\phi} \to \vec{\phi}' - \vec{\Lambda} \times \vec{\phi} \qquad (39)$$

όπου το $|\vec{\Lambda}|$ ορίζει γωνία στροφής και το $\vec{\Lambda}/|\vec{\Lambda}|$ ορίζει άξονα στροφής. Συνεπώς για τη μεταβολή του φ ισχύει:

$$\delta\vec{\phi} = -\vec{\Lambda} \times \vec{\phi} \qquad (40)$$

Η μη Αβελιανή φύση του μετασχηματισμού μας, φαίνεται καθαρά και από το γεγονός ότι περιέχει εξωτερικά γινόμενα διανυσμάτων, για τα οποία ισχύει:

$$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}\,.$$

Γνωρίζοντας ότι όλες οι ποσότητες που χρησιμοποιούμε είναι διανυσματικές, στις πράξεις δεν θα χρησιμοποιήσουμε βέλος. Επιλέγουμε ως φυσικά αποδεκτούς τους μετασχηματισμούς δεύτερου είδους, δηλαδή τους τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας, συνεπώς απαιτούμε:

$$\Lambda = \Lambda(x^{\mu})$$

Από την (39) θα έχουμε τότε

$$\partial_{\mu}\phi \to \partial_{\mu}\phi' = \partial_{\mu}\phi - \partial_{\mu}\Lambda \times \phi - \Lambda \times \partial_{\mu}\phi \Rightarrow$$

$$\delta(\partial_{\mu}\phi) = -\Lambda \times \partial_{\mu}\phi - \partial_{\mu}\Lambda \times \phi \qquad (41)$$

Βλέπουμε και πάλι ότι το $\partial_{\mu}\phi$ δεν μετασχηματίζεται αναλλοίωτα. Θα πρέπει να κατασκευάσουμε τη συναλλοίωτη παράγωγο, εισάγοντας ένα πεδίο βαθμίδας, ανάλογο του A_{μ}. Θεωρούμε τη συναλλοίωτη παράγωγο:

$$D_{\mu}\phi = \partial_{\mu}\phi + gW_{\mu} \times \phi \qquad (42)$$

όπου το W_{μ} είναι το δυναμικό βαθμίδας. Το W_{μ} είναι διάνυσμα του εσωτερικού χώρου και αλληλεπιδρώντας με το φ το περιστρέφει, εφόσον βρισκόμαστε στο χώρο, ενώ προηγουμένως η αλληλεπίδραση του A_{μ} με το φ γινόταν σε εσωτερικό επίπεδο. Το g είναι η σταθερά σύζευξης της αλληλεπίδρασης, ανάλογη με το e του ηλεκτρικού φορτίου και είναι φυσικός αριθμός. Για να μετασχηματίζεται συναλλοίωτα η σχέση (42) θα πρέπει να ισχύει σύμφωνα με την (39):

$$\delta(D_{\mu}\phi) = -\Lambda \times (D_{\mu}\phi) \qquad (43)$$

Προσπαθούμε να μαντέψουμε το νόμο μετασχηματισμού, στον οποίο θα πρέπει να υπακούει το δυναμικό βαθμίδας W_μ . Εφόσον είναι διάνυσμα, προφανώς θα περιστρέφεται, άρα πρέπει να υπάρχει όρος $(1/g)\partial_\mu\Lambda$. Δηλαδή:

$$W_\mu \to W_\mu - \Lambda\times W_\mu + (1/g)\partial_\mu\Lambda$$

ή

$$\delta W_\mu = -\Lambda\times W_\mu + 1/g\partial_\mu\Lambda \qquad (44)$$

Στην περίπτωση αυτή, η μεταβολή στη συναλλοίωτη παράγωγο, συνδυάζοντας τις σχέσεις (39), (41) και (42) θα είναι:

$$\delta(D_\mu\phi) = \delta(\partial_\mu\phi) + g(\delta W_\mu)\times\phi + gW_\mu\times(\delta\phi) =$$

$$= -\Lambda\times\partial_\mu\phi - \partial_\mu\Lambda\times\phi - g\Lambda\times W_\mu\times\phi + \partial_\mu\Lambda\times\phi - gW_\mu\times\Lambda\times\phi =$$

$$= -\Lambda\times\partial_\mu\phi - g[\Lambda\times W_\mu)\times\phi + W_\mu(\Lambda\times\phi)]$$

όμως από τη διανυσματική ταυτότητα

$$(A\times B)\times C + (C\times A)\times B + (B\times C)\times A = 0$$

έχουμε

$$(A\times B)\times C + B\times(A\times C) = A\times(B\times C) \qquad (45)$$

Οπότε τελικά

$$\delta(D_\mu\phi) = -\Lambda\times\partial_\mu\phi - g\Lambda\times(W_\mu\times\phi) =$$

$$= -\Lambda\times[\partial_\mu + gW_\mu\times]\phi \Rightarrow \delta(D_\mu\phi) = -\Lambda\times D_\mu\phi \qquad (46)$$

όπως απαιτήσαμε για να έχουμε συναλλοίωτο μετασχηματισμό. Τώρα θα βρούμε μια έκφραση ανάλογη του πεδίου (field strength) $F_{\mu\nu}$, έστω $W_{\mu\nu}$, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε για να εκφράσουμε το W_μ στην Λαγκρανζιανή. Το $W_{\mu\nu}$ θα είναι διάνυσμα και θα μετασχηματίζεται όπως το φ, δηλαδή:

$$\delta W_{\mu\nu} = -\Lambda\times W_{\mu\nu} \qquad (47)$$

Ελέγχουμε αν η μορφή $\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu$ είναι ορθή. Δηλαδή:

$$\delta(\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu) = \partial_\mu(\Lambda\times W_\nu + \frac{1}{g}\partial_\nu\Lambda) - \partial_\nu(-\Lambda\times W_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\Lambda) =$$

$$= -\partial_\mu\Lambda\times W_\nu - \Lambda\times\partial_\mu W_\nu + \frac{1}{g}\partial_\mu\partial_\nu\Lambda + \partial_\nu\Lambda\times W_\mu + \Lambda\times\partial_\nu W_\mu - \frac{1}{g}\partial_\nu\partial_\mu\Lambda =$$

$$= -\Lambda\times(\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu) - (\partial_\mu\Lambda\times W_\nu - \partial_\nu\Lambda\times W_\mu) \qquad (48)$$

Άρα για να έχουμε τον μετασχηματισμό που οφείλουμε, πρέπει να εκλείψει ο τελευταίος όρος. Παρατηρούμε ότι ο πρώτος και ο τρίτος όρος μπορούν να συνδυαστούν με την (45) οπότε προκύπτει:

$$\delta(gW_\mu\times W_\nu) = g(-\Lambda\times W_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\Lambda)\times W_\nu + gW_\mu\times(-\Lambda\times W_\nu + \frac{1}{g}\partial_\nu\Lambda) =$$

$$=(-g\Lambda\times W_\mu+\partial_\mu\Lambda)\times W_\nu+gW_\mu\times(-\Lambda\times W_\nu)+W_\mu\times\partial_\nu\Lambda=$$

$$=(-g\Lambda\times W_\mu)\times W_\nu+\partial_\mu\Lambda\times W_\nu-gW_\mu\times(\Lambda\times W_\nu)+W_\mu\times\partial_\nu\Lambda=$$

$$=-g\Lambda\times(W_\mu\times W_\nu)+(\partial_\mu\Lambda\times W_\nu-\partial_\nu\Lambda\times W_\mu) \qquad (49)$$

Ο τελευταίος όρος στην σχέση (49) είναι ίδιος με τον τελευταίο όρο της σχέσης (48) οπότε είναι:

$$\delta(\partial_\mu W_\nu-\partial_\nu W_\mu+gW_\mu\times W_\nu)=-\Lambda\times(\partial_\mu W_\nu-\partial_\nu W_\mu)-(\partial_\mu\Lambda\times W_\nu-\partial_\nu\Lambda\times W_\mu)-$$

$$-g\Lambda\times(W_\mu\times W_\nu)+(\partial_\mu\Lambda\times W_\nu-\partial_\nu\Lambda\times W_\mu)=$$

$$=-\Lambda\times(\partial_\mu W_\nu-\partial_\nu W_\mu+gW_\mu\times W_\nu)$$

Επομένως η σωστή μορφή για το πεδίο $W_{\mu\nu}$ είναι

$$W_{\mu\nu}=\partial_\mu W_\nu-\partial_\nu W_\mu+gW_\mu\times W_\nu \qquad (50)$$

Σε πλήρη αναλογία με την περίπτωση της συμμετρίας U(1), η Λαγκρανζιανή θα είναι:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(D_\mu\phi)(D^\mu\phi)-\frac{m^2}{2}\phi\cdot\phi-\frac{1}{4}W_{\mu\nu}W^{\mu\nu} \qquad (51)$$

Οι εξισώσεις κίνησης για το πεδίο βαθμίδας προκύπτουν με χρήση των εξισώσεων Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(W_\mu^i)}=\partial_\nu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu W_\mu^i)}\right]$$

όπου ύστερα από πράξεις παίρνουμε:

$$\partial^\nu W_{\mu\nu}+gW^\nu\times W_{\mu\nu}=g[(\partial_\mu\phi)\times\phi+g(W_\mu\times\phi)\times\phi]\Rightarrow$$

και από τη σχέση (42) παίρνουμε:

$$\partial^\nu W_{\mu\nu}=g(D_\mu\phi)\times\phi\equiv gJ_\mu \qquad (52)$$

Η παραπάνω εξίσωση δεν είναι γραμμική ως προς το W_μ. Στο πεδίο Maxwell, κατά την απουσία ύλης $(\phi\to 0)$ οι εξισώσεις γίνονται:

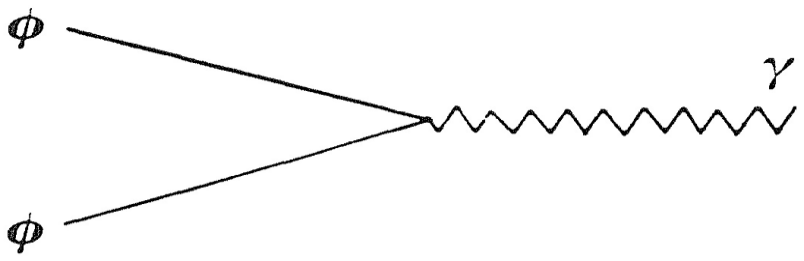
$$\partial^\nu F_{\mu\nu}=0\to\ \nabla\cdot\vec{E}=0\,,\ \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}-\nabla\times\vec{B}=0$$

που σημαίνει ότι δεν υπάρχει κάποιος όρος που να λειτουργεί ως πηγή για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Αντίθετα, η εξίσωση μη Αβελιανού πεδίου βαθμίδας (52) κατά την απουσία ύλης γίνεται:

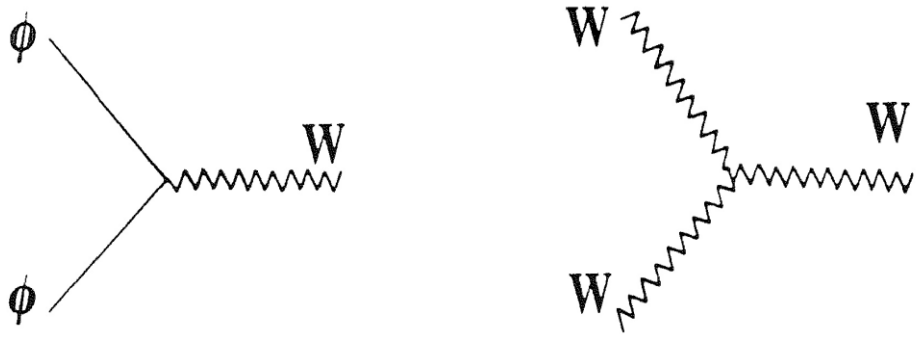
$$D^\nu W_{\mu\nu}=0\Rightarrow\partial^\nu W_{\mu\nu}=-gW^\nu\times W_{\mu\nu} \qquad (53)$$

δηλαδή το ίδιο το πεδίο $W_{\mu\nu}$ λειτουργεί σαν πηγή για τον εαυτό του. Αυτό σημαίνει ότι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο δεν μεταφέρει ηλεκτρικό φορτίο, ενώ το πεδίο $W_{\mu\nu}$, το οποίο οι Yang Mills είχαν θεωρήσει ως isospin, φαίνεται ότι έχει isospin ή γενικά φορτίο, λειτουργώντας με αυτό τον τρόπο ως πηγή για τον εαυτό του. Αυτά τα συμπεράσματα φαίνονται και από την μορφή των δυο Λαγκρανζιανών. Ενώ στη Λαγκρανζιανή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

έχουμε όρους αλληλεπίδρασης μόνο της μορφής $(\varphi\phi^* A)$, η Λαγκρανζιανή (51) περιέχει όρους φφW και WWW. Οι καταστάσεις αυτές απεικονίζονται στα επόμενα δυο σχήματα.



Σχήμα 10: Στη συμμετρία U(1) το πεδίο βαθμίδας συζευγνύεται μόνο με το πεδίο φ.



Σχήμα 4: Στη συμμετρία SU(2) υπάρχει σύζευξη τόσο του πεδίου βαθμίδας με το πεδίο φ, όσο και με του εαυτό του.

Με άλλα λόγια, στην περίπτωση του ηλεκτρομαγνητισμού, μόνο φορτισμένα πεδία μπορούν να εκπέμψουν φωτόνια, ενώ στις μη Αβελιανές θεωρίες, τόσο το πεδίο φ, όσο και το πεδίο W, μπορούν να εκπέμψουν σωμάτια βαθμίδας.

Γίνεται πια σαφές, ότι η μη Αβελιανή φύση της ομάδας των μετασχηματισμών οδηγεί σε πολύ πιο πλούσια δομή στη θεωρία, από ότι συναντάμε στον ηλεκτρομαγνητισμό. Για παράδειγμα το δεύτερο μέρος των εξισώσεων Maxwell προκύπτει από την εξίσωση:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

Μια ισοδύναμη μορφή αυτής είναι η εξίσωση:

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \qquad (54)$$

που ισοδυναμεί με τις:

$$\nabla \cdot \vec{\mathrm{B}} = 0\,, \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = 0$$

Η πρώτη οδηγεί στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχουν μαγνητικά φορτία ως πηγές του μαγνητικού πεδίου. Η μη Αβελιανή επέκταση των σχέσεων αυτών είναι η εξής:

$$D_\lambda W_{\mu\nu} + D_\mu W_{\nu\lambda} + D_\nu W_{\lambda\mu} = 0$$

η οποία λόγω της ύπαρξης συναλλοίωτης παραγώγου θα οδηγήσει σε:

$$\nabla \cdot \tilde{\tilde{B}} \neq 0$$

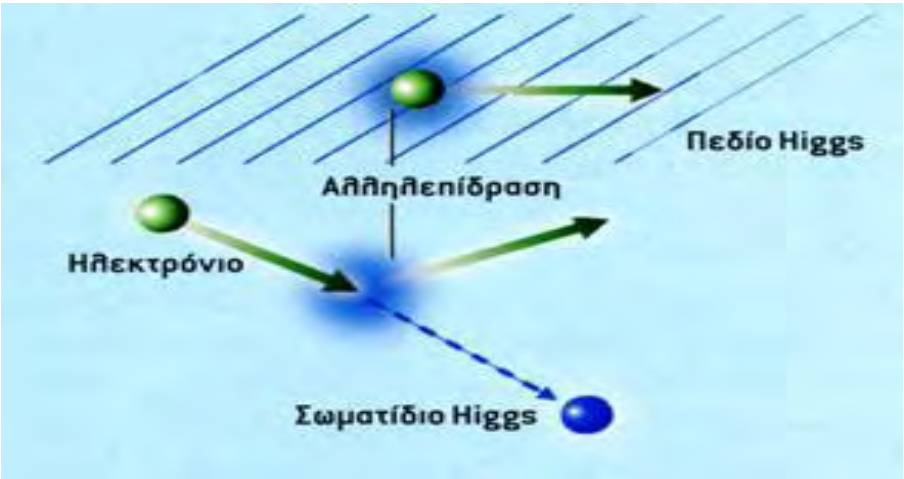
όπου το $\tilde{\tilde{B}}$ θα είναι διάνυσμα τόσο στον κανονικό, όσο και στον εσωτερικό χώρο. Εφόσον τώρα αυτό το ισοδιανυσματικό μαγνητικό πεδίο έχει μη μηδενική απόκλιση, θα υπάρχουν φορτία τα οποία θα λειτουργούν ως πηγή για το πεδίο αυτό.

Το πεδίο φ που χρησιμοποιήσαμε είναι φυσικά ένα τυχαίο ισοδιανυσματικό πεδίο. Η ισχύς της σύζευξής του με το πεδίο βαθμίδας $W_{\mu\nu}$ περιγράφεται από τη σταθερά g. Ωστόσο η σταθερά g υπάρχει και στον ίδιο τον ορισμό (50) του πεδίου βαθμίδας $W_{\mu\nu}$ και συνεπώς δεν είναι μια σταθερά που μπορεί να παίρνει διάφορες τιμές. Συνεπώς όλα τα ισοδιανυσματικά πεδία συζευγνύονται με την ίδια ένταση με το πεδίο βαθμίδας $W_{\mu\nu}$. Αυτό οφείλεται καθαρά στη μη Αβελιανή φύση των μετασχηματισμών, ενώ σίγουρα δεν θα ήταν σωστό στην περίπτωση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, όπου τα σωματίδια μπορούν να εμφανιστούν με διαφορετικά φορτία. Εδώ όλα τα σωματίδια έχουν το ίδιο φορτίο.

Ωστόσο δεν είναι όλα διαφορετικά στην μη Αβελιανή συμμετρία. Βλέπουμε, πως ούτε στην Λαγκρανζιανή (51) εμφανίζεται για το πεδίο βαθμίδας όρος μάζας

$$\mathcal{L}_m = m^2 W_\mu W^\mu$$

Δηλαδή και εδώ η ιδιότητα της Λαγκρανζιανής να είναι αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς βαθμίδας απαιτεί μηδενική μάζα για το πεδίο βαθμίδας. Αυτό αποτελεί μειονέκτημα για τις θεωρίες βαθμίδας, γιατί ενώ τα φωτόνια είναι άμαζα, δεν ισχύει το ίδιο για τις πυρηνικές δυνάμεις , οι οποίες είναι μικρής εμβέλειας και συνεπώς τα σωμάτια-διαδότες τους θα πρέπει να έχουν μάζα. Λύση σε αυτό το αδιέξοδο θα δώσει ο μηχανισμός Higgs [298-303] δηλαδή ο μηχανισμός που επιτρέπει στα βαθμωτά μποζόνια (σωματίδια βαθμίδας) να αποκτούν μάζα. Σύμφωνα με τον μηχανισμό του Higgs συμβαίνουν δύο διαφορετικά φαινόμενα (σχήμα 12), η απόκτηση της μάζας από ένα σωματίδιο (πάνω) και η παραγωγή ενός μποζονίου Higgs [304] (κάτω), στην ίδια αλληλεπίδραση.



Σχήμα 12: Μηχανισμός Higgs

Συμπέρασμα:

Τα διατηρούμενα μεγέθη, τα οποία προκύπτουν από την τοπική συμμετρία, όπως είναι το ηλεκτρικό φορτίο, συνοδεύονται από την εμφάνιση ενός πεδίου βαθμίδας, το οποίο στην περίπτωση του ηλεκτρικού φορτίου είναι το ηλεκτρομαγνητικό. Διατηρούμενα μεγέθη, τα οποία προκύπτουν από γενικές (global) συμμετρίες δεν συνοδεύονται από εμφάνιση κάποιου πεδίου, καθώς δεν συνδέονται με κάποια αλληλεπίδραση, γεγονός αναμενόμενο. Τέτοιου είδους διατηρούμενες ποσότητες είναι *ο βαρυονικός αριθμός, ο λεπτονικός, το isospin, η παραδοξότητα* και άλλα.

6.7. Η Γεωμετρία των Πεδίων Βαθμίδας

Ο μετασχηματισμός που θεωρήσαμε ήταν μια στροφή κατά γωνία Λ σε έναν εσωτερικό χώρο της μορφής:

$$\phi \to \phi' = \phi - \Lambda \times \phi \qquad (55)$$

Ο μετασχηματισμός αυτός είναι η απειροστή μορφή της γενικής στροφής:

$$\phi \to \phi' = e^{i\vec{I}\vec{\Lambda}}\phi \qquad (56)$$

όπου οι συνιστώσες του $\vec{I}$ είναι οι πίνακες

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

που είναι γεννήτορες της ομάδας SO(3) και τα στοιχεία τους υπακούν στη σχέση

$$(I_i)_{mn} = -i\varepsilon_{mn}$$

Αν αναπτύξουμε τον μετασχηματισμό (56) σε δυνάμεις του Λ θα είναι προφανώς

$$\begin{aligned} \phi_m{}' &= e^{iI_i\Lambda_i}_{mn}\phi_n = \\ &= (1 + iI_i\Lambda_i)_{mn}\phi_n = \\ &= \phi_m - \varepsilon_{min}\Lambda_i\phi_n = \\ &= (\vec{\phi} - \vec{\Lambda} \times \vec{\phi})_m \qquad (57) \end{aligned}$$

Θεωρώντας τώρα $\Lambda = \Lambda(x)^{\mu}$, εφόσον μελετάμε μετασχηματισμούς βαθμίδας, θα έχουμε την παρακάτω γενική μορφή για τον μετασχηματισμό (56):

$$\vec{\phi} \to \vec{\phi}' = e^{i\vec{I}\vec{\Lambda}(x)}\vec{\phi} = S(x)\vec{\phi} \qquad (58)$$

όπου οι πίνακες I είναι γεννήτορες της ομάδας SO(3) και υπακούν στην άλγεβρα:

$$[I_i, I_j] = i\varepsilon_{ilk}I_k = C_{ijk}I_k$$

όπου τα $C_{ijk} = i\varepsilon_{ilk}$ είναι οι σταθερές δομής της ομάδας. Ένα isospinor ψ μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\psi \to \psi' = e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}\vec{\Lambda}(x)}\psi = S(x)\psi \qquad (59)$$

όπου το $S(x)$ είναι εδώ ένας 2×2 πίνακας. Γενικεύοντας σε n διαστάσεις έχουμε:

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{iM^a\vec{\Lambda}^a(x)}\psi(x) = S(x)\psi(x) \qquad (60)$$

όπου ο δείκτης α αθροίζει από το 1 ως το 3, το ψ είναι ένα n–διάστατο διάνυσμα και οι M^a είναι $n\times n$ πίνακες, αναπαραστάσεις των γεννητόρων της ομάδας μετασχηματισμού, που υπακούν στην άλγεβρα της SU(2) και στην ταυτότητα Jacobi:

$$[[M_i, M_j], M_k] + [[M_j, M_k], M_i] + [[M_k, M_i], M_j] = 0 \qquad (61)$$

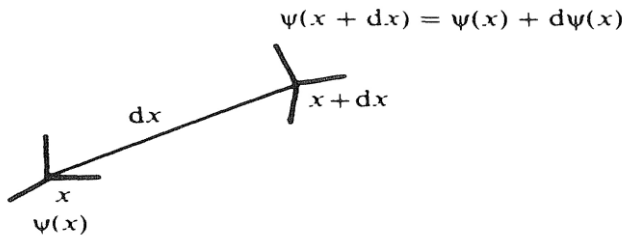
Παρατηρούμε ότι η παράγωγος του spinor δεν μετασχηματίζεται συναλλοίωτα. Πράγματι:

$$\partial_\mu\psi \to (\partial_\mu\psi)' = \partial_\mu[e^{iM^a\Lambda^a(x)}\psi(x)] =$$

$$= e^{iM^a\Lambda^a(x)}\partial_\mu\psi(x) + \psi(x)\partial_\mu e^{iM^a\Lambda^a(x)} \Rightarrow$$

$$(\partial_\mu\psi)' = S(\partial_\mu\psi) + (\partial_\mu S)\psi \qquad (62)$$

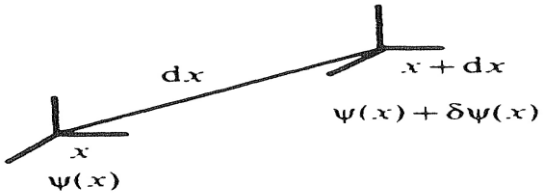
Το γεγονός αυτό έχει άμεση γεωμετρική επεξήγηση (σχήμα 13). Εφόσον εκτελούμε διαφορετικές στροφές σε κάθε σημείο του χωροχρόνου, οι άξονες αυτού του εσωτερικού χώρου προσανατολίζονται διαφορετικά από σημείο σε σημείο. Δηλαδή το ψ(x) μετριέται σε διαφορετικό σύστημα συντεταγμένων από ότι το $\psi(x+dx) = \psi(x) + d\psi$, γεγονός που σημαίνει ότι το dψ περιέχει πληροφορία, τόσο για τη μεταβολή του ψ, όσο και για τη στροφή των αξόνων στον εσωτερικό χώρο, κατά τη μεταφορά από το x στο $x+dx$. Για να σχηματίσουμε μια συναλλοίωτη παράγωγο, θα πρέπει να συγκρίνουμε το $\psi(x+dx)$ όχι με το $\psi(x)$, αλλά με την τιμή που θα είχε το ψ(x) αν, μεταφερόμενοι από το x στο $x+dx$, οι άξονες του εσωτερικού χώρου παρέμεναν σταθεροί. Κάτι τέτοιο το ονομάζουμε παράλληλη μεταφορά και το διάνυσμα που προκύπτει είναι το $\psi + \delta\psi$. Ο λόγος που το δψ δεν είναι μηδέν είναι ότι το ψ+δψ είναι το διάνυσμα, το οποίο μετρούμενο στο εσωτερικό σύστημα συντεταγμένων στο $x+dx$ είναι ίσο με το ψ, όταν αυτό μετράται στο εσωτερικό σύστημα συντεταγμένων στο x.



Σχήμα 13: Γεωμετρική ερμηνεία - Το dψ μεταφέρει πληροφορία τόσο για τη μεταβολή του ψ, όσο και για την μεταβολή του συστήματος συντεταγμένων από το x στο x+dx.

Εφόσον αυτά τα συστήματα συντεταγμένων δεν είναι ίδια, το διάνυσμα ψ κατά την παράλληλη μεταφορά θα υφίσταται μια μη μηδενική μεταβολή δψ (σχήμα 14). Τι μορφή θα

έχει το $\delta\psi$; Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι θα είναι ανάλογο του ψ και του dx^{μ}, της απόστασης, δηλαδή κατά την οποία μεταφέρεται το διάνυσμα.



Σχήμα 14: Ορισμός του δψ κατά την παράλληλη μεταφορά

Εισάγουμε τώρα ένα δυναμικό, με την μορφή πεδίου, το οποίο θα μετασχηματίζεται με τους ίδιους μετασχηματισμούς που έχουμε θεωρήσει εξαρχής και το οποίο εκφράζει το βαθμό μεταβολής των αξόνων στο σύστημα συντεταγμένων του εσωτερικού χώρου, από σημείο σε σημείο. Ο Richard Feynman ονομάζει αυτό το δυναμικό universal influence (παγκόσμια επίδραση). Θεωρώντας και έναν αριθμητικό, πολλαπλασιαστικό παράγοντα g, το δψ θα είναι της μορφής:

$$\delta\psi = igM^{a}A^{a}_{\mu}dx^{\mu}\psi \qquad (63)$$

Συνεπώς τώρα έχουμε δυο διανύσματα στο σημείο $x+dx$, το $\psi+d\psi$ και το $\psi+\delta\psi$. Η συναλλοίωτη παράγωγος θα δίνεται από τη διαφορά αυτών των δυο διανυσμάτων. Δηλαδή

$$D\psi = (\psi + d\psi) - (\psi + \delta\psi) =$$

$$= d\psi - \delta\psi =$$

$$= d\psi - igM^{a}A^{a}_{\mu}dx^{\mu}\psi \Rightarrow$$

$$\frac{D\psi}{dx^{\mu}} \equiv D_{\mu}\psi = \partial_{\mu}\psi - igM^{a}A^{a}_{\mu}\psi \qquad (64)$$

Η παραπάνω εξίσωση (64) ορίζει τη συναλλοίωτη παράγωγο ενός τυχαίου πεδίου ψ, το οποίο μετασχηματίζεται κάτω από τη συμμετρία κάποιας ομάδας, της οποίας οι γεννήτορες αναπαρίστανται από τους πίνακες M^{a}, που είναι κατάλληλοι της αναπαράστασης του ψ.

