## 1.1 Βασικές διακριτές κατανομές

### Κατανομή Bernoulli

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = P(X = x) = p^x\,(1-p)^{1-x}\,, \quad x = 0, 1$$

$$\mu = E(X) = p\,, \qquad \sigma^2 = V(X) = p\,(1-p)$$

Συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0\,, & -\infty < x < 0 \\ 1-p\,, & 0 \le x < 1 \\ 1\,, & 1 \le x < \infty \end{cases}$$

### Διωνυμική Κατανομή

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x\,(1-p)^{n-x}\,, \quad x = 0, 1, \ldots n$$

$$\mu = E(X) = n\,p\,, \qquad \sigma^2 = V(X) = n\,p\,(1-p)$$

Συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \begin{cases} 0\,, & -\infty < x < 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{[x]} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\,, & 0 \le x < n \\ 1\,, & n \le x < \infty \end{cases}$$

### Υπεργεωμετρική Κατανομή

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{\dbinom{\ell}{x}\dbinom{m}{n-x}}{\dbinom{\ell+m}{n}}\,, \qquad x = 0, 1, \ldots n$$

$$\mu = E(X) = \frac{n\ell}{\ell+m}\,, \qquad \sigma^2 = V(X) = \frac{n\ell}{\ell+m}\,\frac{m}{\ell+m}\,\frac{\ell+m-n}{\ell+m-1}$$

### Κατανομή Poisson

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^x}{x!}\,, \quad \lambda > 0\,, \quad x = 0, 1, \ldots n$$

$$\mu = E(X) = \lambda\,, \qquad \sigma^2 = V(X) = \lambda$$

Ανέλιξη (διαδικασία) Poisson

$$P(X_t = x) = e^{-\theta\,t}\,\frac{(\theta\,t)^x}{x!}\,, \quad t\,, \theta > 0\,, \quad x = 0, 1, \ldots n$$

## 1.2 Βασικές συνεχείς κατανομές

### Ομοιόμορφη Κατανομή

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & -\infty < x < a \\ \dfrac{1}{b-a}\,, & a \le x \le b \\ 1\,, & b < x < \infty \end{cases}$$

$$\mu = E(X) = \frac{a+b}{2}\,, \qquad \sigma^2 = V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \begin{cases} 0\,, & -\infty < x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}\,, & a \le x \le b \\ 1\,, & b < x < \infty \end{cases}$$

### Εκθετική Κατανομή

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & -\infty < x < 0 \\ \theta\,e^{-\theta\,x}\,, & 0 \le x < \infty \end{cases}$$

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\theta}\,, \qquad \sigma^2 = V(X) = \frac{1}{\theta^2}$$

Συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \begin{cases} 0\,, & -\infty < x < 0 \\ 1 - e^{-\theta\,x}\,, & 0 \le x < \infty \end{cases}$$

### Κανονική Κατανομή (Κατανομή Gauss)

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \qquad -\infty < x < \infty$$
$$E(X) = \mu\,, \qquad V(X) = \sigma^2$$

Συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} \mathrm{d}t\,, \qquad -\infty < x < \infty$$

### Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{z^2}{2}}, \qquad -\infty < z < \infty$$
$$E(X) = 0\,, \qquad V(X) = 1$$

Συνάρτηση κατανομής

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t\,, \qquad -\infty < z < \infty$$

## 1.3 Κεντρικό Οριακό Θεώρημα και κανονικές προσεγγίσεις

**Θεώρημα 1.** *Έστω $X_1, X_2, \ldots X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές οι οποίες ακολουθούν την ίδια κατανομή (διακριτή ή συνεχή) με μέση τιμή $\mu$, και διασπορά $\sigma^2$. Θέτουμε $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Τότε*

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{S_n - n\,\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right) = \Phi(x)\,, \qquad -\infty < x < \infty\,.$$

### Συνεχείς κανονικές προσεγγίσεις

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{S_n}(x) = P(S_n = x) \approxeq \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\, \varphi\left(\frac{x - n\,\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$
$$-\infty < x < \infty$$

Συνάρτηση κατανομής

$$F_{S_n}(x) = P(S_n \le x) \approxeq \Phi\left(\frac{x - n\,\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$
$$-\infty < x < \infty$$

Τοπικό Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

### Διακριτές κανονικές προσεγγίσεις

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{S_n}(x) = P(S_n = x) \approxeq \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\, \varphi\left(\frac{x - n\,\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$
$$x \quad \text{ακέραιος}$$

Υποθέσεις:
- Αν $x$ είναι πιθανή τιμή της $X_1$, τότε ο $x$ είναι ακέραιος
- Αν $a$ είναι πιθανή τιμή της $X_1$, τότε ο ΜΚΔ του συνόλου

$$\{x - a \quad : x \text{ πιθανή τιμή της } X_1\} \quad \text{είναι } 1.$$

• Εναλλακτικός τρόπος προσέγγισης της $f_{S_n}(x)$ στο διάστημα $[x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}]$, με $x$ ακέραιο:

$$\begin{aligned} f_{S_n}(x) &= P(x - \frac{1}{2} \le S_n \le x + \frac{1}{2}) \\ &= \Phi\left(\frac{x + 1/2 - n\,\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{x - 1/2 - n\,\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

Συνάρτηση κατανομής

$$F_{S_n}(x) = P(S_n \le x) \approxeq \Phi\left(\frac{x - n\,\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$
$$x \quad \text{ακέραιος}$$

• Συνάρτηση κατανομής εναλλακτικής προσέγγισης της $f_{S_n}(x)$ στο διάστημα $[x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}]$:

$$F_{S_n}(x) = P(S_n \le x) \approxeq \Phi\left(\frac{x + \frac{1}{2} - n\,\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$
$$x \quad \text{ακέραιος}$$

### Εφαρμογή του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος στην Δειγματοληψία

Ο (ασθενής) νόμος των μεγάλων αριθμών λέει ότι για πολύ μεγάλο $n$, τότε η δειγματική μέση τιμή $\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ θα πρέπει να είναι πολύ κοντά στην μέση τιμή $\mu$. Αλλά πόσο ακριβής είναι αυτή η προσέγγιση; Στο ερώτημα αυτό η κανονική προσέγγιση δίνει μια εκτίμηση. Για $c > 0$, ισχύει ότι

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \ge c\right) \approxeq 2\left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\,c}{\sigma}\right)\right).$$