Αρχικά εφαρμόζουμε σε συμμετρία της ομάδας U(1). Συγκρίνοντας τις σχέσεις (60) και (7) βλέπουμε ότι οι σχέσεις (32) και (64)

$$D_{\mu}\phi = (\partial_{\mu} + ieA_{\mu})\phi \qquad \text{και} \qquad \frac{D\psi}{dx^{\mu}} \equiv D_{\mu}\psi = \partial_{\mu}\psi - igM^{a}A^{a}_{\mu}\psi \qquad (65)$$

είναι ίδιες, θεωρώντας $M \to -1$ και $g \to e$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η σύγκριση αυτή δεν σημαίνει ότι ο γεννήτορας της ομάδας U(1) είναι ο αριθμός -1, απλά πρόκειται για μια αναπαράσταση του γεννήτορα, η οποία ικανοποιεί την ισότητα των δυο συγκεκριμένων μορφών. Έχουμε δηλαδή:

$$U(1): D_{\mu} = \partial_{\mu} + ieA_{\mu}$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε μετασχηματισμούς της ομάδας SU(2). Στη διανυσματική αναπαράσταση, οι γεννήτορες της ομάδας μετασχηματισμών στροφής υπακούν στη σχέση $(I_i)_{mn} = -i\varepsilon_{mn}$. (οι δείκτες παίρνουν τιμές 1,2,3, ενώ για εσωτερικούς δείκτες όπως το α δεν κάνουμε διάκριση μεταξύ πάνω και κάτω δείκτη. Δηλαδή:

$$SU(2):(I_i)_{mn} = -i\varepsilon_{imn} \to (M^a)_{mn} = -i\varepsilon_{amn} \Rightarrow$$

$$D_\mu \phi_m = \partial_\mu \phi_m - ig(M^a)_{mn} A^a_\mu \phi_n =$$

$$= \partial_\mu \phi_m - g\varepsilon_{amn} A^a_\mu \phi_n =$$

$$= (\partial_\mu \vec{\phi} + g\vec{A}_\mu \times \vec{\phi}) \Rightarrow$$

$$D_\mu \vec{\phi} = \partial_\mu \vec{\phi} + g\vec{A}_\mu \times \vec{\phi} \qquad (66)$$

όπου βλέπουμε ότι είναι η ίδια μορφή με την $D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + gW_\mu \times \phi$ (42), που είχαμε εξάγει διαισθητικά με την διαφορά ότι εδώ το δυναμικό $\vec{W}$ το συμβολίσαμε με $\vec{A}$.

Τέλος σε περίπτωση σπινοριακού πεδίου οι γεννήτορες της SU(2) αναπαρίστανται με τους πίνακες του Pauli:

$$M^a = \frac{\sigma^a}{2}$$

Συνεπώς η συναλλοίωτη παράγωγος σε αυτή την περίπτωση θα είναι:

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - \frac{i}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{A}_\mu \psi \qquad (67)$$

Στη γενική σχετικότητα συναντούμε παρόμοια ανάγκη για εξαγωγή συναλλοίωτης παραγώγου ενός διανύσματος σε καμπυλωμένο χωροχρόνο, όπου εδώ είναι οι ίδιοι οι άξονες του χωροχρόνου που μεταβάλλονται από σημείο σε σημείο. Για παράδειγμα, η συναλλοίωτη παράγωγος ενός αναλλοίωτου διανύσματος V^μ είναι:

$$D_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} V^\lambda$$

όπου οι ποσότητες $\Gamma^\mu_{\lambda\nu}$ ονομάζονται συνιστώσες σύνδεσης και παίζουν παρόμοιο ρόλο με το διανυσματικό δυναμικό A^a_μ. Η ονομασία προέρχεται από το γεγονός ότι συνδέουν τις συνιστώσες ενός διανύσματος σε ένα σημείο, με τις συνιστώσες σε ένα γειτονικό, καθώς το διάνυσμα υφίσταται παράλληλη μεταφορά από το ένα σημείο στο άλλο.

Καταλήγουμε, εφόσον το $D_\mu \psi$ είναι η συναλλοίωτη παράγωγος του ψ, ότι για μετασχηματισμούς στον εσωτερικό χώρο, θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\psi \to S\psi$$

$$D_\mu \psi \to D'_\mu \psi' = SD_\mu \psi \qquad (68)$$

Θεωρούμε, τώρα τον πίνακα

$$A_\mu = M^a A^a_\mu$$

οπότε από την (65) θα είναι:

$$D_\mu\psi = \partial_\mu\psi - igM^a A^a_\mu\psi \Rightarrow$$

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu - igA_\mu)\psi \qquad (69)$$

όπου μετασχηματιζόμενο (68) θα δίνει:

$$D'_\mu\psi' = (\partial_\mu - igA'_\mu)\psi' = S(\partial\mu - igA_\mu)\psi$$

Όμως $\psi' = S\psi$ οπότε:

$$(\partial_\mu - igA'_\mu)S\psi = S(\partial\mu - igA_\mu)\psi \Rightarrow$$

$$A'_\mu = SA_\mu S^{-1} - \frac{i}{g}(\partial\mu S)S^{-1} \qquad (70)$$

όπου η παραπάνω είναι ο νόμος μετασχηματισμού του δυναμικού βαθμίδας, όπως προέκυψε από τη γεωμετρική ανάλυση που περιγράψαμε. Παρατηρούμε ότι εμφανίζεται εν γένει ο ανομοιογενής όρος

$$\frac{i}{g}(\partial\mu S)S^{-1}$$

Εφαρμόζοντας τη συμμετρία της ομάδας U(1), $S = e^{i\Lambda}$, $\partial\mu S = i(\partial_\mu\Lambda)e^{i\Lambda}$, έχουμε (θεωρώντας $g \to e$):

$$A'_\mu = SA_\mu S^{-1} - \frac{i}{g}(\partial\mu S)S^{-1} \Rightarrow$$

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial\mu\Lambda \qquad (71)$$

που είναι ακριβώς η $A_\mu \to A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda$ που είχαμε εξάγει περίπου διαισθητικά. Στην περίπτωση της συμμετρίας SU(2) δουλεύουμε με τον ίδιο τρόπο. Εδώ είναι $M^a = \sigma^a/2$, άρα η συναλλοίωτη παράγωγος μετασχηματίζεται ως:

$$(\partial_\mu - i\frac{g}{2}\vec{\sigma}\vec{A}'_\mu)S\psi = S(\partial_\mu - i\frac{g}{2}\vec{\sigma}\vec{A}_\mu)\psi \Rightarrow \ldots\ldots$$

$$\vec{A}_\mu = S\vec{A}_\mu S^{-1} - \frac{2i}{3g}\vec{\sigma}(\partial_\mu S)S^{-1}$$

Θα είναι:

$$S = e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}\vec{\Lambda}}$$

$$\partial_\mu S = \frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot\partial_\mu\vec{\Lambda}\cdot S$$

οπότε για απειροστό Λ έχουμε:

$$\vec{A}'_\mu = S\vec{A}_\mu S^{-1} - \frac{2i}{3g}\vec{\sigma}(\partial_\mu S)S^{-1} =$$

$$=(1+\frac{i}{2}\vec{\sigma}\vec{\Lambda})\vec{A}_\mu(1-\frac{i}{2}\vec{\sigma}\vec{\Lambda})-\frac{2i}{3g}\vec{\sigma}\frac{i}{2}\vec{\sigma}\partial_\mu\vec{\Lambda}=$$

$$\vec{A}_\mu \propto \vec{A}_\mu-\Lambda\times\vec{A}_\mu+\frac{1}{g}\partial_\mu\vec{\Lambda}$$

που είναι η σχέση $W_\mu \to W_\mu-\Lambda\times W_\mu+(1/g)\partial_\mu\Lambda$,την οποία είχαμε κατασκευάσει διαισθητικά.

Στην γενική σχετικότητα, το ρόλο του δυναμικού βαθμίδας παίζει η σύνδεση. Οι συνιστώσες συνδέσεις μετασχηματίζονται κι αυτές ανομοιογενώς, αφού ο νόμος μετασχηματισμού τους είναι:

$$\Gamma'^{\kappa}_{\lambda\mu}=\frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\mu}}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}+\frac{\partial^2 x^a}{\partial x'^{\lambda}\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\alpha}}$$

συνεπώς η σύνδεση δεν μετασχηματίζεται σαν τανυστής.

Ο αντιμεταθέτης που εμφανίστηκε θα είναι σύμφωνα με τον ορισμό της συναλλοίωτης παραγώγου (69) (για M=-1):

$$[D_\mu,D_\nu]=[\partial_\mu-igA_\mu,\partial_\nu-igA_\nu]\Rightarrow$$

$$=-ig(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu-ig[A_\mu,A_\nu]) \qquad (72)$$

Ορίζοντας τώρα το πεδίο βαθμίδας ως:

$$G_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu-ig[A_\mu,A_\nu]$$

θα είναι:

$$[D_\mu,D_\nu]=-igG_{\mu\nu} \quad (73)$$

Συνεπώς θέτοντας και $\delta x^\mu\Delta x^\nu=\Delta S^{\mu\nu}$, καταλήγουμε

$$\psi_{A,1}=(1-ig\Delta S^{\mu\nu}G_{\mu\nu})\psi_{A,0}\Rightarrow$$

$$\psi_{A,1}-\psi_{A,0}=\Delta\psi_A=-ig\Delta S^{\mu\nu}G_{\mu\nu}\psi_A \qquad (74)$$

Δηλαδή, αν το πεδίο βαθμίδας είναι μη μηδενικό, η μεταφορά στην κλειστή διαδρομή έχει φυσικές συνέπειες στο διάνυσμα ψ, στην συγκεκριμένη περίπτωση το περιστρέφει.

Στην περίπτωση της Αβελιανής ομάδας U(1), ο αντιμεταθέτης είναι 0 και το πεδίο βαθμίδας είναι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο:

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$$

Για την Αβελιανή ομάδα SU(2) οι πίνακες M^a υπακούν στην άλγεβρα

$$[M^a,M^b]=i\varepsilon_{abc}M^c,$$

συνεπώς το πεδίο βαθμίδας θα είναι το

$$G^a_{\mu\nu}=\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^\alpha_\mu+g\varepsilon_{abc}A^b_\mu A^c_\nu \qquad (75)$$

ή διανυσματικά στο γνωστό πεδίο Yang-Mills

$$G^{\rightarrow}_{\mu\nu}=\partial_\mu A^{\rightarrow}_\nu-\partial_\nu A^{\rightarrow}_\mu+gA^{\rightarrow}_\mu\times A^{\rightarrow}_\nu \qquad (76)$$

Θεωρώντας τώρα τον ίδιο μετασχηματισμό για τα δύο διανύσματα

$$\psi_{A,0} \to \psi'_{A,0} = S\psi_{A,0}$$

$$\psi_{A,1} \to \psi'_{A,1} = S\psi_{A,1}$$

έχουμε:

$$S\psi_{A,1} = (1 - ig\Delta S^{\mu\nu} G_{\mu\nu}) S\psi_{A,0} \Rightarrow$$

$$\psi_{A,1} = (1 - ig\Delta S^{\mu\nu} S^{-1} G_{\mu\nu} S)\psi_{A,0} = (1 - ig\Delta S^{\mu\nu} G'_{\mu\nu})\psi_{A,0} \Rightarrow$$

$$G'_{\mu\nu} = SG_{\mu\nu}S^{-1} \qquad (77)$$

Δηλαδή το $G_{\mu\nu}$ μετασχηματίζεται συναλλοίωτα. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορεί να μηδενιστεί με μετασχηματισμούς βαθμίδας. Δηλαδή εάν είναι μη μηδενικό σε μια βαθμίδα, θα είναι μη μηδενικό σε όλες, συνεπώς μπορούμε να το δεχθούμε ως πεδίο με υπαρκτή φυσική επίδραση. Επανερχόμενοι στη σύγκριση με τη γενική σχετικότητα, το αντίστοιχο μέγεθος του τανυστή πεδίου $G^a_{\mu\nu}$ είναι ο τανυστής καμπυλότητας Riemann:

$$R^{\kappa}_{\lambda\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu} - \partial_\mu \Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}\Gamma^{\kappa}_{\rho\nu} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}\Gamma^{\kappa}_{\rho\mu}$$

6.8. Η Θεωρία Ενοποίησης

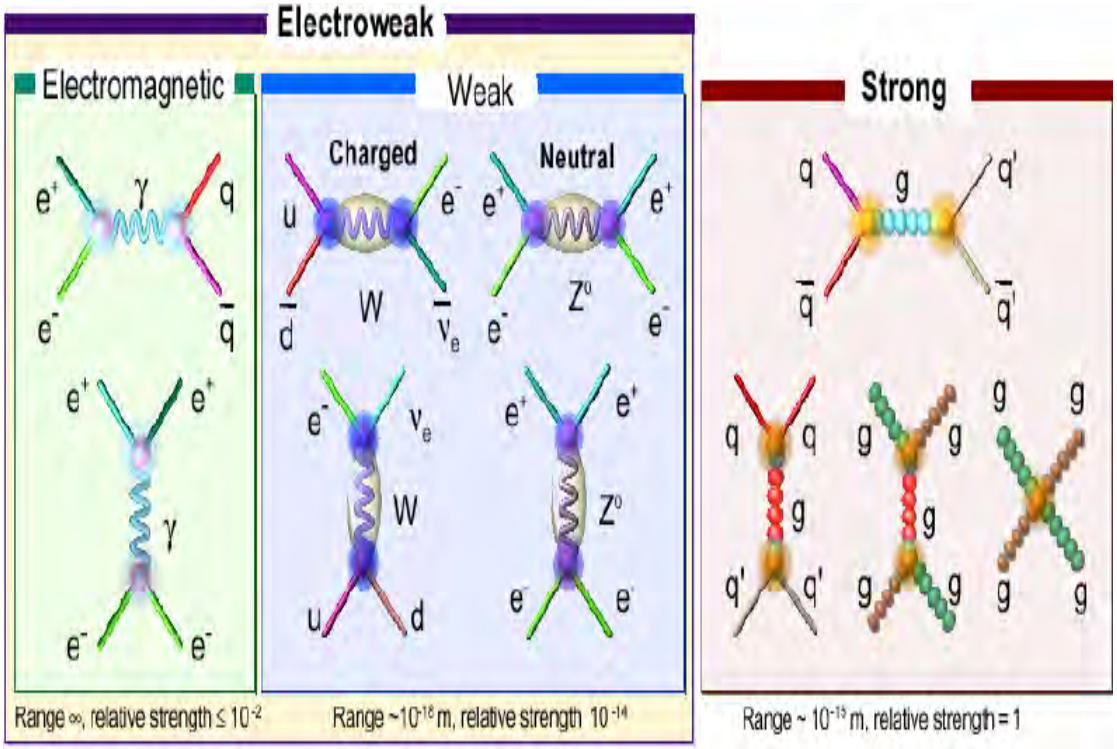
Η θεωρία του Καθιερωμένου Προτύπου έχει ενοποιήσει τις ηλεκτρομαγνητικές και τις ασθενείς αλληλεπιδράσεις σε μία αλληλεπίδραση που ονομάζεται Ηλεκτρασθενής Αλληλεπίδραση. Το σημερινό Καθιερωμένο Πρότυπο της σωματιδιακής θεωρίας, που περιγράφει τις τρεις θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις των σωματιδίων είναι θεωρία βαθμίδας.

Η έννοια της συμμετρίας παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στο καθιερωμένο πρότυπο. Έτσι, όσον αφορά την ηλεκτρομαγνητική δύναμη έχουμε την ομάδα συμμετρίας U(1). Αυτή η ομάδα συμμετρίας επιτρέπει την εναλλαγή των συνιστωσών που εκφράζουν την πολικότητα του φωτός. Στην ασθενή αλληλεπίδραση αντιστοιχεί η ομάδα συμμετρίας SU(2). Αν έχουμε δυο λεπτόνια, το ηλεκτρόνιο και το νετρίνο, και τα εναλλάξουμε σε μια εξίσωση, τότε έχουμε συμμετρία SU(2). Η ισχυρή δύναμη βασίζεται σε 3 κουάρκ τα οποία οι φυσικοί τα ξεχωρίζουν δίνοντας στο καθένα ένα φανταστικό «χρώμα». Οι εξισώσεις παραμένουν οι ίδιες όταν εναλλάσσονται οι 3 τύποι έγχρωμων κουάρκ και λέμε ότι έχουν συμμετρία SU(3). Από την ένωση αυτών των τριών θεωριών προκύπτει η συμμετρία SU(3)X SU(2)X U(1), δηλαδή η συμμετρία που επιτρέπει την ανάμειξη μεταξύ 3 κουάρκ και την ανάμειξη μεταξύ 2 λεπτονίων (χωρίς όμως να αναμειγνύει κουάρκ με λεπτόνια). Το καθιερωμένο πρότυπο ενώ συμφωνεί με το σύνολο των πειραματικών δεδομένων, περιέχει 19 αυθαίρετες παραμέτρους (οι μάζες και σταθερές σύζευξης των αλληλεπιδράσεων) (σχήμα 15), που εισήχθηκαν εμβόλιμα, χωρίς να προκύπτουν λογικά από τη θεωρία. Τέλος, σημειώνεται ότι το καθιερωμένο πρότυπο δεν λέει τίποτε για την βαρύτητα.

Η Ηλεκτρομαγνητική Θεωρία του Maxwell θεωρείται σήμερα μια θεωρία βαθμίδας. Μπορούμε να επεξηγήσουμε την έννοια της συμμετρίας βαθμίδας στον ηλεκτρομαγνητισμό,

ως εξής: Τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία μπορούν να εκφραστούν χρησιμοποιώντας συναρτήσεις δυναμικού. Για το Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο χρειάζεται ένα βαθμωτό και ένα διανυσματικό δυναμικό. Αποδεικνύεται ότι οι συναρτήσεις αυτές μπορούν να υποστούν κάποιους μετασχηματισμούς, σύμφωνα με έναν ορισμένο κανόνα που λέγεται Βαθμιδικός Μετασχηματισμός, χωρίς να μεταβληθούν οι τιμές των πεδίων, που άλλωστε είναι οι μόνες μετρήσιμες φυσικές οντότητες. Ο πιο απλός τέτοιος μετασχηματισμός είναι να προστεθεί μια σταθερά στο βαθμωτό ηλεκτρικό δυναμικό. Φυσικά αυτό επεξηγεί το γνωστό γεγονός ότι το ηλεκτρικό δυναμικό μπορεί να υπολογιστεί θεωρώντας ότι ένα αυθαίρετο σημείο έχει δυναμικό μηδέν, καθώς μόνο οι διαφορές στο δυναμικό έχουν σημασία. Το γεγονός ότι οποιοδήποτε σημείο μπορεί αυθαίρετα να θεωρηθεί ότι έχει δυναμικό μηδέν, εκφράζεται στη γλώσσα της φυσικής με την ύπαρξη μιας συγκεκριμένης συμμετρίας στην ηλεκτρομαγνητική θεωρία, της λεγόμενης συμμετρίας βαθμίδας.

Το ηλεκτρασθενές μοντέλο που είχε προταθεί αρχικά για την ενοποίηση της ηλεκτρομαγνητικής με την ασθενή αλληλεπίδραση, ήταν επίσης τρωτό στους απειρισμούς και οι φυσικοί ήταν απογοητευμένοι επειδή αυτή η θεωρία φαινόταν να είναι άχρηστη. Ένα από τα θαύματα των βαθμιδικών θεωριών είναι ότι αυτοί οι απειρισμοί μπορούν να αρθούν, επιτρέποντας την εξαγωγή πεπερασμένων προβλέψεων για διάφορα φυσικά μεγέθη. Αυτό έγινε πρώτα για την Κβαντική Ηλεκτροδυναμική (QED) , την δεκαετία του 40.

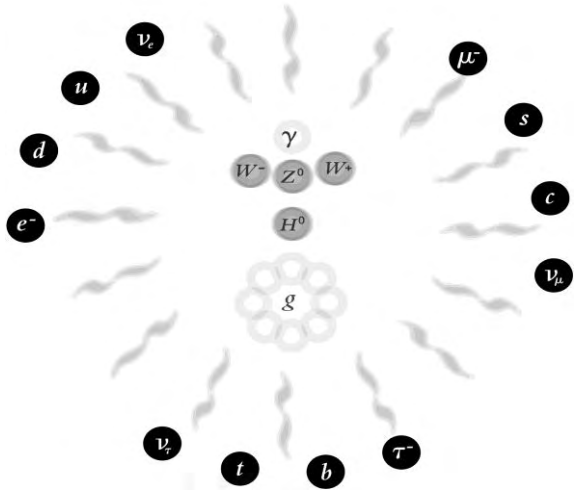


Σχήμα 15: Μαθηματική περιγραφή των Αλληλεπιδράσεων

Η αρχική θεωρητική θεμελίωση του Καθιερωμένου Προτύπου δεν ήταν μαθηματικά πλήρης. Συγκεκριμένα, δεν ήταν σαφές αν η θεωρία μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για τον ακριβή υπολογισμό φυσικών ποσοτήτων. Οι Gerardus 't Hooft και Martinus J.G. Veltman έθεσαν αυτή την θεωρία σε στέρεα μαθηματικά θεμέλια. Η εργασία τους προσέφερε στην

παγκόσμια ερευνητική κοινότητα την απαιτούμενη υπολογιστική μεθοδολογία, η οποία ανάμεσα σε άλλα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την πρόβλεψη των ιδιοτήτων των «νέων σωματιδίων».

Οι στοιχειώδεις δομικές μονάδες της ύλης είναι τα έξι κουάρκς και τα έξι λεπτόνια. Σύμφωνα με το Καθιερωμένο Πρότυπο της Σωματιδιακής Φυσικής, οι δυνάμεις με τις οποίες αλληλεπιδρούν τα συστατικά της ύλης περιγράφονται από κβαντικές θεωρίες πεδίου. Όλες αυτές οι θεωρίες είναι μη-αβελιανές θεωρίες βαθμίδας. Όταν τα σωματίδια αλληλεπιδρούν με ηλεκτροασθενείς αλληλεπιδράσεις, ανταλλάσσουν ένα ή περισσότερα από τα παρακάτω τέσσερα σωμάτια – φορείς της δύναμης: το άμαζο γάμμα το θετικά φορτισμένο W, το αρνητικά φορτισμένο W και το αφόρτιστο Z^0. Η ισχυρή δύναμη οφείλεται στην ανταλλαγή ενός ή περισσοτέρων από τα οκτώ γλουόνια. Εκτός από αυτά τα δώδεκα σωματίδια-φορείς αλληλεπιδράσεων, η θεωρία προβλέπει την ύπαρξη και ενός άλλου σωματιδίου μεγάλης μάζας, του σωματιδίου Higgs, H^0. Η αλληλεπίδραση του Higgs με τα άλλα σωματίδια τους προσδίδει μάζα.



Σχήμα 9: Φορείς των αλληλεπιδράσεων

Ο Martinus J.G. Veltman, την δεκαετία του 1960 πίστευε ότι θα μπορούσε να επανακανονικοποιήσει την θεωρία των ηλεκτρασθενών αλληλεπιδράσεων [212-235]. Ακολουθώντας το παράδειγμα του Feynman, ο οποίος είχε συστηματοποιήσει το πρόβλημα των υπολογισμών στην κβαντική ηλεκτροδυναμική με τα περίφημα διαγράμματα Feynman, προσπάθησε να εκτελέσει αλγεβρικές απλοποιήσεις στις πολύ σύνθετες εκφράσεις που όλες οι κβαντικές θεωρίες πεδίων καταλήγουν όταν κανείς επιχειρεί ποσοτικές προβλέψεις. Ενώ όμως την δεκαετία του 1930, ο Feynman δεν είχε στην διάθεσή του ηλεκτρονικούς υπολογιστές, ο Veltman ανέπτυξε το υπολογιστικό λογισμικό Schoonship, το οποίο χρησιμοποιώντας σύμβολα έκανε αλγεβρικές απλοποιήσεις και έδωσε την δυνατότητα να αξιολογήσει πολλές ιδέες αναφορικά με σχήματα επανακανονικοποίησης.

Το 1971 ο Gerardus ‘t Hooft κατόρθωσε να δημοσιεύσει δύο πολύ σπουδαίες εργασίες που απεδείχθησαν επαναστατικές, όσον αφορά την αναζήτηση του πολυπόθητου σχήματος

επανακανονικοποίησης [184-211]. Με τη βοήθεια του υπολογιστικού προγράμματος του M.Veltman ανέπτυξε μια λεπτομερή υπολογιστική τεχνική. Η μη-αβελιανή θεωρία βαθμίδας των ηλεκτρασθενών αλληλεπιδράσεων είχε μετατραπεί πλέον σε ένα σπουδαίο υπολογιστικό και προβλεπτικό εργαλείο στη υπηρεσία της ερευνητικής κοινότητας όπως 20 χρόνια πριν είχε συμβεί με την κβαντική ηλεκτροδυναμική. Η σημαντική συμβολή τους βρίσκεται ακριβώς στο γεγονός ότι χρησιμοποιώντας σύγχρονα μαθηματικά 'εργαλεία' κατάφεραν να δείξουν ότι οι θεωρίες βαθμίδας στις οποίες εντάσσεται το Καθιερωμένο Πρότυπο (SM) μπορούν να δώσουν ακριβείς υπολογισμούς φυσικών μεγεθών, ικανούς να συγκριθούν με πειραματικές μετρήσεις. Δηλαδή, έδειξαν πως οι θεωρίες των συμμετριών βαθμίδας, αν και περιέχουν φορείς με μάζα διαφορετική από το μηδέν και spin=1, είναι επανακανονικοποιήσιμες.

Η θεωρία των ηλεκτρασθενών αλληλεπιδράσεων προέβλεψε την ύπαρξη των νέων σωματιδίων, W και Z. Αλλά μόνο δια μέσου της εργασίας των M. Veltman και G.'t Hooft η ερευνητική κοινότητα μπόρεσε να προβλέψει με ακρίβεια φυσικές ποσότητες που αφορούσαν στις ιδιότητες των W και Z. Οι συνθήκες που πρόσφατα (1989 μέχρι σήμερα) προσέφερε ο επιταχυντής LEP του CERN συνετέλεσαν στην παραγωγή μεγάλου αριθμού W και Z και στην εξονυχιστική μελέτη των αλληλεπιδράσεων τους. Η αξιοσημείωτη συμφωνία των θεωρητικών προβλέψεων με τις πειραματικές μετρήσεις αποτελεί αδιαμφισβήτητη απόδειξη της ορθότητας της υπολογιστικής μεθοδολογίας των M. Veltman και G. Hooft.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η υπολογιστική μέθοδος των M. Veltman και G. Hooft δίνει τη δυνατότητα της χρησιμοποίησης των πειραματικών δεδομένων για τον υπολογισμό ποσοτικών χαρακτηριστικών φυσικών οντοτήτων στα οποία οι φυσικοί δεν έχουν άμεση πρόσβαση. Συγκεκριμένα, οι φυσικοί μπόρεσαν να υπολογίσουν τη μάζα του κουάρκ t, του βαρύτερου κουάρκ, εισάγοντας τις ακριβείς πειραματικές μετρήσεις του LEP στους θεωρητικούς τους υπολογισμούς. Αυτό το κουάρκ ανακαλύφθηκε μερικά χρόνια αργότερα (1995) στο Fermilab των Η.Π.Α. και η μέτρηση της μάζας του επαλήθευσε πανηγυρικά τις προβλέψεις των ερευνητών.

Ο ρόλος της ασθενούς δύναμης στον μετασχηματισμό των κουάρκ (quarks), την κάνει να εμπλέκεται σε πολλές διασπάσεις των πυρηνικών σωματιδίων που απαιτούν μια αλλαγή της γεύσης των κουάρκ (quarks) από τον ένα τύπο στον άλλο. Η ανακάλυψη των μποζονίων W και Z το 1983 ήρθε σαν μια επιβεβαίωση της ηλεκτρασθενούς θεωρίας που συνδέει την ασθενή δύναμη με την ηλεκτρομαγνητική. Η θεωρία αυτή δέχεται την ίδια ένταση των ασθενών με τις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις αλλά σε πάρα πολύ υψηλές ενέργειες.

Το μαθηματικό υπόβαθρο της θεωρίας αυτής είναι η λεγόμενη ομάδα SU(2) η οποία περιγράφεται από 3 γεννήτορες. Αυτό σημαίνει την ύπαρξη 3 σωματιδίων ανταλλαγής W+, W, Z_o (διαδότες της ασθενούς αλληλεπίδρασης). Επίσης όσοι διαδότες έχουν φορτίο αλληλεπιδρούν και μεταξύ τους όπως και τα φορτία.

η οποία εκφράζει τον χαρακτήρα των φωτεινών κβάντων ως μποζονίων.

Τα σωματίδια του φωτός, όντας μποζόνια, μπορούν να καταλάβουν χωρίς κανένα περιορισμό μια κβαντική κατάσταση και να σχηματίσουν έτσι ένα κλασικό ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Όμως είναι εύκολο να δούμε ότι αυτή η *κλασική κατάσταση* του πεδίου δεν μπορεί να είναι της γνωστής μορφής (όπου έχει δημιουργηθεί ένας καθορισμένος αριθμός φωτονίων ορμής k και πόλωσης s):

$$|n(k,s)>=\frac{1}{\sqrt{n!}}(a^{\dagger}_{k,s})^{n}\,|0>$$

διότι σε μια τέτοια κατάσταση η μέση τιμή του ηλεκτρικού πεδίου είναι μηδέν:

$$<E>=<n(k,s)|E|n(k,s)>$$

Αυτός ο μηδενισμός γίνεται αμέσως φανερός αν σκεφθούμε ότι ο τελεστής του ηλεκτρικού πεδίου δεν είναι παρά ένας γραμμικός συνδυασμός τελεστών δημιουργίας και καταστροφής που καθένας από αυτούς έχει μέση τιμή μηδέν σε κάθε κατάσταση καθορισμένου αριθμού φωτονίων. Αυτό συμβαίνει γιατί η δράση τους αλλάζει κατά ± 1 τον αριθμό των φωτονίων της μιας κατάστασης κι άρα την κάνει ορθογώνια προς την άλλη.

Οι κβαντικές καταστάσεις που αντιστοιχούν στα κλασικά ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι γνωστές *ως σύμφωνες καταστάσεις* και ο αριθμός των φωτονίων που είναι παρόντα δεν είναι απολύτως καθορισμένος, έχει διακυμάνσεις γύρω από μια μέση τιμή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Αυθορμητο Σπάσιμο Συμμετρίας

"«Συγχαρητήρια και στους δύο, αλλά η ανακάλυψη του νέου σωματιδίου είχε προσωπικό κόστος για μένα. Αυτό το Νομπέλ μού κόστισε 100 δολάρια».

Steven Hawking

7.1. Εισαγωγή

Έως τώρα έχουμε συζητήσει για τρία διαφορετικά είδη από συμμετρίες που μπορούν να πραγματωθούν σε μια κβαντική θεωρία πεδίου. Η απλούστερη περίπτωση είναι η παγκόσμια συμμετρία η οποία είναι προφανής, οδηγώντας σε πολλαπλέτες σωματιδίων με καθορισμένες αλληλεπιδράσεις. Μια δεύτερη πιθανότητα είναι μια καθολική συμμετρία που σπάει αυθόρμητα. Τα ρεύματα συμμετρίας δεν σέβονται τη συμμετρία και τα σωματίδια δεν συνθέτουν προφανείς συμμετρικές πολλαπλέτες. Αντ' αυτού, μια τέτοια θεωρία περιέχει άμαζα σωματίδια, τα μποζόνια Goldstone [305], ένα για κάθε γεννήτορα της αυθόρμητα σπασμένης συμμετρίας. Η τρίτη περίπτωση είναι αυτής της τοπικής συμμετρίας ή συμμετρίας βαθμίδας. Μια τέτοια συμμετρία απαιτεί την ύπαρξη ενός άμαζου διανυσματικού πεδίου για κάθε γεννήτορα της συμμετρίας, και οι αλληλεπιδράσεις ανάμεσα σε αυτά τα πεδία είναι ισχυρά καθορισμένες.

Έχει γίνει τώρα φυσικό να αναρωτηθούμε για ένα τέταρτο ενδεχόμενο: Τι συμβαίνει, αν εισάγουμε και την τοπική αναλλοιότητα βαθμίδας και την αυθόρμητη ρήξη συμμετρίας στην ίδια θεωρία; Σε αυτό το κεφάλαιο, θα βρούμε ότι αυτός ο συνδυασμός από συστατικά οδηγεί σε νέες δυνατότητες στην κατασκευή προτύπων κβαντικών θεωριών πεδίου. Θα δούμε ότι το φαινόμενο του αυθόρμητου σπασίματος συμμετρίας *προϋποθέτει διανυσματικά μποζόνια βαθμίδας που αποκτούν μάζα.* Οι αλληλεπιδράσεις αυτών των μποζονίων με μάζα είναι ακόμη δεσμευμένες από την παραπάνω συμμετρία βαθμίδας, και αυτές οι συσχετίσεις μπορούν να έχουν παρατηρήσιμες συνέπειες.

Στη φυσική των στοιχειωδών σωματιδίων, η εφαρμογή της αρχής της αυθόρμητης ρήξης τοπικής συμμετρίας είναι το τρέχον αποδεκτό πρότυπο των ασθενών αλληλεπιδράσεων. Αυτό το πρότυπο που οφείλεται στους Glashow, Weinberg, και Salam [103-183] εισάγεται στα επόμενα. Εκεί θα δούμε ότι το πρότυπο αυτό δίνει ένα σύνολο από ακριβείς και επιτυχείς προβλέψεις για τα φαινόμενα που απαντώνται στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις. Είναι αξιοσημείωτο, ότι το πρότυπο αυτό επίσης ενοποιεί τις ασθενείς αλληλεπιδράσεις με τον ηλεκτρομαγνητισμό σε μια απλή μεγαλύτερη θεωρία βαθμίδας.

7.2. Ο Αβελιανός μηχανισμός Higgs

Αρχικά θεωρούμε την Λαγκρανζιανή πραγματικού βαθμωτού πεδίου:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)\left(\partial^\mu \phi\right) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4$$

όπου οι παράμετροι m και λ θεωρούνται αρχικά απλές παράμετροι των όρων του δυναμικού. Η μόνη μας απαίτηση είναι λ>0 ώστε το δυναμικό πεπερασμένο να είναι από κάτω καθώς φ→∞.

Η Λαγκρανζιανή αυτή παρουσιάζει μια διακριτή συμμετρία, καθώς είναι αναλλοίωτη στο μετασχηματισμό φ→-φ. Η διαμόρφωση της θεωρίας στηρίζεται στο ελάχιστο του δυναμικού,

ώστε να αναπτύσσουμε το πεδίο γύρω από την τιμή αυτή του δυναμικού και να ορίζουμε τις διεγερμένες καταστάσεις, οι οποίες θα αντιστοιχούν στα σωματίδια που περιγράφει το πεδίο. Η μάζα των σωματιδίων θα καθορίζεται από την μορφή της Λαγκρανζιανής στο ελάχιστο. Οι όροι της Λαγκρανζιανής οφείλουν να έχουν διάσταση 4[Mass]^4. Εφόσον τα φ έχουν διάσταση 1, η παράμετρος m^2 έχει διαστάσεις [Mass]^2 , ενώ η παράμετρος λ είναι αδιάστατη.

Αν υποθέσουμε ότι $m^2>0$, τότε η κατάσταση κενού θα είναι στο ελάχιστο της ενέργειας:

$$H = \pi\dot{\phi} - L = \pi\dot{\phi} - T + V$$

επομένως ισχύει $\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \varphi} = 0$ στο φ=0 και οι διεγέρσεις πάνω από αυτή την βασική ενεργειακή κατάσταση θεωρούνται σωμάτια μάζας $\frac{m}{\sqrt{2}}$.

Αν όμως είναι $m^2<0$, τότε για το ελάχιστο του δυναμικού ισχύει (παίρνουμε το ελάχιστο του δυναμικού, καθώς μόνο το δυναμικό αυτό περιέχει το πεδίο φ):

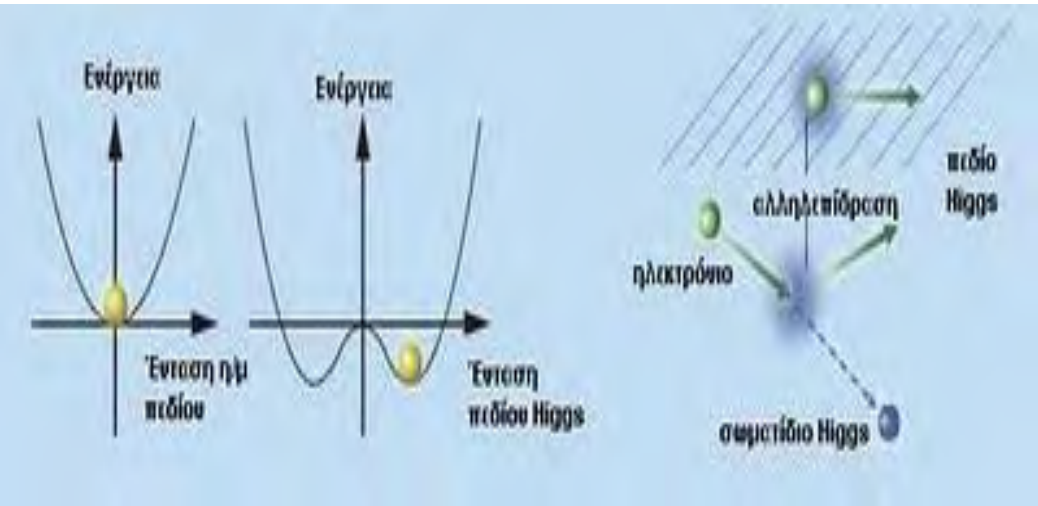
$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \phi(m^2 + \lambda^2\phi^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\phi = \pm\sqrt{\frac{-m^2}{\lambda}} \equiv \pm\upsilon$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν δύο καταστάσεις ελάχιστης ενέργειας, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα 1. Εφόσον το φ είναι τελεστής, ισχύει:

$$\langle 0 | \phi | 0 \rangle = \pm\upsilon$$

Το πεδίο φ ονομάζεται **πεδίο Higgs** προς τιμή του **Peter Higgs** [298-303].



Σχήμα 1:Το δυναμικό $V = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4$ *για (α)* $m^2>0$ *και (β)* $m^2<0$.

Θα μελετήσουμε τι συμβαίνει στην περιοχή του ελαχίστου. Τα πιθανά ελάχιστα, είναι δύο, επομένως το σύστημα αυθόρμητα επιλέγει ένα από αυτά, έστω το $\varphi=u^2$. Στην περιοχή του ελαχίστου μπορούμε να γράψουμε:

$$\phi(x) = \upsilon + \eta(x)$$

όπου το $\eta(x)$ παριστά τις κβαντικές διεγέρσεις γύρω από το κενό και είναι:

$$\langle 0 | \eta(x) | 0 \rangle = 0$$

Αντικαθιστώντας την σχέση του φ γύρω στην Λαγκρανζιανή προκύπτει:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \eta\right)\left(\partial^\mu \eta\right) - (\lambda \upsilon^2 \eta^2 + \lambda \upsilon \eta^3 + \frac{1}{4}\lambda \eta^4) + ct$$

Βλέπουμε ότι η Λαγκρανζιανή απέκτησε όρο μάζας

$$m_\eta^2 = 2\lambda \upsilon^2 = -2m^2$$

Δηλαδή έχουμε ένα φυσικό βαθμωτό πεδίο με μάζα $m_\eta \neq 0$ και δύο όρους αλληλεπίδρασης, έναν κυβικό με ένταση λυ και έναν φ^4 με ένταση λ/4. Η αρχική συμμετρία έχει προφανώς χαθεί στη Λαγκρανζιανή, λόγω του η^3 και αυτό που έσπασε αυτή την συμμετρία ήταν η εκλογή του κενού ως φ=υ. Το κενό αυτό καθεαυτό δεν περιέχει την αρχική συμμετρία αφού προφανώς κατά τον μετασχηματισμό φ→-φ δεν παραμένει αναλλοίωτο. Συνεπώς η συμμετρία του κενού έχει σπάσει αυθόρμητα, αφού το συγκεκριμένο κενό επιλέχθηκε τυχαία από το σύστημα. Οι δύο Λαγκρανζιανές είναι βέβαια ισοδύναμες, ωστόσο αν εφαρμοστεί η θεωρία διαταραχών, μόνο η δεύτερη δίνει την σωστή φυσική του προβλήματος.

Παρόμοια κατάσταση συναντάμε και στο μιγαδικό βαθμωτό πεδίο. Έστω η Λαγκρανζιανή:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - V(\phi, \phi^*)$$

Η Λαγκρανζιανή αυτή παραμένει αναλλοίωτη στην παγκόσμια συμμετρία:

$$\phi \to e^{i\Lambda} \phi$$

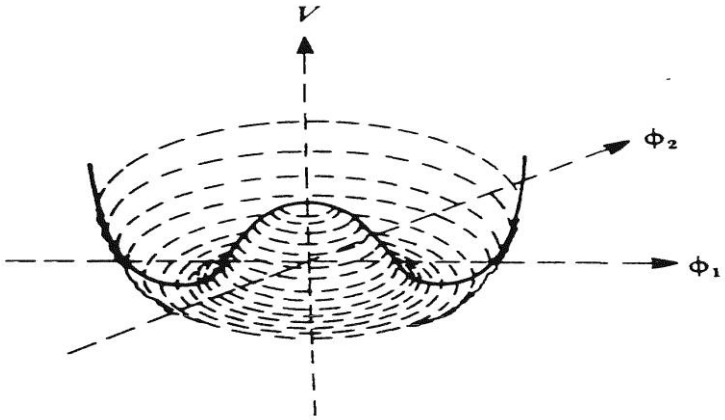
Για $m^2>0$ είναι:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = m^2 \phi + 2\lambda \phi^* (\phi^* \phi) = 0 \Rightarrow$$

οπότε το ελάχιστο εμφανίζεται για $\varphi^*=\varphi=0$, ενώ για $m^2<0$ έχουμε ένα τοπικό μέγιστο στο φ=0 και ένα ελάχιστο στο:

$$|\varphi|^2 = -\frac{m^2}{2\lambda} = a^2$$

Εφόσον το φ είναι τελεστής η κατάσταση αυτή είναι: $|\langle 0 | \phi | 0 \rangle|^2 = a^2$. Τα δυνατά κενά του πεδίου σχηματίζουν ένα κύκλο ακτίνας α, $|\phi| = a$, με αποτέλεσμα το δυναμικό να έχει την μορφή του παρακάτω σχήματος, το περίφημο μεξικάνικο καπέλο. Τα φυσικά πεδία, που είναι διεγέρσεις πάνω από την κατάσταση του κενού, πραγματοποιούνται με διαταραχές γύρω από το $|\phi| = a$ και όχι γύρω από το φ=0.



Σχήμα 2:Το δυναμικό έχει ελάχιστο στο $|\phi|= a$ και ένα τοπικό μέγιστο στο φ=0

Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, το μιγαδικό πεδίο μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει δύο πραγματικών βαθμωτών πεδίων ρ και θ:

$$\phi(x) = \rho(x)e^{i\theta(x)}$$

Επιλέγουμε τυχαία μια κατάσταση κενού για την οποία ισχύει:

$$\langle 0|\phi|0\rangle = a$$

τότε θα είναι:

$$\langle 0|\rho|0\rangle = a \quad \text{και} \quad \langle 0|\theta|0\rangle = 0$$

Μπορούμε να γράψουμε το φ, γύρω από το ελάχιστο, με την μορφή:

$$\phi(x) = [\rho'(x) + a]e^{i\theta(x)}$$

όπου

$$\langle 0|\rho'|0\rangle = \langle 0|\theta|0\rangle = 0$$

Αντικαθιστώντας στο δυναμικό έχουμε:

$$V = m^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2 =$$

$$= m^2[(\rho' + a)e^{i\theta}]^*[(\rho' + a)e^{i\theta}] + \lambda[(\rho' + a)e^{i\theta}]^*[(\rho' + a)e^{i\theta}]^2 =$$

$$= m^2[(\rho' + a)e^{-i\theta}][(\rho' + a)e^{i\theta}] + \lambda[(\rho' + a)e^{-i\theta}][(\rho' + a)e^{i\theta}]^2 =$$

$$= m^2[\rho'^2 + \rho' a + a\rho' + a^2] + \lambda[(\rho' + a)^2(\rho' + a)^2] =$$

$$= m^2\rho'^2 + 2m^2 a\rho' + m^2 a^2 + \lambda(\rho'^4 + 4a\rho'^3 + 6a^2\rho'^2 + 4a^3\rho' + a^4)^2$$

Όμως $a^2 = -\dfrac{m^2}{2\lambda}$, άρα:

$$V = \lambda\rho'^4 + 4\lambda a\rho'^3 + 4\lambda a^2\rho'^2 - \lambda a^4 =$$

$$= \lambda[(\rho' + a)^2 - a^2]^2 - \lambda a^4$$

Επίσης ισχύει:

$$(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^*) = \partial_\mu[(\rho' + a)e^{i\theta}]\partial^\mu[(\rho' + a)e^{-i\theta}] =$$

$$=[\partial_\mu \rho' e^{i\theta} + i\partial_\mu \theta e^{i\theta}(\rho'+a)][\partial^\mu \rho' e^{-i\theta} - i\partial^\mu \theta e^{-i\theta}(\rho'+a)]=$$

$$=\partial_\mu \rho' \partial^\mu \rho' - i\partial_\mu \rho' \partial^\mu \theta(\rho'+a) + i\partial_\mu \theta \partial^\mu \rho'(\rho'+a) + (\rho'+a)^2 \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta =$$

$$=\partial_\mu \rho' \partial^\mu \rho' + (\rho'+a)^2 \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta + i(\rho'+a)(\partial_\mu \theta \partial^\mu \rho' - \partial_\mu \rho' \eta^{\mu\nu} \theta_\nu \theta) =$$

$$=\partial_\mu \rho' \partial^\mu \rho' + (\rho'+a)^2 \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta + i(\rho'+a)(\partial_\mu \theta \partial^\mu \rho' - \partial_\mu \rho' \partial_\mu \theta) =$$

$$=(\partial_\mu \rho')(\partial^\mu \rho') + (\rho'+a)^2 (\partial_\mu \theta)(\partial^\mu \theta)$$

Άρα η Λαγκρανζιανή γίνεται:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \rho')(\partial^\mu \rho') + (\rho'+a)^2 (\partial_\mu \theta)(\partial^\mu \theta) - \lambda \rho'^4 - 4a\lambda \rho'^3 - 4\lambda a^2 \rho'^2 + \lambda a^4$$

Ο συντελεστής του ρ'^2 είναι ένα πεδίο μάζας:

$$m_{\rho'}^2 = 4\lambda a^2$$

Στο θ^2 δεν υπάρχει συντελεστής, συνεπώς το πεδίο θ είναι άμαζο. **Δηλαδή μέσω του αυθόρμητου σπάσιμου συμμετρίας προέκυψε ένα άμαζο κι ένα μαζικό πεδίο**. Αυτό είναι γενικότερο φαινόμενο κατά το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετριών και είναι το θέμα που πραγματεύεται το θεώρημα Goldstone. Το σωματίδιο θ είναι γνωστό ως μποζόνιο Goldstone.

Τα φυσικά συμπεράσματα είναι τα ίδια εάν θεωρήσουμε καρτεσιανές αντί για πολικές συντεταγμένες. Η έκφραση του πεδίου φ, γύρω από το ελάχιστο, γίνεται:

$$\phi(x) = a + \frac{\phi_1(x) + i\phi_2(x)}{\sqrt{2}}$$

με $\langle 0|\phi_1|0\rangle = \langle 0|\phi_2|0\rangle = 0$ και η Λαγκρανζιανή γράφεται:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)^2 - 4\lambda a^2 \phi_1^2 - \sqrt{2}\lambda \phi_1(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2$$

όπου και εδώ το φ_2 είναι άμαζο, ενώ το φ_1 έχει μάζα $m_{\phi^1}^2 = 4\lambda a^2$.

7.3. Θεώρημα Goldstone

Στο παράδειγμα παραπάνω, η Λαγκρανζιανή έχει συμμετρία U(1) και τα δύο πραγματικά πεδία σχηματίζουν μια δισδιάστατη αναπαράσταση της ομάδας U(1). Ένα από αυτά τα πεδία έχει μια μη μηδενική τιμή και τελικά προκύπτουν δύο σωματίδια, ένα άμαζο σωμάτιο (το μποζόνιο Goldstone) και ένα μαζικό σωμάτιο. Επομένως ανακύπτουν δύο ερωτήματα: πρώτο: στην γενική περίπτωση όπου η Λαγκρανζιανή είναι αναλλοίωτη σε μια ομάδα συμμετρίας G, πόσα μποζόνια Goldstone υπάρχουν? Και δεύτερο ποια είναι η κατάσταση όλων αυτών στην κβαντική θεωρία – συγκεκριμένα, πως θα αποδείξουμε την ύπαρξη μαζικών σωματίων δεδομένου του εκφυλισμού του κενού?

Η περίπτωση της γενικής συμμετρίας μπορεί να προσεγγιστεί καλύτερα θεωρώντας μια ειδική μη αβελιανή ομάδα, την SO(3). Θεωρούμε την Λαγκρανζιανή ενός ισοδιανυσματικού βαθμωτού πεδίου φ_i (i=1,2,3):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - \frac{m}{2}\phi_i\phi_i - \lambda(\phi_i\phi_i)^2$$

Η παραπάνω Λαγκρανζιανή είναι αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς στροφών του εσωτερικού χώρου (isospace), συνεπώς η ομάδα συμμετρίας G είναι η SO(3). Το φ μετασχηματίζεται ως:

$$G: \phi_i \to e^{iQkak}\phi_i e^{-iQkak} = (e^{-iTkak})_{ij}\phi_j = U_{ij}\phi_j = [U(g)\phi]_i$$

όπου a_i είναι οι γωνίες στροφής, Q_i οι γεννήτορες της ομάδας και T_i ένα σύνολο πινάκων που υπακούν στην άλγεβρα Lie της ομάδας και έχουν ίδια διάσταση με την αναπαράσταση του φ.

Αν T_i είναι ερμιτιανοί, τότε ο πίνακας μετασχηματισμού U(g) που αντιστοιχεί σε κάποιο στοιχείο της ομάδας g είναι μοναδιαίος (unitary). Επομένως έχουμε μοναδιαία αναπαράσταση. Το δυναμικό της Λαγκρανζιανής είναι:

$$V = \frac{m^2}{2}\phi_i\phi_i + \lambda(\phi_i\phi_i)^2$$

και για $m^2>0$ έχουμε ελάχιστο στο $\phi_i = 0$, ενώ για $m^2<0$ έχουμε ελάχιστο όταν:

$$|\phi_0| = (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2)^{1/2} = \left(\frac{-m^2}{4\lambda}\right)^{1/2} \equiv a$$

Έστω ότι:

$$\vec{\phi}_0 = a\hat{e}_3$$

είναι το πραγματικό κενό της θεωρίας. Το φ_0 δεν είναι αναλλοίωτο στη SO(3) συμμετρία στροφών της Λαγκρανζιανής, άρα υπάρχουν στοιχεία g που ανήκουν στην ομάδα G για τα οποία ισχύει:

$$G: \phi_0' = U(g)\phi_0 = (e^{iT_1a_1} + e^{iT_2a_2} + e^{iT_3a_3})\phi_0 \neq \phi_0$$

Ωστόσο το φ_0 είναι αναλλοίωτο στη συμμετρία μιας SO(2) υποομάδας της G, έστω την H. Στην περίπτωση αυτή η στροφή ως προς τους ε άξονες είναι:

$$H: \phi_0' = U(h)\phi_0 = e^{iT_3a_3}\phi_0 = \phi_0$$

Από την άλλη πλευρά το δυναμικό V είναι αναλλοίωτο στο μετασχηματισμό της ομάδας G και για $\phi' = U(g)\phi$ έχουμε ότι: $V(\phi') = V(\phi)$ και είναι αυτό που προκαλεί τα μποζόνια Goldstone. Πόσα μποζόνια υπάρχουν; Για το κενό που διαλέξαμε θέτουμε:

$$\phi_3 = \xi + a$$

όπου φ_1, φ_2 και ξ είναι τα φυσικά πεδία.

Με αντικατάσταση στο δυναμικό παίρνουμε:

$$V = \frac{m^2}{2}[\phi_1^2 + \phi_2^2 + (\xi + a)^2] + \lambda[\phi_1^2 + \phi_2^2 + (\xi + a)^2]^2 =$$

$$= -4\lambda a^2\xi^2 - 4a\lambda\xi(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \xi^2) + \lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \xi^2)^2 - \lambda a^4$$

Επειδή το ξ έχει μη μηδενικό συντελεστή έχουμε: $m_{\xi}^{2} = 8a^{2}\lambda$ και $m_{\phi_1} = m_{\phi_2} = 0$, άρα μετά το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας έχουμε ***δύο μποζόνια Goldstone*** κι ***ένα βαθμωτό πεδίο με μάζα***. Αυτό εξηγείται αναπτύσσοντας το δυναμικό σε σειρά Taylor γύρω από το ελάχιστο και επειδή:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_i}|_{\phi=\phi_0} = 0$$

έχουμε:

$$V(\phi) = V(\phi_0) + \frac{\partial V}{\partial \phi_i}|_{\phi=\phi_0}\ \xi_I + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j}\right)_{\phi=\phi_0} \xi_i \xi_j + O(\xi^3) =$$

$$= V(\phi_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j}\right)_{\phi=\phi_0} \xi_i \xi_j + O(\xi^3)$$

όπου $\xi(x) = \phi(x) - \phi_0$. Άρα τα στοιχεία πίνακα που αντιστοιχούν στη μάζα είναι:

$$M_{ij} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j}\right)_{\phi=\phi_0} \geq 0$$

όπου το M είναι θετικό ή μηδέν αφού το $V(\phi_0)$ είναι ελάχιστο. Για να είναι 0 πρέπει να ισχύει:

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j}\right)_{\phi=\phi_0} \delta\phi_i \delta\phi_j = 0$$

όπου το $\delta\varphi_i$ είναι η μεταβολή του φ_i κάτω από το μετασχηματισμό της ομάδας.

Αν το g ανήκει στην υποομάδα H, θα ισχύει:

$$\varphi_0^{'} = \varphi_0 \Rightarrow \delta\varphi_i = 0$$

και ο παράγοντας:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j}|_{\phi_0} = M_{ij}$$

δεν είναι οπωσδήποτε μηδέν.

Αν όμως το g δεν ανήκει στην υποομάδα H, τότε:

$$\varphi_0^{'} \neq \varphi_0 \Rightarrow \delta\varphi_i \neq 0$$

και υποχρεωτικά θα ισχύει:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j}|_{\phi_0} = M_{ij} = 0$$

οπότε τα πεδία αυτά είναι άμαζα και αντιστοιχούν στα μποζόνια Goldstone.

Τώρα θα μελετήσουμε το θεώρημα Goldstone στα πλαίσια της κβαντικής θεωρίας. Αν μια Λαγκρανζιανή $\mathcal{L}$ είναι αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς κάποιας ομάδας τα ρεύματα Noether:

$$j_\mu^a(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \frac{\delta\phi(x)}{\delta a^a}$$

έχουν μηδενική απόκλιση: $\partial^\mu j_\mu^a = 0$ και τα αντίστοιχα φορτία:

$$Q^a = \int d^3x j_0^a(x)$$

διατηρούνται, $\frac{dQ^a}{dt} = 0$, και έχουν τις σχέσεις μετατροπής της ομάδας συμμετρίας:

$$\left[Q^a, Q^b\right] = C^{abc} Q^c$$

όπου C^{abc} είναι οι δομικές σταθερές της άλγεβρας Lie. Ο μοναδιαίος τελεστής που αντιστοιχεί σε ένα μετασχηματισμό της ομάδας είναι:

$$U = e^{iQ^a a^a}$$

Αν το κενό είναι αναλλοίωτο στη συμμετρία έχουμε:

$$U|0\rangle = 0 \Rightarrow Q^a|0\rangle = 0$$

και τα φορτία εκμηδενίζουν το κενό. Στην αντίθετη περίπτωση ισχύει:

$$U|0\rangle = |0\rangle' \neq |0\rangle \Rightarrow Q^a|0\rangle \neq 0$$

δηλαδή καταργείται το διατηρούμενο μέγεθος.

Αφού ο τελεστής φ(x) δεν είναι αναλλοίωτος, θα πρέπει να υπάρχει κάποιος τελεστής φ΄(x) ώστε για κάποιο α να ισχύει:

$$[Q^a, \phi'(x)] = \phi(x)$$

και αφού:

$$\langle 0|\phi(x)|0\rangle \neq 0$$

προκύπτει:

$$\langle 0|[Q^a, \phi'(x)]|0\rangle = \langle 0|Q^a\phi'(x) - \phi'(x)Q^a|0\rangle \neq 0 \qquad (1)$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι αυτή η σχέση συνεπάγεται την ύπαρξη μαζικών σωματιδίων. Με αντικατάσταση του φορτίου Noether παίρνουμε:

$$\sum_n \int d^3y[\langle 0|j_0^a(y)|n\rangle\langle n|\phi'(x)|0\rangle - \langle 0|\phi'(x)|n\rangle\langle n|j_0^a(y)|0\rangle]|_{x^0=y^0} \neq 0$$

Λόγω συμμετρίας στη χωρική μετατόπιση ισχύει:

$$j_0^a(y) = e^{-ipy} j_0^a(0) e^{ipy}$$

οπότε έχουμε:

$$\sum_n \int d^3y[\langle 0|e^{-ipy} j_0^a(0) e^{ipy}|n\rangle\langle n|\phi'(x)|0\rangle - \langle 0|\phi'(x)|n\rangle\langle|e^{-ipy} j_0^a(0) e^{ipy}|0\rangle]|_{x^0=y^0} =$$

$$= (2\pi)^3 \sum_n \delta^3(\vec{p}_n)[\langle 0|j_0^a(0)|n\rangle\langle n|\phi'(x)|0\rangle e^{ip_{n0}y_0} - \langle 0|\phi'(x)|n\rangle\langle n|j_0^a(0)|0\rangle e^{-ip_{n0}y_0}]|_{x^0=y^0} \neq 0$$

Όμως $p_{n_0} \equiv M_n$ όπου M_n η μάζα κάθε ενδιάμεσης κατάστασης, άρα:

$$(2\pi)^3 \sum_n \delta^3(\vec{p}_n)[\langle 0|j_0^a(0)|n\rangle\langle n|\phi'(x)|0\rangle e^{iM_n y_0} - \langle 0|\phi'(x)|n\rangle\langle n|j_0^a(0)|0\rangle e^{-iM_n y_0}]|_{x^0=y^0} \neq 0 \qquad (2)$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η παραπάνω έκφραση είναι ανεξάρτητη του y_0. Από το θεώρημα της Noether το ρεύμα έχει μηδενική απόκλιση, δηλαδή ισχύει:

$$\partial^\mu h^a_\mu = \partial_0 j^a_0(y) + \nabla\cdot\vec{j}^a(y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y_0}\int d^3y j^a_0(y) = -\int d^3y \nabla\cdot\vec{j}^a(y)$$

Αφού οι σχέσεις (2) και (1) είναι ισοδύναμες, ισχύει:

$$\frac{\partial}{\partial y_0}\langle 0|[Q^a,\phi'(x)]|0\rangle = \frac{\partial}{\partial y_0}\int d^3y\langle 0|[j^a_0(y),\phi'(x)]|0\rangle =$$

$$= -\int d^3y\langle 0|[\nabla\cdot\vec{j}^a(y),\phi'(x)]|0\rangle =$$

$$= -\oint d\vec{S}\cdot\langle 0|[\vec{j}^a(y),\phi'(x)]|0\rangle = 0$$

όπου το τελευταίο ολοκλήρωμα μηδενίζεται, γιατί τα όρια της επιφάνειας εκτείνονται στο άπειρο. Άρα η σχέση (2) είναι ανεξάρτητη του y_0 και έτσι αποδεικνύεται το θεώρημα Goldstone [298,305].

7.4. Αυθόρμητο σπάσιμο συμμετριών βαθμίδας

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τι συμβαίνει όταν η συμμετρία είναι μια συμμετρία βαθμίδας. Θεωρούμε ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο που περιγράφεται από την Λαγκρανζιανή:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - m^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2 = \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - V(\phi,\phi^*)$$

και απαιτούμε να είναι αναλλοίωτο κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς της ομάδας U(1):

$$\phi \to e^{i\Lambda(x)}\phi$$

Για να έχουμε αναλλοίωτη κατά Lorentz Λαγκρανζιανή εισάγουμε ένα διανυσματικό πεδίο βαθμίδας A_μ. Η Λαγκρανζιανή θα έχει την μορφή:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi^* - m^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

όπου θεωρούμε το m παράμετρο, όπου στην περίπτωση $m^2 < 0$ και με απουσία του πεδίου βαθμίδας οδηγεί στην κατάσταση κενού:

$$|\phi| = a\left(\frac{-m^2}{2\lambda}\right)^{1/2}$$

Στην νέα κατάσταση κενού το φ προσδιορίζεται από:

$$\phi(x) = a + \frac{\phi_1(x) + i\phi_2(x)}{\sqrt{2}}$$

και με αντικατάσταση στην Λαγκρανζιανή προκύπτει:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e^2a^2A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 - 2\lambda a^2\phi_1^2 + \sqrt{2ea}A^\mu\partial_\mu\phi_2 + O(\phi^3)$$

Παρατηρούμε πως το βαθμωτό πεδίο φ_1 απέκτησε μάζα, ενώ το φ_2 έχει παραμείνει άμαζο αλλά ο σύνθετος όρος $A^\mu \partial_\mu \phi_2$, φανερώνει ότι το διαδιδόμενο φωτόνιο μετασχηματίζεται στο πεδίο φ_2, έτσι το φ_2 δεν φαίνεται να είναι ένα φυσικό πεδίο. Στην πραγματικότητα μπορεί να εξαλειφθεί εκτελώντας ένα μετασχηματισμό βαθμίδας. Για απειροελάχιστο Λ εκτελούμε το μετασχηματισμό βαθμίδας στο φ, οπότε προκύπτει:

$$a + \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} \to e^{i\Lambda(x)}\left(a + \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= [1 + i\Lambda(x)]\left(\frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} + a\right) =$$

$$= \frac{\phi_1}{\sqrt{2}} + i\frac{\phi_2}{\sqrt{2}} + i\Lambda(x)\frac{\phi_1}{\sqrt{2}} - \Lambda(x)\frac{\phi_2}{\sqrt{2}} + a + i\Lambda(x)a =$$

$$= a + \frac{\phi_1 - \Lambda(x)\phi_2}{\sqrt{2}} + i\left(\frac{\phi_2 + \Lambda(x)\phi_1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}\Lambda(x)a}{\sqrt{2}}\right)$$

δηλαδή τα πεδία μετασχηματίζονται ως:

$$\phi_1' = \phi_1 - \Lambda\phi_2$$
$$\phi_2' = \phi_2 + \Lambda\phi_1 + \sqrt{2}\Lambda a$$

Αυτό δείχνει ότι το φ_2 υποβάλλεται σε έναν ομοιογενή μετασχηματισμό που αντιστοιχεί σε μια περιστροφή και μετατρέπεται στο επίπεδο (φ_1,φ_2) και έτσι δεν έχει μια άμεση φυσική ερμηνεία. Μπορούμε να επιλέξουμε το κατάλληλο Λ ώστε να μηδενίζεται το φ_2. Σε αυτή την βαθμίδα, η Λαγκρανζιανή γίνεται:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e^2a^2A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 - 2\lambda a^2\phi_1^2 + O_{\text{interactive}}$$

Η Λαγκρανζιανή περιέχει 2 πεδία με μάζα , το φωτονικό με spin 1 και το φ_1 με spin 0. Το πεδίο φ_2, που στην περίπτωση του αυθόρμητου σπασίματος της παγκόσμιας συμμετρίας γίνεται άμαζο (μποζόνιο Goldstone), στην περίπτωση αυτή εξαφανίζεται. Επιπλέον, το πεδίο βαθμίδας, η παρουσία του οποίου οφείλεται στο γεγονός ότι έχουμε τοπική συμμετρία, έχει πλέον αποκτήσει μάζα – το φωτόνιο έχει γίνει μαζικό. Αυτό αποτελεί το φαινόμενο Higgs. Στις αβελιανές περιπτώσεις συμμετρίας αυτό συνοψίζεται ως εξής: το αυθόρμητο σπάσιμο μιας συμμετρίας βαθμίδας έχει ως αποτέλεσμα, όχι στην παρουσία μαζικών μποζονίων Goldstone, αλλά στην εξαφάνιση αυτών και την παρουσία ενός μαζικού και όχι ενός άμαζου πεδίου βαθμίδας [306-308]. Το φάσμα σωματιδίων που προκύπτει εξαρτάται από το αν η συμμετρία είναι γενική ή τοπική.

<u>ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ</u>:

- ✓ Στην περίπτωση γενικής U(1) συμμετρίας έχουμε το Goldstone mode, όπου τα δύο αρχικά μαζικά βαθμωτά πεδία δίνουν ένα μαζικό και ένα άμαζο βαθμωτό πεδίο.

- ✓ Στην περίπτωση τοπικής U(1) συμμετρίας έχουμε το Higgs mode, όπου τα αρχικά δύο μαζικά βαθμωτά πεδία και το άμαζο φωτόνιο δίνουν ένα μαζικό βαθμωτό πεδίο κι ένα μαζικό φωτόνιο.

Οι βαθμοί ελευθερίας διατηρούνται σε κάθε περίπτωση, καθώς στο Goldstone mode όλα τα πεδία είναι ίδιων βαθμών ελευθερίας ενώ στο Higgs mode αρχικά το άμαζο φωτόνιο έχει δύο βαθμούς ελευθερίας και στη συνέχεια εμφανίζει μάζα με τρεις βαθμούς ελευθερίας.

7.5. Μη Αβελιανός Μηχανισμός Higgs

Έστω η παρακάτω Λαγκρανζιανή που υπακούει στη συμμετρία της ομάδας SO(3):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(D_\mu\phi_i)(D^\mu\phi_i) - \frac{m^2}{2}\phi_i\phi_i - \lambda(\phi_i\phi_i)^2 - \frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu} \qquad (1)$$

όπου

$$D_\mu\phi_i = \partial_\mu\phi_i + g\varepsilon_{ijk}A^i_\mu\phi_k$$

$$F^i_{\mu\nu} = \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu + g\varepsilon^{ijk}A^j_\mu A^k_\nu$$

Η Χαμιλτονιανή έχει ελάχιστο για $m^2<0$, στο:

$$|\phi_0| = \left(\frac{-m^2}{4\lambda}\right)^{1/2} = a$$

και όπως πριν επιλέγουμε το κενό ως εξής:

$$\vec{\phi}_0 = a\hat{e}_3$$

Τα φυσικά πεδία είναι πλέον τα ϕ_1, ϕ_2 και $\xi = \phi_3 - a$. Με αντικατάσταση στην σχέση (1) έχουμε:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_i + g\varepsilon_{ijk}A^i_\mu\phi_k)(\partial^\mu\phi_i + g\varepsilon^{ijk}A^\mu_i\phi_k) - \frac{m^2}{2}\phi_i\phi_i -$$

$$-\lambda(\phi_i\phi)^2 - \frac{1}{4}(\partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu + g\varepsilon^{ijk}A^i_\mu A^k_\nu)(\partial^\mu A^{i\nu} - \partial^\nu A^{i\mu} + g\varepsilon^{ijk}A^{\mu i}A^{\nu k}) \Rightarrow$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[(\partial_\mu\phi_1)^2 + (\partial_\mu\phi_2)^2 + (\partial_\mu\xi)^2] + ag[(\partial_\mu\phi_1)A^\mu_2 - (\partial_\mu\phi_2)A^\mu_1] +$$

$$+\frac{a^2g^2}{2}[(A^1_\mu)^2 + (A^2_\mu)^2] - \frac{1}{4}(\partial_\mu A^i_1 - \partial_\nu A^i_\mu)^2 - 4a^2\lambda\xi^2 + O(\phi^3) + O(\phi^4)$$

Η Λαγκρανζιανή αυτή περιέχει ένα σύνθετο όρο στο A_μ και φ. Για να καταλήξουμε σε μια πιο ερμηνεύσιμη Λαγκρανζιανή, λόγω του γεγονότος ότι έχουμε τοπική συμμετρία, επιλέγουμε την μοναδιαία βαθμίδα σύμφωνα με την οποία σε κάθε σημείο του χωροχρόνου το διάνυσμα φ είναι παράλληλο στον 3ο εσωτερικό άξονα:

$$\vec{\varphi}(x) = \phi_3\hat{e}_3 = (a+\xi)\hat{e}_3$$

Αυτό ελευθερώνει τα πεδία φ_1 και φ_2, και έχουμε:

$$D_\mu\phi_1 = \partial_\mu\phi_1 + g\varepsilon_{123}A^2_\mu\phi_3 + g\varepsilon_{123}A^3_\mu\phi_2 = g(a+\xi)A^2_\mu$$

$$D_\mu\phi_2 = \partial_\mu\phi_2 + g\varepsilon_{213}A^1_\mu\phi_3 + g\varepsilon_{231}A^3_\mu\phi_1 = -g(a+\xi)A^1_\mu$$

$$D_\mu\phi_3 = \partial_\mu\phi_3 + g\varepsilon_{312}A^1_\mu\phi_2 + g\varepsilon_{321}A^2_\mu\phi_1 = \partial_\mu\xi$$

Δηλαδή:

$$(D_\mu\phi_i)^2 = (D_\mu\phi_1)^2 + (D_\mu\phi_2)^2 + (D_\mu\phi_3)^2 = a^2g^2[(A^1_\mu)^2 + (A^2_\mu)^2] + (\partial_\mu\xi)^2 + cubic + quarticterms$$

Η Λαγκρανζιανή τελικά γίνεται

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu)^2 + \frac{1}{2}a^2g^2[(A^1_\mu)^2 + (A^2_\mu)^2] + \frac{1}{2}(\partial_\mu\xi)^2 - 4a^2\lambda\xi^2 + cubic + quarticterms$$

Δηλαδή προέκυψαν δύο πεδία βαθμίδας με μάζα, ένα πεδίο βαθμίδας άμαζο και ένα βαθμωτό πεδίο με μάζα. Συγκεκριμένα τα μποζόνια Goldstone, που προκύπτουν από το αυθόρμητο σπάσιμο της γενικής συμμετρίας, εξαφανίζονται στο μοντέλο της τοπικής συμμετρίας και τα δύο άμαζα πεδία βαθμίδας γίνονται μαζικά.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:

- ✓ Στην περίπτωση γενικής O(3) συμμετρίας έχουμε το Goldstone mode, όπου τα τρία αρχικά μαζικά βαθμωτά πεδία δίνουν ένα μαζικό και δύο άμαζα βαθμωτά πεδία.
- ✓ Στην περίπτωση τοπικής O(3) συμμετρίας έχουμε το Higgs mode, όπου τα αρχικά τρία μαζικά βαθμωτά πεδία και τα τρία άμαζα πεδία βαθμίδας δίνουν ένα μαζικό βαθμωτό πεδίο, δύο μαζικά πεδία βαθμίδας και ένα άμαζο πεδίο βαθμίδας.

7.6. Η θεωρία των Glashow – Weinberg – Salam για τις ασθενείς αλληλεπιδράσεις

Στην ενότητα αυτή θα περιγράψουμε την spontaneously broken θεωρία βαθμίδας που δίνει τη σωστή πειραματική περιγραφή των ασθενών αλληλεπιδράσεων [103-183]. Το πρότυπο αυτό εισήχθη από τους Glashow, Weinberg και Salam και μας δίνει μια ενοποιημένη περιγραφή των ασθενών με τις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις, στις οποίες το άμαζο φωτόνιο αντιστοιχεί σε έναν συνδυασμό των γεννητόρων της συμμετρίας που δεν έχει σπάσει.

Η βασική ιδέα βρίσκεται στο γεγονός ότι στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις θα πρέπει να μεσολαβούν μποζόνια βαθμίδας $W^\pm$, τα οποία είναι μαζικά. Η Λαγκρανζιανή για τη θεωρία αυτή περιλαμβάνει όρους για τα μαζικά ηλεκτρόνια, μιόνια και νετρίνο και είναι αναλλοίωτη κάτω από μια συμμετρία βαθμίδας. Η αυθόρμητη ρήξη της συμμετρίας δίνει μάζα στο e, μ, τ και τα μποζόνια βαθμίδας αλλά όχι στο φωτόνιο και το νετρίνο. Για το λόγο αυτό είναι ρεαλιστική και χρησιμοποιείται με μεγάλη επιτυχία στην περιγραφή των ασθενών αλληλεπιδράσεων.

Η ηλεκτρασθενής αλληλεπίδραση είναι η ενοποιημένη περιγραφή δύο (από τις συνολικά τέσσερις) θεμελιωδών αλληλεπιδράσεων. Παρόλο που οι δύο αυτές δυνάμεις εμφανίζονται στο φυσικό μας κόσμο με πολύ διαφορετική συμπεριφορά, στην ουσία αποτελούν τις δύο πλευρές του ίδιου νομίσματος. Δηλαδή, πέρα από ένα ενεργειακό κατώφλι της τάξης των

100GeV , πρόκειται για μια ενιαία δύναμη η οποία όμως κάτω από το κατώφλι αυτό έχει δύο διαφορετικές εκφάνσεις γεγονός που έχει αποδειχθεί πειραματικά.

Η Λαγκρανζιανή που χρησιμοποιούμε εδώ είναι η:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{kin}^{\text{ύλης}} + \mathcal{L}_{kin}^{gauge} - V(\phi) + \mathcal{L}_{Yuk} \tag{1}$$

η οποία είναι αρκετά σύνθετη, γι' αυτό και είναι προτιμότερο να ασχοληθούμε με κάθε όρο ξεχωριστά. Μέσα από αυτήν την ανάλυση θα λάβουμε πολλές πληροφορίες (όπως τη μάζα φυσικού πεδίου Higgs, τις μάζες των διανυσματικών μποζονίων, μάζες φερμιονίων κ.ά.). Ο όρος $L_{kin}^{\acute{\upsilon}\lambda\eta\varsigma}$ εμπεριέχει τους κινητικούς όρους των φερμιονίων του καθιερωμένου προτύπου. Οι αλληλεπιδράσεις των φερμιονίων γίνονται μέσω της συναλλοίωτης παραγώγου, που είναι :

$$D_\mu = \partial_\mu - i\frac{g_2}{2}\tau^i W_\mu^i - ig_1\frac{Y}{2}B_\mu \tag{2}$$

όπου το Y/2 βρίσκεται κάθε φορά από την εξίσωση:

$$Q = \frac{T_3}{2} + \frac{Y}{2}$$

Συνεπώς η $L_{kin}^{\acute{\upsilon}\lambda\eta\varsigma}$ γράφεται:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{kin}^{\text{ύλης}} &= \sum_i i\bar{Q}_L^{(i)}\gamma^\mu\left(\partial_\mu - i\frac{g_2}{2}\tau^i W_\mu^i - i\frac{g_1}{6}B_\mu\right)Q_L^{(i)} \\
&+ i\bar{\ell}_L^{(i)}\gamma^\mu\left(\partial_\mu - i\frac{g_2}{2}\tau^i W_\mu^i + i\frac{g_1}{2}B_\mu\right)\ell_L^{(i)} \\
&+ i\bar{\ell}_R^{(i)}\gamma^\mu(\partial_\mu + ig_1 B_\mu)\ell_R^{(i)} \\
&+ i\bar{U}_R^{(i)}\gamma^\mu(\partial_\mu - i\frac{2}{3}g_1 B_\mu)U_R^{(i)} \\
&+ i\bar{D}_R^{(i)}\gamma^\mu(\partial_\mu + i\frac{g_1}{3}B_\mu)D_R^{(i)} \\
&+ \underbrace{|(\partial_\mu - i\frac{g_2}{2}\tau^i W_\mu^i - i\frac{g_1}{2}B_\mu)\phi|^2}_{(D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi)}
\end{aligned} \tag{3}$$

Η L_{kin}^{gauge} γράφεται:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{kin}^{gauge} &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g_2\varepsilon_{ijk}\theta^j(x)W_\mu^k)^2 \\
&- \frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2
\end{aligned} \tag{4}$$

Ο δυναμικός όρος V(φ) δίνεται από τη σχέση:

$$V(\phi) = -\mu^2\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2, \quad \mu^2 > 0 \tag{5}$$

Ο όρος $L_{Y_{uk}}$ είναι:

$$\mathcal{L}_{Yuk} = \sum f_\ell^{(ij)} \bar{\ell}_L^{(i)} \phi \ell_R^{(j)} + f_U^{(ij)} \bar{Q}_L^{(i)} \tilde{\phi} U_R^{(j)} + f_D^{(ij)} \bar{Q}_L^{(i)} \phi D_R^{(j)} + h.c. \tag{6}$$

και είναι υπεύθυνος για τη "γέννηση" των φερμιονικών μαζών. Δηλαδή περιγράφει τη σύζευξη ανάμεσα στο βαθμωτό πεδίο Higgs και στα (άμαζα ακόμα) φερμιονικά πεδία.

Προχωράμε στο αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας. Έπειτα από τους διάφορους όρους της Λαγκρανζιανής θα πάρουμε διάφορα χρήσιμα αποτελέσματα. Χρησιμοποιώντας ως βαθμωτό πεδίο μας τη διπλέτα:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Ξεκινάμε την ανάλυση για το δυναμικό όρο της Λαγκρανζιανής μας V(φ). Προχωράμε στο αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας και βρίσκουμε τη νέα κατάσταση ελάχιστης ενέργειας:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial \phi} = -\mu^2 \phi^\dagger + 2\lambda \phi^{\dagger 2} \phi = 0 \Rightarrow \phi^\dagger(-\mu^2 + 2\lambda \phi^\dagger \phi) = 0 \\ &\phi^\dagger = 0 \quad \text{ή} \quad |\phi|^2 = \frac{\mu^2}{2\lambda} \Rightarrow \\ &\phi^\dagger \phi \equiv \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2) = \frac{\mu^2}{2\lambda} \end{aligned} \tag{8}$$

Ο γεωμετρικός τόπος των ελαχίστων του συστήματος μας είναι μια τετραδιάστατη σφαίρα (μια υπερσφαίρα). Ένα από τα άπειρα σημεία που επαληθεύουν την εξίσωση της υπερσφαίρας είναι το:

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = 0, \quad \phi_3^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} \equiv v^2 \tag{9}$$

Επομένως, επειδή το πεδίο φ είναι μια διπλέτα, το κενό γράφεται:

$$\phi_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \tag{10}$$

Διαταράσσουμε το σύστημα γύρω από το κενό, οπότε το πεδίο θα είναι :

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta(x) \end{pmatrix} \tag{11}$$

Αντικαθιστώντας το πεδίο στην σχέση στη σχέση του δυναμικού (5) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} V &= -\frac{\mu^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ v+\eta \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 0 \\ v+\eta \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{4} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ v+\eta \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 0 \\ v+\eta \end{pmatrix} \right]^2 \\ &= -\frac{\mu^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & v+\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v+\eta \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{4} \left[\begin{pmatrix} 0 & v+\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v+\eta \end{pmatrix} \right]^2 \\ &= -\frac{\mu^2}{2}(v+\eta)^2 + \frac{\lambda}{4}(v+\eta)^4 \end{aligned} \tag{12}$$

και κρατώντας μόνο τους τετραγωνικούς όρους ως προς το πεδίο η, δηλαδή τους όρους μάζας, παίρνουμε την έκφραση:

$$\begin{aligned} V(\phi) &= -\frac{-\mu^2}{2}\eta^2 + \frac{3}{2}\lambda v^2\eta^2 = -\frac{1}{2}\mu^2\eta^2 + \frac{3}{2}v^2\eta^2 \\ &= -\frac{1}{2}\mu^2\eta^2 + \frac{3}{2}\frac{\mu^2}{v^2}\eta^2 = -\frac{1}{2}\mu^2\eta^2 + \frac{3}{2}\mu^2\eta^2 = \mu^2\eta^2 \end{aligned} \tag{13}$$

Οπότε, ταυτοποιώντας παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}m_h^2 = \mu^2 \Rightarrow m_h = \sqrt{2\mu} \tag{14}$$

Αυτή είναι η μάζα του βαθμωτού πεδίου Higgs.

Από τον τελευταίο όρο της (3) θα πάρουμε τις μάζες των διανυσματικών μποζονίων. Στην περίπτωση μας το υπερφορτίο είναι ίσο με τη μονάδα. Όποτε υπολογίζουμε το:

$$(D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) \equiv D$$

$$\begin{aligned} D &= \phi^\dagger(\partial_\mu + ig_2\frac{\tau^i}{2}W_\mu^i + i\frac{g_1}{2}B_\mu)(\partial^\mu - ig_2\frac{\tau^i}{2}W^{\mu i} - i\frac{g_1}{2}B^\mu)\phi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & v+\eta \end{pmatrix}(\partial_\mu + ig_2\frac{\tau^i}{2}W_\mu^i + ig_1\frac{1}{2}B_\mu) \\ &\quad (\partial^\mu - ig_2\frac{\tau^i}{2}W^{\mu i} - i\frac{g_1}{2}B^\mu)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v+\eta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & v+\eta \end{pmatrix}|g_2\frac{\tau^i}{2}W_\mu^i + \frac{1}{2}g_1B_\mu|^2\begin{pmatrix} 0 \\ v+\eta \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{15}$$

όπου στο τελευταίο βήμα κρατήσαμε μόνο όρους που δεν περιέχουν παράγωγο. Κρατώντας και εδώ μόνο τους τετραγωνικούς όρους ως προς τα τέσσερα πεδία βαθμίδας θα βρούμε τις μάζες τους. Επομένως η παραπάνω εξίσωση θα γίνει:

$$D = \frac{v^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}|g_2\frac{\tau^i}{2}W_\mu^i + \frac{1}{2}g_1B_\mu|^2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Για ευκολία υπολογίζω το άθροισμα των πινάκων ξεχωριστά και έπειτα θα το ενσωματώσω στην παραπάνω σχέση (16).

$$\begin{aligned} \tau^iW_\mu^i &= \tau^1W_\mu^1 + \tau^2W_\mu^2 + \tau^3W_\mu^3 = \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ g_2\frac{\tau^i}{2}W_\mu^i + \frac{g_1}{2}B_\mu &= \begin{pmatrix} \frac{g_2}{2}W_\mu^3 + \frac{g_1}{2}B_\mu & \frac{g_2}{2}(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ \frac{g_2}{2}(W_\mu^1 + iW_\mu^2) & -\frac{g_2^2}{2}W_\mu^3 + \frac{g_1}{2}B_\mu \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{17}$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν στην (15) τον πίνακα που μόλις βρήκαμε, έχουμε διαδοχικά:

$$
\begin{aligned}
D &= \frac{v^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{g_2}{2}W^3_\mu + \frac{g_1}{2}B_\mu & \frac{g_2}{2}(W^1_\mu - iW^2_\mu) \\ \frac{g_2}{2}(W^1_\mu + iW^2_\mu) & -\frac{g_2^2}{2}W^3_\mu + \frac{g_1}{2}B_\mu \end{pmatrix} \\
&\cdot \begin{pmatrix} \frac{g_2}{2}W^3_\mu + \frac{g_1}{2}B_\mu & \frac{g_2}{2}(W^1_\mu - iW^2_\mu) \\ \frac{g_2}{2}(W^1_\mu + iW^2_\mu) & -\frac{g_2^2}{2}W^3_\mu + \frac{g_1}{2}B_\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{v^2}{2}\begin{pmatrix} \frac{g_2}{2}(W^{\mu 1} + iW^{\mu 2}) & -\frac{g_2}{2}W^{\mu 3} + \frac{g_1}{2}B^\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{g_2}{2}(W^1_\mu - iW^2_\mu) \\ -\frac{g_2}{2}W^3_\mu + \frac{g_1}{2}B_\mu \end{pmatrix} \\
&= \frac{v^2}{8}\left(g_2^2(W^1_\mu)^2 + g_2^2(W^2_\mu)^2 + g_2^2(W^3_\mu)^2 + g_1^2(B_\mu)^2 - 2g_1g_2W^3_\mu B^\mu\right)
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Η έκφραση D πρέπει να είναι:

$$
D = M_W^2 W^+_\mu W^{\mu -} + \frac{1}{2}M_Z^2 Z_\mu Z^\mu \tag{19}
$$

Δηλαδή, πρέπει να παίρνουμε μια έκφραση κατά την οποία, εν αντιθέσει με την (18), να έχουμε μόνο τετραγωνικούς όρους των πεδίων. Η παρουσία μη τετραγωνικού όρου φανερώνει ότι ο πίνακας μαζών δεν είναι διαγώνιος. Οπότε απαιτώντας η (18) να γραφεί στη μορφή της (19), στην ουσία διαγωνοποιούμε τον πίνακα των μαζών, ώστε να εξαλείψουμε τους μη τετραγωνικούς όρους και να πάρουμε τις προβλέψεις των μαζών που μας δίνει ο μηχανισμός.

Από τη σύγκριση των δυο παραπάνω εξισώσεων, παίρνουμε:

$$
M_W^2 W^+_\mu W^{\mu -} = \frac{g_2^2 v^2}{8}[(W^1_\mu)^2 + (W^2_\mu)^2] \tag{20}
$$

Ορίζοντας ως:

$$
W^\pm_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(W^1_\mu \mp iW^2_\mu) \tag{21}
$$

(κάνοντας ουσιαστικά μια αλλαγή μεταβλητών) η (20) γίνεται:

$$
M_W^2 W^+_\mu W^{\mu -} = \frac{g_2^2 v^2}{4} W^+_\mu W^{\mu -} \tag{22}
$$

Συνεπώς η μάζα των φυσικών μποζονίων $W^\pm_\mu$ είναι:

$$
M_W^2 = \frac{g^2 v^2}{4} \Rightarrow M_W = \frac{gv}{2} \tag{23}
$$

Επίσης από τις (18) και (19) προκύπτει ότι θα πρέπει:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}M_Z^2 Z_\mu Z^\mu &= \frac{v^2}{8}\left(g_2^2(W^3_\mu)^2 + g_1^2(B_\mu)^2 - 2g_1g_2W^3_\mu B^\mu\right) \\
&= \frac{v^2}{8}(g_2W^3_\mu - gB_\mu)^2
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Προκειμένου να γράψουμε την παραπάνω έκφραση ως γινόμενο πινάκων θεωρούμε ότι τα πεδία W_μ^3, B_μ αποτελούν τα στοιχεία μιας διπλέτας: $\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}$. Συνεπώς, η σχέση (24) γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}M_Z^2 Z_\mu Z^\mu &= \frac{v^2}{8}(g_2 W_\mu^3 - g_1 B_\mu)(g_2 W^{\mu 3} - g_1 B^\mu) \\ &= \frac{v^2}{8}\begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_2^2 & -g_1 g_2 \\ -g_1 g_2 & g_1^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{25}$$

Στο σημείο αυτό ορίζουμε ένα πίνακα στήλη δύο πεδίων Z_μ, A_μ τα οποία αποτελούν τα φυσικά πεδία. Με άλλα λόγια τα δυο αυτά πεδία είναι αυτά τα οποία θα προκύψουν αφού απαλλαγούμε από τους μη τετραγωνικούς όρους της (24). Απαιτούμε λοιπόν το μεσαίο πίνακα (που είναι ο πίνακας M που δίνει τις μάζες) της εξίσωσης (25) να είναι διαγώνιος και μάλιστα το στοιχείο M_{22} να είναι 0, αφού ως γνωστό το φωτόνιο είναι ένα μποζόνιο άμαζο.

$$\frac{1}{2}M_Z^2 Z_\mu Z^\mu = \begin{pmatrix} Z_\mu & A_\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_Z^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix} \tag{26}$$

Από τη διαγωνοποίηση λοιπόν του πίνακα M της (25) θα πάρουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}M_Z^2 Z_\mu Z^\mu &= \frac{v^2}{8}\begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_2^2 & -g_1 g_2 \\ -g_1 g_2 & g_1^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{pmatrix} \\ &= \frac{v^2}{8}\underbrace{\begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} U}_{part1}\underbrace{U^{-1}\begin{pmatrix} g_2^2 & -g_1 g_2 \\ -g_1 g_2 & g_1^2 \end{pmatrix} U}_{part2 \equiv UMU^{-1}}\underbrace{U^{-1}\begin{pmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{pmatrix}}_{part3} \end{aligned} \tag{27}$$

όπου U είναι ένας μοναδιαίος πίνακας. Μια εύκολη επιλογή ενός τέτοιου πίνακα είναι ο πίνακας στροφών - με θετική γωνία στροφής -, δηλαδή:

$$U = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \tag{28}$$

Υπολογίζω τα τρία κομμάτια της (27) ξεχωριστά. Για το πρώτο έχουμε:

1ο κομμάτι

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} U &= \begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} cos\theta W_\mu^3 - sin\theta B_\mu & sin\theta W_\mu^3 + cos\theta B_\mu \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{29}$$

2ο κομμάτι

$$\begin{aligned} M' \equiv \frac{v^2}{8}U^{-1}MU &= \frac{v^2}{8}U^{-1}\begin{pmatrix} g_2^2 & -g_1 g_2 \\ -g_1 g_2 & g_1^2 \end{pmatrix} U \\ &= \frac{v^2}{8}\begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_2^2 & -g_1 g_2 \\ -g_1 g_2 & g_1^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ο παραπάνω πολλαπλασιασμός πινάκων δίνει τον εξής πίνακα γραμμένο στα στοιχεία του:

$$M'_{11} = \frac{v^2}{8}(g_2^2\cos^2\theta + 2g_1g_2\sin\theta\cos\theta + g_1^2\sin^2\theta)$$
$$M'_{12} = \frac{v^2}{8}(g_2^2\cos\theta\sin\theta - g_1g_2\cos^2\theta + g_1g_2\sin^2\theta - g_1^2\cos\theta\sin\theta)$$
$$M'_{21} = \frac{v^2}{8}(g_2^2\sin\theta\cos\theta + g_1g_2\sin^2\theta - g_1^2\sin\theta\cos\theta - g_1g_2\cos^2\theta)$$
$$M'_{22} = \frac{v^2}{8}(g_2^2\sin^2\theta - 2g_1g_2\sin\theta\cos\theta + g_1^2\cos^2\theta) \tag{30}$$

3ο κομμάτι

$$U^{-1}\begin{pmatrix} W^{\mu 3} \\ B^{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W^{\mu 3} \\ B^{\mu} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta W^{\mu 3} + \sin\theta B^{\mu} \\ \sin\theta W^{\mu 3} + \cos\theta B^{\mu} \end{pmatrix} \tag{31}$$

Σύμφωνα όμως με την (26) πρέπει όλα τα στοιχεία του πίνακα Μ′ να είναι μηδέν, εκτός από το στοιχείο M'_{11}. Επίσης, από την απαίτηση αυτή του μηδενισμού των τριών στοιχείων πίνακα παίρνουμε πληροφορίες για τη γωνία θ.

$$M'_{12} = M'_{21} = 0 \Rightarrow$$
$$g_2\sin\theta(g_2\cos\theta + g_1\sin\theta) - g_1\cos\theta(g_2\cos\theta + g_1\sin\theta) = 0 \Rightarrow$$
$$(g_2\cos\theta + g_1\sin\theta)(g_2\sin\theta - g_1\cos\theta) = 0 \Rightarrow$$
$$\tan\theta = \frac{g_1}{g_2} \tag{32}$$

Η γωνία αυτή είναι γνωστή σα γωνία Weinberg ή αλλιώς γωνία μίξης των ασθενών αλληλεπιδράσεων, συμβολίζεται με θ_w και πειραματικά δίνεται έχει βρεθεί ότι $\sin^2\theta_w \approx 0.23$. Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει και από το μηδενισμό του στοιχείου M'_{22}, γι'αυτό και οι πράξεις παραλείπονται.

Επίσης, από τη σύγκριση των εξισώσεων (26) και (27), συμπεραίνουμε ότι:

$$\begin{pmatrix} Z_\mu & A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} U = (3.100).part1 \tag{33}$$

$$\begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix} = U^{-1}\begin{pmatrix} W^{\mu 3} \\ B^{\mu} \end{pmatrix} = (3.100).part3 \tag{34}$$

και από τα αποτελέσματα που βρήκαμε από τις (29) και (31), οι παραπάνω εξισώσεις θα μας δώσουν το ίδιο αποτέλεσμα:

$$Z_\mu = \cos\theta_W W_\mu^3 - \sin\theta_W B_\mu$$
$$A_\mu = \sin\theta_W W_\mu^3 + \cos\theta_W B_\mu \qquad (35)$$

Τα αποτελέσματα των σχέσεων (35) και (21) αποτελούν τις σχέσεις που συνδέουν τα φυσικά πεδία $W^{\pm\mu}$, Z_μ, A_μ με τα πεδία βαθμίδας $W^{1,2}$,W^3,B_μ, αντίστοιχα. Αν λάβουμε υπόψη ότι η (32) σε συνδυασμό με την τριγωνομετρική ταυτότητα $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, μας δίνει το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας Weinberg, συναρτήσει των σταθερών σύζευξης g_1, g_2. Δηλαδή:

$$\sin\theta_W = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}$$

$$\cos\theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \qquad (36)$$

Έτσι, οι εξισώσεις των φυσικών πεδίων (35) θα είναι:

$$Z_\mu = \frac{g_2 W_\mu^3 - g_1 B_\mu}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}$$

$$A_\mu = \frac{g_1 W_\mu^3 + g_2 B_\mu}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \qquad (37)$$

Τέλος, όπως είδαμε νωρίτερα, το στοιχείο M'_{11} του πίνακα M' από την εξίσωση (30) μας δίνει το τετράγωνο της μάζας του φυσικού μποζονίου Z_μ:

$$\begin{aligned} M_Z^2 &= \frac{v^2}{8}(g_2^2\cos^2\theta_W + 2g_1g_2\sin\theta_W\cos\theta_W + g_1^2\sin^2\theta_W) \\ &= \frac{v^2}{8}(g_2\cos\theta_W + g_1\sin\theta_W)^2 \\ &= \frac{v^2}{8}\left(\frac{g_1^2+g_2^2}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}}\right) \Rightarrow M_Z = \frac{1}{2}\frac{v}{2}\sqrt{g_1^2+g_2^2} \end{aligned} \qquad (38)$$

Από την εξίσωση (27) παρατηρούμε ότι ο συντελεστής 1/2 αποβάλλεται και έτσι η μάζα του φυσικού μποζονίου Z_μ θα είναι:

$$M_Z = \frac{v}{2}\sqrt{g_1^2 + g_2^2} \qquad (39)$$

και η μάζα του φωτονίου ίση με μηδέν, $M_A = 0$. Αυτό είναι ένα αποτέλεσμα που προέκυψε αλλά δεν αποτελεί πρόβλεψη απλά μια επιβεβαίωση ότι η απαίτηση η μάζα του φωτονίου να είναι μηδέν είναι συνεπής. Τέλος, άλλη μια παρατήρηση για τις μάζες των μποζονίων είναι ότι διαιρώντας κατά μέλη τις δυο εξισώσεις (23) και (39) προκύπτει:

$$\frac{M_W}{M_Z} = \frac{g_2}{\sqrt{g_1 + g_2}} \Rightarrow M_W = \cos\theta_w M_z \tag{40}$$

Η ανισότητα αυτή των μαζών των μποζονίων προκύπτει από την ανάμιξη των $W^3{}_\mu$ και B_μ. Στο όριο όπου $\theta_w = 0$, οι μάζες εξισώνονται $M_Z = M_W$.

Τώρα, μέσω των κινητικών όρων των φερμιονίων που δίνονται από τη Λαγκρανζιανή (3) θα βρούμε τα φορτισμένα αλλά και τα αφόρτιστα (ουδέτερα ρεύματα). Οι όροι της Λαγκρανζιανής που θα χρησιμοποιήσουμε είναι:

$$\mathcal{L}'^{\text{ύλης}}_{kin} = \sum_i i\bar{Q}_L^{(i)}\gamma^\mu\left(\partial_\mu - i\frac{g_2}{2}\tau^i W_\mu^i - i\frac{g_1}{6}B_\mu\right)Q_L^{(i)} \tag{41}$$

$$+ i\bar{\ell}_L^{(i)}\gamma^\mu\left(\partial_\mu - i\frac{g_2}{2}\tau^i W_\mu^i + i\frac{g_1}{2}B_\mu\right)\ell_L^{(i)} \tag{42}$$

$$+ i\bar{\ell}_R^{(i)}\gamma^\mu(\partial_\mu + ig_1 B_\mu)\ell_R^{(i)} \tag{43}$$

$$+ i\bar{U}_R^{(i)}\gamma^\mu(\partial_\mu - i\frac{2}{3}g_1 B_\mu)U_R^{(i)} \tag{44}$$

$$+ i\bar{D}_R^{(i)}\gamma^\mu(\partial_\mu + i\frac{g_1}{3}B_\mu)D_R^{(i)} \tag{45}$$

Υπολογίζω ξεχωριστά τους διάφορους όρους του αθροίσματος. Για τα ασθενή isospin ρεύματα της SU(2) θα πάρουμε τους όρους (41) και (42), χωρίς να συμπεριλάβουμε τους όρους αλληλεπίδρασης με το B_μ. Αυτοί θα είναι:

Όρος (41)

$$\begin{aligned}
&\frac{g_2}{2}\bar{Q}_L^{(i)}\gamma^\mu\tau^i W_\mu^i Q_L^{(i)} \\
&= \frac{g_2}{2}\begin{pmatrix}\bar{u} & \bar{d}\end{pmatrix}_L \gamma^\mu\tau^1 W_\mu^1 \begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}_L \\
&+ \frac{g_2}{2}\begin{pmatrix}\bar{u} & \bar{d}\end{pmatrix}_L \gamma^\mu\tau^2 W_\mu^2 \begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}_L \\
&+ \frac{g_2}{2}\begin{pmatrix}\bar{u} & \bar{d}\end{pmatrix}_L \gamma^\mu\tau^3 W_\mu^3 \begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}_L \\
&= \frac{g_2}{2}\begin{pmatrix}\bar{u} & \bar{d}\end{pmatrix}_L \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\gamma^\mu W_\mu^1 \begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}_L \\
&+ \frac{g_2}{2}\begin{pmatrix}\bar{u} & \bar{d}\end{pmatrix}_L \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\gamma^\mu W_\mu^2 \begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}_L \\
&+ \frac{g_2}{2}\begin{pmatrix}\bar{u} & \bar{d}\end{pmatrix}_L \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\gamma^\mu W_\mu^3 \begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}_L \\
&= \frac{g_2}{2}(\bar{d}_L\gamma^\mu u_L + \bar{u}_L\gamma^\mu d_L)W_\mu^1 \\
&+ \frac{g_2}{2}(i\bar{d}_L\gamma^\mu u_L - i\bar{u}_L\gamma^\mu d_L)W_\mu^2 \\
&+ \frac{g_2}{2}(\bar{u}_L\gamma^\mu u_L - \bar{d}_L\gamma^\mu d_L)W_\mu^3
\end{aligned} \tag{46}$$

Όρος (42)

$$\begin{aligned}
&\frac{g_2}{2}\bar{\ell}_L^{(i)}\gamma^\mu\tau^i W_\mu^i \ell_L^{(i)} \\
&= \frac{g_2}{2}(\bar{e}_L\gamma^\mu v_L^e + \bar{v}_L^e\gamma^\mu e_L)W_\mu^1 \\
&+ \frac{g_2}{2}(i\bar{e}_L\gamma^\mu v_L^e - i\bar{v}_L^e\gamma^\mu e_L)W_\mu^2 \\
&+ \frac{g_2}{2}(\bar{v}_L^e\gamma^\mu v_L^e - \bar{e}_L\gamma^\mu e_L)W_\mu^3
\end{aligned} \tag{47}$$

Και στα δύο αποτελέσματα δουλεύουμε μόνο με την πρώτη οικογένεια των κουάρκ και των λεπτονίων. Κανονικά, τα παραπάνω αποτελέσματα είναι πλήρη όταν προσθέσω τους αντίστοιχους όρους και των άλλων οικογενειών.

Εφόσον η Λαγκρανζιανή που περιγράφει την αλληλεπίδραση των μποζονίων της ασθενούς αλληλεπίδρασης με τα φερμιόνια γράφεται:

$$\mathcal{L} = g_2 j^{\mu i} W_\mu^i = g_2 j^{\mu 1} W_\mu^1 + g_2 j^{\mu 2} W_\mu^2 + g_2 j^{\mu 3} W_\mu^3 \tag{48}$$

Θα πρέπει τώρα να ταυτοποιήσουμε το άθροισμα των αποτελεσμάτων (46) και (47) με την παραπάνω εξίσωση (48). Συνεπώς τα ρεύματα $j^{\mu 1}$, $j^{\mu 2}$, $j^{\mu 3}$ θα δίνονται:

$$\begin{aligned}
j^{\mu 1} &= \frac{1}{2}(\bar{e}_L\gamma^\mu v_L^e + \bar{v}_L^e\gamma^\mu e_L + \bar{d}_L\gamma^\mu u_L + \bar{u}_L\gamma^\mu d_L) \\
j^{\mu 2} &= \frac{1}{2}(i\bar{e}_L\gamma^\mu v_L^e - i\bar{v}_L^e\gamma^\mu e_L + i\bar{d}_L\gamma^\mu u_L - i\bar{u}_L\gamma^\mu d_L) \\
j^{\mu 3} &= \frac{1}{2}(\bar{v}_L^e\gamma^\mu v_L^e - \bar{e}_L\gamma^\mu e_L + \bar{u}_L\gamma^\mu u_L + \bar{d}_L\gamma^\mu d_L)
\end{aligned} \tag{49}$$

Όμως, όπως υποδεικνύει η εξίσωση (21), η παραπάνω Λαγκρανζιανή γράφεται:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ch} + \mathcal{L}_{unch} \quad \text{όπου} \\
&\mathcal{L}_{ch} = \frac{g_2}{\sqrt{2}}(j^{\mu +}W_\mu^+ + j^{\mu -}W_\mu^-) \quad \text{δηλαδή} \quad j^{\mu \pm} = j^{\mu 1} \pm i j^{\mu 2}
\end{aligned} \tag{50}$$

Οπότε, τα φορτισμένα ρεύματα θα είναι σύμφωνα με την εξίσωση (50):

$$\begin{aligned}
j^{\mu +} &= \frac{1}{2}(\bar{e}_L\gamma^\mu v_L^e + \bar{v}_L^e\gamma^\mu e_L + \bar{d}_L\gamma^\mu u_L + \bar{u}_L\gamma^\mu d_L \\
&\quad - \bar{e}_L\gamma^\mu v_L^e + \bar{v}_L^e\gamma^\mu e_L - \bar{d}_L\gamma^\mu u_L + \bar{u}_L\gamma^\mu d_L) \Rightarrow \\
j^{\mu +} &= \bar{v}_L^e\gamma^\mu e_L + \bar{u}_L\gamma^\mu d_L \\
\\
j^{\mu -} &= \frac{1}{2}(\bar{e}_L\gamma^\mu v_L^e + \bar{v}_L^e\gamma^\mu e_L + \bar{d}_L\gamma^\mu u_L + \bar{u}_L\gamma^\mu d_L \\
&\quad + \bar{e}_L\gamma^\mu v_L^e - \bar{v}_L^e\gamma^\mu e_L + \bar{d}_L\gamma^\mu u_L - \bar{u}_L\gamma^\mu d_L) \Rightarrow \\
j^{\mu -} &= \bar{e}_L\gamma^\mu v_L^e + \bar{d}_L\gamma^\mu u_L
\end{aligned} \tag{51}$$

Η L_{unch} εμπεριέχει την αλληλεπίδραση του $j^{\mu 3}$ με το W^3_μ αλλά επίσης και την αλληλεπίδραση του Y(υπερφορτίου)-ρεύματος της U(1) με το B_μ, όπως φαίνεται στην παρακάτω εξίσωση:

$$\mathcal{L}_{unch} = g_2 j^{\mu 3} W^3_\mu + \frac{g_1}{2} j^{\mu Y} B_\mu \tag{52}$$

ενώ η (52) στη φυσική βάση γράφεται:

$$\mathcal{L}^{nb}_{unch} = e j^\mu_{em} A_\mu + \frac{g_2}{\cos\theta_w} j^\mu_o Z^o_\mu \tag{53}$$

Πριν συνεχίσουμε, πρέπει από τη $L_{ύλης}$ (41) έως (45), να συμπεριλάβουμε όλους τους όρους αλληλεπίδρασης που περιέχουν το B_μ, όπως είναι λογικό αφού ψάχνουμε ρεύματα που προκύπτουν από τη θεωρία $U_Y(1)$ (της οποίας το μποζόνιο βαθμίδας είναι το B_μ).

Όρος (41)

$$\begin{aligned}
&\bar{Q}^{(i)}_L \gamma^\mu \frac{g_1}{6} B_\mu Q^{(i)}_L = \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{d} \end{pmatrix}_L \gamma^\mu \frac{g_1}{6} B_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \\
&= \frac{g_1}{6}(\bar{u}_L \gamma^\mu B_\mu u_L + \bar{d}_L \gamma^\mu B_\mu d_L) \\
&= \frac{g_1}{6}(\bar{u}_L \gamma^\mu u_L + \bar{d}_L \gamma^\mu d_L) B_\mu
\end{aligned} \tag{54}$$

Όρος (42)

$$\begin{aligned}
&-\bar{\ell}^{(i)}_L \gamma^\mu \frac{g_1}{2} B_\mu \ell^{(i)}_L = \begin{pmatrix} \bar{v}^e & \bar{e} \end{pmatrix}_L \gamma^\mu \frac{g_1}{2} B_\mu \begin{pmatrix} v^e \\ e \end{pmatrix}_L \\
&= -\frac{g_1}{2}(\bar{v}^e_L \gamma^\mu B_\mu v^e_L + \bar{e}_L \gamma^\mu B_\mu e_L) \\
&= -\frac{g_1}{2}(\bar{v}^e_L \gamma^\mu v^e_L + \bar{e}_L \gamma^\mu e_L) B_\mu
\end{aligned} \tag{55}$$

Όρος (43)

$$\begin{aligned}
&-\ell^{(i)}_R \gamma^\mu g_1 B_\mu \ell^{(i)}_R = -g_1 \bar{e}_R \gamma^\mu B_\mu e_R \\
&= -g_1 \bar{e}_R \gamma^\mu e_R B_\mu
\end{aligned} \tag{56}$$

Όρος (44)

$$\begin{aligned}
&\bar{U}^{(i)}_R \gamma^\mu \frac{2}{3} g_1 B_\mu U^{(i)}_R = \frac{2}{3} g_1 \bar{u}_R \gamma^\mu B_\mu u_R \\
&= \frac{2}{3} g_1 \bar{u}_R \gamma^\mu u_R B_\mu
\end{aligned} \tag{57}$$

Όρος (45)

$$\begin{aligned}
&-\bar{D}^{(i)}_R \gamma^\mu \frac{g_1}{3} B_\mu D^{(i)}_R = -\frac{g_1}{3} d_R \gamma^\mu B_\mu d_R \\
&-\frac{g_1}{3} d_R \gamma^\mu d_R B_\mu
\end{aligned} \tag{58}$$

Οπότε, από την (52), η συνολική έκφραση για το ρεύμα $j^{\mu Y}$ είναι:

$$j^{\mu Y} = \frac{1}{2}(\bar{u}_L\gamma^\mu u_L + \bar{d}_L\gamma^\mu d_L - \bar{v}_L^e\gamma^\mu v_L^e - \bar{e}_L\gamma^\mu e_L$$
$$- 2\bar{e}_R\gamma^\mu e_R + \frac{4}{3}\bar{u}_R\gamma^\mu u_R - \frac{2}{3}\bar{d}_R\gamma^\mu d_R) \qquad (59)$$

Επίσης, πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (34) από αριστερά επί U, βρίσκουμε δυο χρήσιμες εκφράσεις των πεδίων 6αθμίδας W^3_μ,B_μ συναρτήσει των φυσικών πεδίων Z_μ, A_μ:

$$\begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix} = U^{-1}\begin{pmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{pmatrix} = U\begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$W^3_\mu = \cos\theta Z_\mu + \sin\theta A_\mu$$
$$B_\mu = -\sin\theta Z_\mu + \cos\theta A_\mu \qquad (60)$$

Αν αντικαταστήσουμε τις δυο παραπάνω εκφράσεις των πεδίων 6αθμίδας στην (52), τότε θα πάρουμε:

$$\mathcal{L}_{unch} = g_2 j^{\mu 3}(\cos\theta Z_\mu + \sin\theta A_\mu) + \frac{g_1}{2}j^{\mu Y}(-\sin\theta Z_\mu + \cos\theta A_\mu)$$
$$= (g_2 j^{\mu 3}\sin\theta + \frac{g_1}{2}j^{\mu Y}\cos\theta)A_\mu + (g_2 j^{\mu 3}\cos\theta - \frac{g_1}{2}j^{\mu Y}\sin\theta)Z_\mu \qquad (61)$$

Επειδή το A_μ αποτελεί το πεδίο του φωτονίου, οι εκφράσεις $g_2\sin\theta j^{\mu 3}$ και $g_1\cos\theta$ θα πρέπει να συμπίπτουν με την έκφραση $ej^{\mu 3}A_\mu$ του ηλεκτρομαγνητισμού που δίνει την αλληλεπίδραση ενός ηλεκτρονιακού ρεύματος με ένα φωτόνιο. Ταυτοποιώντας παίρνουμε ότι:

$$e = g_2\sin\theta = g_1\cos\theta \qquad (62)$$

κι έτσι η (52) γίνεται μέσω της (62):

$$\mathcal{L}_{unch} = (ej^{\mu 3} + \frac{e}{2}j^{\mu Y})A_\mu + \frac{g_2}{\cos\theta}\left(\cos^2\theta j^{\mu 3} - \frac{\sin^2\theta}{2}j^{\mu Y}\right)Z_\mu \qquad (63)$$

Ταυτοποιώντας λοιπόν την εξίσωση (63) με τη Λαγκρανζιανή των ουδέτερων ρευμάτων στη φυσική βάση της εξίσωσης (53) βρίσκουμε δυο εκφράσεις για το ουδέτερο και το ηλεκτρομαγνητικό ρεύμα.

$$j^\mu_{em} = j^{\mu 3} + \frac{1}{2}j^{\mu Y} \qquad (64)$$

$$j^\mu_o = \cos^2\theta j^{\mu 3} - \frac{\sin^2\theta}{2}j^{\mu Y} \qquad (65)$$

Λύνοντας την (64) ως προς το $j^{\mu Y}$, η (65) γίνεται:

$$j_o^\mu = \cos^2\theta j^{\mu 3} - \frac{\sin^2\theta}{2} 2(j_{em}^\mu - j^{\mu 3}) \Rightarrow$$
$$j_o^\mu = \cos^2\theta j^{\mu 3} - \sin^2\theta j_{em}^\mu + \sin^2\theta j^\mu 3 \Rightarrow$$
$$j_o^\mu = j^{\mu 3} - \sin^2\theta j_{em}^\mu \qquad (66)$$

Οπότε, έχουμε βρει δύο εξισώσεις για το αφόρτιστο ρεύμα, τις (65) και (66). Τέλος, αν αντικαταστήσουμε στην (65) τα αποτελέσματα (49) και (59) βρίσκουμε το ουδέτερο ρεύμα που αντιστοιχεί :

$$j_0^\mu = \frac{\cos^2\theta}{2}(\bar{v}_L^e \gamma^\mu v_L^e - \bar{e}_L \gamma^\mu e_L + \bar{u}_L \gamma^\mu u_L + \bar{d}_L \gamma^\mu d_L)$$
$$- \frac{\sin^2\theta}{4}(\bar{u}_L \gamma^\mu u_L + \bar{d}_L \gamma^\mu d_L - \bar{v}_L^e \gamma^\mu v_L^e - \bar{e}_L \gamma^\mu e_L$$
$$- 2\bar{e}_R \gamma^\mu e_R + \frac{4}{3}\bar{u}_R \gamma^\mu u_R - \frac{2}{3}\bar{d}_R \gamma^\mu d_R) \qquad (67)$$

Ανακεφαλαιώνοντας, από τη Λαγκρανζιανή που αποτελείται από τους κινητικούς όρους των φερμιονίων καταφέραμε να βρούμε τα φορτισμένα και τα ουδέτερα ρεύματα που δημιουργούνται λόγω της ηλεκτρασθενούς αλληλεπίδρασης.

Τέλος, από τον όρο (6) της συνολικής Λαγκρανζιανής (1), θα δούμε τον τρόπο με τον οποίο αποκτούν μάζα τα φερμιόνια στο καθιερωμένο πρότυπο. Η διαδικασία είναι παρόμοια με αυτή όπου τα μποζόνια λαμβάνουν τη μάζα δηλαδή, θα χρησιμοποιήσουμε το μηχανισμό Higgs. Έτσι μετά το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας $SU(2)_L$ x $U(1)_Y$ θα ανακύψουν οι όροι μάζας των φερμιονίων.

Η μορφή των όρων αλληλεπίδρασης φερμιονίων-βαθμωτών πεδίων είναι γνωστή σαν αλληλεπίδραση Yukawa, και οι σταθερές σαν σταθερές ζεύξης Yukawa. Έτσι, για την πρώτη οικογένεια λεπτονίων (ομοίως και για τις άλλες δύο), χρησιμοποιώντας πάλι τη γνωστή διπλέτα (7) για το βαθμωτό πεδίο, γράφουμε τη Λαγκρανζιανή:

$$\mathcal{L}_{Yuk}^\ell = f_e^{(11)} \left[\begin{pmatrix} \bar{v}^e & \bar{e} \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^o \end{pmatrix} e_R + \bar{e}_R \begin{pmatrix} \phi^- & \bar{\phi}^o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^e \\ e \end{pmatrix}_L \right] \qquad (68)$$

Ακολουθούμε τη γνωστή διαδικασία ελαχιστοποίησης του δυναμικού για την εύρεση του νέου κενού και μετά το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας παίρνουμε μια διαταραχή H(x) - το φυσικό πεδίο Higgs – γύρω από την αναμενόμενη τιμή του κενού υ. Το πεδίο μας θα είναι τώρα:

$$\phi_o = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \upsilon \end{pmatrix} \Rightarrow \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \upsilon + H(x) \end{pmatrix} \qquad (69)$$

Συνεπώς, αντικαθιστώντας το διαταραγμένο πεδίο φ, στη Λαγκρανζιανή (68), θα καταλήξουμε στην εξαγωγή όρου μάζας:

$$\mathcal{L}^{\ell}_{Yuk} = \frac{f_e^{(11)}}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} \bar{v}^e & \bar{e} \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} 0 \\ v+H \end{pmatrix} e_R + \bar{e}_R \begin{pmatrix} 0 & v+H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^e \\ e \end{pmatrix}_L \right]$$
$$= \frac{f_e^{(11)}}{\sqrt{2}} \left[\bar{e}_L (v+H) e_R + \bar{e}_R (v+H) e_L \right]$$
$$= \frac{f_e^{(11)}}{\sqrt{2}} v \left[\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L \right] + \frac{f_e^{(11)}}{\sqrt{2}} H \left[\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L \right] \tag{70}$$

Ο πρώτος όρος της παραπάνω εξίσωσης (70) είναι όρος μάζας και προκύπτει:

$$m_e = \frac{f_e^{(11)} v}{\sqrt{2}} \tag{71}$$

Αν θεωρήσουμε ότι:

$$m_e \bar{e} e = m_e (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L)$$

τότε το παραπάνω αποτέλεσμα γράφεται:

$$\mathcal{L}^{\ell}_{Yuk} = m_e \bar{e} e + \frac{m_e}{v} m_e \bar{e} e H \tag{72}$$

Ο δεύτερος όρος της τελευταίας εξίσωσης (72) παρουσιάζει μια σύζευξη του ηλεκτρονίου με το βαθμωτό πεδίο Higgs. Επειδή όμως η σταθερά σύζευξης m_e/v είναι πολύ μικρή, συνεπώς δε παράγει κάποιο ανιχνεύσιμο φαινόμενο στις ηλεκτρασθενείς αλληλεπιδράσεις. Αντίστοιχα αποτελέσματα θα προκύπτουν και για τις άλλες δύο οικογένειες λεπτονίων (για την ακρίβεια για τα άλλα δύο φορτισμένα λεπτόνια).

Οι μάζες των κουάρκ αναδεικνύονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως αυτές των φορτισμένων λεπτονίων. Αρχικά θα ασχοληθούμε με την παραγωγή μάζας των κάτω στοιχείων των οικογενειών των κουάρκ (d, s, b) και έπειτα με την παραγωγή μάζας των (u, c, t), αφού για αυτή την περίπτωση πρέπει να σημειώσουμε κάποια αλλαγή.

$$\mathcal{L}^{d}_{Yuk} = f_d^{(11)} \left[\begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{d} \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^o \end{pmatrix} d_R + \bar{d}_R \begin{pmatrix} \phi^- & \bar{\phi}^o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \right] \tag{73}$$

Μετά το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας προκύπτουν οι μάζες των κουάρκ με την αρνητική συνιστώσα (−1/2) ισοσπίν, επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία από την οποία προέκυψε η μάζα του ηλεκτρονίου στην ακριβώς προηγούμενη περίπτωση. Οπότε:

$$\mathcal{L}^{d}_{Yuk} = \frac{f_d^{(11)}}{\sqrt{2}} v \left[\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L \right] + \frac{f_d^{(11)}}{\sqrt{2}} H \left[\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L \right] \tag{74}$$

Πάλι, ο πρώτος όρος μας δίνει τη μάζα του d κουάρκ:

$$m_d = \frac{f_d^{(11)} v}{\sqrt{2}} \tag{75}$$

Επομένως, η (74) γράφεται στη μορφή:

$$\mathcal{L}^{d}_{Yuk} = m_d \bar{d}d + \frac{m_d}{v}\bar{d}dH \qquad (76)$$

Τα κουάρκ με θετική συνιστώσα ισοσπίν αποκτούν μάζα με τον ίδιο μηχανισμό μόνο που εδώ εισέρχεται ένα νέο στοιχείο. Για τη δημιουργία μάζας των κουάρκ u, c, t, μέσω του πεδίου ϕ, φτιάχνουμε μια νέα διπλέτα για πεδίο Higgs.

$$\tilde{\phi} = i\tau_2\phi^* = i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi^{+*} \\ \phi^{o*} \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \phi_1 - i\phi_2 \\ \phi_3 - i\phi_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \phi_1 - i\phi_2 \\ \phi_3 - i\phi_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \phi_3 - i\phi_4 \\ -(\phi_1 - i\phi_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\phi}^o \\ -\phi^- \end{pmatrix} \qquad (77)$$

Το πεδίο μετασχηματίζεται κάτω από τους $SU(2)_L$ x $U(1)_Y$ μετασχηματισμούς με τον ίδιο ακριβώς τρόπο αλλά με τη μόνη διαφορά ότι έχει αντίθετο ασθενές υπερφορτίο, Y = −1. Γι' αυτό και μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να χτίσουμε μια gauge-αναλλοίωτη συνεισφορά στη Λαγκρανζιανή. Κατασκευάζουμε λοιπόν τη Λαγκρανζιανή από όπου θα πάρουμε τις μάζες των u, c, t κουαρκ και μετά το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{u}_{Yuk} &= f_u^{(11)}\left[\begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{d} \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} \bar{\phi}^o \\ -\phi^- \end{pmatrix} u_R + \bar{u}_R \begin{pmatrix} \phi^o & -\phi^+ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L\right] \\
&= \frac{f_u^{(11)}}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{d} \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} v+H \\ 0 \end{pmatrix} u_R + \bar{u}_R \begin{pmatrix} v+H & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L\right] \\
&= \frac{f_u^{(11)}v}{\sqrt{2}}\left[\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L\right] + \frac{f_u^{(11)}}{\sqrt{2}}\left[\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L\right]H
\end{aligned} \qquad (78)$$

Συνεπώς, ο όρος μάζας προκύπτει:

$$m_u = \frac{f_u^{(11)}v}{\sqrt{2}} \qquad (79)$$

και η παραπάνω Λαγκρανζιανή (78) θα είναι:

$$\mathcal{L}^{u}_{Yuk} = m_u \bar{u}u + \frac{m_u}{v}\bar{u}uH \qquad (80)$$

Συμπερασματικά, η συνολική Λαγκρανζιανή των φερμιονίων των οικογενειών

$$f_{e^-L} = \begin{pmatrix} v^e \\ e^- \end{pmatrix}_L \quad f_{uL} = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \qquad (81)$$

θα είναι

$$\mathcal{L}_{f,H} = m_e \bar{e}e + m_d \bar{d}d + m_u \bar{u}u + \frac{m_e}{v}\bar{e}eH + \frac{m_d}{v}\bar{d}dH + \frac{m_u}{v}\bar{u}uH \qquad (82)$$

Οι σταθερές σύζευξης $f^{(11)}_{\ell}$, $f^{(11)}_{d}$, $f^{(11)}_{u}$, οι οποίες εμπλέκονται στις εκφράσεις των μαζών είναι αυθαίρετες, επομένως οι μάζες δεν μπορούν να προβλεφθούν. Επίσης οι όροι στις Λαγκρανζιανές που υποδεικνύουν την αλληλεπίδραση των φερμιονίων με το πεδίο Higgs συζευγνύονται με σταθερά η οποία εξαρτάται από τη μάζα. Συνεπώς, είναι προφανές ότι α βαρύτερα φερμιόνια αλληλεπιδρούν ισχυρότερα με το βαθμωτό πεδίο H.

7.7. Το Καθιερωμένο Πρότυπο

Το Καθιερωμένο Πρότυπο είναι μια θεωρία που περιγράφει τις ισχυρές, ασθενείς και ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις, όπως και τα στοιχειώδη σωματίδια από τα οποία αποτελείται η ύλη. Αναπτύχθηκε ανάμεσα στην περίοδο 1970 - 1973 και είναι ουσιαστικά μια κβαντική θεωρία πεδίου, η οποία στηρίζεται στην κβαντική μηχανική και στην ειδική θεωρία της σχετικότητας. Μέχρι σήμερα, σχεδόν όλα τα πειραματικά τεστ πάνω στις τρεις αλληλεπιδράσεις που περιγράφονται από το Καθιερωμένο Πρότυπο, συμφωνούν με τις θεωρητικές προβλέψεις. Όμως, το Καθιερωμένο Πρότυπο δεν είναι μια πλήρης θεωρία στοιχειωδών αλληλεπιδράσεων, κυρίως επειδή δεν περιγράφει την βαρυτική αλληλεπίδραση. Παρ' όλες τις επιτυχίες της, η θεωρία αυτή δεν μπορεί να εξηγήσει την ύπαρξη σκοτεινής ύλης, τις ταλαντώσεις νετρίνων και την ύπαρξη σωματιδίων με πολύ διαφορετικές μάζες.

Το καθιερωμένο πρότυπο είναι μια θεωρία για τα αδρόνια (κουάρκ) και τα λεπτόνια (ηλεκτρόνια, νετρίνα) που αλληλεπιδρούν ανταλλάσσοντας γλουόνια, μποζόνια Z και W, φωτόνια. Υπάρχουν 3 πανομοιότυπα αντίγραφα στοιχειωδών σωματιδίων (γενιές). Αν εξαιρέσει κανείς τις μάζες τους, οι τρεις γενιές δεν διαφέρουν καθόλου μεταξύ τους.

Η έννοια της συμμετρίας παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στο καθιερωμένο πρότυπο. Έτσι, όσον αφορά την ηλεκτρομαγνητική δύναμη έχουμε την ομάδα συμμετρίας U(1). Αυτή η ομάδα συμμετρίας επιτρέπει την εναλλαγή των συνιστωσών που εκφράζουν την πολικότητα του φωτός. Στην ασθενή αλληλεπίδραση αντιστοιχεί η ομάδα συμμετρίας SU(2). Αν έχουμε δυο λεπτόνια, το ηλεκτρόνιο και το νετρίνο και τα εναλλάξουμε σε μια εξίσωση, τότε έχουμε συμμετρία SU(2). Η ισχυρή δύναμη βασίζεται σε 3 κουάρκ τα οποία οι φυσικοί τα ξεχωρίζουν δίνοντας στο καθένα ένα φανταστικό «χρώμα». Οι εξισώσεις παραμένουν οι ίδιες όταν εναλλάσσονται οι 3 τύποι έγχρωμων κουάρκ και λέμε ότι έχουν συμμετρία SU(3).

Από την ένωση αυτών των τριών θεωριών προκύπτει η συμμετρία SU(3) x SU(2) x U(1), δηλαδή η συμμετρία που επιτρέπει την ανάμειξη μεταξύ 3 κουάρκ και την ανάμειξη μεταξύ 2 λεπτονίων (χωρίς όμως να αναμειγνύει κουάρκ με λεπτόνια). Η θεωρία που προκύπτει είναι το καθιερωμένο πρότυπο, μια από τις πιο επιτυχημένες θεωρίες όλων των εποχών.

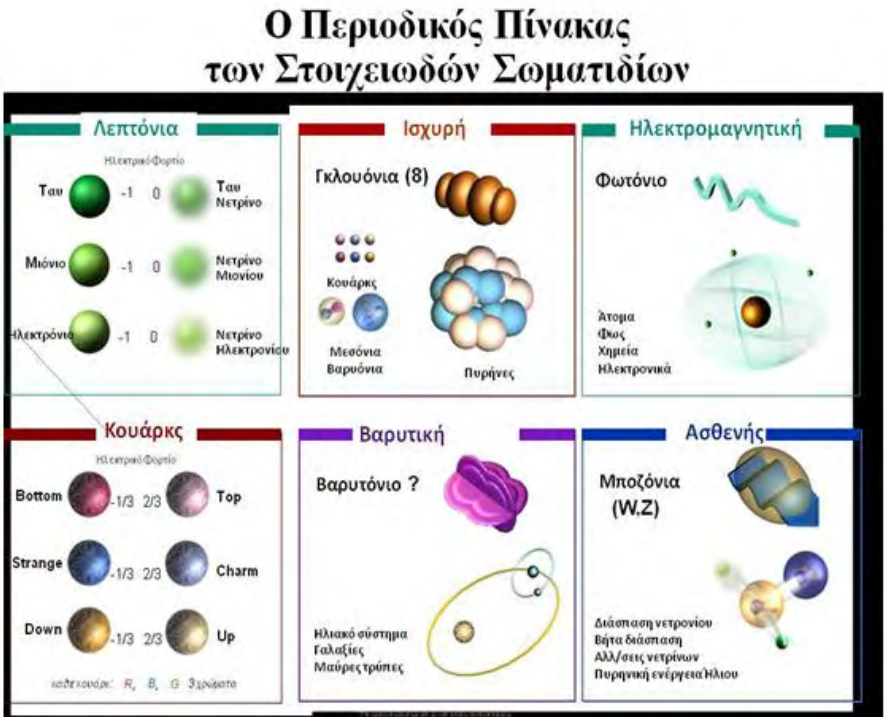
Το καθιερωμένο πρότυπο, ενώ συμφωνεί με το σύνολο των πειραματικών δεδομένων, περιλαμβάνει 19 αυθαίρετες παραμέτρους (οι μάζες και οι σταθερές σύζευξης), που εισήχθησαν εμβόλιμα, χωρίς να προκύπτουν λογικά από τη θεωρία. Ο ηλεκτρομαγνητισμός γενικότερα είναι από τις πλέον ολοκληρωμένες θεωρίες της φυσικής τόσο σε κλασικό επίπεδο όσο και στην κβαντομηχανική του θεώρηση. Όσον αφορά την βαρυτική αλληλεπίδραση ο

φορέας είναι το γκραβιτόνιο. Αυτή η αλληλεπίδραση είναι και η ασθενέστερη και για τον λόγο αυτό, δεν παίζει κανέναν ρόλο στην φυσική στοιχειωδών σωματιδίων. Η ασθενής αλληλεπίδραση παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον μια και όπως και η ισχυρή διαθέτει πολύ μικρή εμβέλεια και παίζει σημαντικό ρόλο στην αποδιέγερση ασταθών πυρηνικών συστημάτων και πολλών σωματιδίων (όπως για παράδειγμα η αποδιέγερση των παράδοξων σωματιδίων). Σε αντίθεση όμως με την ισχυρή αλληλεπίδραση η ασθενής αλληλεπίδραση δεν διαμορφώνει δέσμιες καταστάσεις οπότε δεν υπάρχει κάποιο ασφαλές κριτήριο προσδιορισμού της εμβέλειας της αλληλεπίδρασης. Για τον λόγο αυτό η πρόβλεψη της μάζας του αντίστοιχου φορέα δεν μπορεί να γίνει με την μέθοδο του Yukawa. Έτσι πολλά χρόνια η επιστημονική κοινότητα επιδόθηκε σε έναν αγώνα για τον προσδιορισμό της μάζας των φορέων της ασθενούς αλληλεπίδρασης όπου τελικά προβλέφθηκε με εξαιρετική ακρίβεια μέσω της θεωρίας ενοποίησης των ηλεκτρομαγνητικών και των ασθενών αλληλεπιδράσεων. Ο θεωρητικός προσδιορισμός της μάζας των ενδιάμεσων μποζονίων W και Z που αποτελούν τους φορείς της ασθενούς αλληλεπίδρασης είναι από τα ομορφότερα παραδείγματα συμφωνίας θεωρίας και πειράματος. Μετά από αρκετά χρόνια ο Carlo Rubbia και η ομάδα του επιβεβαίωσαν πλήρως τις θεωρητικά προβλεπόμενες μάζες των ενδιάμεσων μποζονίων κερδίζοντας παράλληλα το βραβείο Nobel. Για τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις η πρόβλεψη του Yukawa ήταν ότι τα πρωτόνια και τα νετρόνια αλληλεπιδρούν μέσω της ισχυρής αλληλεπίδρασης με αντίστοιχο φορέα τα μεσόνια π. Με την ανακάλυψη και την τελική παραδοχή όμως ότι τα νετρόνια και τα πρωτόνια δεν είναι πλέον στοιχειώδη σωμάτια αλλά τα ίδια αποτελούνται από δέσμιες καταστάσεις των κουάρκ διατυπώθηκε ένα εύλογο ερώτημα. Ποιο είναι εκείνο το σωματίδιο το οποίο είναι ο φορέας της ισχυρής αλληλεπίδρασης και ανταλλάσσεται μεταξύ των κουάρκ; Ο φορέας λοιπόν αυτός είναι το γλουόνιο. Τα γλουόνια μεταφέρουν χρώμα και για τον λόγο αυτό όπως και τα κουάρκ δεν μπορούν να υπάρξουν ως ελεύθερα σωματίδια. Μπορούν όμως να υπάρξουν ως άχρωμες μπάλες γλουονίων αλλά και μέσα στα αδρόνια (αδρόνια είναι τα σωματίδια εκείνα τα οποία αποτελούνται από κουάρκ δηλαδή, τα μεσόνια και τα βαρυόνια).

Πέραν των φορέων των αλληλεπιδράσεων σύμφωνα με το καθιερωμένο πρότυπο η ύλη αποτελείται από λεπτόνια και κουάρκς. Στο σχήμα 3 υπάρχει ένας συνοπτικός πίνακας των λεπτονίων όπου παρουσιάζονται οι κβαντικοί αριθμοί και το φορτίο τους. Τα αντίστοιχα αντισωμάτια έχουν αντίθετους κβαντικούς αριθμούς και προφανώς αντίθετο φορτίο. Δεδομένου ότι ο παρακάτω πίνακας περιέχει έξι λεπτόνια χωρισμένα σε τρεις διαφορετικές γενιές αυτό σημαίνει ότι αν λάβουμε υπόψη και τα αντισωμάτια τότε έχουμε συνολικά 12 λεπτόνια.

Όπως και στην περίπτωση των λεπτονίων έτσι και για τα κουάρκ υπάρχουν έξι “γεύσεις” και αντίστοιχα τρεις γενιές από αυτά. Τα αντικουάρκ έχουν αντίθετο πρόσημο στο φορτίο αλλά και αντίθετο πρόσημο στους υπόλοιπους κβαντικούς αριθμούς. Ένα επιπλέον χαρακτηριστικό που παρουσιάζουν τα κουάρκ είναι ο κβαντικός αριθμός του χρώματος. Έτσι

έχουμε 6 κουάρκ. Αν λάβουμε υπόψη τα αντίστοιχα αντισωμάτια έχουμε 12 και τέλος λαμβάνοντας υπόψη ότι για κάθε κουάρκ ή αντικουάρκ έχουμε τρία χρώματα αυτό μας κάνει συνολικά 36 διαφορετικά κουάρκ.



Σχήμα 3: Περιοδικός Πίνακας στοιχειωδών σωματιδίων

Στα παραπάνω στοιχειώδη σωματίδια θα πρέπει να προστεθούν και οι δώδεκα φορείς αλληλεπιδράσεων (σχήμα 4). Στα 60 αυτά σωματίδια θα πρέπει να προστεθεί και το σωματίδιο Higgs το οποίο είναι θεμελιώδους σημασίας για την επιβίωση του καθιερωμένου προτύπου. Είναι μάλιστα ένας από τους σημαντικούς λόγους για τους οποίους χτίστηκε το LHC στο CERN. Αρκεί και μόνο να αναφερθεί ότι ο μηχανισμός του καθιερωμένου προτύπου που προσδίδει τις παρατηρούμενες μάζες στα μέχρι τώρα γνωστά στοιχειώδη σωμάτια προϋποθέτει την ύπαρξη του σωματιδίου Higgs. Προς το παρόν πάντως το καθιερωμένο πρότυπο είναι ένα ευρέως αποδεκτό μοντέλο της φυσικής στοιχειωδών σωματιδίων για το οποίο όμως ακόμα και σήμερα υπάρχουν σημαντικά περιθώρια βελτίωσης επομένως θα μπορούσε κανείς να πει ότι πρόκειται σαφώς για ένα πετυχημένο μοντέλο αλλά σίγουρα δεν έχουν κλείσει όλα τα θέματα στην φυσική υψηλών ενεργειών με το καθιερωμένο πρότυπο.

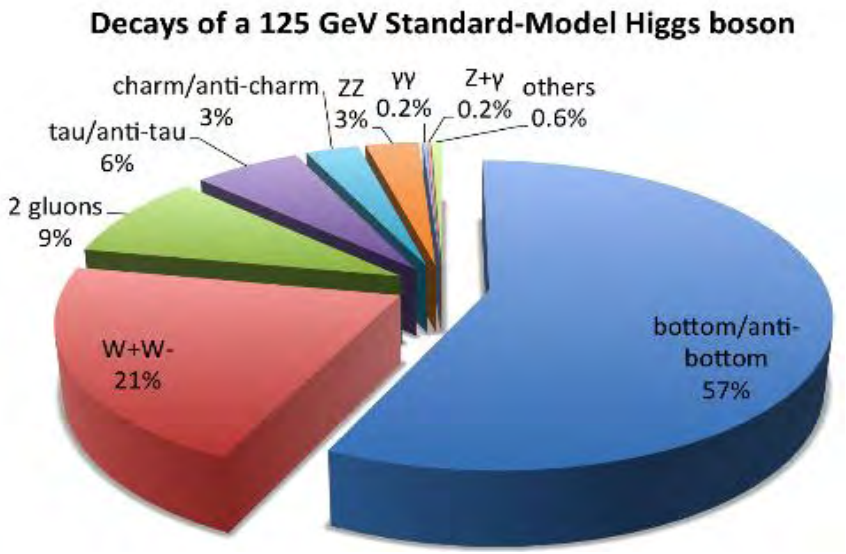
PROPERTIES OF THE INTERACTIONS

Property \ Interaction	Gravitational	Weak (Electroweak)	Electromagnetic (Electroweak)	Strong: Fundamental	Strong: Residual
Acts on:	Mass – Energy	Flavor	Electric Charge	Color Charge	See Residual Strong Interaction Note
Particles experiencing:	All	Quarks, Leptons	Electrically charged	Quarks, Gluons	Hadrons
Particles mediating:	Graviton (not yet observed)	W^+ W^- Z^0	γ	Gluons	Mesons
Strength relative to electromag for two u quarks at: 10^{-18} m	10^{-41}	0.8	1	25	Not applicable to quarks
Strength relative to electromag for two u quarks at: 3×10^{-17} m	10^{-41}	10^{-4}	1	60	
for two protons in nucleus	10^{-36}	10^{-7}	1	Not applicable to hadrons	20

Σχήμα 4: Οι 12 φορείς των αλληλεπιδράσεων

Το μποζόνιο Higgs είναι το μοναδικό σωματίδιο του Καθιερωμένου Πρότυπου που δεν έχει πλήρως ταυτοποιηθεί. Παρ' όλα αυτά, τον Ιούλιο του 2012, τα πειράματα ATLAS και CMS ανακοίνωσαν την ανακάλυψη ενός νέου μποζονίου με μάζα στην περιοχή των 125 GeV, το οποίο φαίνεται να είναι συμβατό με το αναζητούμενο Higgs [309-311].

Το Καθιερωμένο Πρότυπο δεν προσδιορίζει την μάζα του μποζονίου του Higgs. Βέβαια, για κάθε τιμή μάζας, το Πρότυπο προβλέπει την πιθανότητα παραγωγής του σε συγκρούσεις καθώς και τον τρόπο και τη πιθανότητα που το μποζόνιο Higgs διασπάται σε άλλα σωματίδια. Το παρακάτω διάγραμμα συνοψίζει την πιθανότητα που ένα σωματίδιο Higgs με μάζα 125 GeV διασπάται σε διάφορα γνωστά σωματίδια.



Σχήμα 5: Διάσπαση σωματιδίου Higgs

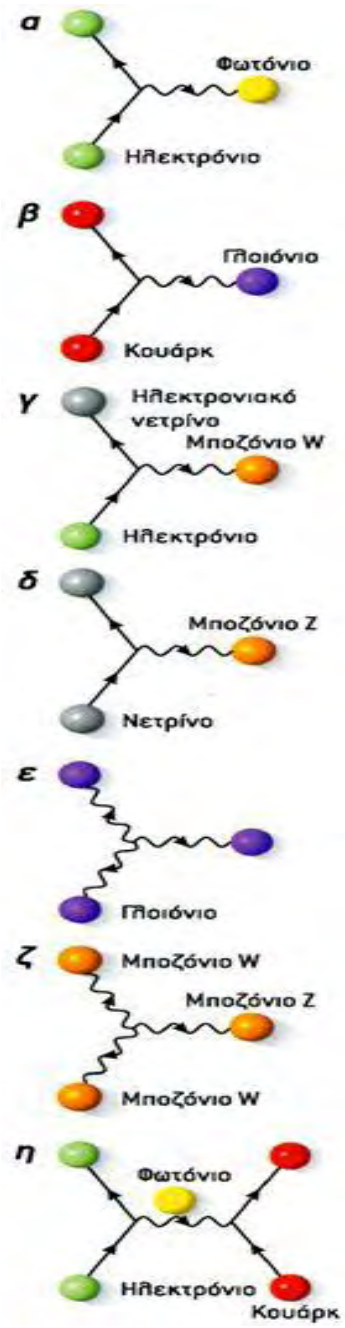
Ένα τόσο βαρύ σωματίδιο, βαρύτερο και από το Z ,έχει ένα πολύ μικρό χρόνο ζωής και επομένως διανύει πολύ μικρό διάστημα. Επομένως, η άμεση παρατήρησή του από τον ανιχνευτή ATLAS (και οποιονδήποτε άλλον ανιχνευτή) είναι αδύνατη.

Το σωματίδιο Higgs παράγεται κατά την διάρκεια των συγκρούσεων υψηλής ενέργειας στον επιταχυντή LHC. Τα πειράματα ATLAS και CMS έχουν παρατηρήσει διασπάσεις του Higgs (i) σε 2 σωματίδια Z, που με τη σειρά τους διασπώνται σε δύο ζευγάρια φορτισμένων λεπτονίων, (ii) σε δύο φωτόνια και (iii) σε δύο σωματίδια W που διασπώνται σε δύο φορτισμένα λεπτόνια και δύο νετρίνο. Η ανακάλυψη στο CERN μιλάει για "σωματίδιο συμβατό με το Higgs" και όχι για το σωματίδιο Higgs! Ο λόγος είναι καθαρά επιστημονικός. Παρ' όλο που έχουν παρατηρηθεί διασπάσεις σε ZZ, W^+W^- και γγ, δεν έχουν παρατηρηθεί ακόμα διασπάσεις σε λεπτόνια και κουάρκ, και πιο συγκεκριμένα σε ζεύγος κουάρκ b και λεπτονίων

Αλλά γιατί παρατηρούμε μια τόσο "σπάνια" διάσπαση, όπως H→γγ (με πιθανότητα 0.2%), και μια πιο "συχνή" όπως όχι H → b /αντί -b (με πιθανότητα 57%); Στην τελευταία, τα δύο κουάρκ οδηγούν σε δύο πίδακες σωματιδίων που είναι πολύ δύσκολο να διακριθούν από το πλήθος παρόμοιων πιδάκων που παράγονται από τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις.

7.8. Πέραν του Καθιερωμένου Προτύπου

Το καθιερωμένο πρότυπο επεκτείνει την κλασική έννοια της δύναμης: τα σωματίδια εκτός από το να απωθούνται και να έλκονται μεταξύ τους, όταν έρχονται σε αλληλεπίδραση μπορούν να μεταβάλλουν την ταυτότητά τους ή ακόμη και να δημιουργούνται ή να καταστρέφονται. Στα διαγράμματα Feynman οι ευθείες γραμμές παριστάνουν τις τροχιές των σωματιδίων ύλης, ενώ οι κυματιστές γραμμές τις τροχιές σωματιδίων πεδίου.



(α) → Το εισερχόμενο ηλεκτρόνιο εκπέμπει ένα φωτόνιο και απομακρύνεται κινούμενο προς άλλη κατεύθυνση.

(β) → Η ισχυρή δύναμη συνδέεται με την εκπομπή (και απορρόφηση) γλουονίων από κουάρκ.

(γ),(δ) → Η ασθενής δύναμη προκαλείται από την ανταλλαγή σωματιδίων W και Z, που εκπέμπονται και απορροφούνται, τόσο από τα κουάρκ όσο και από τα λεπτόνια [δηλαδή από τα ηλεκτρόνια, μιόνια, ταυ και τα αντίστοιχά τους νετρίνα].

(ε),(ζ) → Τα γλουόνια αλληλεπιδρούν και μεταξύ τους και το ίδιο ισχύει και για τα μποζόνια W και Z. Αντίθετα τα φωτόνια αλληλεπιδρούν μόνο με τα σωματίδια ύλης.

Τα διαγράμματα (α) έως (ζ) ονομάζονται κορυφές αλληλεπίδρασης. Οι δυνάμεις παράγονται με το συνδυασμό δύο ή περισσότερων τέτοιων κορυφών.

(η) → Η ηλεκτρομαγνητική δύναμη μεταξύ ενός ηλεκτρονίου και ενός κουάρκ κατά μεγάλο μέρος παράγεται από την ανταλλαγή ενός φωτονίου.

Η επέκταση του καθιερωμένου προτύπου που συγκεντρώνει τις προτιμήσεις των περισσότερων σωματιδιακών φυσικών είναι το Ελάχιστο Υπερσυμμετρικό Καθιερωμένο Πρότυπο (ΕΥΚΠ). Η υπερσυμμετρία επισυνάπτει σε κάθε είδος σωματιδίων έναν υπερσυμμετρικό σύντροφο. Αν και για τις μάζες αυτών των υπερσυντρόφων είναι ελάχιστα γνωστά, λόγω της υπερσυμμετρίας οι αλληλεπιδράσεις τους υπόκεινται σε στενότατους περιορισμούς. Άπαξ και μετρηθούν οι μάζες, οι πειραματικές προβλέψεις του ΕΥΚΠ θα

υπόκεινται σε ακόμη στενότερους περιορισμούς από εκείνες του καθιερωμένου προτύπου λόγω των μαθηματικών σχέσεων που επιβάλλει στη θεωρία η υπερσυμμετρία.

Στην συνέχεια απαριθμούνται οι λόγοι που καθιστούν επιβεβλημένη την επέκταση του καθιερωμένου προτύπου:

1. Το καθιερωμένο πρότυπο δεν μπορεί να συμπεριλάβει την βαρύτητα, διότι δεν υπάρχει συνεπής κβαντική θεωρία της βαρύτητας ανάλογη με εκείνες των υπολοίπων δυνάμεων.
2. Οι τιμές των μαζών των κουάρκ και των λεπτονίων αποκλείεται να εξηγηθούν στα πλαίσια του Καθιερωμένου προτύπου.
3. Το καθιερωμένο πρότυπο έχει 3 «γενιές» σωματιδίων. Ο κόσμος της καθημερινής εμπειρίας αποτελείται εξ ολοκλήρου από σωματίδια της 1ης γενιάς, και αυτή η γενιά φαίνεται να συνιστά μια συνεπή θεωρία. Το καθιερωμένο πρότυπο περιγράφει και τις 3 γενιές σωματιδίων, αδυνατεί όμως να εξηγήσει γιατί αυτές είναι περισσότερες από μία.
4. Η συμμετρία που συνδέει την ύλη και την αντιύλη είναι η συμμετρία CP, δηλ. η συμμετρία ως προς συνδυασμένους μετασχηματισμούς συζυγίας φορτίου και αναστροφής χώρου. Αν το σύμπαν άρχισε με τη Μεγάλη Έκρηξη, θα έπρεπε να εξελιχθεί έτσι ώστε η ύλη να είναι ισόποση με την αντιύλη. Την ασυμμετρία που παρατηρούμε σήμερα στο σύμπαν που αποτελείται σχεδόν εξολοκλήρου από ύλη, το καθιερωμένο πρότυπο αδυνατεί να εξηγήσει.
5. Αδυνατεί να εξηγήσει τις ειδικές μορφές που έχουν οι αλληλεπιδράσεις του πεδίου Higgs. Επίσης, οι κβαντικές διορθώσεις φαίνεται ότι κάνουν την υπολογιζόμενη μάζα του μποζονίου Higgs τεράστια, κάτι που με τη σειρά του θα έκανε τεράστιες και όλες τις μάζες των υπολοίπων σωματιδίων, οπότε αναφύεται ένα εννοιολογικό πρόβλημα.
6. Δεν εξηγεί τον πληθωρισμό, αφού αποκλείεται να ευθύνονται γι' αυτόν τα πεδία του καθιερωμένου προτύπου.
7. Το σύμπαν πρέπει να περιέχει τρομερή συγκέντρωση ενέργειας, ακόμη και στις πιο άδειες περιοχές του χώρου. Η βαρυτική έλξη αυτής της λεγόμενης ενέργειας του κενού θα έπρεπε να είχε προσδώσει στο σύμπαν αισθητή καμπυλότητα. Τον γρίφο αυτό που ονομάζεται πρόβλημα κοσμολογικής σταθεράς αδυνατεί να προσεγγίσει το καθιερωμένο πρότυπο.
8. Πιστευόταν επί μακρόν ότι η διαστολή του σύμπαντος επιβραδύνεται λόγω της αμοιβαίας βαρυτική έλξης όλης της ύλης του σύμπαντος. Εντούτοις, γνωρίζουμε πλέον ότι στην πραγματικότητα η διαστολή βαίνει επιταχυνόμενη, και πως οτιδήποτε κι αν προκαλεί αυτή την επιτάχυνση («σκοτεινή ενέργεια»)δεν μπορεί να έχει καμία σχέση με τη φυσική του καθιερωμένου προτύπου.
9. Το σύμπαν αποτελείται κατά μεγάλο ποσοστό από αόρατη ψυχρή σκοτεινή ύλη, η οποία αποκλείεται να συνίσταται από σωματίδια του καθιερωμένου προτύπου.

Παραπομπές

1. Einstein, A. (1905) Ann. Phys. Lpz. 417, 132.
2. Dirac, P.A.M. Proc. Roy. Soc. 1927, 117A, 610.
3. Dirac, P.A.M. Proc. Roy. Soc. 1928, 118A, 351.
4. Dirac, P.A.M., The Principles of Quantum Mechanics, Clarendon Press: Oxford, 1958.
5. Dirac, P. A. M. (1930). "A Theory of Electrons and Protons". Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 126 (801): 360.
6. Anderson, C.D. Phys. Rev. 1933, 43, 491.
7. Anderson, C.D.; Neddermeyer, S.H. Phys. Rev. 1933, 43, 1034.
8. Anderson, C.D. Phys. Rev. 1934, 45, 498.
9. Anderson, C.D.; Neddermeyer, S.H. Phys. Rev. 1934, 45, 653.
10. Anderson, C.D. Naturwiss. 1934, 22, 293.
11. Kramers, H. A., Heisenberg, W. (1925) Z. Phys. 31, 681.
12. Born, M., Heisenberg, W. and Jordan, P. (1926) Z. Phys. 35, 557.
13. Jordan, P. (1927) Z. Phys. 44, 473.
14. Jordan, P. and Wigner, E. (1928) Z. Phys. 47, 631.
15. Weisskopf, V. and Wigner, E. (1930) Z. Phys. 63, 54.
16. Heisenberg, W. (1931) Ann. Phys. Lpz. 5 9, 338.
17. Jordan, P. and Pauli, W. (1928) Z. Phys. 47, 151.
18. Heisenberg, W. and Pauli, W. (1929) Z. Phys. 56, 1.
19. Rosenfeld, L. (1930) Z. Phys. 63, 574.
20. Heisenberg, W. and Pauli, W. (1930) Z. Phys. 59, 168.
21. Waller, I. (1930) Z. Phys. 62, 673.
22. Oppenheimer, J. R. (1930) Phys. Rev. 35, 461.
23. Oppenheimer, J. R. (1930) Phys. Rev. 35, 562.
24. Dirac, P. A. M., Fock, V. A. and Podolsky, B. (1932) Phys. Z. Sowjet. 2, 468.
25. Pauli, W. (1933) Handbuch der Physik Geiger-Scheel, vol. 24, part 1, pp. 255 – 256.
26. Bohr, N. and Rosenfeld, L. (1933) K. danske vidensk. Selsk., Math.-Fys. Medd. XII, 8.
27. Halpern, O. (1933) Phys. Rev. 44, 855.
28. Delbrück, M. (1933) Z. Phys. 84, 144.
29. Bloch, F. (1934) Phys. Z. Sowjet. 5, 301.
30. Peierls, R. (1934) Proc. Soc. A 146, 420.
31. Furry, W. H. and Oppenheimer, J. R. (1934) Phys. Rev. 45, 260.
32. Heisenberg, W. (1934) Z. Phys. 90, 209.
33. Dirac, P. A. M. (1934) Proc. Camb. phil. Soc. 30, 150.

34. Gordon W., Der Comptoneffekt nach der Schrodingerschen Theorie, Zeitschrift fur Physik, 40 (1927).
35. Klein O., Quantentheorie und funfdimensionale Relativitatstheorie, Zeitschrift fur Physik, 37 (1926).
36. Pauli, W., Naturwiss.1924, 12, 741.
37. Pauli, W., Phys. Rev. 1940, 58, 716.
38. Fermi, E. (1933) Ric. sci. 2, No. 12.
39. Tamm, Ig. and Iwanenko, D. (1934) Nature, Lond. 133, 981.
40. Yukawa, H.; Sakata, S. Nature 1939, 143, 761.
41. Tanikawa, Y.; Yukawa, H. Proc. Phys. Math. Soc. Jpn 1941, 23, 445.
42. Yukawa, H. Scientia (Milan) 1941, 70, 97.
43. Yukawa, H.; Kikuchi, C. Am. J. Phys. 1950, 18, 154.
44. Yukawa, H. Trans. NY Acad. Sci. 1951, 13, 192.
45. Heisenberg, W. (1939) Z. Phys. 113, 61.
46. Tomonaga, S. Physics Today 1966, 19(9), 25; 30
47. Tomonaga, S. Progress Theoret. Phys. (Japan) 1946, 1, 83; 109
48. Schwinger, J. Phys. Rev. 1948, 73, 416
49. Karplus, R.; Klein, A.; Schwinger, J. Phys. Rev. 1951, 84, 597
50. Karplus, R.; Klein, A.; Schwinger, J. Phys. Rev. 1952, 86, 288
51. Schwinger, J. Phys. Rev. 1967, 158, 1391
52. Schwinger, J. Phys. Rev. D 1973, 7, 1696
53. Schwinger, J. Proc. Natl. Acad. Sci. USA 1975, 72, 1559
54. Feynman, R.P. Phys. Rev. 1949, 76, 749
55. Feynman, R.P.; Speisman, G. Phys. Rev. 1954, 94, 500
56. Feynman, R.P. Symmetries in Elementary Particle Physics 1964, 400
57. Feynman, R.P. Proc. Conf. Phys. 12th U. Brussels 1961, 61; 92
58. Lamb, W.E.; Retherford, R.C. Phys. Rev. 1947, 72, 241
59. Lamb, W.E.; Retherford, R.C. Phys. Rev. 1950, 79, 549
60. Lamb, W.E.; Retherford, R.C. Phys. Rev. 1951, 81, 222
61. Lamb, W.E. Phys. Rev. 1952, 85, 259
62. Lamb, W.E.; Retherford, R.C. Phys. Rev. 1952, 85, 1014
63. Treibwasser, S.; Dayhoff, E.S.; Lamb, W.E. Phys. Rev. 1953, 89, 106
64. Lamb, W.E.; Sanders, T.M. Jr. Phys. Rev.1956, 103, 313
65. Lamb, W.E. Prix Nobel 1956, 89
66. Lamb, W.E. Trans. NY Acad. Sci. 1977, 38, 82
67. Wigner, E., Z. Physik 1927, 40, 883
68. Wigner, E., Z. Physik 1926, 40, 492

69. Wigner, E., Z. Physik 1927, 43, 624
70. Wigner, E., Nachr. Gels. Wissen. Gottingen Math. Physik. Klasse 1927, 375
71. Noether E. (1918). Invariante Variations probleme. Nachr. D. König. Gesellsch. D. Wiss. Zu Göttingen, Math-phys. Klasse 1918: 235–257.
72. Utiyama R., Phys. Rev. 101, 1597 (1956).
73. Schwinger J. Ann. Phys 2, 407 (1957).
74. Glashow S. Nucl. Phys. 22, 579 (1961).
75. Salam A., Ward J. Phys. Lett. 13, 168 (1964).
76. Weinberg S., Phys. Rev. 19, 1264 (1967).
77. Glashow S. Iliopoulos J., Miani L., Phys. Rev. 02, 1285 (1970)
78. Weinberg S., Phys. Rev. Lett. 27, 1688 (1971).
79. Hooft G., Nucl. Phys. B33, 173 (1971).
80. Prentki J., Zumino B., Nucl. Phys. B47, 99 (1972).
81. Yang C.N. Phys. Rev. Lett. 33 445, (1974).
82. Wu T.T., Yang C.N., Phys. Rev. D12, 3843-45 (1975).
83. O' Raifeartaigh L., Rep. Prog. Phys. 42, 159 (1979).
84. Bernstein J., Rev. Mod. Phys. 46, 7 (1974).
85. Weinberg S., Rev. Mod. Phys. 46, 225 (1974).
86. Bag M.A., Sirlin A., Ann. Rev. Nucl. Sci. 24, 3791 (1974).
87. Coleman S., Proc. 1973 Ettore Majorana School of Subnuclear Physics Academic Press (1975)
88. Miani L., Proc. 1976 CERN School of Physics CERN 76-20, Geneva (1976).
89. Iliopoulos J., Proc. 1977 CERN-JINR School of Physics CERN 77-18, Geneva (1977).
90. Barnet R.M. Implications of experiment on gauge theories, SLUC-PUB 1961, Stanford Linear Accelerator Center (1977).
91. Yang C.N., Mills R.L., Phys. Rev. 96, 191 (1954).
92. R. Brout, F. Englert (1998). "Spontaneous Symmetry Breaking in Gauge Theories: A Historical Survey.
93. Guralnik G.S. (2009). The History of the Guralnik, Hagen and Kibble development of the Theory of Spontaneous Symmetry Breaking and Gauge Particles. International Journal of Modern Physics A 24 (14): 2601–2627.
94. Kibble, T. Englert-Brout-Higgs-Guralnik-Hagen-Kibble mechanism. Scholarpedia 4: 6441–6410 (2009).
95. Goldstone, J; Salam, Abdus; Weinberg, Steven (1962). "Broken Symmetries". Physical Review 127 (3): 965–970.
96. Ellis, John; Gaillard, Mary K.; Nanopoulos, Dimitri V. (2012). "A Historical Profile of the Higgs Boson". arXiv:1201.6045.

97. J. Goldstone, Nuovo Cimento 19, 154, (1961).
98. Higgs P.W., Phys. Lett 12, 132 (1964).
99. Higgs P.W., Phys. Rev 12, 1145, 1156 (1964).
100. Englert F., Brout R, Phys. Rev. Lett 13, 321, (1964).
101. Guranlik G.S., Hagen C. R., Kibble T.W., Phys. Rev. Lett 13, 585 (1965).
102. Kibble T.W., Phys. Rev. Lett. 155, 1554 (1967).
103. Glashow, Sheldon L., Univ. Copenhagen, Nuclear Physics (1961), 23 579-88.
104. Glashow, Sheldon Lee. California Inst. of Technol., Pasadena, Physical Review Letters (1961), 6 196-7.
105. Ericson, Torleif; Glashow, S. L. Cern, Geneva, Switz. Physical Review (1964), 133(1B), 130-1.
106. Coleman, Sidney; Glashow, S. L., Harvard Univ., Physical Review (1964), 134(3B), 671-81.
107. Coleman, S.; Glashow, S. L.; Lee, B. W. Harvard Univ., Ann. Phys. (N.Y.) (1964), 30(2), 348-59.
108. Glashow, S. L., Univ. of California-Berkeley, Berkeley, CA, USA. Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi (1966), (33), 189-225.
109. Glashow, Sheldon L.; Schnitzer, Howard J.; Weinberg, Steven. Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Physical Review Letters (1967), 19(4), 205-8.
110. Glashow, Sheldon L.; Iliopoulos, J.; Maiani, L. Lyman Lab. of Phys., Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Physical Review D: Particles and Fields (1970), [3]2(7), 1285-92.
111. Glashow, S., Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Editor(s): Zichichi, Antonio. Subnucl. Phenomena, Int. Sch. Phys. "Ettore Majorana", 7th (1970), Meeting Date 1969, B 330-65. Publisher: Academic, New York, N. Y.
112. Georgi, Howard; Glashow, Sheldon L., Lyman Lab. Phys., Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Physical Review Letters (1972), 28(22), 1494-7.
113. Georgi, Howard; Glashow, S. L., Lyman Lab. Phys., Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Physical Review D: Particles and Fields (1973), 7(2), 561-3
114. Georgi, Howard; Glashow, Sheldon L., Lyman Lab. Phys., Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Physical Review D: Particles and Fields (1973), 7(8), 2457-63.
115. Georgi, H.; Glashow, S. L., Lyman Lab. Phys., Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Physics Letters B (1973), 44(2), 191-4.
116. De Rujula, A.; Glashow, S. L., Lyman Lab. Phys., Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Physics Letters B (1973), 46(3), 381-4.
117. Glashow, Sheldon L., Lyman Lab., Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Journal de Physique (Paris)(1971), 32(10)(Suppl.), 109-11.

118. De Rujula, A.; Glashow, S. L., Lyman Lab. Phys., Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Physics Letters B (1973), 46(3), 377-80
119. Georgi, Howard; Glashow, S. L., Lyman Lab. Phys., Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Physical Review Letters (1974), 32(8), 438-41
120. De Rujula, A.; Glashow, S. L., Lyman Lab. Phys., Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Physical Review D: Particles and Fields (1974), 9(1), 180-4.
121. De Rujula, A.; Georgi, Howard; Glashow, S. L., Lyman Lab. Phys., Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Physical Review Letters (1975), 35(2), 69-72
122. De Rujula, A.; Georgi, Howard; Glashow, S. L., Dep. Phys., Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Physical Review D: Particles and Fields (1975), 12(1), 147-62
123. De Rujula, A.; Georgi, Howard; Glashow, S. L., Lyman Lab. Phys., Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Physical Review D: Particles and Fields (1975), 12(11), 3589-605.
124. Glashow, Sheldon L.; Weinberg, Steven. Lyman Lab. Phys., Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Physical Review D: Particles and Fields (1977), 15(7), 1958-65
125. De Rujula, A.; Georgi, Howard; Glashow, S. L., Lyman Lab. Phys., Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Annals of Physics (San Diego, CA, United States) (1977), 109(1), 242-57.
126. De Rujula, A.; Georgi, Howard; Glashow, S. L., Lyman Lab. Phys., Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Annals of Physics (San Diego, CA, United States) (1977), 109(1), 258-313
127. De Rujula, A.; Georgi, Howard; Glashow, S. L.. Lyman Lab. Phys., Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Physical Review D: Particles and Fields (1978), 17(1), 151-3.
128. Glashow, Sheldon L., Lyman Lab. Phys., Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Annals of the New York Academy of Sciences (1977), 294 69-73.
129. Glashow, Sheldon L., Lyman Lab. Phys., Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Comments on Nuclear and Particle Physics (1978), 8(4), 105-9
130. Glashow, S. L., Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Editor(s): Cline, David B.; Mills, Frederick E. Unification Elem. Forces Gauge Theor., Pap. Ben Lee Meml. Int. Conf. Parity Nonconserv, Weak Neutral Curr. Gauge Theor. (1978), Meeting Date 1977, 623-8. Publisher: Harwood Acad. Publ. Ltd., London, England
131. Georgi, Howard; Glashow, S. L., Lyman Lab. Phys., Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Nuclear Physics B (1979), B 159(1-2), 29-36.
132. Ginsparg, Paul H.; Glashow, Sheldon L.; Wise, Mark B. Lyman Lab. Phys., Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Physical Review Letters (1983), 50(19), 1415-18.

133. Glashow, Sheldon Lee. Department of Physics, Boston University, Boston, MA, USA. Los Alamos National Laboratory, Preprint Archive, High Energy Physics--Phenomenology (2003), 1-7.
134. Matthews, P. T.; Salam, Abdus. Inst. for Advanced Study, Princeton, NJ, Physical Review (1952), 86 715-26.
135. Salam, Abdus. St. John's Coll., Cambridge, UK. Nuovo Cimento (1957), 5 299-301.
136. d'Espagnat, B.; Prentki, J.; Salam, Abdus. CERN, Geneva, Nuclear Physics (1958), 5 447-54.
137. Salam, Abdus. Imp. Coll. Sci. and Technol., London, Nuclear Physics (1960), 18 681-90.
138. Matthews, P. T.; Salam, Abdus. Imp. Coll., London, Nuovo Cimento (1964), 33(5), 1333-7.
139. Salam, Abdus; Strathdee, J. Int. Cent. Theor. Phys., Trieste, Italy. Nuovo Cimento della Societa Italiana di Fisica, A: Nuclei, Particles and Fields (1972), 11(2), 397-435.
140. Pati, Jogesh C.; Salam, Abdus. Dep. Phys. Astron., Univ. Maryland, College Park, MD, USA. Physical Review D: Particles and Fields (1974), 10(1), 275-89.
141. Dyson, Freeman F. Inst. Adv. Study, Princeton, NJ, USA. Editor(s): Salam, Abdus. Aspects Quantum Theory (1972), 213-36. Publisher: Cambridge Univ. Press, London, England
142. Mohapatra, Rabindra N.; Pati, Jogesh C.; Salam, Abdus. City Coll., City Univ. New York, New York, NY, USA. Physical Review D: Particles and Fields (1976), 13(6), 1733-43
143. Salam, Abdus. Int. Cent. Theor. Phys., Trieste, Italy. Proceedings of the Royal Society of London, Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences (1977), 355(1683), 515-38.
144. Salam, Abdus; Strathdee, J. Int. Cent. Theor. Phys., Trieste, Italy. Physical Review D: Particles and Fields(1977), 16(8), 2668-72.
145. Pati, Jogesh C.; Rajpoot, Subhash; Salam, Abdus. Imp. Coll., London, UK. Physical Review D: Particles and Fields (1978), 17(1), 131-50
146. Elias, Victor; Pati, Jogesh C.; Salam, Abdus. Cent. Theor. Phys., Univ. Maryland, College Park, MD, USA. Physics Letters B (1978), 73B(4-5), 451-6.
147. Chamseddine, Ali H.; Salam, Abdus; Strathdee, J. Int. Cent. Theor. Phys., Trieste, Italy. Nuclear Physics B 1978), B136(2), 248-58.
148. Salam, Abdus. Int. Cent. Theor. Phys., Trieste, Italy. Annals of the New York Academy of Sciences (1977), 294 12-36.
149. Salam, Abdus; Strathdee, J. Int. Cent. Theor. Phys., Trieste, Italy. Physical Review D: Particles and Fields (1978), 18(12), 4713-20

150. Pati, Jogesh C.; Salam, Abdus. Dep. Phys. Astron., Univ. Maryland, College Park, MD, USA. Nuclear Physics B (1979), B150 (1), 76-86.
151. Salam, Abdus. Int. Cent. Theor. Phys., Trieste, Italy. Editor(s): Auluck, F. C.; Kothari, L. S.; Nanda, V. S. Proc. Int. Conf. Winter Sch. Front. Theor. Phys. (1978), Meeting Date 1977, 29-35. Publisher: Macmillan Co. India Ltd., New Delhi, India
152. Salam, Abdus. Int. Cent. Theor. Phys., Trieste, Italy. Physica Scripta (1979), 20(2), 216-26.
153. Pati, Jogesh C.; Salam, Abdus; Strathdee, J. Dep. Phys., Univ. Maryland, College Park, MD, USA. Physics Letters B (1982), 108B(2), 121-6.
154. Weinberg, Steven. Columbia Univ., Physical Review (1958), 112 1375-9.
155. Weinberg, Steven. Columbia Univ., Physical Review (1959), 115 481-4.
156. Weinberg, S.; Treiman, S. B. Columbia Univ., Physical Review (1959), 116 465-8
157. Feinberg, G.; Weinberg, S., Columbia Univ., Physical Review (1961), 123 1439-43.
158. Weinberg, Steven. Univ. of California, Berkeley, Physical Review (1965), 137(3B), 672-8.
159. Weinberg, Steven. Univ. of California, Berkeley, Physical Review (1965), 140(2B), 516-24.
160. Glashow, Sheldon L.; Schnitzer, Howard J.; Weinberg, Steven. Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Physical Review Letters (1967), 19(4), 205-8.
161. Weinberg, Steven. Dep. Phys., Massachusetts Inst. Technol., Cambridge, MA, USA. Physical Review Letters (1971), 27(24), 1688-91.
162. Weinberg, Steven. Dep. Phys., Massachusetts Inst. Technol., Cambridge, MA, USA. Physical Review D: Particles and Fields (1972), [3]5(6), 1412-17.
163. Weinberg, Steven. Lab. Nucl. Sci., Massachusetts Inst. Technol., Cambridge, MA, USA. Physical Review D: Particles and Fields (1972), [3]5(8), 1962-7
164. Jackiw, Roman; Weinberg, Steven. Lab. Nucl. Sci., Massachusetts Inst. Technol., Cambridge, MA, USA. Physical Review D: Particles and Fields (1972), 5(9), 2396-8
165. Weinberg, Steven. Lab. Nucl. Sci., Massachusetts Inst. Technol., Cambridge, MA, USA. Physical Review Letters (1972), 29(6), 388-92.
166. Weinberg, Steven. Dep. Phys., Massachusetts Inst. Technol., Cambridge, MA, USA. Physical Review D: Particles and Fields (1973), 8(2), 605-25
167. Weinberg, Steven. Lyman Lab. Phys., Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Physical Review D: Particles and Fields (1973), 8(12), 4482-98
168. Weinberg, S., Dep. Phys., Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Journal de Physique, Colloque (1973), (1), 45-67.
169. Weinberg, Steven. Lyman Lab. Phys., Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Reviews of Modern Physics (1974), 46(2), 255-77

170. Georgi, H.; Quinn, H. R.; Weinberg, S. Lyman Lab. Phys., Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Physical Review Letters (1974), 33(7), 451-4.
171. Weinberg, Steven. Dep. Phys., Massachusetts Inst. Technol., Cambridge, MA, USA. Editor(s): Iverson, Geoffrey. Fundam. Interact. Phys. Astrophys., Lect. Coral Gables Conf. Fundam. Interact. High Energy, 9th (1973), Meeting Date 1972, 157-86. Publisher: Plenum, New York, N. Y.
172. Weinberg, Steven. Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Physics Today (1975), 28(6), 32-7.
173. Weinberg, Steven. Lyman Lab. Phys., Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Physical Review D: Particles and Fields (1976), 13(4), 974-96.
174. Gildener, Eldad; Weinberg, Steven. Lyman Lab. Phys., Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Physical Review D: Particles and Fields (1976), 13(12), 3333-41
175. Weinberg, Steven. Cent. Astrophys., Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Annals of the New York Academy of Sciences (1975), 262 (Tex. Symp. Relativ. Astrophys., 7th, 1974), 409-21.
176. Weinberg, Steven. Phys. Dep., Stanford Univ., Stanford, CA, USA. Physics Today (1977), 30(4), 42-3, 46-50
177. Glashow, Sheldon L.; Weinberg, Steven. Lyman Lab. Phys., Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Physical Review D: Particles and Fields (1977), 15(7), 1958-65
178. Lee, Benjamin W.; Weinberg, Steven. Fermi Natl. Accel. Lab., Batavia, IL, USA. Physical Review Letters (1977), 38(22), 1237-40.
179. Weinberg, Steven. Lyman Lab. Phys., Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Editor(s): Gutbrod, F. Proc. - Int. Symp. Lepton Photon Interact. High Energ., 8th (1977), 619-40. Publisher: DESY, Hamburg, Germany
180. Weinberg, S., Lyman Lab. Phys., Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Proceedings of the International Conference on High Energy Physics (1979), Volume Date 1978, 19 907-18.
181. Weinberg, Steven. Lyman Lab. Phys., Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Reviews of Modern Physics (1980), 52(3), 515-23.
182. Weinberg, Steven. Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Editor(s): Neeman, Yuval. To Fulfill Vision, Jerusalem Einstein Centen. Symp. Gauge Theor. Unification Phys. Forces (1981), Meeting Date 1979, 200-18. Publisher: Addison-Wesley, Reading, Mass.
183. Weinberg, Steven. Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Fiziko-Matematichesko Spisanie (1981), Volume Date 1980, 23(2), 111-17.
184. Hooft, Gerard. Inst. Theor. Fys., Utrecht, Neth. Natuur & Techniek (Utrecht) (1988), 56(3), 220-33.

185. Hooft, G. Inst. Theor. Phys., Univ. Utrecht, Utrecht, Neth. Nuclear Physics B (1978), B138(1), 1-25.
186. Hooft, G. Inst. Theor. Phys., Utrecht, Neth. NATO Advanced Study Institutes Series, Series B: Physics (1980), 59(Recent Dev. Gauge Theor.), 117-33.
187. Hooft, G. Inst. Theor. Phys., Univ. Utrecht, Utrecht, Neth. Editor(s): Zichichi, Antonino. Whys Subnucl. Phys., [Proc. Int. Sch. Subnucl. Phys.] (1979), Meeting Date 1977, 943-82. Publisher: Plenum, New York, N. Y
188. Schuurmans, M. F. H.; Hooft, G. W.. Philips Res. Lab., Eindhoven, Neth. Physical Review B: Condensed Matter and Materials Physics (1985), 31(12), 8041-8.
189. Hooft, Gerard. Inst. Theor. Phys., Utrecht, Neth. Nuclear Physics B (1985), B256(4), 727-45.
190. Dawson, P.; Duggan, G.; Ralph, H. I.; Woodbridge, K.; 't Hooft, G. W.. Philips Res. Lab., Redhill/Surrey, UK. Superlattices and Microstructures (1985), 1(3), 231-5.
191. Hooft, G. W.; Leys, M. R.; Talen-Van der Mheen, H. J. Philips Res. Lab., Eindhoven, Neth. Superlattices and Microstructures (1985), 1(4), 307-10.
192. Hooft, G. Inst. Theor. Phys., Utrecht, Neth. CERN [Rep.] (1987), (CERN 87-02, Proc. - CERN Sch. Phys.,1986), 296-7.
193. Leys, M. R.; Viegers, M. P. A.; 't Hooft, G. W.. Philips Res. Lab., Eindhoven, Neth. Philips Technical Review (1987), 43(5-6), 133-42.
194. Molenkamp, L. W.; Eppenga, R.; 't Hooft, G. W.; Dawson, P.; Foxon, C. T.; Moore, K. J. Philips Res. Lab., Eindhoven, Neth. Physical Review B: Condensed Matter and Materials Physics (1988), 38(6), 4314-17.
195. Hooft, G. Inst.Theor. Phys., Utrecht, Neth. NATO ASI Series, Series B: Physics (1987), 156 (Gravitation Astrophys.), 383-95.
196. Thijs, P. J. A.; Montie, E. A.; Van Kesteren, H. W.; 't Hooft, G. W.. Philips Res. Lab., Eindhoven, Neth. Applied Physics Letters (1988), 53(11), 971-3.
197. Molenkamp, L. W.; Bauer, G. E. W.; Eppenga, R.; 't Hooft, G. W.; Foxon, C. T. Philips Res. Lab., Eindhoven, Neth. Superlattices and Microstructures (1989), 5(3), 355-8.
198. Dawson, P.; Moore, K. J.; Foxon, C. T.; 't Hooft, G. W.; Van Hal, R. P. M. Philips Res. Lab., Redhill/Surrey, UK. Journal of Applied Physics (1989), 65(9), 3606-9.
199. Hooft, G. Inst. Theor. Phys., Utrecht, Neth. Physica Scripta, T (1991), T36 (Birth Early Evol. Our Universe),247-52
200. Krijn, M. P. C. M.; 't Hooft, G. W.; Boermans, M. J. B.; Thijs, P. J. A.; Van Dongen, T.; Binsma, J. J. M.; Tiemeijer, L. F.; Van der Poel, C. J. Philips Res. Lab., Eindhoven, Neth. Applied Physics Letters (1992), 61(15), 1772-4.
201. Hooft, G., Institute for Theoretical Physics, University of Utrecht, Utrecht, Neth. Editor(s): Fujikawa, K.; Ono, Y. A. Quantum Coherence and Decoherence:

Foundations of Quantum Mechanics in the Light of New Technology, Proceedings of the International Symposium on Foundations of Quantum Mechanics in the Light of New Technology, 5th, Hatoyama, Japan, Aug. 21-24, 1995 (1996), Meeting Date 1995, 273-280. Publisher: Elsevier, Amsterdam, Neth.

202. Hooft, G. Stanford Linear Accel. Cent., Stanford, CA, USA. Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde, A (1977), A43(1), 19-21.
203. Hooft, G. Inst. Theor. Phys., Univ. Utrecht, Utrecht, Neth. Editor(s): Zichichi, Antonino. New Phenom. Subnucl. Phys., [Int. Sch. Subnucl. Phys.] (1977), Meeting Date 1975, A 261-95. Publisher: Plenum, New York, N.
204. Hooft, G. Phys. Lab., Harvard Univ., Cambridge, MA, USA. Physical Review D: Particles and Fields (1976), 14(12), 3432-50
205. Koehler, W. E.;Hooft, G. W. Inst. Theor. Phys., Univ. Erlangen-Nuernberg, Erlangen, Fed. Rep. Ger. Zeitschrift fuer Naturforschung, Teil A: Astrophysik, Physik und Physikalische Chemie (1979), 34A(11), 1255-68.
206. Hooft, Gerard. Inst. Theor. Phys., Utrecht, Neth. Physics Letters B (1982), 109B (6), 474-6.
207. Hooft, G. Inst. Theor. Phys., Utrecht, Neth. Physics Reports (1986), 142(6), 357-87.
208. Hooft, G. Inst. Theor. Phys., Utrecht, Neth. CERN [Rep.] (1987), (CERN 87-02, Proc. - CERN Sch. Phys.,1986), 296-7.
209. Hooft, G. Inst. Theor. Phys., Utrecht, Neth. Physics Letters B (1987), 198(1), 61-3.
210. Hooft, G. Inst. Theor. Phys., Utrecht, Neth. Acta Physica Polonica, B (1988), B19 (3), 187-202.
211. Hooft, G. Inst.Theor. Phys., Utrecht, Neth. NATO ASI Series, Series B: Physics (1988), 185 (Nonperturbative Quantum Field Theory), 201-26.
212. Veltman, M. Department of Physics, University of Michigan, Ann Arbor, MI, USA. Acta Physica Polonica, B (1998), 29(3), 783-798.
213. Veltman, M. Neth. Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde, A (1990), A56(3), 1-6.
214. Passarino, G.; Veltman, M.. Inst. Theor. Phys., Univ. Utrecht, Utrecht, Neth. Nuclear Physics B (1979), B160(1), 151-207.
215. Lee, T. D. Columbia Univ., New York, NY, USA. Editor(s): Tenner, A. G.; Veltman, M. J. G. Proc. Amsterdam Int. Conf. Elem. Part. (1972), Meeting Date 1971, 399-406. Publisher: North-Holland, Amsterdam, Neth.
216. Bell, J. S.; Veltman, M. CERN, Geneva, Switz. Physics Letters (1963), 5(1), 94-6
217. Prentki, J.; Veltman, M. CERN, Geneva, Switz. Physics Letters (1965), 15(1), 86-90.
218. Cabibbo, N.; Veltman, M. CERN, Geneva, Switz. CERN, European Organ. Nucl. Res. (1965), CERN 65-30 83 pp.

219. Veltman, M. CERN, Geneva, Switz. Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi (1966), No. 32 187-205.
220. Veltman, M. Univ. Utrecht, Utrecht, Neth. Proceedings of the Royal Society of London, Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences (1967), 301(1465), 107-12.
221. Winter, K. CERN, Geneva, Switz. Editor(s): Tenner, A. G.; Veltman, M. J. G. Proc. Amsterdam Int. Conf. Elem. Part. (1972), Meeting Date 1971, 333-71. Publisher: North-Holland, Amsterdam, Neth.
222. Lee, T. D. Columbia Univ., New York, NY, USA. Editor(s): Tenner, A. G.; Veltman, M. J. G. Proc. Amsterdam Int. Conf. Elem. Part. (1972), Meeting Date 1971, 399-406. Publisher: North-Holland, Amsterdam, Neth.
223. Ross, D. A.; Veltman, M. Inst. Theor. Phys., Univ. Utrecht, Utrecht, Neth. Nuclear Physics B (1975), B95(1), 135-47.
224. Veltman, Martin. Univ. Utrecht, Utrecht, Neth. Recherche (1976), 7(69), 617-27.
225. Veltman, M. Inst. Theor. Phys., Univ. Utrecht, Utrecht, Neth. Acta Physica Polonica, B (1977), B8(6), 475-92.
226. Passarino, G.; Veltman, M. Inst. Theor. Phys., Univ. Utrecht, Utrecht, Neth. Nuclear Physics B (1979),B160(1), 151-207
227. Veltman, M. LAPP, Annecy, Fr. Physics Letters B (1980), 91B(1), 95-8.
228. Green, M.; Veltman, M. Inst. Theor. Phys., Univ. Utrecht, Utrecht, Neth. Nuclear Physics B (1980), B169(1-2), 137-64.
229. Veltman, M. Lab. Phys. Particules, Univ. Grenoble, Annecy, Fr. Avail. INIS. Report (1980), (LAPP-TH-12), 6 pp. From: INIS Atom index 1980, 11(16), Abstr. No. 542848.
230. Veltman, M. Inst. Theor. Phys., Univ. Utrecht, Utrecht, Neth. NATO Advanced Study Institutes Series, Series B: Physics (1980), B61(Quarks Leptons), 1-27.
231. Veltman, Martin J. USA. SLAC Rep. (1981), (SLAC-239, Proc. Summer Inst. Part. Phys.), 1-28.
232. Veltman, M. Phys. Dep., Univ. Michigan, Ann Arbor, MI, USA. Editor(s): Williams, David N. TASI Lect. Elem. Part. Phys. (1984), 86-111. Publisher: TASI Publ., Ann Arbor, Mich.
233. Passarino, G.; Veltman, M. Dip. Fis. Teor., Univ. Torino, Turin, Indonesia. Physics Letters B (1990), 237(3-4), 537-44.
234. Veltman, Martinus J. G.; MacArthur, Emeritus. University of Michigan, Ann Arbor, MI, USA. International Journal of Modern Physics A (2000), 15(29), 4557-4573.
235. Veltman, Martinus J. G. University of Michigan, Ann Arbor, MI, USA. Prix Nobel (2000), Volume Date 1999, 85-101.

236. J.D. Bjorken, S.D. Drell, Relativistic quantum mechanics, Mc Graw Hill, New York (1964).
237. J.D. Bjorken, S.D. Drell, Relativistic quantum fields Mc Graw Hill, New York (1965).
238. Schrödinger, E., Ann. Physik 1926, 79, 361
239. Schrödinger, E., Ann. Physik 1926, 79 489
240. Schrödinger, E., Ann. Physik 1926, 80, 437
241. Schrödinger, E., Ann. Physik 1926, 81, 109
242. Tong D, Lectures on Quantum Field Theory, Lecture 1, Section 1.1.1.
243. Tommy Ohlsson (2011). Relativistic Quantum Physics: From Advanced Quantum Mechanics to Introductory Quantum Field Theory, Cambridge University Press.p. 86.
244. Weyl, H. (1927). "Quantenmechanik und Gruppentheorie". Zeitschrift für Physik 46: 1–46
245. Dirac, P.A.M. (1958 (reprinted in 2011)). Principles of Quantum Mechanics (4th ed.), Clarendon. p. 255.
246. Dirac, P.A.M. (1925). The Fundamental Equations of Quantum Mechanics. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 109 (752): 642.
247. Dirac, P. A. M. (1930). A Theory of Electrons and Protons. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 126 (801): 360.
248. Dirac, Paul (12 December 1933). Theory of electrons and positrons. Nobel Lecture. Retrieved 13 May 2013.
249. Rarita W., Schwinger J., On a Theory of Particles with Half-Integral Spin Phys. Rev. 60, 61 (1941).
250. Stueckelberg, E. C. G. (1938) Helv. Phys. Acta 11, 299.
251. Stueckelberg, E. C. G. (1938a) Phys. Rev. 54, 889.
252. van der Waerden, B.L. (1968). Sources of quantum mechanics. New York: Dover Publications.
253. Schweber, S.S. (1983). QED and the men who made it. Princeton: Princenton University press.
254. Dirac, P. A. M. (1982). Principles of Quantum Mechanics. USA: Oxford University Press.
255. R.P. Feynman, Quantum Electrodynamics, W.A. Benjamin, New York (1962).
256. Shewell J. R., On the Formation of Quantum-Mechanical Operators. Am. J. Phys., 27 (1959)
257. S. T. Ali, M. Engliš, "Quantization Methods: A Guide for Physicists and Analysts." Rev. Math. Phys., 17 (2005) pp. 391-490.

258. Courant, R., Hilbert, D., 1953, Methods of Mathematical Physics: Vol I, Interscience Publishers, New York.
259. Fox, C. (1987), An introduction to the calculus of variations. Courier Dover Publications.
260. Weinstock, R., (1952), Calculus of Variations with Applications to Physics and Engineering, McGraw-Hill Book Company, New York.
261. Thompson, W.J. (1994). Angular Momentum: an illustrated guide to rotational symmetries for physical systems 1. Wiley. p.5.
262. Lanczos, C. (1970), The Variational Principles of Mechanics, New York: Dover Publications. pp. 401-405.
263. Seligman, Group theory and its applications in physics, 1980: Latin American School of Physics, Mexico City, American Institute of Physics, 1981
264. Nina Byers (1998) "E. Noether's Discovery of the Deep Connection between Symmetries and Conservation Laws." in Proceedings of a Symposium on the Heritage of Emmy Noether, held on 2–4 December 1996, at the Bar-Ilan University, Israel, Appendix B.
265. Michael E, Peskin, Daniel V. Schroeder (1995). An Introduction to Quantum Field Theory. Basic Books. p. 18
266. Itzykson, C.; Zuber, J.-B. (1980). Quantum Field Theory. McGraw-Hill.
267. Bogoliubov, N.; Shirkov, D. (1982). Quantum Fields. Benjamin-Cummings.
268. Mandl, F.; Shaw, G. (1993). Quantum Field Theory.
269. Peskin, M.; Schroeder, D. (1995). An Introduction to Quantum Field Theory. Westview Press.
270. Kane, G.L. (1987). Modern Elementary Particle Physics.
271. Wigner E.P., On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group, Ann. Math. 40, 149 (1939).
272. R.M.F. Houtappel, H. van Dam, E.P. Wigner, the conceptual basis and use of the geometric invariance principles, Rev. Mod. Phys. 37, 595 (1965).
273. E.P. Wigner, Symmetry and conservation laws, Proc Nat. Acad. Sci. (U.S.) 51, 956 (1964).
274. Wigner E.P., Symmetries and reflections, Indiana University Press, Bloomington (1967).
275. F. J. Dyson, Symmetry groups in nuclear and particle physics, W.A. Benjamin, New York (1966).
276. J. J. Sakurai, Invariance principles and elementary particle physics, Princeton University Press (1964).

277. Y. Takahashi, An introduction to field quantization, Pergamon Press London (1969) and literature quoted here.
278. Utiyama R., Phys. Rev. 101, 1597 (1956).
279. Schwinger J. Ann. Phys 2, 407 (1957).
280. Glashow S. Nucl. Phys. 22, 579 (1961).
281. Salam A., Ward J. Phys. Lett. 13, 168 (1964).
282. Weinberg S., Phys. Rev. 19, 1264 (1967).
283. Glashow S. Iliopoulos J., Miani L., Phys. Rev. 02, 1285 (1970)
284. Weinberg S., Phys. Rev. Lett. 27, 1688 (1971).
285. Hooft G., Nucl. Phys. B33, 173 (1971).
286. Prentki J., Zumino B., Nucl. Phys. B47, 99 (1972).
287. Yang C.N. Phys. Rev. Lett. 33 445, (1974).
288. Wu T.T., Yang C.N., Phys. Rev. D12, 3843-45 (1975).
289. O' Raifeartaigh L., Rep. Prog. Phys. 42, 159 (1979).
290. Bernstein J., Rev. Mod. Phys. 46, 7 (1974).
291. Weinberg S., Rev. Mod. Phys. 46, 225 (1974).
292. Bag M.A., Sirlin A., Ann. Rev. Nucl. Sci. 24, 3791 (1974).
293. Coleman S., Proc. 1973 Ettore Majorana School of Subnuclear Physics Academic Press (1975)
294. Miani L., Proc. 1976 CERN School of Physics CERN 76-20, Geneva (1976).
295. Iliopoulos J., Proc. 1977 CERN-JINR School of Physics CERN 77-18, Geneva (1977).
296. Barnet R.M. Implications of experiment on gauge theories, SLUC-PUB 1961, Stanford Linear Accelerator Center (1977).
297. Yang C.N., Mills R.L., Phys. Rev. 96, 191 (1954).
298. J. Goldstone, Nuovo Cimento 19, 154, (1961).
299. Higgs P.W., Phys. Lett 12, 132 (1964).
300. Higgs P.W., Phys. Rev 12, 1145, 1156 (1964).
301. Englert F., Brout R, Phys. Rev. Lett 13, 321, (1964).
302. Guranlik G.S., Hagen C. R., Kibble T.W., Phys. Rev. Lett 13, 585 (1965).
303. Kibble T.W., Phys. Rev. Lett. 155, 1554 (1967).
304. Ellis, John; Gaillard, Mary K.; Nanopoulos, Dimitri V. (2012). "A Historical Profile of the Higgs Boson". arXiv:1201.6045.
305. Goldstone, J; Salam, Abdus; Weinberg, Steven (1962). "Broken Symmetries". Physical Review 127 (3): 965–970.
306. R. Brout, F. Englert (1998). "Spontaneous Symmetry Breaking in Gauge Theories: A Historical Survey.

307. Guralnik G.S. (2009). The History of the Guralnik, Hagen and Kibble development of the Theory of Spontaneous Symmetry Breaking and Gauge Particles. International Journal of Modern Physics A 24 (14): 2601–2627.
308. Kibble, T. Englert-Brout-Higgs-Guralnik-Hagen-Kibble mechanism. Scholarpedia 4: 6441–6410 (2009).
309. Cline, D.; Mann, A.K.; Rubbia, C. Phys. Rev. Lett. 1970, 25, 1309
310. Cline, D.; Rubbia, C. Physics Today 1980, 33(8), 50
311. Cline, D.; Rubbia, C.; van der Meer, S. Sci. Amer. 1982, 246(3), 48

Βιβλιογραφία

1. Α. Αρβανιτογεώργος, *Ομάδες Lie, Ομογενείς χώροι και Διαφορική Γεωμετρία* (1999).
2. Κ. Βαγιονάκης, *Σωματιδιακή και Κοσμολογική Φυσική*, Εκδόσεις Παν/μίου Ιωαννίνων (2003).
3. Κ. Βαγιονάκης, *Σωματιδιακή Φυσική, Μια εισαγωγή στη βασική δομή της ύλης,* Εκδόσεις Παν/μίου Ιωαννίνων (2003).
4. Δ. Βέργαδος, *Θεωρία Ομάδων, Β Μέρος: Συνεχείς ομάδες και άλγεβρες Lie-Εφαρμογές* (1991)
5. Δ. Βέργαδος, *Μαθηματικές Μέθοδοι Φυσικής ΙΙΙ, Θεωρία Ομάδων*. Εκδόσεις Συμεών.
6. Δ. Νταής, Ομάδες και συμμετρία, Leader Books, Αθήνα (2002).
7. Γ. Ζουπάνος, *Σημειώσεις Στοιχειώδη Σωματίδια ΙΙ.*
8. Γ. Ζουπάνος, *Σημειώσεις Σχετικιστικής Κβαντομηχανικής.*
9. Γ. Κομίνης, *Σημειώσεις Κβαντομηχανικής ΙΙ,* Τμήμα Φυσικής Πανεπιστήμιο Κρήτης (2005)
10. Δ. Σουρλάς, *Θεωρία Ομάδων και Θεωρία Τελεστών*, Πάτρα (2008).
11. Σ. Τραχανάς, *Σχετικιστική Κβαντομηχανική, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης* (2009).
12. Σ. Τραχανάς, *Σχετικιστική Κβαντομηχανική, Μια στοιχειώδης εισαγωγή στη μεγάλη σύνθεση Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης* (2000).
13. Σ. Τραχανάς, *Κβαντομηχανική ΙΙΙ, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης* (2009).
14. N. Byers, *The Life and Times of Emmy Noether* (1994.)
15. N Chaichian, N. F. Nelipa, *Introduction to Gauge Field Theories*. Springer-Verlag, 1984.
16. R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras and some of their applications*, Drexel University, Dover Publications (2002).
17. W. Greiner, J. Reinhardt, *Quantum Electrodynamics*, Springer (2003).
18. W. Greiner, J. Reinhardt. *Field Quantization*. Springer (1996)
19. F. Halzen, A. D. Martin, Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics, John Wiley & Sons (1984).

20. M. Kaku, *Quantum field theory*, N.Y (1993).
21. L. Landau, E. Lifshitz, *The classical theory of fields* (1975).
22. J. Leite Lopes, *Gauge field theories: an introduction*, Pergamon Press (1983).
23. M. Peskin, D. V. Schroender. *An Intoduction to Quantum Field theory*. The Perseus Books Group (2008).
24. V. Rubakov, *Classical Theory of Gauge Fields*. Princeton University Press, 2002.
25. Lewis H. Ryder, *Quantum field theory*, Cambridge University Press (1996).
26. A.Sagle, R.E.Walde, *Introduction to Lie groups and Lie algebras*, Academic Press, London (1973).
27. B. Thaller, *The Dirac Equation*, Springer-Verlag (2010).
28. J.J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, Addison Wesley Longman (1999).
29. D. Tong, *Quantum Field Theory*, University of Cambridge Part III Mathematical Tripos (2006).
30. S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields Vol II*, UK (1996).

Internet

1. http://www.physics4u.gr/
2. http://el.wikipedia.org/